国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书 7

微分几何入门与广义相对论

(上册·第二版)

梁灿彬　周　彬

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书(上册)共10章。前5章讲授微分几何入门知识，第6章以此为工具剖析狭义相对论，第7~10章介绍广义相对论的基本内容。本书强调低起点(大学物理系本科2~3年级水平)，力求化难为易，深入浅出，为降低难度采取了多种措施。

本书适用于物理系高年级本科生、研究生和物理工作者，特别是相对论研究者。不关心相对论而想学习近代微分几何的读者也可把本书前5章作为入门阶梯。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 上册/梁灿彬，周彬. 2版. —北京：科学出版社，2006
(现代物理基础丛书；7)
ISBN 7-03-016460-1

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何—研究生—教材 ②广义相对论—研究生—教材 IV. ①0186.1 ②0412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第133232号

责任编辑：胡 凯/责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年4月北京师范大学出版社第一版
2006年1月第 二 版 开本：B5 (720 × 1000)
2006年1月第一次印刷 印张：28 3/4
印数：1—3 000 字数：541 000
定价：59.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代物理基础丛书》编委会

主　编　杨国桢

副主编　阎守胜　聂玉昕

编　委　(按姓氏笔画排序)

王　牧　王鼎盛　朱邦芬　刘寄星

邹振隆　宋菲君　张元仲　张守著

张海澜　张焕乔　张维岩　侯建国

侯晓远　夏建白　黄　涛　解思深

第二版前言

本书第一版(上册)自2000年出版以来，逐渐受到国内理论物理(特别是广义相对论)学界的关注、重视和好评，加之印数不大，两年后便已售罄. 出书后，我持续不断地以本书为教材给博、硕士研究生和本科生开课，至今已经五遍. 其中，除了在北京师范大学之外，还应邀给清华大学基础科学班(本科生)以及中国科学院数学与系统科学研究院的博、硕士研究生开课. 中科院的课还吸引了中科院的其他院所以及11所高等学校(含北京大学和清华大学)的数十名研究生和本科生旁听. 在看到本书对于推广这一学科起到重要作用的同时，我也发现了书中的少数错误、许多不足以及大量有待改进和补充之处，逐渐写成了一个面目一新的再版初稿. 这一再版初稿吸收了我的许多同行和学生的宝贵意见和建议，他们主要是(以姓氏汉语拼音为序)：曹周键、韩慕辛、邝志全、马永革、王志、吴小宁、杨学军、张昊、张红宝、周彬、周美珂，其中贡献最为突出的是曹周键、邝志全、张红宝、周彬. 通过与周彬博士的多次讨论，我发现他的数理修养既博又深，逻辑思维缜密，对书中涉及的(以及本书以外的)大量数理问题有比较清晰、深刻、准确的理解，是一位不可多得的优秀青年物理工作者. 为了进一步提高写作质量，我在再三考虑后决定邀请周彬作为第二作者参与本书的修订工作，并取得他的同意. 近5个月来的密切合作已经证明这是一个正确的决定，我认为周彬对修订工作作出了重要而杰出的贡献.

我要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生，他不但是我步入本领域的优秀启蒙导师，而且对我回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与我的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使我受益殊深.

本书分上下两册，两册的基本内容已在第一版前言中做过介绍. 第二版的修订工作主要有两大方面：①对全书原有内容做了全面细致的改写；②增补了若干新的内容. 上册的主要增补内容有 Vaidya 度规和 Kinnersley 度规、共轭点、嵌入图及暗能量等，下册的主要增补内容有纤维丛理论及其物理应用、常曲率空间及 de Sitter 和反 de Sitter 时空等. 虽然第二版在内容的深度和广度上都有所增加，但尽力降低难度的写书宗旨和风格不变，初学者可以只学习书中最基本的入门性内容. 全书既可作为研究生课教材(上册还可作为本科二年级以上的选修课教材)，也可作为相对论工作者的参考读物. 不从事相对论工作的物理工作者也可把上册

前 5 章及上下册的某些章节和附录(例如李群和李代数及纤维丛理论)作为微分几何的入门读物.

为了适应不同程度读者的需要，本书内容分为必读和选读两大部分. 各章还配有为数不少的习题. 关于必读、选读部分以及习题的使用建议已详于第一版的前言中.

在广义相对论中经常遇到冗长的公式，采用几何单位制(其中 $c = 1$，$G = 1$)可使公式大为简化. 本书也不例外. 为帮助读者掌握几何制与非几何制之间的转换，我们专门写了一个附录(附录 A).

本书作者衷心感谢李惕碚院士、陆埮院士、郭汉英研究员、刘辽教授、赵峥教授、刘润球研究员、马永革副教授、杨学军教授、田贵花教授以及许多同行和读者对本书第二版出版的关心和支持，也感谢第一版广大读者对本书的关心和厚爱. 限于作者水平，第二版中肯定还存在错误和不足，恳请同行和读者不吝指正.

梁灿彬

2005 年 4 月于北京师范大学

第一版前言

笔者从 1981 年起在美国芝加哥大学相对论组任访问学者两年. 出国前, 由于种种原因, 我对广义相对论只略知皮毛, 对其必备的数学工具——近代微分几何——所知则近乎为零. 得益于芝加哥大学相对论组浓郁的学术气氛, 更由于 Wald 教授(我的导师)和 Geroch 教授的悉心指导, 我很快就对这一领域产生了浓厚兴趣. 作为教师, 我在回国前就萌发出一种强烈冲动, 要把这两年学到的东西尽可能教给我的学生. 回国后立即开出了第一门研究生课《微分几何与广义相对论》, 接着又陆续开出几门后续课程, 并曾应邀到外地讲课. 十数年来的讲稿后来成为写作本书的蓝本. 回顾这 10 多年, 我其实是边教边学, 尽力加深对所教内容的理解. 遇到百思不解的问题, 我还会向我的良师益友 Wald 教授(或 Geroch 教授)写信求教, 每次都收到热情回信, 信中的精辟见解常常使我茅塞顿开. 物理学工作者初次接触近代微分几何时的常见感觉是"抽象难懂", 不得其门而入. 我想也许我能在减轻难度方面对他们有所帮助. 首先, 当时我也是个刚学不久的人, 对入门时的困难有切身感受; 其次, 我过去的教学经验也许在降低难度方面可以派上用场. 降低难度不但成为我十多年来教学工作的一种自我追求, 而且也成为本书写作的一个努力方向. 为了降低难度, 往往不惜耗费笔墨详加解说, 这是本书篇幅较大的一个重要原因.

近代微分几何不但对学习广义相对论至关紧要, 而且对物理学(乃至工程学)的许多分支都有重要应用价值. 许多物理工作者从自身专业的国际学术会议和大量文献中发现近代微分几何对深入搞好本专业研究已日渐必需, 却苦于找不到学习这门学问的入门途径. 北京师范大学物理系的领导较早认识到近代微分几何对物理工作者的重要性, 鼓励和支持我从 1995 年开始把我的第一门研究生课《微分几何与广义相对论》下放为高年级本科选修课(约 70 学时). 该课的一半以上课时用于从零开始讲授微分几何的入门知识(相当于本书前 5 章), 所余课时的一半以上用于介绍如何以微分几何为工具剖析业已学过的狭义相对论(相当于本书第 6 章), 最后才介绍一点广义相对论的入门知识(相当于本书第 7 章的一部分). 实践表明, 喜欢抽象思维、学过微积分学以及线性代数基本知识的物理系本科生只要花出足够时间听课、复习和完成作业(平均每周约 5 题), 就可在期末考试中取得及格以上的成绩. 我还深感欣慰地发现部分本科生(含二年级生)竟然能进入"心领神会"的美妙境界并产生浓厚兴趣. 他们还继续选学笔者所开的后续研究生课程(包括本书从第 7 章§7.4 起的全部内容), 而且表现出色.

本书分上、下两册. 上册共有 10 章, 前 5 章从零开始讲授微分几何入门知识,

第 6 章剖析狭义相对论，后 4 章介绍广义相对论的基本内容. 虽然前 5 章在选材和写法上适当照顾到相对论的需要，但不从事相对论工作的物理工作者也可把它作为微分几何的入门读物. 下册将介绍广义相对论的进一步内容(侧重于整体分析，例如时空的整体因果结构、渐近平直时空、引力坍缩、Kerr-Newman 黑洞、时空的 3 + 1 分解以及广义相对论的拉氏和哈氏形式)及其所需的进一步数学工具(例如共形变换及李群和李代数). 全书既可作为研究生课教材(上册还可作为本科高年级选修课教材)，也可作为相对论工作者的参考读物.

为了适应不同程度读者的需要，本书内容分为必读和选读两大部分. 必读部分用宋体排印，选读部分则排成楷体，并用[选读]和[选读完]字样标出. 必读部分的内容自成体系，不会由于略去选读内容而影响后续必读内容的学习. 各页的脚注(如果有的话)与选读内容类似. 初次学习的读者最好略去全部选读和脚注内容.

本书各章都配有为数不少的习题. 习题的难易程度十分悬殊. 最难的习题在题号前标有*号. 这是指题目本身的难度最大，与所需内容是否涉及选读内容无关. 题号前标有~号的题是笔者向读者推荐的比较基本的习题，其中有很易的题，也有较难的题. 为了降低难度，对多数较难题都给了提示. 如果时间实在不够，也可在~号题中挑选部分题目完成. 完全不做习题而一章一章读下去的做法似乎也未尝不可，不过很可能在读到稍后章节时发现前面根基不稳，难于继续稳步前进.

限于笔者的数理修养以及对本书所涉专业方向的理解水平，书中大小错误和不妥之处一定不少. 作为尽量减少错误和不妥的一个重要措施，笔者请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读本书初稿的部分章节，他们是：(以姓氏汉语拼音为序. 有**号者为教授或研究员，有*号者为副教授或副研究员.) 敖滨、曹周键、戴陆如、戴宪新、高长军、高思杰、贺晗、胡波、*黄超光、**邝志全、**刘辽、李晓勤、马永革、南俊杰、**裴寿镛、**强稳朝、沈华、*田清钧、*田晓岑、王波波、吴金闪、吴小宁、**杨孔庆、**俞允强、*杨学军、张红宝、张芃、周彬、朱宗宏. 以上诸君对所读的部分章节都提出过许多意见和建议，其中很大一部分非常宝贵. 笔者要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是芝加哥大学的 Wald 教授，他不但是笔者步入本领域的优秀启蒙导师，而且对笔者回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 他的力作《General Relativity》是本书的最重要参考文献. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与笔者的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使笔者受益殊深. 笔者还要感谢北京师范大学物理系刘辽教授和大连理工大学物理系桂元星教授，他们的推荐使本书得以纳入北京师范大学出版社的出版计划并获得出版社的财政支持. 感谢赵峥教授和王永

成教授对本书的写作和出版的密切关心和大力支持. 感谢北京师范大学出版社李桂福编审对本书出版的积极支持与帮助. 感谢北京市教委对本书写作和出版的立项资助，也感谢北京师范大学出版社提供的财政支持.

梁灿彬

2000 年 2 月于北京师范大学

目　录

第二版前言

第一版前言

第 1 章　拓扑空间简介 ······ 1

§1.1　集论初步 ······ 1

§1.2　拓扑空间 ······ 5

§1.3　紧致性[选读] ······ 11

习题 ······ 13

第 2 章　流形和张量场 ······ 15

§2.1　微分流形 ······ 15

§2.2　切矢和切矢场 ······ 19

2.2.1　切矢量 ······ 19

2.2.2　流形上的矢量场 ······ 27

§2.3　对偶矢量场 ······ 31

§2.4　张量场 ······ 35

§2.5　度规张量场 ······ 39

§2.6　抽象指标记号 ······ 46

习题 ······ 52

第 3 章　黎曼(内禀)曲率张量 ······ 55

§3.1　导数算符 ······ 55

§3.2　矢量场沿曲线的导数和平移 ······ 62

3.2.1　矢量场沿曲线的平移 ······ 62

3.2.2　与度规相适配的导数算符 ······ 64

3.2.3　矢量场沿曲线的导数与沿曲线的平移的关系 ······ 65

§3.3　测地线 ······ 68

§3.4　黎曼曲率张量 ······ 76

3.4.1　黎曼曲率的定义和性质 ······ 76

3.4.2　由度规计算黎曼曲率 ······ 80

§3.5　内禀曲率和外曲率 ······ 83

习题 ······ 84

第 4 章　李导数、Killing 场和超曲面 ······ 86

§4.1　流形间的映射 ······ 86

§4.2 李导数 …… 90
§4.3 Killing 矢量场 …… 92
§4.4 超曲面 …… 97
习题 …… 103
第 5 章 微分形式及其积分 …… 105
§5.1 微分形式 …… 105
§5.2 流形上的积分 …… 109
§5.3 Stokes 定理 …… 112
§5.4 体元 …… 115
§5.5 函数在流形上的积分，Gauss 定理 …… 118
§5.6 对偶微分形式 …… 121
§5.7 用标架计算曲率张量[选读] …… 124
习题 …… 130
第 6 章 狭义相对论 …… 132
§6.1 4 维表述基础 …… 132
6.1.1 预备知识 …… 132
6.1.2 狭义相对论的背景时空 …… 134
6.1.3 惯性观者和惯性系 …… 135
6.1.4 固有时与坐标时 …… 137
6.1.5 时空图 …… 138
6.1.6 狭义相对论与非相对论时空结构的对比 …… 141
§6.2 典型效应分析 …… 144
6.2.1 “尺缩”效应 …… 144
6.2.2 “钟慢”效应 …… 145
6.2.3 孪子效应(孪子佯谬) …… 149
6.2.4 车库佯谬 …… 151
§6.3 质点运动学和动力学 …… 151
§6.4 连续介质的能动张量 …… 164
§6.5 理想流体动力学 …… 168
§6.6 电动力学 …… 172
6.6.1 电磁场和 4 电流密度 …… 172
6.6.2 麦氏方程 …… 174
6.6.3 4 维洛伦兹力 …… 176
6.6.4 电磁场的能动张量 …… 178
6.6.5 电磁 4 势及其运动方程，电磁波 …… 179
6.6.6 光波的多普勒效应 …… 184

习题 ······ 185
第 7 章　广义相对论基础 ······ 188
§7.1　引力与时空几何 ······ 188
§7.2　弯曲时空中的物理定律 ······ 192
§7.3　费米移动与无自转观者 ······ 196
§7.4　任意观者的固有坐标系 ······ 204
§7.5　等效原理与局部惯性系 ······ 210
§7.6　潮汐力与测地偏离方程 ······ 214
§7.7　爱因斯坦场方程 ······ 222
§7.8　线性近似和牛顿极限 ······ 225
7.8.1　线性近似[线性引力论(linearized theory of gravity)] ······ 225
7.8.2　牛顿极限 ······ 228
§7.9　引力辐射 ······ 231
习题 ······ 245
第 8 章　爱因斯坦方程的求解 ······ 247
§8.1　稳态时空和静态时空 ······ 247
§8.2　球对称时空 ······ 250
§8.3　施瓦西真空解 ······ 253
8.3.1　静态球对称度规 ······ 253
8.3.2　施瓦西真空解 ······ 255
8.3.3　Birkhoff(伯克霍夫)定理 ······ 260
§8.4　Reissner-Nordstrom(来斯纳-诺斯特朗)解 ······ 261
8.4.1　电磁真空时空和爱因斯坦-麦克斯韦方程 ······ 261
8.4.2　Reissner-Nordstrom 解 ······ 262
§8.5　轴对称度规简介[选读] ······ 265
§8.6　平面对称度规简介[选读] ······ 267
§8.7　Newman-Penrose 形式(NP formalism)[选读] ······ 270
§8.8　用 NP 形式求解爱因斯坦-麦克斯韦方程举例[选读] ······ 278
8.8.1　NP 形式中的麦氏方程与爱因斯坦方程 ······ 278
8.8.2　柱对称条件下爱因斯坦-麦克斯韦方程求解一例 ······ 280
§8.9　Vaidya 度规和 Kinnersley 度规 ······ 286
8.9.1　从施瓦西度规到 Vaidya 度规 ······ 286
8.9.2　Kinnersley(金纳斯里)度规 ······ 291
8.9.3　Kinnersley 度规(详细讨论) ······ 294
§8.10　坐标条件，广义相对论的规范自由性 ······ 302

8.10.1 坐标条件 ······ 302
8.10.2 广义相对论的规范自由性 ······ 306
习题 ······ 308
第 9 章 施瓦西时空 ······ 310
§9.1 施瓦西时空的测地线 ······ 310
§9.2 广义相对论的经典实验验证 ······ 314
9.2.1 引力红移 ······ 314
9.2.2 水星近日点进动 ······ 316
9.2.3 星光偏折 ······ 318
§9.3 球对称恒星及其演化 ······ 321
9.3.1 静态球对称恒星内部解 ······ 321
9.3.2 恒星演化 ······ 328
§9.4 Kruskal 延拓和施瓦西黑洞 ······ 335
9.4.1 时空奇点(奇性)的定义 ······ 336
9.4.2 Rindler 度规的坐标奇点 ······ 338
9.4.3 施瓦西时空的 Kruskal 延拓 ······ 341
9.4.4 施瓦西时空的无限红移面 ······ 347
9.4.5 嵌入图[选读] ······ 348
9.4.6 球对称恒星的引力坍缩和施瓦西黑洞 ······ 350
习题 ······ 356
第 10 章 宇宙论 ······ 358
§10.1 宇宙运动学 ······ 358
10.1.1 宇宙学原理 ······ 358
10.1.2 宇宙的空间几何 ······ 360
10.1.3 Robertson-Walker (罗伯逊-沃克) 度规 ······ 366
§10.2 宇宙动力学 ······ 371
10.2.1 哈勃定律 ······ 371
10.2.2 宇宙学红移 ······ 373
10.2.3 尺度因子的演化 ······ 375
10.2.4 宇宙学常数和爱因斯坦静态宇宙 ······ 380
§10.3 宇宙的热历史 ······ 381
10.3.1 宇宙演化简史 ······ 381
10.3.2 暗物质 ······ 391
10.3.3 宇宙学常数问题 ······ 395
§10.4 标准模型的疑难和克服 ······ 400
10.4.1 粒子视界 ······ 400

10.4.2　标准模型的疑难……402
10.4.3　暴涨模型及其对视界、平直性疑难的解决……407
§10.5　暗能量和“新标准宇宙模型”……412
10.5.1　暗能量问题……412
10.5.2　新标准宇宙模型……415
10.5.3　宇宙的命运(未来)……416
10.5.4　“黑暗物理学”的光明前途……416
习题……417
附录 A　几何与非几何单位制的转换……419
习题……424
惯例与符号……425
关于惯例的说明……425
符号一览表……425
参考文献……429
索引……432

第1章 拓扑空间简介

§1.1 集 论 初 步

确切地指定了的若干事物的全体叫一个集合(set)，简称集. 集中的每一事物叫一个**元素**(element)或**点**(point). 若 x 是集 X 的元素，则说“x 属于 X”，并记作 $x \in X$. 符号 $\notin$ 则代表“不属于”. 有两种表示集合的方法，一种是一一列出其元素，元素间用逗号隔开，全体元素用花括号括起来，如

$$X = \{1，4，5.6\}$$

表示由实数 1，4 及 5.6 构成的集. 另一种表示法是指出集中元素的共性，如

$$X = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

表示 X 是全体实数的集合(这一特定集的通用记号为 $\mathbb{R}$)，而

$$X = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 9 \}$$

则表示全体大于 9 的实数的集合.

不含元素的集叫**空集**(empty set)，记作 $\varnothing$.

定义 1 若集 A 的每一元素都属于集 X，就说 A 是 X 的**子集**(subset)，也说 A 含于 (is contained in) X 或 X 含(contains) A，记作 $A \subset X$ 或 $X \supset A$. 规定 $\varnothing$ 是任一集合的子集. A 称为 X 的**真子集** (proper subset)，若 $A \subset X$ 且 $A \neq X$. 集 X 和 Y 称为**相等的**(记作 $X = Y$)，若 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$.

注 1 子集定义的更确切表述本应是“集 A 叫集 X 的子集，当且仅当 A 的每一元素都属于 X”. 但为方便起见，凡在定义中的“若”或“当”都是“当且仅当”之意.

本书用 $:=$ 代表“定义为”，用 $\equiv$ 代表“恒等”或“记作”，例如 $C \equiv A - B$ 的含义是“把 $A–B$ 记作 C”. 采用这两个符号无非是为增加明确性，都换成等号也无妨.

定义 2 集合 A，B 的并集、交集、差集和补集定义为:

并集(union) $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

交集 (intersection) $A \cap B := \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$ (条件“$x \in A, x \in B$”是“$x \in A$ 且 $x \in B$”的简写，下同.).

差集(difference) $A - B := \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ (数学书常把差集记作 $A \backslash B$ 或 $A{\sim}B$，本书一律记作 $A–B$.).

若 A 是 X 的子集，则 A 的**补集**(complement) $-A$ 定义为 $-A := X–A$.

定理 1-1-1 以上集运算服从如下规律:

交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$, $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

De Morgan律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

证明 作为例子，我们证明 De Morgan 律的第二式(其他各律由读者自证). 为此只须证明等式两边互相包含.

(A) 设$x\in A-(B\cap C)$，则$x\in A$, $x\notin B\cap C$. 后者导致$x\notin B$或$x\notin C$. $x\in A$与$x\notin B$结合得$x\in A-B$；$x\in A$与$x\notin C$结合得$x\in A-C$，故$x\in(A-B)\cup(A-C)$，因而

$$A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C).$$

(B) 设$x\in(A-B)\cup(A-C)$，则$x\in A-B$或$x\in A-C$. 前者导致$x\in A$，$x\notin B$；后者导致$x\in A$，$x\notin C$. 两者结合得$x\in A$, $x\notin B\cap C$，故$x\in A-(B\cap C)$，因而

$$(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C).$$ □

定义 3 非空集合X，Y的**卡氏积**(Cartesian product) $X\times Y$ 定义为

$$X\times Y := \{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}.$$

就是说，$X\times Y$ 是这样一个集合，它的每一元素是由 X 的一个元素x和Y的一个元素y组成的一个有序对(x,y). 多个(有限个[①])集合的卡氏积可类似地定义，例如

$$X\times Y\times Z := \{(x,y,z)\mid x\in X, y\in Y, z\in Z\},$$

而且还规定卡氏积满足结合律，即$(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)$.

例 1 $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (共n个$\mathbb{R}$). 既然$\mathbb{R}^2$ 的元素是由两个实数构成的有序对，这两个实数就称为该元素的**自然坐标**. 类似地，$\mathbb{R}^n$ 的每一元素有n个自然坐标. 可见$\mathbb{R}^n$ 是天生就有坐标的，但其他集合则未必. 利用自然坐标可给$\mathbb{R}^n$ 的任意两个元素定义距离的概念.

定义 4 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个元素 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$之间的**距离** $|y-x|$定义为

$$|y-x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i-x^i)^2}.$$

本书从下段开始经常使用数学记号$\forall$(代表“对任一”)和$\exists$(代表“存在”)，请熟习.

定义 5 设 X，Y 为非空集合. 一个从 X 到Y 的**映射**(map)(记作$f: X\to Y$)是一个法则，它给 X 的每一元素指定Y 的唯一的对应元素. 若 $y\in Y$ 是$x\in X$ 的对应元素，就写 $y=f(x)$，并称 y 为x在映射 f 下的**像**(image)，称x为 y 的**原像**(或**逆像**，即 inverse image). X 称为映射 f 的**定义域**(domain)，X 的全体元素在映射 f 下的像的集合(记作 $f[X]$)称为映射 $f: X\to Y$ 的**值域**(range). 映射 $f: X\to Y$

---

① 无限多个集合的卡氏积也可定义，但已超出本书范围.

和 $f':X\to Y$ 称为**相等的**，若 $f(x)=f'(x)\ \forall x\in X$.

注 2　通常也把 $y=f(x)$ 写成 $f:x\mapsto y$. 请注意 $\mapsto$ 与 $\to$ 的区别：$f:X\to Y$ 中的 $\to$ 表示 f 是从 X 到 Y (集合到集合)的映射；而 $f:x\mapsto y$ 中的 $\mapsto$ 则表示 $x\in X$ 在映射 f 下的像是 y (元素到元素).

注 3　设 $A\subset X$ ，则 A 的元素在 f 下的像组成的子集记作 $f[A]$ ，即

$$f[A]\equiv\{y\in Y\mid\exists x\in A\ 使\ y=f(x)\}\subset Y .$$

例 2　普通微积分中的单值函数 $y=f(x)$ 就是一个由 $\mathbb{R}$ (或其子集)到 $\mathbb{R}$ 的映射.

注 4　从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射给出一个二元函数，因为 $\mathbb{R}^2$ 中每点由两个实数(自然坐标)描写. 同理，从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射给出 m 个 n 元函数.

定义6　映射 $f:X\to Y$ **叫一一的**(one-to-one)，若任一 $y\in Y$ 有不多于一个逆像(可以没有). $f:X\to Y$ **叫到上的**(onto)，若任一 $y\in Y$ 都有逆像(可多于一个).①

注 5　① f 为到上映射的充要条件是值域 $f[X]=Y$. ②若 f 为一一映射，则存在逆映射 $f^{-1}:f[X]\to X$. 然而，不论 $f:X\to Y$ 是否有逆，都可定义任一子集 $B\subset Y$ 在 f 下的“逆像” $f^{-1}[B]$ 为

$$f^{-1}[B]:=\{x\in X\mid f(x)\in B\}\subset X .$$

注意，这里的“逆像”是 X 的子集而不是 X 的元素. 例如，如果 X 有(且仅有)两个元素 x 和 x' 在 f 作用(即映射)下的像都是 $y\in Y$ ，则虽然逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 不存在，但把 y 看作 Y 的独点子集(即 $\{y\}$)时 $f^{-1}[\{y\}]$(简记作 $f^{-1}[y]$)仍有意义，含义为 $f^{-1}[y]=\{x,\ x'\}\subset X$.

定义 7　$f:X\to Y$ 称为**常值映射**，若 $f(x)=f(x')\quad\forall x,\ x'\in X$.

定义 8　设 X, Y, Z 为集，$f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射，则 f 和 g 的**复合映射** $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的映射，定义为 $(g\circ f)(x):=g(f(x))\in Z\quad\forall x\in X$ ，见图 1-1.

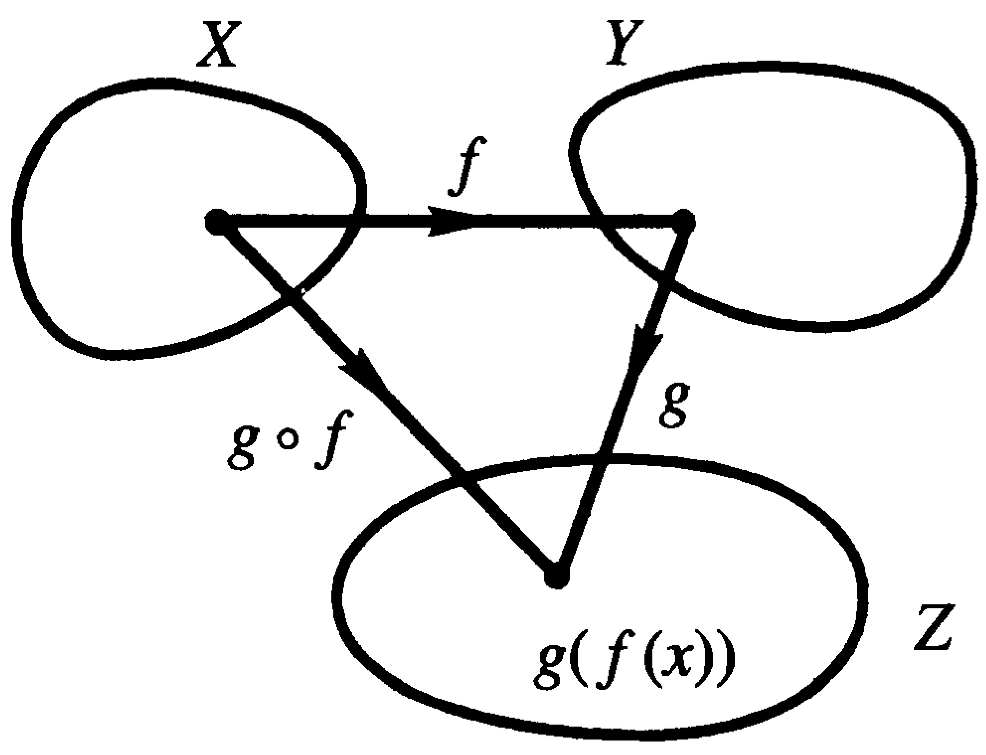


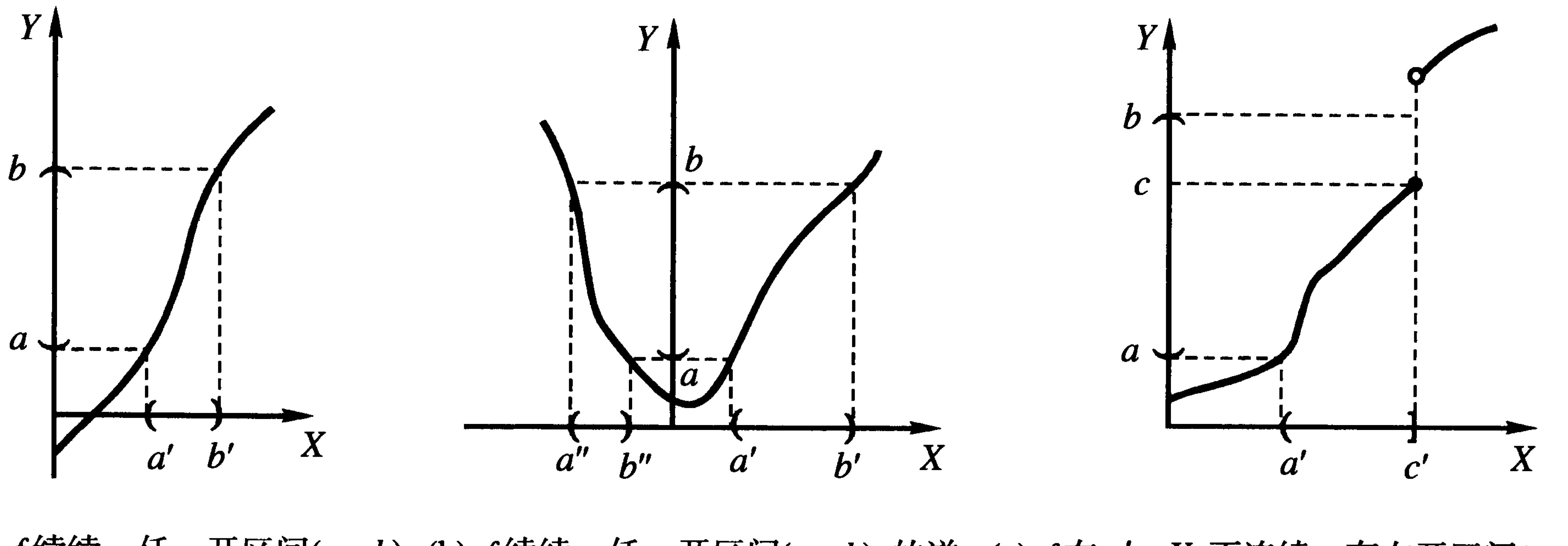
图 1-1　复合映射 $g\circ f$

注意，先执行 f 后执行 g

① 不少数学书把本书的一一和到上映射分别叫**单射**(injection)和**满射**(surjection)，把既是单射又是满射的映射叫**一一映射**[又称**双射**(bijection)]. 于是它们的一一映射强于本书的一一映射.

注 6　若 $X=Y=Z=\mathbb{R}$，则复合映射 $g\circ f$ 就是熟知的一元复合函数.

若 X 和 Y 是一般的集合，对 X 与 Y 之间的映射只能提出“一一”和“到上”这两个要求；但若 X 和 Y 还指定了某种结构，则往往可对 $f:X\to Y$ 提出更多要求，例如可要求 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的甚至光滑的. 一元函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续性在微积分中早有定义(“ε-δ 定义”)，重述如下：①称 f 在 x 点连续，若 $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$ 使得当 $|x'-x|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$；②称 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，若它在 $\mathbb{R}$ 的任一点连续. 这一定义依赖于 $\mathbb{R}$ 中任二元素的距离概念(对 $\mathbb{R}$ 而言距离就是坐标之差)，似乎无法推广到没有距离定义的两个集合之间的映射. 然而细想发现，ε-δ 定义可用开区间概念(而无需距离概念)重新表述如下：设 $X=Y=\mathbb{R}$，映射 $f:X\to Y$ 叫做连续的，若 Y 中任一开区间的“逆像”都是 X 的开区间之并(或是空集). 这一表述与通常的 ε-δ 表述的等价性可从图 1-2 得到启发(这里无意给出证明)：图(a)的映射 $f:X\to Y$ 按 ε-δ 定义为连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a,b) 的逆像为开区间 (a',b')；图(b)的映射连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a,b) 的逆像为开区间 (a',b') 与 (b'',a'') 之并；图(c)的映射 $f:X\to Y$ 在 $c'\in X$ 处不连续，与此相应，在 Y 中存在开区间 (a,b)，其“逆像” $f^{-1}[(a,b)]=(a',c']\subset X$ 不是开区间，也不是开区间之并. 以上讨论从一个侧面说明“开区间之并”这一概念的用处：可以定义映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续性. 其实这一概念还有很多用处，因此往往有必要推广到除 $\mathbb{R}$ 外的集合 X. 为方便起见，把 $\mathbb{R}$ 的任一可以表为开区间之并的子集(连同空集 $\varnothing$)称为开子集. 为把开子集概念推广到任意集合 X，应先找出 $\mathbb{R}$ 的开子集的本质的、抽象的(因而可以推广的)性质. 它们是：(a) $\mathbb{R}$ 和空集 $\varnothing$ 都是开子集；(b) 有限个开子集之交仍是开子集；(c) 任意个开子集之并仍是开子集. 把这三个性质推广，就可给任意集合 X 定义开子集概念. 定义了开子集的



(a) f 续续，任一开区间$(a,\ b)$的逆像是开区间$(a',\ b')$.　(b) f 续续，任一开区间$(a,\ b)$ 的逆像是开区间之并 $(a',b')\cup(b'',a'')$.　(c) f 在 $c'\in X$ 不连续，存在开区间$(a,\ b)$，其逆像$(a',\ c']$不是开区间之并.

图 1-2　用开区间表述连续性

曲线代表映射 $f:X\to Y$

集合叫拓扑空间. 由开子集概念出发又可定义许多概念并证明许多定理，从而发展为一门完整丰富的学科分支——点集拓扑学. §1.2 和§1.3 两节将对拓扑空间的最基本内容做一介绍.

§1.2　拓 扑 空 间

如§1.1 末所述，ℝ 的子集分为开子集和非开子集两大类(任一子集要么是开的，要么是非开的. 不要把非开子集称为闭子集. 根据后面要讲的闭子集定义，子集可以不开不闭，也可以既开又闭.). 开子集具有上述(a)、(b)、(c)三个性质. 对任意非空集合 X 也可用适当方式指定其中的某些子集是开的，其他为非开的. 为使这种指定有用，我们约定任何指定方式都要满足 3 个要求：(a) X 本身和空集 $\varnothing$ 为开子集；(b) 有限个开子集之交为开子集；(c) 任意个(可以有限个也可以无限个)开子集之并为开子集. 对同一集合，满足这 3 个要求的指定方式常常是很多的. 例如，设 X 为任意集合，可以指定 X 及 $\varnothing$ 为开子集，其他子集都为非开. 这当然满足上述三要求，其特点是开子集最少，只有两个. 然而也可采用另一种极端的指定，即指定 X 的任意子集都是开子集. 不难看出这种指定也满足上述三要求. 上述两种指定虽然未必有太多用处，但它们至少能说明满足上述三要求的指定方式不止一种. 我们说，每种满足上述三要求的指定给集合 X 赋予了一种附加结构，称为拓扑结构. 对定义了拓扑结构的集合可以指着它的任一子集问：“这是开子集吗?”答案非“是”即“否”，泾渭分明. 反之，对没有定义拓扑结构的集合，这样的问题毫无意义. 定义了拓扑结构的集合 X 的全体开子集也组成一个集合，称为 X 的一个拓扑(topology)，记作 $\mathscr{T}$ (是 topology 为首字母的花体大写). 用 $\mathscr{P}$ 代表由 X 的全体子集组成的集合(如图 1-3)，则 X 的任一开子集 O 和任一非开子集 V 都是 $\mathscr{P}$ 的元素. X 的全体开子集组成 $\mathscr{P}$ 的一个子集 $\mathscr{T}$ (注意，它不是 X 的子集)，它就是 X 的拓扑. 请注意符号 $\subset$ 同 $\in$ 的区别：$O\subset X$ 只表明 O 是 X 的子集，而 $O\in\mathscr{T}$ 则表明 O 是 X 的开子集. 以上铺垫有助于理解如下用数学语言表述的定义.

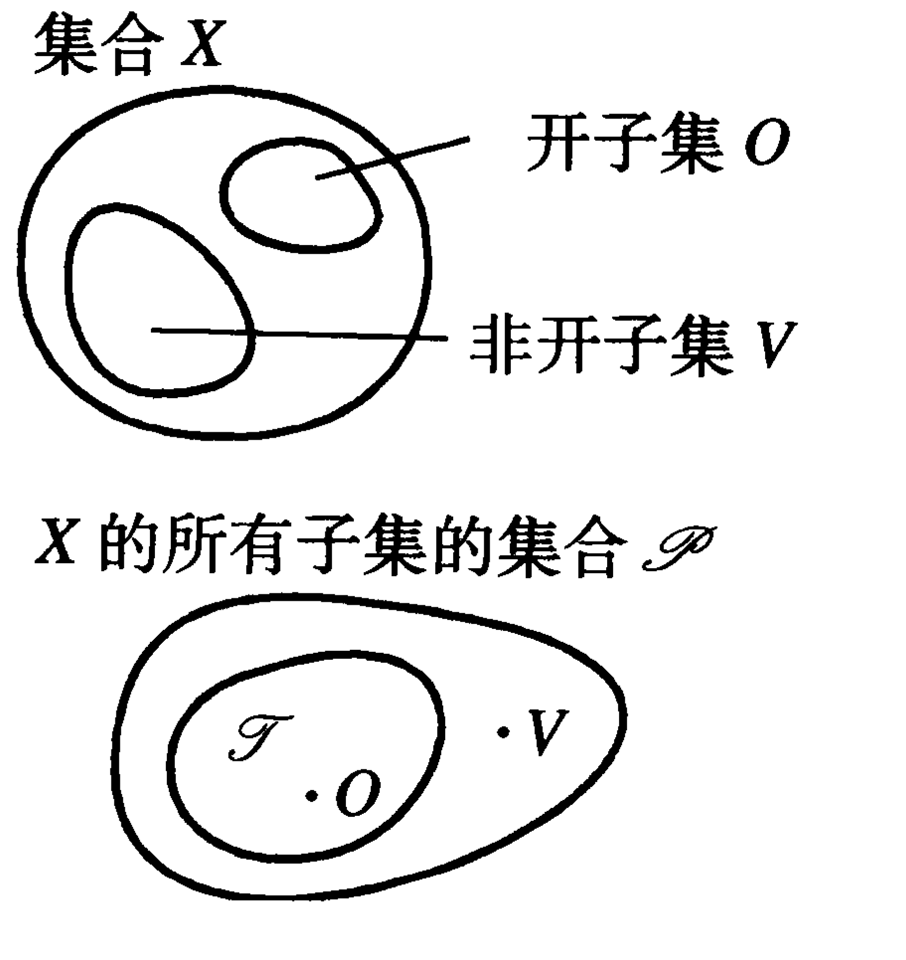


图 1-3　$\mathscr{P}$ 是集合 X 的所有子集的集合. X 的任何子集(如 O, V)都是 $\mathscr{P}$ 的元素. $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{P}$ 的这样一个子集，其中每一元素(如 O)是 X 的一个开子集

定义 1　非空集合 X 的一个**拓扑** (topology) $\mathscr{T}$ 是 X 的若干子集的集合，满足：

(a) $X,\varnothing\in\mathscr{T}$ ；

(b) 若 $O_i\in\mathscr{T}$，$i=1,2,\cdots,n$ ，则 $\bigcap_{i=1}^{n}O_i\in\mathscr{T}$ (其中 $\bigcap_{i=1}^{n}O_i$ 代表这 n 个 O_i 之交)；

(c) 若$O_\alpha \in \mathscr{T}\ \forall\alpha$，则$\bigcup\limits_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T}$($O_\alpha \in \mathscr{T}$后加$\forall\alpha$表示每一个$O_\alpha$都属于$\mathscr{T}$，而且$O_\alpha$的个数没有限制. $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T}$表示所有$O_\alpha$之并属于$\mathscr{T}$.).

定义 2　指定了拓扑$\mathscr{T}$的集合X称为**拓扑空间**(topological space). 拓扑空间X的子集O称为**开子集**(简称**开集**)，若$O \in \mathscr{T}$.

对同一集合X可定义不同拓扑$\mathscr{T}$(满足定义1的$\mathscr{T}$可以很多). 设$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$都是X的拓扑，则X的子集A可能满足$A \in \mathscr{T}_1$，$A \notin \mathscr{T}_2$，即A对$\mathscr{T}_1$而言(用$\mathscr{T}_1$衡量)是开集而对$\mathscr{T}_2$而言不是开集. 可见$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$把X定义为两个不同的拓扑空间. 为明确所选拓扑起见，可用$(X, \mathscr{T})$代表拓扑空间. 于是$(X, \mathscr{T}_1)$和$(X, \mathscr{T}_2)$代表不同拓扑空间，虽然它们的"底集"都是X. 在明确选定一个拓扑后也可只用X代表拓扑空间.

对给定的具体集合X，应选哪个拓扑使之成为一个拓扑空间？这取决于X的自身性质以及我们关心哪些方面的问题. 例如，对集合$\mathbb{R}^n$，在通常关心的大多数问题中都选所谓的通常拓扑为拓扑(见下面的例3).

例 1　设X为任意非空集合，令$\mathscr{T}$为X的全部子集的集合，则它显然满足定义1的三条件，故构成X的一个拓扑，叫**离散拓扑**(discrete topology).

例 2　设X为任意非空集合，令$\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$，则它显然满足定义1的三条件，故构成$X$的一个拓扑，叫**凝聚拓扑**(indiscrete topology). 凝聚拓扑是元素最少的拓扑，而离散拓扑是元素最多的拓扑.

例 3

(1) 设$X = \mathbb{R}$，则$\mathscr{T}_u := \{$空集或$\mathbb{R}$中能表为开区间之并的子集$\}$称为$\mathbb{R}$的**通常拓扑**(usual topology).

(2) 设$X = \mathbb{R}^n$，则$\mathscr{T}_u := \{$空集或$\mathbb{R}^n$中能表为开球之并的子集$\}$称为$\mathbb{R}^n$的**通常拓扑**，其中，**开球**(open ball)定义为$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$，$x_0$称为球心，$r > 0$称为半径. $\mathbb{R}^2$中的开球亦称**开圆盘**，$\mathbb{R}$中的开球就是开区间.

不难验证(1)和(2)中的$\mathscr{T}_u$满足定义1的三条件. 根据上述定义，$\mathbb{R}$中任一开区间用$\mathscr{T}_u$衡量都是开集. 然而，原则上也可选其他拓扑使$\mathbb{R}$成为不同于$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$的拓扑空间. 例如，若以凝聚拓扑衡量，则除$\mathbb{R}$及$\varnothing$外都不是开集；反之，若以离散拓扑衡量，则$\mathbb{R}$中任一子集(包括闭区间和半闭区间)都是开集. 今后在把$\mathbb{R}^n$看作拓扑空间时，如无声明就是指$(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_u)$.

例 4　设$(X_1, \mathscr{T}_1)$和$(X_2, \mathscr{T}_2)$为拓扑空间，$X = X_1 \times X_2$(即X是X_1与X_2的卡氏积)，定义X的拓扑为

$$\mathscr{T} := \{O \subset X \mid O \text{ 可表为形如 } O_1 \times O_2 \text{ 的子集之并，} O_1 \in \mathscr{T}_1,\ O_2 \in \mathscr{T}_2\}, \quad (1\text{-}2\text{-}1)$$

则$\mathscr{T}$称为X的**乘积拓扑**(product topology).

[选读 1-2-1]

不难把乘积拓扑的定义从两个拓扑空间推广到有限多个拓扑空间. 但应说明一点：设 $X = X_1 \times X_2 \times X_3$，则 X 既可理解为 $(X_1 \times X_2) \times X_3$，也可理解为 $X_1 \times (X_2 \times X_3)$. 令 $X_{12} \equiv X_1 \times X_2$，以 $\mathscr{T}_{12}$ 代表其乘积拓扑，便可给集合 $X = X_{12} \times X_3$ 定义乘积拓扑，记作 $\mathscr{T}$. 再令 $X_{23} \equiv X_2 \times X_3$，以 $\mathscr{T}_{23}$ 代表其乘积拓扑，又可给集合 $X = X_1 \times X_{23}$ 定义乘积拓扑，记作 $\mathscr{T}'$. 还可仿照式(1-2-1)直接给 $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ 定义乘积拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}$ 如下：

$$\tilde{\mathscr{T}} := \{O \subset X \mid O \text{ 可表为形如 } O_1 \times O_2 \times O_3 \text{ 的子集之并，}$$
$$O_1 \in \mathscr{T}_1,\ O_2 \in \mathscr{T}_2,\ O_3 \in \mathscr{T}_3\}.$$

可以证明 $\tilde{\mathscr{T}} = \mathscr{T}' = \mathscr{T}$，即对 $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ 的乘积拓扑的 3 种定义殊途同归，因此不会出现含糊情况. 对有限多个拓扑空间也有类似结论. 一个简单的例子是 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$，还可证明这样定义出的乘积拓扑与例 3 中用开球定义的拓扑一致. **[选读 1-2-1 完]**

例 5　设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，A 为 X 的任一非空子集. 把 A 看作集合，当然也可指定拓扑(记作 $\mathscr{S}$，是S的花体)使 A 成为拓扑空间，记作 $(A, \mathscr{S})$. 由于 A 是 X 的子集，我们希望 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{T}$ 有尽量密切的联系. 如果 $A \in \mathscr{T}$，问题很简单，只须定义 $\mathscr{S} := \{V \subset A \mid V \in \mathscr{T}\}$. 然而，如果 $A \notin \mathscr{T}$，按上述定义就有 $A \notin \mathscr{S}$，违背定义 1 的条件(a). 因此 $\mathscr{S}$ 的上述定义不合法. 一个巧妙的定义是

$$\mathscr{S} := \{V \subset A \mid \exists O \in \mathscr{T} \text{ 使 } V = A \cap O\}. \tag{1-2-2}$$

由上式可以证明即使 $A \notin \mathscr{T}$ 也有 $A \in \mathscr{S}$，而且 $\mathscr{S}$ 满足定义 1 的其他条件(见习题). 这样定义的 $\mathscr{S}$ 叫做 $A(\subset X)$ 的、由 $\mathscr{T}$ 导出的**诱导拓扑**(induced topology). 以后在把 $(X, \mathscr{T})$ 的子集 A 看作拓扑空间时，如无声明都指 $(A, \mathscr{S})$，其中 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{T}$ 诱导的拓扑. $(A, \mathscr{S})$ 称为 $(X, \mathscr{T})$ 的**拓扑子空间**(topological subspace).

下面的例子有助于加深对诱导拓扑的理解. $\mathbb{R}^2$ 中以 x_0 为心的单位圆周 S^1 定义为 $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| = 1\}$. 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 是 S^1，由于它不能表为 $\mathbb{R}^2$ 中的开球之并(一条线窄到装不下任何开圆盘)，A 用 $\mathbb{R}^2$ 的 $\mathscr{T}_u$ 衡量不是开的. 用式(1-2-2)给 A 定义诱导拓扑 $\mathscr{S}$，则不但 A 用 $\mathscr{S}$ 衡量是开的，而且，设 V 是 A 中的任意一段(不含首末两点)，如图 1-4 的粗线所示，则虽然 V 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量不是开集，用 $\mathscr{S}$ 衡量却是开的，因为存在开圆 $O \in \mathscr{T}_u$ 使 $V = A \cap O$.

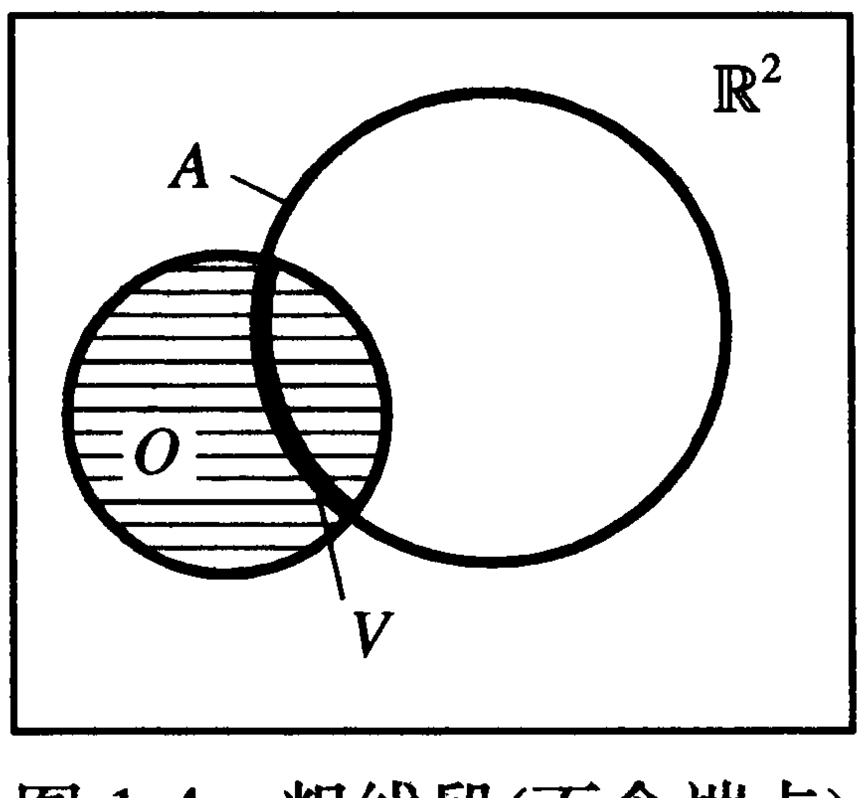


图 1-4　粗线段(不含端点)是 A 的子集 V，因 V 可看作 $O \in \mathscr{T}_u$ 与 A 之交，由式(1-2-2)可知 $V \in \mathscr{S}$

利用开集概念可对拓扑空间之间的映射定义连续性. 下面给出两个等价的连续定义，等价性的证明留作习题.

定义3a 设 $(X, \mathscr{T})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 为拓扑空间. 映射 $f: X \to Y$ 称为**连续的**(continuous)，若 $f^{-1}[O] \in \mathscr{T}\quad \forall O \in \mathscr{S}$ [$f^{-1}[O]$ 的定义见§1.1 注 5 之②].

定义3b 设 $(X, \mathscr{T})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 为拓扑空间. 映射 $f: X \to Y$ 称为**在点 $x \in X$ 处连续**，若 $\forall$ 满足 $f(x) \in G'$ 的 $G' \in \mathscr{S}$，$\exists\ G \in \mathscr{T}$ 使 $x \in G$ 且 $f[G] \subset G'$. $f: X \to Y$ 称为**连续**，若它在所有点 $x \in X$ 上连续.

注 1 不难看出，若 $X = Y = \mathbb{R}$，$\mathscr{T} = \mathscr{S} = \mathscr{T}_{\mathrm{u}}$，定义 3b (因而定义 3a)就回到 ε-δ 定义.

定义4 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 称为**互相同胚**(homeomorphic to each other)，若 $\exists$ 映射 $f: X \to Y$，满足(a) f 是一一到上的；(b) f 及 f^{-1} 都连续.① 这样的 f 称为从 $(X, \mathscr{T})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的**同胚映射**，简称**同胚**(homeomorphism).

普通函数 $y = f(x)$ 的连续性和可微性用 C^r 表示，其中 r 为非负整数，C^0 代表连续，C^r 代表 r 阶导函数存在并连续，C^∞ 代表任意阶导函数存在并连续[称为**光滑**(smooth)]. 虽然用开集概念可以巧妙地把 C^0 性推广到拓扑空间之间的映射，但 $r>0$ 的 C^r 性则不能. 事实上，对拓扑空间之间的映射的最高要求已体现在同胚的定义中. 同胚映射 $f: X \to Y$ 不仅在 X 和 Y 的点之间建立了一一对应的关系，而且还在 X 的开子集与 Y 的开子集之间建立了一一对应的关系，因而一切由拓扑决定的性质都可"全息"地被 f "携带"到 Y 中. 因此，从纯拓扑学角度看，两个互相同胚的拓扑空间就"像得不能再像"，可以视作相等.

例 6 任一开区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚(证明留作习题).

例 7 圆周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 配以诱导拓扑(由 $\mathbb{R}^2$ 的 $\mathscr{T}_{\mathrm{u}}$ 诱导)可看作拓扑空间. 它与 $\mathbb{R}$ 是否同胚？乍看以为可用图 1-5 定义从 S^1 到 $\mathbb{R}$ 的同胚映射 f，然而点 $a \in S^1$ 无像，故 f 不是从 S^1 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 不难证明 $f: (S^1 - \{a\}) \to \mathbb{R}$ 是同胚映射，可见挖去一点的圆周与 $\mathbb{R}$ 同胚. 然而 S^1 却与 $\mathbb{R}$ 非同胚，§1.3(选读)在定理 1-3-8 后将给出简洁证明，其中用到§1.3 要讲的"紧致"概念. 要点是：① S^1 紧致而 $\mathbb{R}$ 非紧致；②紧致子集在连续映射下的像仍紧致. ①、② 结合使 S^1 与 $\mathbb{R}$ 不能同胚.

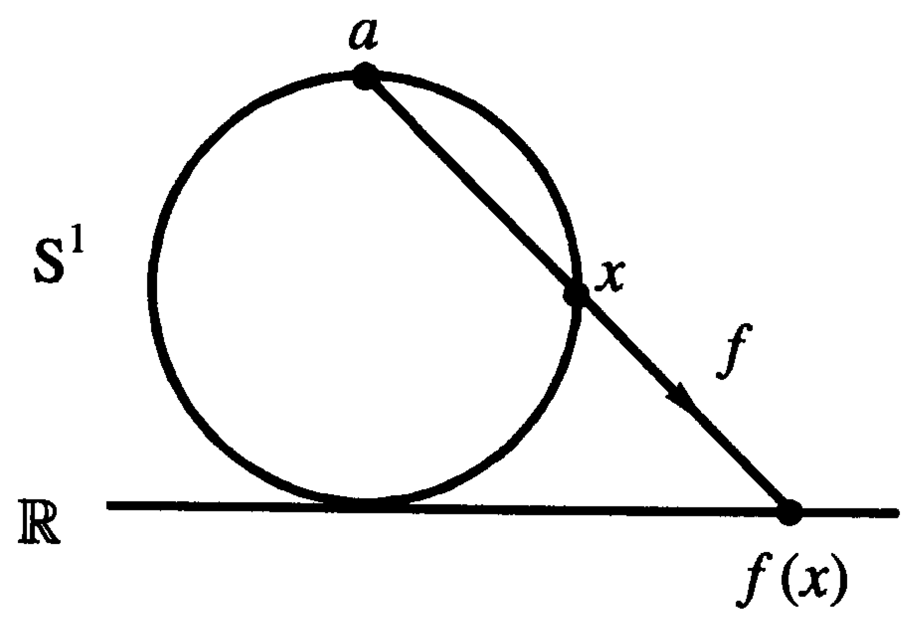


图 1-5 $\forall x \in S^1$ (a 点除外)都可用图示方法定义其在 $\mathbb{R}$ 的像 $f(x)$

例 8 考虑欧氏平面上的一个圆和一个椭圆(均指圆周). 用欧氏几何眼光看，两者当然不同. 在欧氏几何中有距离概念，圆和椭圆就是用距离定义的. 但从纯拓扑学的角度看，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_{\mathrm{u}})$ 是拓扑空间，圆 S^1 和椭圆 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的两个子集：S^1, $E \subset \mathbb{R}^2$. 可用 $\mathscr{T}_{\mathrm{u}}$ 给 S^1 及 E 分别定义诱导拓扑使成两

① 有余力的读者试举例说明的确存在其逆不连续的一一到上的连续映射(提示：用离散和凝聚拓扑).

个拓扑空间 $(S^1, \mathscr{T}_{S^1})$ 及 $(E, \mathscr{T}_E)$. 可以证明(直观上不难相信)存在同胚映射 $f:(S^1, \mathscr{T}_{S^1}) \to (E, \mathscr{T}_E)$，所以从纯拓扑眼光看两者完全一样. 反之，若把 S^1 剪一缺口，其产物将与 $\mathbb{R}$ 同胚，因而与 S^1 和 E 有不同拓扑. 如果把 $\mathbb{R}^2$ 想像为一张橡皮膜并对其进行变形操作，则膜上的曲线将随之变形. 但是，只要不剪不粘，则曲线变形前后互相同胚. 因此拓扑学又被通俗地称为"橡皮膜上的几何学". 拓扑学不同于欧氏几何学，重要区别就是它没有距离概念. 初看这种连距离都谈不上的学问不会有多大用处，其实不然. 一个简单例子是电路问题. 图 1-6(a)和(b)虽然从欧氏几何看有很大差别，但从电路角度看则全同. 反之，若把图(b)中任一支路剪断[成为图(c)]，从电路看就十分不同. 这与拓扑学关心的角度一样. 事实上，拓扑学对复杂电路(网络)的研究很有用，形成了"网络拓扑学"这一小小的应用分支.

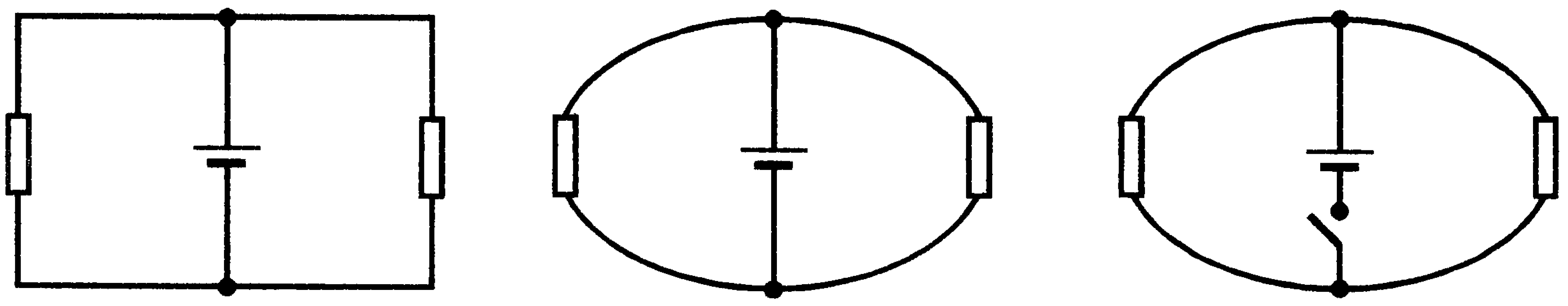


图 1-6 从电路或拓扑学角度看，图(a)与(b)全同，图(b)与(c)不同. 从几何学看则不然

定义5 $N \subset X$ 称为 $x \in X$ 的一个**邻域**(neighborhood)，若 $\exists O \in \mathscr{T}$ 使 $x \in O \subset N$. 自身是开集的邻域称为**开邻域**.

注2 设 $X = \mathbb{R}$，$N = [a, b]$，则 N 按定义5是 x 的邻域，当且仅当 $a < x < b$. 请特别注意"擦边"情况：若 $x = a$，则 N 并非 x 的邻域，因为 $\mathbb{R}$ 不存在开集 O 使 $x \in O \subset N$. 直观地说，要使 $[a, b]$ 是 x 的邻域，x 在 $[a, b]$ 中应有"左邻右舍". 而 $x = a$ 的任何"左邻"都不属于 $[a, b]$，故 $[a, b]$ 不应是 $x = a$ 的邻域. 可见定义5在一定程度上反映了这一直观要求. 另请注意如下的微妙例子：在拓扑空间 $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ 中，$[0, 1)$ 是0的开邻域，$[0, 1]$ 是0的邻域.

定义5′(子集的邻域) $N \subset X$ 称为 $A \subset X$ 的一个**邻域**，若 $\exists O \in \mathscr{T}$ 使 $A \subset O \subset N$.

定理1-2-1 $A \subset X$ 是开集，当且仅当 A 是 x 的邻域 $\forall x \in A$.

证明

(A) 设 A 为开，则 $\forall x \in A$，$\exists A \in \mathscr{T}$ 使 $x \in A \subset A$，故由定义5知 A 是 x 的邻域.

(B) 设 A 是 x 的邻域 $\forall x \in A$，令 $O = \bigcup_{x \in A} O_x$（$O_x$ 是定义5中满足 $x \in O_x \subset A$ 的

$O_x \in \mathscr{T}$)，则 $O = A$（读者试补证这一等式），又由定义1(c)知 $O \in \mathscr{T}$，故 $A \in \mathscr{T}$，即 A 为开集. □

定义6 $C \subset X$ 叫**闭集**(closed set)，若 $-C \in \mathscr{T}$.

定理1-2-2 闭集有以下性质：

(a) 任意个闭集的交集是闭集；

(b) 有限个闭集的并集是闭集；

(c) X 及 $\varnothing$ 是闭集.

证明 不难由定义 1，6 及 De Morgan 律得证. □

可见任何拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 都有两个既开又闭的子集，即 X 和 $\varnothing$.

定义7 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 称为**连通的**(connected)，若它除 X 和 $\varnothing$ 外没有既开又闭的子集.

例 9 设 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的开区间，$A \cap B = \varnothing$（请自画图），以 $\mathscr{T}$ 代表由 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑在子集 $X \equiv A \cup B$ 上的诱导拓扑，则拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的既开又闭的子集除 X 和 $\varnothing$ 外还有 A 和 B（A 和 B 在诱导拓扑下自然是开的，又因 A 和 B 互为补集，故又都是闭的. ），所以 $(X, \mathscr{T})$ 是不连通的. 这同自画图中的 A 和 B 在直观上互不连通相吻合①.

设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A \subset X$. 分别定义 A 的闭包、内部和边界如下：

定义8 A 的**闭包**(closure) $\bar{A}$ 是所有含 A 的闭集的交集，即

$$\bar{A} := \bigcap_{\alpha} C_\alpha, \qquad A \subset C_\alpha, \qquad 且\ C_\alpha\ 为闭.$$

定义9 A 的**内部**(interior) $\mathrm{i}(A)$ 是所有含于 A 的开集的并集，即

$$\mathrm{i}(A) := \bigcup_{\alpha} O_\alpha, \qquad O_\alpha \subset A, \qquad O_\alpha \in \mathscr{T}.$$

定义10 A 的**边界**(boundary) $\dot{A} := \bar{A} - \mathrm{i}(A)$，$x \in \dot{A}$ 称为**边界点**. $\dot{A}$ 也记作 ∂A.

定理1-2-3 $\bar{A}$，$\mathrm{i}(A)$ 及 $\dot{A}$ 有以下性质：

(a) ① $\bar{A}$ 为闭集，② $A \subset \bar{A}$，③ $A = \bar{A}$ 当且仅当 A 为闭集；

(b) ① $\mathrm{i}(A)$ 为开集，② $\mathrm{i}(A) \subset A$，③ $\mathrm{i}(A) = A$ 当且仅当 $A \in \mathscr{T}$；

(c) $\dot{A}$ 为闭集.

证明 (a)、(b)易证. (c)的证明如下：$X - \dot{A} = X - [\bar{A} - \mathrm{i}(A)] = (X - \bar{A}) \cup \mathrm{i}(A)$，其中最后一步用到习题2的结论. 因 $\bar{A}$ 为闭，故 $X - \bar{A}$ 为开，加之 $\mathrm{i}(A)$ 为开，故 $X - \dot{A}$ 为开，因而 $\dot{A}$ 为闭. □

下面的定义在§1.3 全节以及第 2 章开始时要用到：

定义11 X 的开子集的集合 $\{O_\alpha\}$ 叫 $A \subset X$ 的一个**开覆盖**(open cover)，若

---

① 与直观感觉更一致的是称为“弧连通”的概念，它与连通概念有微妙差别(见§5.2 的第一个脚注).

$A\subset\bigcup_{\alpha}O_\alpha$. 也可说 $\{O_\alpha\}$ 覆盖 A.

§1.3　紧致性[选读]

定义1　设 $\{O_\alpha\}$ 是 $A\subset X$ 的开覆盖(open cover). 若 $\{O_\alpha\}$ 的有限个元素构成的子集 $\{O_{\alpha_1},\cdots,O_{\alpha_n}\}$ 也覆盖 A ，就说 $\{O_\alpha\}$ 有**有限子覆盖**(finite subcover).

定义2　$A\subset X$ 叫**紧致的**(compact)，若它的任一开覆盖都有有限子覆盖.

例 1　设 $x\in X$ ，则独点子集 $A\equiv\{x\}$ 必紧致.

证明　设 $\{O_\alpha\}$ 是 A 的任一开覆盖，则 $\{O_\alpha\}$ 中至少存在一个元素(记作 O_{α_1})满足 $x\in O_{\alpha_1}$. 于是 $\{O_{\alpha_1}\}$ (作为 $\{O_\alpha\}$ 的子集)是 $A\equiv\{x\}$ 的开覆盖，故 $\{O_\alpha\}$ 有有限子覆盖.　□

例 2　$A\equiv(0, 1]\subset\mathbb{R}$ 不是紧致的.

证明　以 $\mathbb{N}$ 代表自然数集，则 $\{(1/n,\ 2)\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 A 的开覆盖，它没有有限子覆盖.　□

类似地，$\mathbb{R}$ 中任一开区间或半开区间都非紧致.

例 3　$\mathbb{R}$ 不是紧致的(证明留作习题).

定理1-3-1　$\mathbb{R}$ 的任一闭区间都紧致.

证明　略.　□

注 1　不要以为闭集一定紧致(就连 $\mathbb{R}$ 中也有非紧致闭集，读者试举一例.). 紧性与闭性有密切联系，但不等价，其关系体现在以下两定理中.

为讲述定理 1-3-2，先补充以下定义.

定义 3　拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 叫 **T_2 空间或豪斯多夫空间**(Hausdorff space)，若 $\forall x,\ y\in X,\ x\neq y,\ \exists\ O_1,\ O_2\in\mathscr{T}$ 使 $x\in O_1,\ y\in O_2$ 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.

注 2　常见的拓扑空间(如 $\mathbb{R}^n$)都是 T_2 空间. 凝聚拓扑空间是非 T_2 空间的一例. Hawking and Ellis(1973)P.13~14 给了一个更“靠近实用”的例子.

定理 1-3-2　若 $(X,\ \mathscr{T})$ 为 T_2 空间，$A\subset X$ 为紧致，则 A 为闭集.

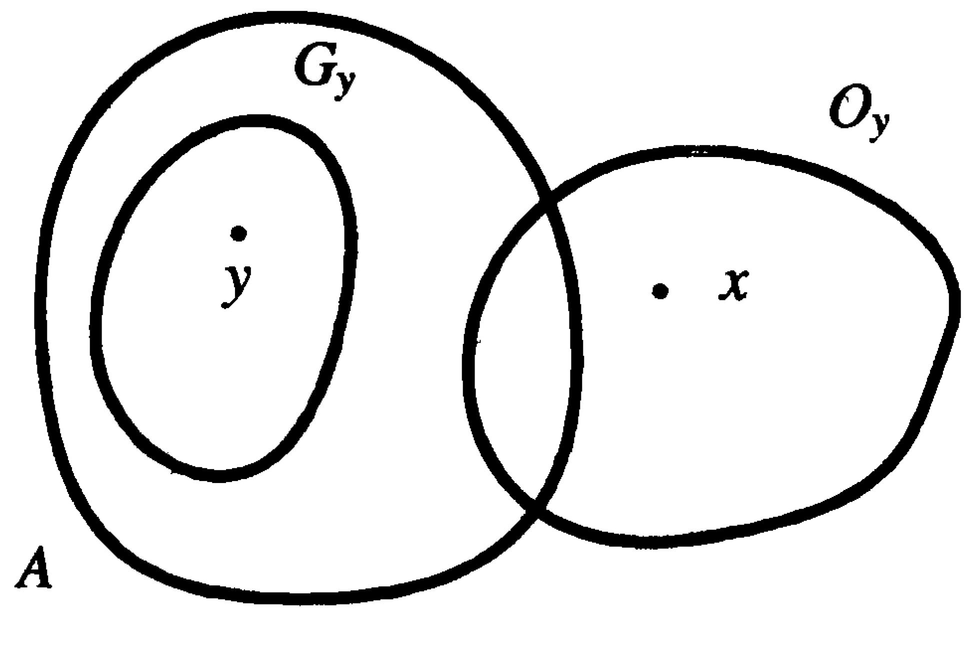


图 1-7　定理 1-3-2 证明用图

证明　当 $A=\varnothing$ 时定理显然成立，故以下设 $A\neq\varnothing$. 只须证明 $X-A\in\mathscr{T}$ ，为此只须证明 $\forall x\in X-A$ ，$\exists\ O\in\mathscr{T}$ 使 $x\in O\subset X-A$ (见定理 1-2-1). 因 X 为 T_2 空间，故给定 x 后，$\forall y\in A,\ \exists\ O_y, G_y\in\mathscr{T}$ 使 $x\in O_y,\ y\in G_y$ 且 $O_y\cap G_y=\varnothing$ (见图 1-7). y 走遍 A 便给出两个子集的集合 $\{G_y\mid y\in A\}$ 和 $\{O_y\mid y\in A\}$. 易见 $\{G_y\mid y\in A\}$ 是 A 的开覆盖. A 的紧致性保证它必含有限子覆盖 $\{G_{y_1},\ \cdots,\ G_{y_n}\}$. 令 $O\equiv O_{y_1}\cap\cdots\cap O_{y_n}$ ，

便有：①$O\in\mathscr{T}$；②$x\in O$；③$O\cap A=\varnothing$(证明留作练习)，即$O\subset X-A$．于是由定理 1-2-1 知$X-A\in\mathscr{T}$，故A为闭． □

定理 1-3-3 若$(X,\mathscr{T})$为紧致且$A\subset X$为闭集，则A为紧致．

证明 因A为闭，故$X-A$为开．设$\{O_\alpha\}$为A的任一开覆盖，则$\{O_\alpha,X-A\}$是X的一个开覆盖(此处用到A为闭集)．X为紧致使$\{O_\alpha,X-A\}$存在有限子覆盖$\{O_1,\cdots,O_n;X-A\}$，于是$\{O_1,\cdots,O_n\}$覆盖A，从而$\{O_\alpha\}$有有限子覆盖． □

定义 4 $A\subset\mathbb{R}^n$叫**有界的**(bounded)，若$\exists$开球$B\subset\mathbb{R}^n$使$A\subset B$．

定理 1-3-4 $A\subset\mathbb{R}$为紧致，当且仅当A为有界闭集．

证明

(A) 设A为紧致．(a)因$\mathbb{R}$为T_2空间，由定理 1-3-2 知A是闭集．(b)$\{(-n,n)|n\in\mathbb{N}\}$是$A$的开覆盖，$A$的紧致性保证此开覆盖存在有限子覆盖$\{(-1,1),(-2,2),\cdots,(-m,m)\}$，即$A\subset(-1,1)\cup(-2,2)\cup\cdots\cup(-m,m)=(-m,m)$，可见$A$有界．

(B) 设A为有界闭集．有界性保证$\exists M\in\mathbb{R}$使$A\subset[-M,M]$．由定理 1-3-1 知$[-M,M]$作为$(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$的子集为紧致．令$C\equiv[-M,M]$，以$\mathscr{S}$代表$\mathscr{T}_u$在$C$上的诱导拓扑，则可证$(C,\mathscr{S})$也为紧致(练习)．把$(C,\mathscr{S})$看作定理 1-3-3 中的$(X,\mathscr{T})$，注意到$A\subset C$为闭集，便知$A$为紧致．[①] □

定理 1-3-5 设$A\subset X$紧致，$f:X\to Y$连续，则$f[A]\subset Y$紧致．

证明 设$\{O_\alpha\}$是$f[A]$的任一开覆盖．f的连续性保证$f^{-1}[O_\alpha]$为开，故$\{f^{-1}[O_\alpha]\}$是A的开覆盖．因A紧致，故存在有限子覆盖$\{f^{-1}[O_1],\cdots,f^{-1}[O_n]\}$，于是$\{O_1,\cdots,O_n\}$便是$\{O_\alpha\}$的有限子覆盖．因此$f[A]$紧致． □

由定理 1-3-5 可得推论：同胚映射保持子集的紧致性．

定义 5 在同胚映射下保持不变的性质称为**拓扑性质**(topological property)或**拓扑不变性**(topological invariance)．

例 4 紧致性、连通性和T_2性都是拓扑性质．有界性不是拓扑性质，例如开区间(a,b)同胚于$\mathbb{R}$，但前者有界而后者无界．由此还可看出长度也不是拓扑性质．

数学分析中有个熟知定理：闭区间上的连续函数必在该区间上取得其最大值和最小值．下述定理是这一定理的推广．

定理 1-3-6 设X紧致，$f:X\to\mathbb{R}$连续，则$f[X]\subset\mathbb{R}$有界并取得其最大值和最小值．

证明 这是定理 1-3-4 和 1-3-5 的推论． □

定理 1-3-7 设$(X_1,\mathscr{T}_1)$，$(X_2,\mathscr{T}_2)$紧致，则$(X_1\times X_2,\mathscr{T})$紧致($\mathscr{T}$为$\mathscr{T}_1$和

---

① 严格说来，为了从定理 1-3-3 得出A为紧致的结论，应把该定理略加推广成为(其证明与原定理类似)：设C是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的紧致子集，$A\subset C$且A是$(X,\mathscr{T})$的闭子集，则A必紧致．

$\mathscr{T}_2$ 的乘积拓扑).

证明　略. □

定理 1-3-8　$A\subset\mathbb{R}^n$ 紧致，当且仅当它是有界闭集.

证明　这是定理 1-3-7 及前面定理的推论($\mathbb{R}^n$ 是 n 个 $\mathbb{R}$ 的卡氏积). □

简单应用举例　考虑 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_\text{u})$. 设 S^1 是 $\mathbb{R}^2$ 中的任一圆周，易见它是有界闭集，于是由定理 1-3-8 知它为紧致. 由定理 1-3-5 知连续映射保紧致性，而 $\mathbb{R}$ 及其任一开区间都不紧致，可见 S^1 不可能与 $\mathbb{R}$ 或其任一开区间同胚. 类似地，由定理 1-3-1、1-3-5 知 $\mathbb{R}$ 中任一闭区间都不可能与 $\mathbb{R}$ 或其任一开区间同胚.

定义6　映射 $S:\ \mathbb{N}\to X$ 叫 X 中的**序列**(sequence).

注 3　通常把序列记作 $\{x_n\}$，其中 $x_n\equiv S(n)\in X$，$n\in\mathbb{N}$. $\{x_n\}$ 其实就是 X 中编了次序的一串点.

定义7　$x\in X$ 叫序列 $\{x_n\}$ 的**极限**(limit)，若对 x 的任一开邻域 O 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使 $x_n\in O\quad\forall n>N$. 若 x 是 $\{x_n\}$ 的极限，就说 $\{x_n\}$ **收敛**于 x.

定义8　$x\in X$ 叫序列 $\{x_n\}$ 的**聚点**(accumulation point)，若 x 的任一开邻域都含 $\{x_n\}$ 的无限多点.

注 4　x 为 $\{x_n\}$ 的极限 $\Rightarrow x$ 为 $\{x_n\}$ 的聚点，但反之不一定.

下述定理中有一条件涉及“第二可数”概念. 元素个数有限的集称为**有限集**，否则称为**无限集**. 对有限集总可将其元素编号以便一个一个地数，所以有限集一定是可数集(countable set). 但无限集也不一定不可数，例如 $\mathbb{N}$ 就是可数的无限集. 有限集比无限集简单，可数无限集比不可数无限集简单. 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为**第二可数的**(second countable)，若 $\mathscr{T}$ 存在可数子集 $\{O_1,\cdots,O_K\}\subset\mathscr{T}$ 或 $\{O_1,\cdots\}\subset\mathscr{T}$ 使得任一 $O\in\mathscr{T}$ 可被表为 $\{O_1,\cdots,O_K\}$ [或 $\{O_1,\cdots\}$]的元素之并. 例如，$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_\text{u})$ 是第二可数的，因为 $\mathscr{T}_\text{u}$ 有这样的可数子集(它的每个元素 O_i 是一个开球，球心的每个自然坐标都是有理数，半径也是有理数.)，使得任一 $O\in\mathscr{T}_\text{u}$ 可被表为该子集的元素之并.

定理1-3-9　若 $A\subset X$ 紧致，则 A 中任一序列都有在 A 内的聚点. 反之，若 X 为第二可数且 $A\subset X$ 中任一序列都有在 A 内的聚点，则 A 紧致.

证明　略. □

习　题

~1. 试证 $A-B=A\cap(X-B)$，$\forall A,\ B\subset X$.

~2. 试证 $X-(B-A)=(X-B)\cup A$，$\forall A,\ B\subset X$.

~3. 用“对”或“错”在下表中填空：

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$		
$f(x)=x^2$		
$f(x)=\mathrm{e}^x$		
$f(x)=\cos x$		
$f(x)=5$, $\forall x\in\mathbb{R}$		

~4. 判断下列说法的是非并简述理由：

(a) 正切函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(b) 对数函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(c) $(a,b]\subset\mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_{\mathrm{u}}$ 衡量是开集；

(d) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_{\mathrm{u}}$ 衡量是闭集.

~5. 举一反例证明命题“$(\mathbb{R},\mathscr{T}_{\mathrm{u}})$ 的无限个开子集之交为开”不真.

~6. 试证§1.2 例 5 中定义的诱导拓扑满足定义 1 的 3 个条件.

7. 举例说明 $(\mathbb{R}^3,\mathscr{T}_{\mathrm{u}})$ 中存在不开不闭的子集.

~8. 常值映射 $f:(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 是否连续?为什么?

~9. 设 $\mathscr{T}$ 为集 X 上的离散拓扑，$\mathscr{S}$ 为集 Y 上的凝聚拓扑，

(a) 找出从 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的全部连续映射；

(b) 找出从 $(Y,\mathscr{S})$ 到 $(X,\mathscr{T})$ 的全部连续映射.

~10. 试证定义 3a 与 3b 的等价性.

11. 试证任一开区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚.

12. 设 X_1 和 X_2 是 $\mathbb{R}$ 的子集，$X_1\equiv(1,2)\cup(2,3)$，$X_2\equiv(1,2)\cup[2,3)$. 以 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 分别代表由 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑在 X_1 和 X_2 上的诱导拓扑. 拓扑空间 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是否连通?

13. 任意集合 X 配以离散拓扑 $\mathscr{T}$ 所得的拓扑空间是否连通?

~14. 设 $A\subset B$，试证(a) $\bar{A}\subset\bar{B}$；提示：$A\subset B$ 表明 $\bar{B}$ 是含 A 的闭集. (b) $\mathrm{i}(A)\subset\mathrm{i}(B)$.

~15. 试证 $x\in\bar{A}\Leftrightarrow x$ 的任一邻域与 A 之交集非空. 对 $\Rightarrow$ 证明的提示：设 $O\in\mathscr{T}$ 且 $O\cap A=\varnothing$，先证 $A\subset X-O$，再证(利用闭包定义) $\bar{A}\subset X-O$.

16. 试证 $\mathbb{R}$ 不是紧致的.

第2章　流形和张量场

§2.1　微 分 流 形

物理学离不开背景空间. 例如，牛顿力学和电动力学研究$\mathbb{R}^3$中的物体和电磁场随时间的演化，统计物理和哈密顿理论经常用到相空间，狭义相对论的时空以$\mathbb{R}^4$为背景等. 通俗地说，这些空间都是“连续”的而不是由分立的点构成的. 广义相对论的时空也是一个“连续的 4 维空间”，它局部地看像$\mathbb{R}^4$，但不一定就是$\mathbb{R}^4$. 然而“连续”一词意义尚不明确. 微分流形(简称流形)就是带有微分结构的各种“连续空间”的准确提法. $\mathbb{R}^n$是最简单的n维流形. 粗略地说，微分流形是带有微分结构的拓扑空间，局部地看像$\mathbb{R}^n$，整体上看可以不同于$\mathbb{R}^n$. 准确定义如下：

定义1　拓扑空间$(M,\mathscr{T})$称为 ***n* 维微分流形**(n-dimensional differentiable manifold)，简称n维流形，若M有开覆盖$\{O_\alpha\}$，即$M=\bigcup_\alpha O_\alpha$(见§1.2 定义 11)，满足(a)对每一$O_\alpha$ ∃ 同胚$\psi_\alpha : O_\alpha \to V_\alpha$($V_\alpha$是$\mathbb{R}^n$用通常拓扑衡量的开子集)；(b)若$O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$，则复合映射$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$(见图 2-1)是$C^\infty$(光滑)的.①

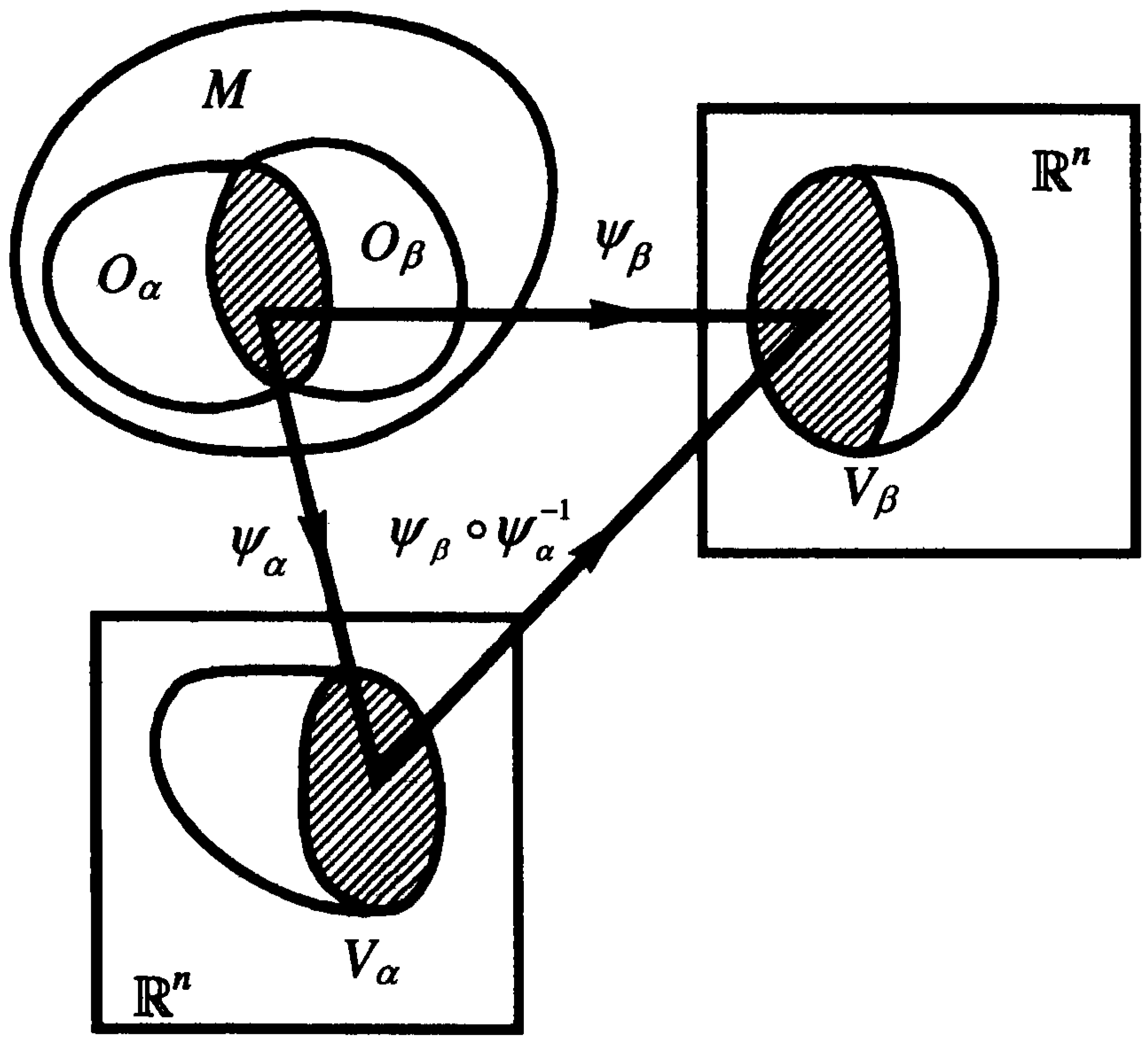


图 2-1　流形定义用图

$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$是$\psi_\alpha^{-1}$(先)和$\psi_\beta$(后)的复合映射

---

① 定义1是光滑流形的一般定义. 本书(以及通常在物理中)涉及的流形M还满足以下附加条件：作为拓扑空间，M是 Hausdorff 的和第二可数的(均见§1.3). 今后谈到流形都指这种流形.

注 1 ①$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$是从$\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset \mathbb{R}^n$到$\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset \mathbb{R}^n$的映射．因$\mathbb{R}^n$的每点有 n 个自然坐标，故$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$提供了 n 个 n 元函数(参见§1.1 注4)．所谓$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$是$C^\infty$的，就是指这每一个$n$元函数都是$C^\infty$的($n$元函数的$C^\infty$性在微积分中早有定义)．[①] ②设$p \in O_\alpha$，则$\psi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$，故$\psi_\alpha(p)$点有 n 个自然坐标．很自然地把这 n 个数称为 p 点在映射ψ_α下获得的**坐标**. M 作为拓扑空间，其元素本来一般没有坐标，但作为流形，M 中位于O_α内的元素(点)就可通过映射ψ_α获得坐标．若$O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$，则$O_\alpha \cap O_\beta$内的点既可通过$\psi_\alpha$又可通过$\psi_\beta$获得坐标，这两组坐标一般不同．我们说$(O_\alpha, \psi_\alpha)$构成一个(局域)**坐标系**(coordinate system)，其**坐标域**(coordinate patch)为O_α；(O_β, ψ_β)构成另一坐标系，其坐标域为O_β．于是$O_\alpha \cap O_\beta$内的点至少有两组坐标，分别记作$\{x^\mu\}$和$\{x'^\nu\}$(μ, $\nu=1,\cdots, n$)．由映射$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$提供的、体现两组坐标之间关系的 n 个 n 元函数

$$x'^1 = \phi^1(x^1,\cdots,x^n), \qquad \cdots, \qquad x'^n = \phi^n(x^1,\cdots,x^n)$$

就称为一个**坐标变换**(coordinate transformation)．定义 1 条件(b)保证坐标变换中的函数关系$x'^\mu = \phi^\mu(x^1,\cdots,x^n)$都是$C^\infty$的．为方便起见也常称$\{x^\mu\}$为坐标系，虽然从$\{x^\mu\}$中看不出坐标域的范围．物理学家也常把$x'^\mu = \phi^\mu(x^1,\cdots,x^n)$记作$x'^\mu = x'^\mu(x^1,\cdots,x^n)$.

定义 2 坐标系(O_α, ψ_α)在数学上又叫**图**(chart)，满足定义1条件(a)、(b)的全体图的集合$\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$叫**图册**(atlas)．条件(b)又称**相容性**(compatibility)**条件**，因此说一个图册中的任意两个图都是相容的．

例 1 设$M = (\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_u)$．选$O_1 = \mathbb{R}^2$，$\psi_1$=恒等映射(即像与逆像重合的映射)，则$\{(O_1, \psi_1)\}$便是只含一个图的图册，故$\mathbb{R}^2$是 2 维流形，而且是能用一个坐标域覆盖的流形，称为**平凡**(trivial)**流形**．根据这个图册，$\mathbb{R}^2$中每点的坐标就是它作为$\mathbb{R}^2$的元素天生就有的自然坐标．$\mathbb{R}^2$的点当然也可用其他坐标(如极坐标)描述．其实这无非是选择与图(O_1, ψ_1)相容的另一个图(O_2, ψ_2)，其中ψ_2把$p \in O_2$映为$\psi_2(p) \in \mathbb{R}^2$，再把$\psi_2(p)$的自然坐标称为 p 点的新坐标而已．但应注意坐标域O_2未必能包括$\mathbb{R}^2$的全体点(例如极坐标)．

同理可知$\mathbb{R}^n$是 n 维平凡流形．

例 2 设$M = (S^1, \mathscr{S})$，其中$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - o| = 1\}$是以原点 o 为心的单位圆周，$\mathscr{S}$是$\mathbb{R}^2$的$\mathscr{T}_u$在S^1上诱导的拓扑．由于S^1与$\mathbb{R}$并不同胚(见§1.2 例

---

① 定义1的流形是光滑流形的简称．把条件(b)的C^∞改为C^r(r为含零自然数)就成为C^r流形的定义．

7)，把 $(S^1, \mathscr{T})$ 定义为流形的任何图册不能只含一个图. 设 $\{x^1, x^2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的自然坐标，O_1^+，O_1^-，O_2^+，O_2^- 是如下定义的"开半圆"：$O_i^+ = \{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^i > 0\}$，$O_i^- = \{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^i < 0\}$，$i = 1, 2$，则 $\{O_i^\pm\}$ 可覆盖 S^1. 定义从 $O_i^\pm$ 到 $\mathbb{R}$ 的开区间 $(-1, 1)$ 的同胚映射 $\psi_i^\pm$ 为如下的"投影映射"：$\psi_1^\pm((x^1, x^2)) = x^2$，$\psi_2^\pm((x^1, x^2)) = x^1$，则易证(习题)开半圆交叠区满足相容性条件，可见 S^1 是 1 维流形. 其实，只用含有两个图的图册就可覆盖 S^1，有余力的读者可自行证明.

例 3　设 $M = (S^2, \mathscr{T})$，其中 $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - o| = 1\}$ 是以原点 o 为心的单位球面，$\mathscr{T}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 $\mathscr{T}_u$ 在 S^2 上诱导的拓扑. 仿照上例的方法，用 6 个开半球面覆盖 S^2，并定义从每个开半球面到 $\mathbb{R}^2$ 的相应开圆盘的同胚映射[Wald(1984)]，通过证明交叠区满足相容性条件就可证明 S^2 是 2 维流形. 也可证明只用两个图即可覆盖 S^2. 地球表面可看作 S^2，它局部看来像 $\mathbb{R}^2$，你从北京市地图($\mathbb{R}^2$)无法看出人类生存在一个球面上. 反之，地球仪则清楚地告诉你，地球表面整体而言不是 $\mathbb{R}^2$.

设图册 $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 把拓扑空间 M 定义为一个流形，则此图册中的任意两个图自然是相容的. 但也可用另一图册 $\{(O'_\beta, \psi'_\beta)\}$ 把同一个 M 定义为流形，这时有两种可能：①这两个图册互不相容，即存在 O_α 和 O'_β 使 $O_\alpha \cap O'_\beta \neq \varnothing$，且在 $O_\alpha \cap O'_\beta$ 上 ψ_α 与 ψ'_β 不满足定义 1 条件(b)，这时就说这两个图册把 M 定义为两个不同的微分流形，并说这两个图册代表两种不同的**微分结构**(对微分结构的概念须逐渐体会，不要求一步到位.)；②这两个图册是相容的，这时就说它们把 M 定义为同一个微分流形(只有一种微分结构). 为方便起见，不妨把 $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)；(O'_\beta, \psi'_\beta)\}$ 看成一个图册. 更进一步，索性把所有与 (O_α, ψ_α) 相容的图都放到一起造出一个最大的图册. 今后说到 M 是一个流形时，总是默认已选定某一最大图册作为微分结构. 这使我们可以进行任意坐标变换.

微分流形与拓扑空间的重要区别是前者除有拓扑结构外还有微分结构，因此两个流形之间的映射不但可谈及是否连续，还可谈及是否可微，乃至是否 C^∞. 设 M 和 M' 是两个流形，维数依次为 n 和 n'，$\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 和 $\{(O'_\beta, \psi'_\beta)\}$ 依次为两者的图册，$f: M \to M'$ 是一个映射(见图 2-2). $\forall p \in M$，任取坐标系 (O_α, ψ_α) 使 $p \in O_\alpha$ 及坐标系 (O'_β, ψ'_β) 使 $f(p) \in O'_\beta$，则 $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ 是从 $V_\alpha \equiv \psi_\alpha[O_\alpha]$ 到 $\mathbb{R}^{n'}$ 的映射，因此相应于 n' 个 n 元函数，它们的 C^r 性可用以定义 $f: M \to M'$ 的 C^r 性.

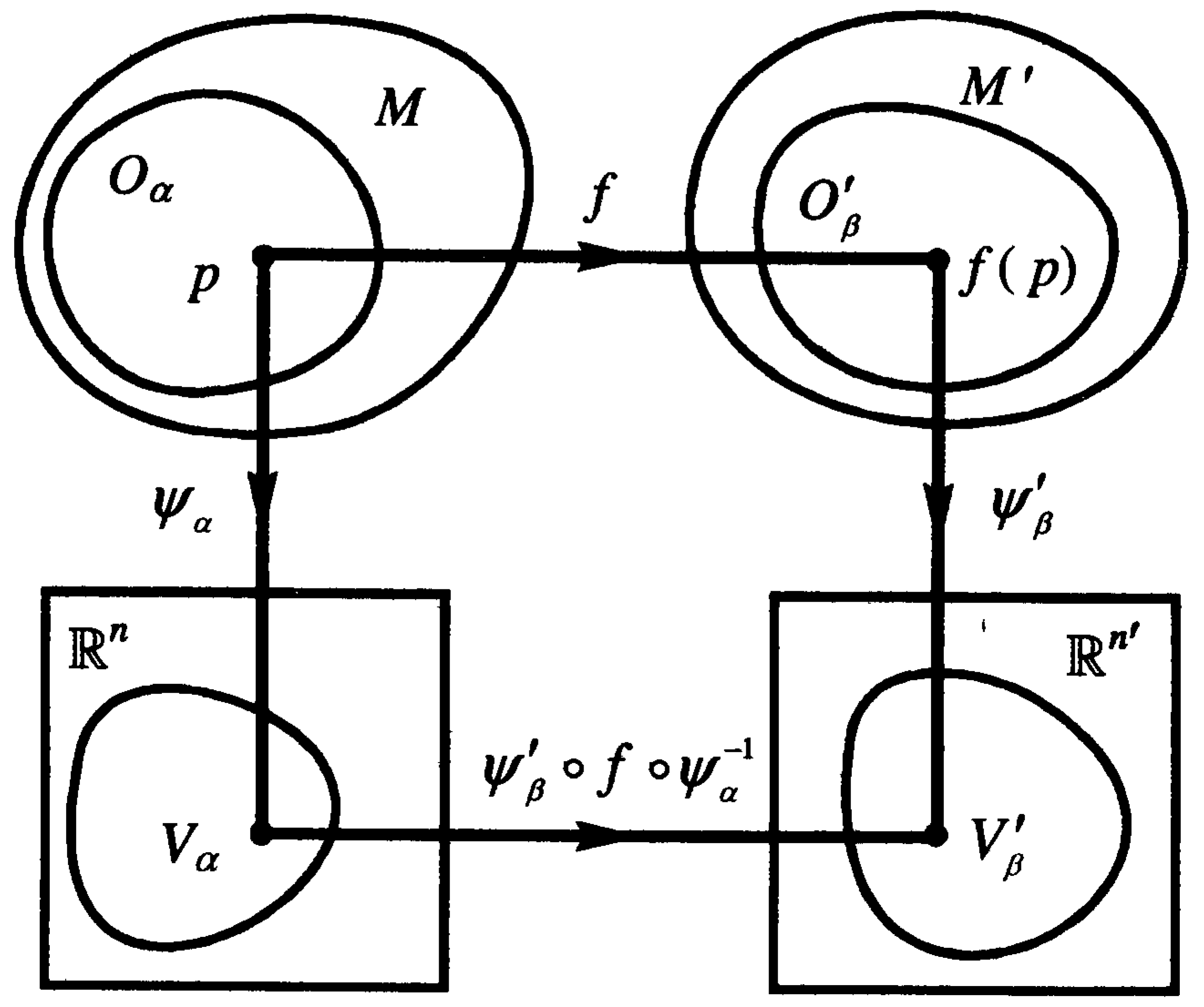


图 2-2　映射$\psi'_\beta\circ f\circ\psi_\alpha^{-1}$对应于$n'$个$n$元函数，其$C^r$性用以定义$f$的$C^r$性

定义 3　$f: M\to M'$称为**C^r类映射**，如果$\forall p\in M$，映射$\psi'_\beta\circ f\circ\psi_\alpha^{-1}$对应的$n'$个$n$元函数是$C^r$类的.

注 2　由于同一图册中各图相容，上述定义与坐标系(O_α,ψ_α)及$(O'_\beta,\ \psi'_\beta)$的选择无关.

定义 4　微分流形M和M'称为**互相微分同胚**(diffeomorphic to each other)，若$\exists f: M\to M'$，满足(a) f是一一到上的；(b) f及f^{-1}是C^∞的. 这样的f称为从M到M'的**微分同胚映射**，简称**微分同胚**(diffeomorphism).

注 3　①微分同胚是对流形间的映射可以提出的最高要求(若流形上还有附加结构则当别论)，互相微分同胚的流形可以视作相等. ②只有维数相等的流形才可能微分同胚. ③定义 1 对$\psi_\alpha: O_\alpha\to V_\alpha$的要求是同胚而不是微分同胚，因微分同胚是流形间的关系，而当时尚无流形概念. 但讲完定义 4 后自然要问：把定义 1 的O_α和V_α看作流形，ψ_α是否微分同胚？答案是肯定的，有余力的读者可自行证明. 由此可进一步体会“流形M局部看来像$\mathbb{R}^n$”的含义.

映射$f: M\to M'$的一个重要而简单的特例是$M'=\mathbb{R}$的情况. 这时M的每点对应着一个实数，于是有如下定义：

定义5　$f: M\to\mathbb{R}$称为 **M上的函数**(function on M)或 **M上的标量场**(scalar field on M). 若f为C^∞的，则称为**M上的光滑函数**. M上全体光滑函数的集合记作$\mathscr{F}_M$，在不会混淆时简记为$\mathscr{F}$. 今后在提到函数而不加声明时都是指光滑函数.

例 4　$\mathbb{R}^3$中位于q点的点电荷的电势是流形$M\equiv\mathbb{R}^3-\{q\}$上的光滑函数.

例 5　坐标系$(O,\ \psi)$的第μ坐标x^μ是定义在O上的光滑函数，有兴趣的读者可证明它满足光滑函数的定义.

函数$f: M\to\mathbb{R}$与坐标系$(O,\ \psi)$结合可得一个n元函数$F(x^1,\cdots,x^n)$，因为n

个坐标决定 O 中唯一的点 p ，而由 $f: M \to \mathbb{R}$ 可得唯一的实数 $f(p)$. 然而 f 与另一坐标系 (O', ψ') 结合将给出另一 n 元函数 $F'(x'^1, \cdots, x'^n)$ ，函数关系 F 和 F' 不同，因为 $F = f \circ \psi^{-1}$ 而 $F' = f \circ \psi'^{-1}$. 可见与函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 相应的多元函数(指函数关系)是坐标系依赖的. 应注意区分函数(标量场) f 和它与坐标系结合而得的多元函数 F.

设 M, N 为流形，则它们必为拓扑空间，故 $M \times N$ 也是拓扑空间. 不难利用 M, N 的流形结构把 $M \times N$ 进一步定义为流形[见 Wald(1984)P.13]. 设 M, N 的维数分别为 m, n, 则 $M \times N$ 的维数是 $m+n$, 即 $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

§2.2　切矢和切矢场

2.2.1　切矢量

先复习线性代数中矢量空间(即线性空间)的定义.

定义 1　实数域上的一个**矢量空间**(vector space)是一个集合 V 配以两个映射，即 $V \times V \to V$ [叫**加法**(addition)]及 $\mathbb{R} \times V \to V$ [叫**数乘**(scalar multiplication)]，满足如下条件：

(a) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$,　$\forall\, v_1, v_2 \in V$;

(b) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$,　$\forall\, v_1, v_2, v_3 \in V$;

(c) $\exists$ 零元 $\underline{0} \in V$ 使 $\underline{0} + v = v$,　$\forall\, v \in V$;

(d) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)\, v$,　$\forall\, v \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;

(e) $(\alpha_1 + \alpha_2)\, v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$,　$\forall\, v \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;

(f) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$,　$\forall\, v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(g) $1 \cdot v = v$,　$\forall\, v \in V$.

注 1　由此 7 条可推出：(1) $0 \cdot v = \underline{0}$, (2) $\forall\, v \in V\; \exists\, u \in V$ 使 $v + u = \underline{0}$. 约定把 u 记作 $-v$.

今后也常把 V 的零元简写作 0，即符号 0 既代表 $0 \in \mathbb{R}$ 又代表 $\underline{0} \in V$ ，读者应能根据行文或等式自我识别.

从代数上看，满足定义 1 的任一集合都叫矢量空间，其中任一元素都叫矢量. 设 p 是 3 维欧氏空间的一点，V_p 是从 p 出发的各种方向和长度的直线段(箭头 $\vec{v}$)的集合，定义两箭头的加法为按平行四边形法则求合箭头，定义数乘 $\alpha \vec{v}$ ($\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ ，$\vec{v} \in V_p$)为保持箭头方向(在 $\alpha < 0$ 时则取反方向)而把长度改为 $|\alpha|$ 倍的操作，则 V_p 按定义 1 就是一个矢量空间，故从 p 点出发的每一箭头是一个矢量. 我们希望把这种矢量概念推广到任意流形 M，即希望给 M 的任一点 p 定义无数个矢量，使它们的集合构成 p 点的矢量空间. 由于“直线段”、“方向”和“长度”

对一般流形没有(或尚无)定义，用箭头定义矢量的做法不能直接推广至一般流形. 为了推广，应抓住箭头的本质的、便于推广的特性. 设 $\vec{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任一点 p 的一个箭头，则对 $\mathbb{R}^3$ 上的任一 C^∞ 函数 f 就可沿 $\vec{v}$ 求方向导数，这导函数在 p 点的值是一个实数. 可见 $\vec{v}$ 是一个把 f 变为实数的映射. 以 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 上所有光滑函数的集合，则 $f\in\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$，故 $\vec{v}$ 是从 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，即 $\vec{v}:\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}\to\mathbb{R}$. 由于求方向导数的操作有线性性并满足莱布尼茨律，我们终于找到箭头 $\vec{v}$ 的本质的、便于推广的特性：它是一个从 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$ 到 $\mathbb{R}$ 的、满足莱布尼茨律的线性映射. 推广到任意流形 M 的任意点 p，便有如下定义：

定义 2　映射 $v:\mathscr{F}_M\to\mathbb{R}$ 称为**点 $p\in M$ 的一个矢量**(vector)，若 $\forall f,\ g\in\mathscr{F}_M$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 有

(a) (线性性) $v(\alpha f+\beta g)=\alpha v(f)+\beta v(g)$；

(b) (莱布尼茨律) $v(fg)=f|_p\, v(g)+g|_p\, v(f)$，其中 $f|_p$ 代表函数 f 在 p 点的值，亦可记作 $f(p)$.

注 2　因 f 和 g 是 M 上的函数，故 fg 也是 M 上的函数，它在 M 的任一点 p 的值定义为 $f(p)$ 与 $g(p)$ 之积.

[选读 2-2-1]

定理 2-2-1　设 $f_1, f_2\in\mathscr{F}_M$ 在点 $p\in M$ 的某邻域 N 内相等，即 $f_1|_N=f_2|_N$，则对 p 的任一矢量 v 有 $v(f_1)=v(f_2)$.

证明　先证两个引理.

引理 1　若 $f\in\mathscr{F}_M$ 是零值函数，即 $f|_p=0\ \forall p\in M$，则对 p 点的任一矢量 v 有 $v(f)=0$.

引理 1 证明　$\forall g\in\mathscr{F}_M$ 有 $f+g=g$，由 v 作用的线性性得

$$v(g)=v(f+g)=v(f)+v(g),$$

故 $v(f)=0$. □

引理 2　若 $f\in\mathscr{F}_M$ 在 $p\in M$ 的某邻域 N 内为零，即 $f|_N=0$，则对 p 点的任一矢量 v 有 $v(f)=0$.

引理 2 证明　令 $h\in\mathscr{F}_M$ 满足 $h|_{M-N}=0,\ h|_p\neq 0$，则 $fh|_M=0$，由引理 1 可得 $v(fh)=0$. 另一方面，由莱布尼茨律又得 $v(fh)=f|_p\, v(h)+h|_p\, v(f)=h|_p\, v(f)$，故 $h|_p\, v(f)=0$. 注意到 $h|_p\neq 0$，便有 $v(f)=0$. □

现在就可证明定理 2-2-1. 令 $f\equiv f_1-f_2$，则 $f|_N=0$，由引理 2 知 $v(f)=0$. 另一方面，由线性性又知 $v(f)=v(f_1-f_2)=v(f_1)-v(f_2)$，于是 $v(f_1)=v(f_2)$. □

注 3　定义 2 规定 p 点的矢量 v 只能作用于 $f\in\mathscr{F}_M$. 若函数 f 只在点 $p\in M$ 的邻域 $U(\neq M)$ 上有定义，即 $f\in\mathscr{F}_U$，$f\notin\mathscr{F}_M$，则 $v(f)$ 无意义. 然而总可找到 $\bar{f}\in\mathscr{F}_M$

及 p 的邻域 $N\subset U$ 使 $\bar{f}|_N=f|_N$，因而可把 $v(f)$ 定义为 $v(\bar{f})$. 虽然对同一 f 有无数满足上述要求的 $\bar{f}$，但定理 2-2-1 保证 $v(\bar{f})$ 对所有 $\bar{f}$ 都一样. 所以用 $v(\bar{f})$ 给 $v(f)$ 下定义合法. 这一结论很有用. 例如，设 (O,ψ) 是 M 的一个坐标系，则第 μ 坐标 x^μ 是 O 上(而非 M 上)的函数，但仍可合法地谈及 O 的任一点 p 的矢量 v 对 x^μ 的作用，即 $v(x^\mu)$ 有意义.

[选读 2-2-1 完]

根据定义 2，要定义 p 点的一个矢量只须指定一个从 $\mathscr{F}_M$ 到 $\mathbb{R}$ 的、满足条件(a)、(b)的映射，就是说，指定一个对应规律(法则)，根据这一规律，每一 $f\in\mathscr{F}_M$ 对应于一个确定的实数. 因为这种映射很多，所以 p 点有很多(无限多)矢量. 例如，设 (O,ψ) 是坐标系，其坐标为 x^μ，则 M 上任一光滑函数 $f\in\mathscr{F}_M$ 与 (O,ψ) 结合得 n 元函数 $F(x^1,\cdots,x^n)$，借此可给 O 中任一点 p 定义 n 个矢量，记作 X_μ(其中 $\mu=1,\cdots,n$)，它(们)作用于任一 $f\in\mathscr{F}_M$ 的结果 $X_\mu(f)$ 定义为如下实数

$$X_\mu(f):=\left.\frac{\partial F(x^1,\cdots,x^n)}{\partial x^\mu}\right|_p,\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M, \tag{2-2-1}$$

其中 $\partial F(x^1,\cdots,x^n)/\partial x^\mu|_p$ 是 $\partial F/\partial x^\mu|_{(x^1(p),\cdots,x^n(p))}$ 的简写. 今后也把 $\partial F(x^1,\cdots,x^n)/\partial x^\mu$ 简写为 $\partial f(x^1,\cdots,x^n)/\partial x^\mu$ 或 $\partial f(x)/\partial x^\mu$ 甚至 $\partial f/\partial x^\mu$，读者应能认出 $\partial f/\partial x^\mu$ 中的 f 代表 n 元函数 $F(x^1,\cdots,x^n)$ 而非标量场 f. 于是式(2-2-1)可简写为

$$X_\mu(f):=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_p,\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-1'}$$

定理 2-2-2 以 V_p 代表 M 中 p 点所有矢量的集合，则 V_p 是 n 维矢量空间(n 是 M 的维数)，即 $\dim V_p=\dim M\equiv n$.

证明

(A) 按以下三式分别定义加法、数乘和零元，不难验证 V_p 满足定义 1，故为矢量空间.

(1) $(v_1+v_2)(f):=v_1(f)+v_2(f)$，$\forall f\in\mathscr{F}_M$，$v_1,\ v_2\in V_p$；

(2) $(\alpha v)(f):=\alpha\cdot v(f)$，$\forall f\in\mathscr{F}_M$，$v\in V_p$，$\alpha\in\mathbb{R}$；

(3) 定义零元 $\underline{0}\in V_p$ 满足 $\underline{0}(f)=0$，$\forall f\in\mathscr{F}_M$.

(B) 任选坐标系使坐标域含 p，则式(2-2-1)定义了 p 点的 n 个矢量 X_μ，$\mu=1,\cdots,n$. 欲证它们线性独立. 设有 n 个实数 $\alpha^\mu(\mu=1,\cdots,n)$ 使 $\alpha^\mu X_\mu=\underline{0}$(本书采用爱因斯坦惯例，即重复指标代表对该指标求和，$\alpha^\mu X_\mu$ 是 $\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu X_\mu$ 的简写.)，

由于坐标 $x^\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 可看作坐标域上的函数，上式两边作用于 x^ν 应得相同结果. 根据零元 $\underline{0}$ 的定义[本证明(A)的(3)]，右边作用结果为

$$\underline{0}(x^\nu)=0\,; \tag{2-2-2a}$$

左边作用结果则为

$$\alpha^\mu X_\mu(x^\nu)=\alpha^\mu\partial x^\nu/\partial x^\mu|_p=\alpha^\mu\delta^\nu{}_\mu=\alpha^\nu\,, \tag{2-2-2b}$$

其中第一步用到式(2-2-1)，$\delta^\nu{}_\mu$ 的含义为 $\delta^\mu{}_\nu\equiv\begin{cases}1, & \mu=\nu\,;\\ 0, & \mu\neq\nu\,.\end{cases}$ 对比式(2-2-2a)和(2-2-2-b)可知 $\alpha^\nu=0,\ \nu=1,\cdots,n$. 因而 $X_1,\cdots,X_n$ 线性独立，可见 $\dim V_p\geqslant n$.

(C) 证明 $\forall\, v\in V_p$ 有

$$v=v^\mu X_\mu\,, \tag{2-2-3}$$

其中

$$v^\mu=v(x^\mu)\,. \tag{2-2-3'}$$

[这是最难的一步，证明见 Wald(1984)P.16.]式(2-2-3)表明 V_p 的任一元素都可用 n 个 X_μ 线性表出，式(2-2-3′)说明表出系数就是以 v 作用于 x^μ 所得的实数. (B)和(C)结合表明 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是 V_p 的一个基底，因而 $\dim V_p=n$. □

定义3 坐标域内任一点 p 的 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 称为 V_p 的一个**坐标基底**(coordinate basis)，每个 X_μ 称为一个**坐标基矢**(coordinate basis vector)，$v\in V_p$ 用 $\{X_\mu\}$ 线性表出的系数 v^μ 称为 v 的**坐标分量**(coordinate components).

定理 2-2-3 设 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\nu\}$ 为两个坐标系，其坐标域的交集非空，p 为交集中的一点，$v\in V_p$，$\{v^\mu\}$ 和 $\{v'^\nu\}$ 是 v 在这两个系的坐标分量，则

$$v'^\nu=\left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p v^\mu\,, \tag{2-2-4}$$

其中 x'^ν 是两系间坐标变换函数 $x'^\nu(x^\sigma)$ 的简写.

证明 先求 p 点的两组坐标基矢 $\{X_\mu\}$ 和 $\{X'_\nu\}$ 的关系. 由 X_μ 的定义可知 $\forall f\in\mathscr{F}_M$ 有

$$X_\mu(f)=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_p\,,\qquad X'_\nu(f)=\left.\frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\nu}\right|_p\,,$$

其中 $f(x)$ 和 $f'(x')$ 是由标量场 $f:M\to\mathbb{R}$ 分别同坐标系 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\nu\}$ 结合而得的 n 元函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $f'(x'^1,\cdots,x'^n)$ 的简写. 设 q 是两坐标域交集内的任一点，则标量场 f 在 q 点的值 $f|_q$ 满足 $f|_q=f(x(q))=f'(x'(q))$，简记为 $f(x)=f'(x')$. 另一方面，每一 x'^ν 又是 n 个 x^μ 的函数(坐标变换关系)，简记为 $x'^\nu=x'^\nu(x)$，故

$f(x)=f'(x'(x))$. 于是

$$X_\mu(f)=\left.\frac{\partial f'(x'(x))}{\partial x^\mu}\right|_p=\left(\frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)_p=\left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X'_\nu(f)\ , \qquad \forall f\in\mathscr{F}_M .$$

上式表明映射 X_μ 和 $(\partial x'^\nu/\partial x^\mu)|_p X'_\nu$ 相等，即

$$X_\mu=\left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X'_\nu . \tag{2-2-5}$$

所以 $v=v^\mu X_\mu=v'^\nu X'_\nu$ 可表为

$$v^\mu\left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X'_\nu=v'^\nu X'_\nu .$$

因 $\{X'_\nu\}$ 中的 n 个基矢彼此线性独立，故得式(2-2-4). □

式(2-2-4)称为**矢量**(的分量)**变换式**，许多书籍采用此式作为矢量定义.

下面介绍曲线及其切矢的定义.

定义 4　设 I 为 $\mathbb{R}$ 的一个区间，则 C^r 类映射 $C:I\to M$ 称为 M 上的一条 C^r 类的**曲线**(curve). 今后如无声明，“曲线”均指光滑(C^∞ 类)曲线. 对任一 $t\in I$，有唯一的点 $C(t)\in M$ 与之对应(见图 2-3). t 称为曲线的**参数**(parameter).

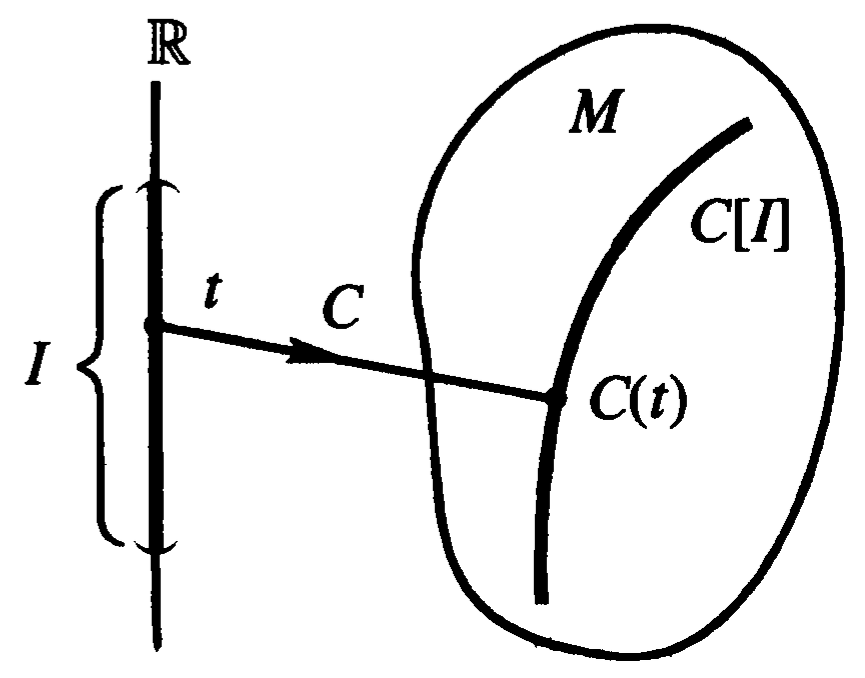


图 2-3　映射 $C:I\to M$ 称为 M 中的曲线

注 4　此处的曲线与直观的曲线概念有密切联系，但也有差别. 直观的曲线往往是指上述映射 $C:I\to M$ 的像，即 M 的子集 $C[I]$(见图 2-3)，并且不提及参数. 上述定义的曲线则是指映射本身，是“带参数的曲线”.[①] 设映射 $C:I\to M$ 和 $C':I'\to M$ 的像重合(见图 2-4)，则直观上往往认为它们是同一曲线，但只要 C 和 C' 是不同映射，根据定义 4，它们就是不同曲线. 不过在大多数情况下可以说 C 和 C' 是“同一曲线”的两种参数化，准确地说，曲线 $C':I'\to M$ 称为曲线 $C:I\to M$ 的**重参数化**(reparametrization)，若 ∃ 到上映射 $\alpha:I\to I'$，满足(a) $C=C'\circ\alpha$；(b)由 α 诱导的函数 $t'=\alpha(t)$ 有处处非零的导数. 解

① 但也存在这样的曲线映射 $C:I\to M$，其像竟然铺满整个 M，很不像直观上的曲线.

释：由 $C = C' \circ \alpha$ 得

$$C(t) = C'(\alpha(t)) = C'(t'), \qquad \forall t \in I .$$

映射 α 的到上性保证 $C'[I'] = C[I]$，即两曲线映射有相同的像.①

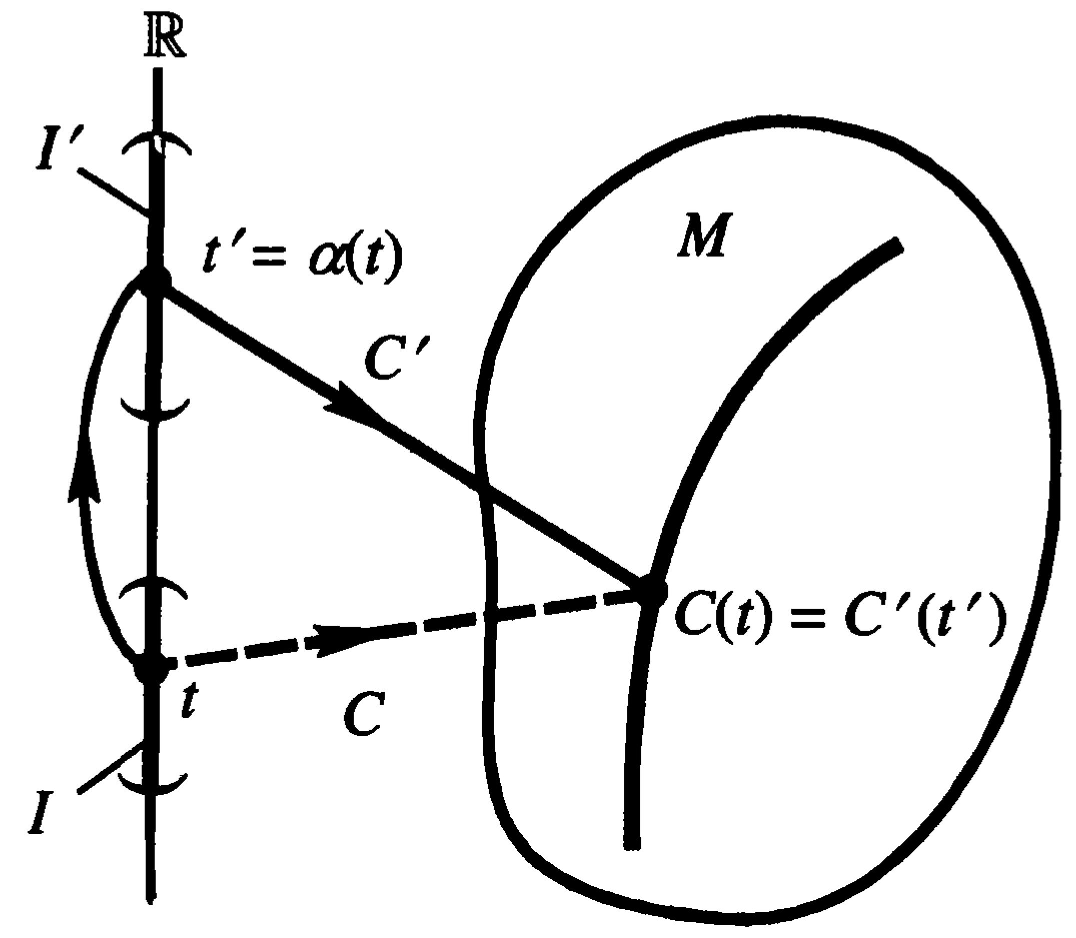


图 2-4　曲线的重参数化

注 5　①曲线 C 的像也常记作 $C(t)$（而不是 $C[I]$），以表明曲线的参数为 t. 应注意，若 t 为某一具体值（“死的”），则 $C(t)$ 只代表曲线像中的一点；只当把 t 理解为“可跑遍 I”时（“活的”），$C(t)$ 才代表曲线的像. 往往也把曲线的像简称为曲线，读者应能根据行文分辨“曲线”一词是指映射还是其像. ②设 (O,ψ) 是坐标系，$C[I] \subset O$，则 $\psi \circ C$ 是从 $I \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，相当于 n 个一元函数 $x^\mu = x^\mu(t)$，$\mu = 1, \cdots, n$. 这 n 个等式称为曲线的**参数方程**或**参数表达式**或**参数式**. 一个简单例子是 $\mathbb{R}^2$ 中以原点为心的单位圆周，其在自然坐标系中的参数式为 $x^1 = \cos t$，$x^2 = \sin t$.

定义 5　设 (O,ψ) 为坐标系，x^μ 为坐标，则 O 的子集

$$\{p \in O \mid x^2(p) = 常数, \cdots, x^n(p) = 常数\}$$

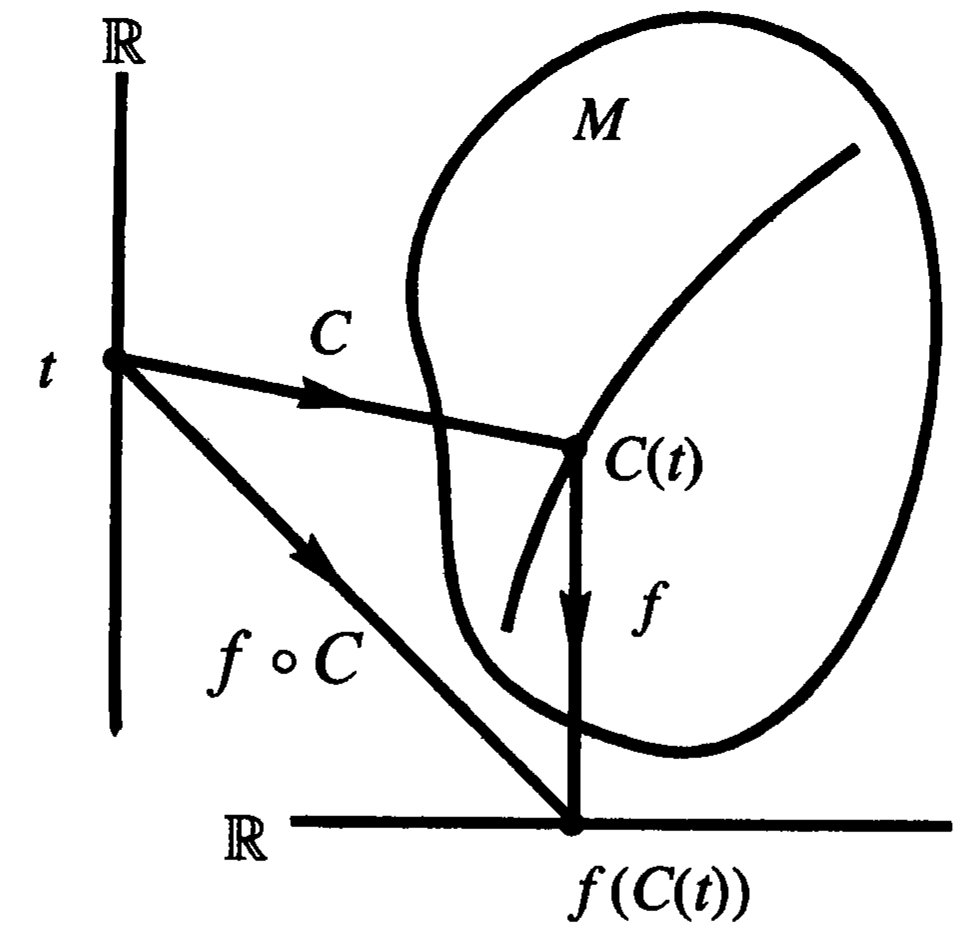


图 2-5　M 上函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 与曲线 C 结合得映射 $f \circ C : I \to \mathbb{R}$，即一元函数 $f(C(t))$

① α 满足条件(b)保证 α 有一一性，加上到上性便知 C 也是 C' 的重参数化.

可看成以 x^1 为参数的一条曲线(的像)(改变 $x^2,\cdots,x^n$ 的常数值则得另一曲线)，叫做 x^1 **坐标线**(coordinate line). x^μ **坐标线**可仿此定义.

例1　在2维欧氏空间中，笛卡儿系 $\{x,\ y\}$ 的 x 及 y 坐标线是互相正交的两组平行直线，极坐标系 $\{r,\ \varphi\}$ 的 φ 坐标线是以原点为心的无数同心圆，r 坐标线是从原点出发的无数半直线.

现在讨论曲线的切矢. 直观的想法认为曲线上一点有无限多个彼此平行的切矢. 但若把曲线定义为映射("带参数的曲线")，则一条曲线的一点只有一个切矢. 定义如下：

定义6　设 $C(t)$ 是流形 M 上的 C^1 曲线，则线上 $C(t_0)$ 点的切于 $C(t)$ 的**切矢**(tangent vector) T 是 $C(t_0)$ 点的矢量，它对 $f\in\mathscr{F}_M$ 的作用定义为

$$T(f):=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C)}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0},\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-6}$$

注6　① $f:M\to\mathbb{R}$ 是 M 上的函数(标量场)，不是什么一元函数，但与曲线 $C:I\to M$ 的结合 $f\circ C$ 便是以 t 为自变数的一元函数[也可记作 $f(C(t))$，见图2-5.]. 在不会混淆的情况下，$\mathrm{d}(f\circ C)/\mathrm{d}t$ 也可简写为 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$. ② $C(t_0)$ 点切于 $C(t)$ 的切矢 T 也常记作 $\partial/\partial t\,|_{C(t_0)}$，于是式(2-2-6)也可写成

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{C(t_0)}(f):=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C)}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f(C(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0},\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-6$'$}$$

例2　x^μ 坐标线是以 x^μ 为参数的曲线，由式(2-2-1)定义的 p 点的坐标基矢 X_μ 就是过 p 的 x^μ 坐标线的切矢，故也常记作 $\partial/\partial x^\mu\,|_p$，于是式(2-2-1′)又可表为

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p(f):=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_p\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-6$''$}$$

可见符号 $\partial f/\partial x^\mu$ 既可理解为 $\partial F(x^1,\cdots,x^n)/\partial x^\mu$ [见式(2-2-1)]，又可理解为坐标线的切矢 $\partial/\partial x^\mu$ 对标量场 f 的作用.

定理2-2-4　设曲线 $C(t)$ 在某坐标系中的参数式为 $x^\mu=x^\mu(t)$，则线上任一点的切矢 $\partial/\partial t$ 在该坐标基底的展开式为

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{2-2-7}$$

就是说，曲线 $C(t)$ 的切矢 $\partial/\partial t$ 的坐标分量是 $C(t)$ 在该系的参数式 $x^\mu(t)$ 对 t 的导数.

证明　练习.　□

定义7　非零矢量 $v,\ u\in V_p$ 称为**互相平行的**(parallel)，若 $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ 使 $v=\alpha u$.

由定义6可知曲线的切矢依赖于曲线的参数化，一条曲线 $C(t)$ 的一点 $C(t_0)$ 只

有一个切于 $C(t)$ 的切矢. 直观上之所以认为曲线上一点有无数(互相平行的)切矢，是因为把曲线理解为映射的像而不是映射本身(把无数个有相同的像的曲线映射“简并化”为一条曲线). 下面的定理表明，若两条曲线 C 和 C' 的像相同，则它们在任一像点的切矢互相平行.

定理 2-2-5 设曲线 $C' : I' \to M$ 是 $C: I \to M$ 的重参数化，则两者在任一像点的切矢 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial t'$ 有如下关系

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}t'(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t'}, \tag{2-2-8}$$

其中 $t'(t)$ 是由映射 $\alpha : I \to I'$ (见注 4)诱导而得的一元函数，即 $\alpha(t)$.

证明 任一 $f \in \mathscr{F}_M$ 分别与 C 和 C' 结合诱导出一元函数 $f(C(t))$ 和 $f(C'(t'))$，简记为 $f(t)$ 和 $f'(t')$. 设 $t \in I$ 在 $(C'^{-1} \circ C)$ 映射下的像为 t'，则 $f(t) = f'(t'(t))$ (如图 2-6)，故

$$\frac{\partial}{\partial t}(f) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f'(t'(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f'(t')}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t'}(f)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t'}\right)(f), \qquad \forall f \in \mathscr{F}_M,$$

因而有式(2-2-8). □

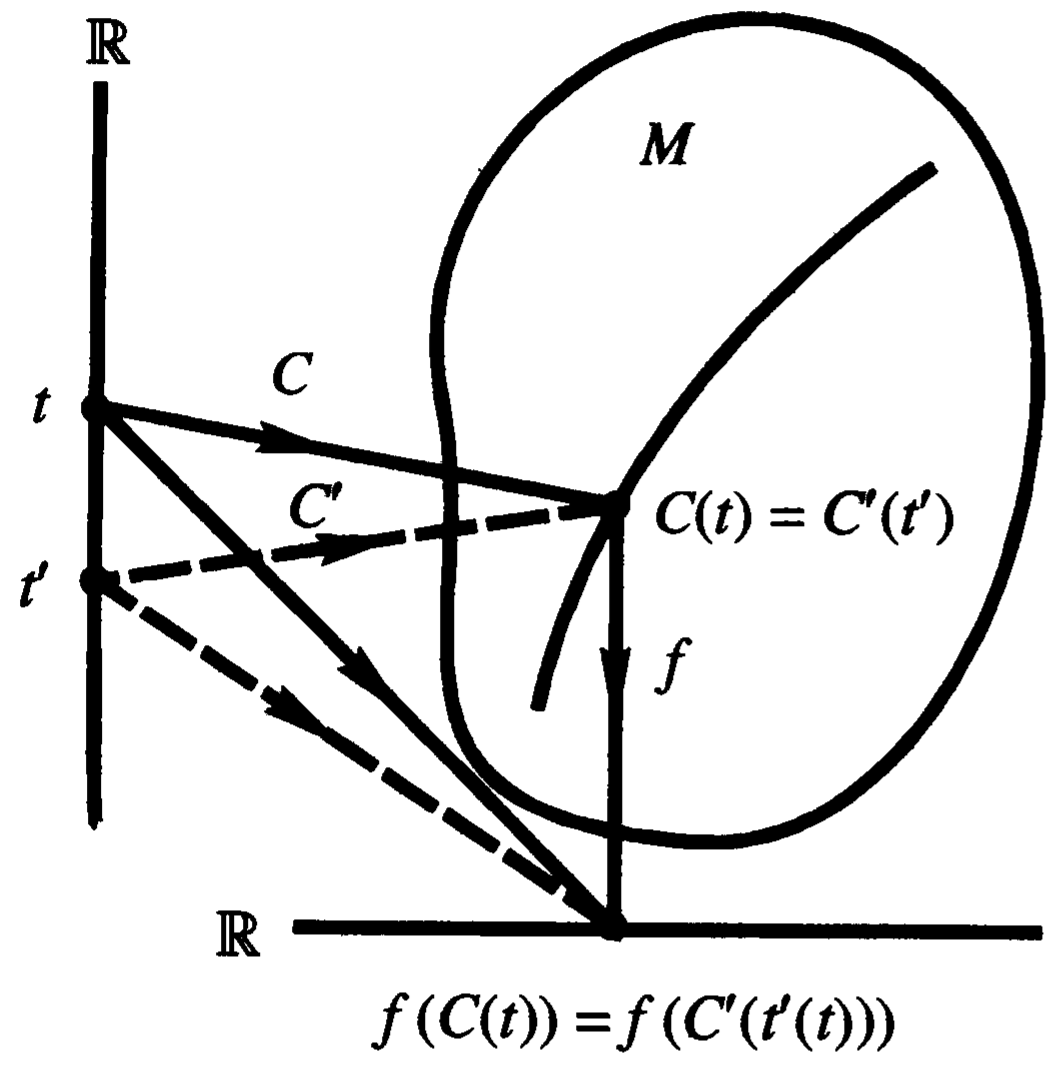


图 2-6　定理 2-2-5 证明用图

由定义 6 可知，$\forall p \in M$，若指定任一曲线 $C(t)$ 使 $p = C(t_0)$，则 V_p 中必有一元素可被视为该曲线在 $C(t_0)$ 点的切矢. 现在问：指定 V_p 中任一元素 v，可否找到过 p 的曲线，其在 p 点的切矢是 v？答案是肯定的：这种曲线不但存在，而且很多(图 2-7 是直观表示). 例如，任选坐标系 $\{x^\mu\}$ 使 p 含于其坐标域内，则以

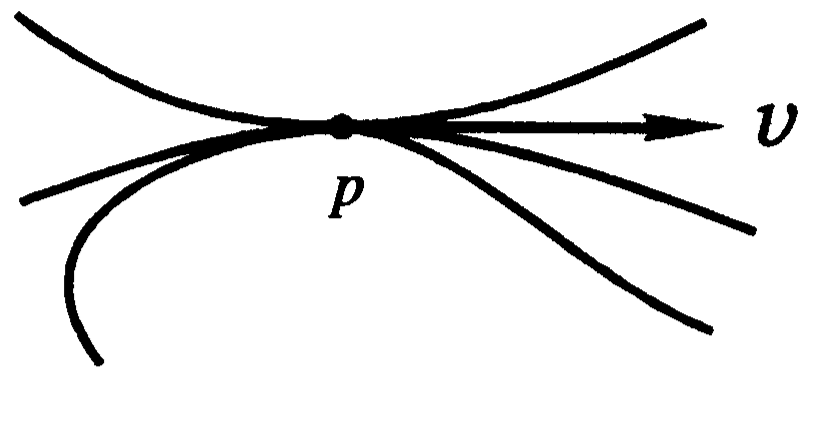


图 2-7　p 点的矢量 v 是许多曲线的共同切矢

$x^\mu(t)=x^\mu|_p+v^\mu t$ 为参数式的曲线便是所需曲线，其中 v^μ 是 v 在该系的坐标分量.

综上所述，V_p 中任一元素可视为过 p 的某曲线的切矢，因此 p 点的矢量亦称**切矢量**(tangent vector)，v 则称为 p 点的**切空间**(tangent space).

2.2.2　流形上的矢量场

定义 8　设 A 为 M 的子集. 若给 A 中每点指定一个矢量，就得到一个定义在 A 上的**矢量场**(vector field).

例 3　非自相交曲线 $C(t)$ 上每点的切矢构成 $C(t)$ (看作 M 的子集)上的一个矢量场.

设 v 是 M 上的矢量场，f 是 M 上的函数，则 v 在 M 的任一点 p 的值 $v|_p$ 将按定义 2 把 f 映射为一个实数 $v|_p(f)$，它在 p 点跑遍 M 时构成 M 上的一个函数 $v(f)$. 因此，矢量场 v 可视为把函数 f 变为函数 $v(f)$ 的映射.

定义 9　M 上的矢量场 v 称为 **C^∞ 类(光滑)的**，若 v 作用于 C^∞ 类函数的结果为 C^∞ 类函数，即 $v(f)\in\mathscr{F}_M$，$\forall f\in\mathscr{F}_M$. v 称为 **C^r 类的**，若 v 作用于 C^∞ 类函数得 C^r 类函数.

今后如无声明，"矢量场"均指光滑(C^∞)矢量场.

例 4　(1)坐标基矢 $\{X_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu\}$ 构成坐标域上的 n 个光滑矢量场，叫**坐标基矢场**. (2) $\mathbb{R}^3$ 中位于 q 点的点电荷的静电场强 $\vec{E}$ 是流形 $M\equiv\mathbb{R}^3-\{q\}$ 上的光滑矢量场.

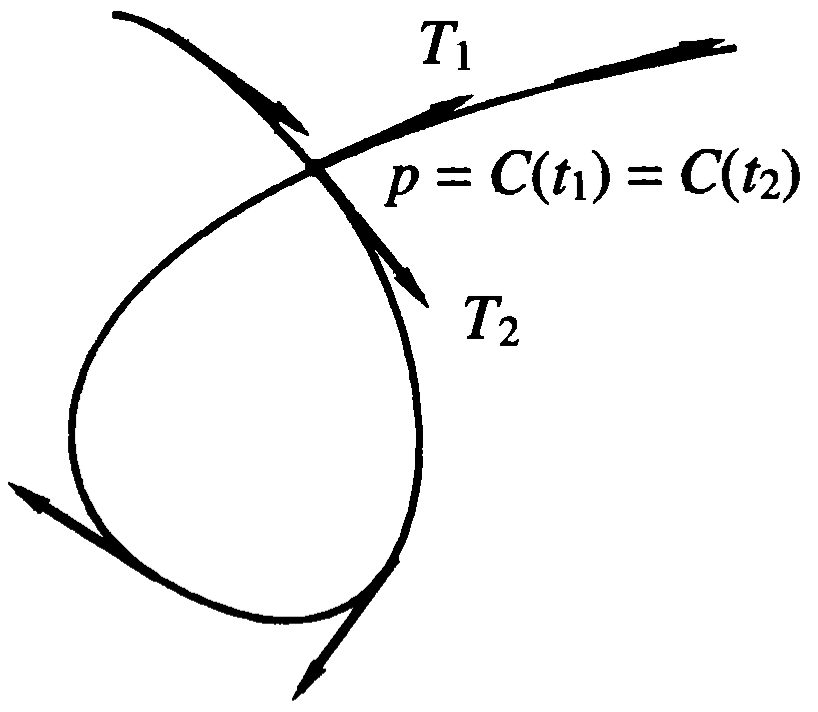


图 2-8　自相交曲线 $C[I]$ 上一点 p 有两个切矢 T_1 和 T_2，但仍可谈及沿曲线(映射) C 的切矢场

[选读 2-2-2]

若 $C: I\to M$ 是自相交曲线，即 $\exists\ t_1,t_2\in I$ 使 $C(t_1)=C(t_2)\equiv p\in M$，则 p 点有两个切矢，故不能说切矢是定义在 $C(t)$ (指映射 C 的像)上的矢量场. 然而可定义**沿曲线**(指映射 C)**的矢量场**(vector field along C)的概念[可参见 Spivak(1970) Vol.II, P.247; Sachs and Wu(1977)P.36~37.]，它是指每一 $t\in I$ 对应于一个 $v\in V_{C(t)}$ 的映射，其定义域是 I 而不是 M 的子集 $C[I]$，因此这矢量场可记作 $v(t)$. 对图 2-8

的情况，“曲线 $C[I]$ 上的切矢场”和“曲线 $C[I]$ 在 p 点的切矢”的提法都无意义，但“沿曲线 C 的切矢场” $T(t)$ 有意义，并可分别谈及曲线 C 在 t_1 点的切矢 $T(t_1)$（即图中 T_1）和 C 在 t_2 点的切矢 $T(t_2)$（即图中 T_2）. 本书往往笼统地提到“曲线 $C(t)$ 上的矢量场”，对自相交曲线其实是指沿曲线 C 的矢量场. **[选读 2-2-2 完]**

定理 2-2-6 M 上矢量场 v 是 C^∞(或 C^r)类的充要条件是它在任一坐标基底的分量 v^μ 为 C^∞(或 C^r)类函数.

证明 练习. □

设 v 为 M 上的光滑矢量场，则 $v(f)\in\mathscr{F}_M$，$\forall f\in\mathscr{F}_M$. 若 u 为 M 上另一光滑矢量场，则 $u(v(f))\in\mathscr{F}_M$. 但函数 $u(v(f))$ 未必等于 $v(u(f))$，于是有如下定义：

定义10 两个光滑矢量场 u 和 v 的**对易子**(commutator)是一个光滑矢量场 $[u,v]$，定义为

$$[u,v]\,(f) := u(v(f)) - v(u(f)), \qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-9}$$

注 7 上式是对易子 $[u,v]$（作为矢量场）的定义式，它在每点 $p\in M$ 的值 $[u,v]|_p$（作为 p 点的矢量，即从 $\mathscr{F}_M$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射）的定义应理解为

$$[u,v]|_p\,(f) := u|_p\,(v(f)) - v|_p\,(u(f)) \qquad \forall f\in\mathscr{F}_M. \tag{2-2-9'}$$

要确信上式定义的 $[u,v]|_p$ 是 p 点的矢量，还应证明(习题)它满足定义 2 的两个条件.

定理 2-2-7 设 $\{x^\mu\}$ 为任一坐标系，则 $[\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu]=0$，$\mu,\nu=1,\cdots,n$.

证明 设 $f(x)$ 是 f 与该坐标系相结合而得到的 n 元函数，由微积分学的

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}f(x) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}f(x)$$

立即得证. □

定理 2-2-7 表明任一坐标系的任意两个基矢场都互相对易.①

定义 11 曲线 $C(t)$ 叫矢量场 v 的**积分曲线**(integral curve)，若其上每点的切矢等于该点的 v 值.

定理 2-2-8 设 v 是 M 上的光滑矢量场，则 M 的任一点 p 必有 v 的唯一的积分曲线 $C(t)$ 经过[满足 $C(0)=p$]（“唯一”应理解为“局部唯一”，见选读 2-2-3.）.

证明 任取一坐标系 $\{x^\mu\}$，坐标域含 p. 设待求积分曲线的参数表达式为 $x^\mu = x^\mu(t)$，则由式(2-2-7)知 $x^\mu(t)$ 满足如下的一阶常微分方程组

---

① 反之，设 $X_1,\cdots,X_n$ 是点 $p\in M$ 的某邻域 N 上的 n 个处处线性独立的 C^∞ 矢量场，且

$$[X_\mu, X_\nu]=0\,, \qquad \mu,\nu=1,\cdots,n\,,$$

则必存在坐标系 $\{x^\mu\}$，其坐标域 $O\subset N$ 含 p，且在 O 上有 $X_\mu=\partial/\partial x^\mu$，$\mu=1,\cdots,n$. 这一定理的证明提示见 Wald (1984)第 2 章习题 5. 完整证明可参阅 Spivak(1970) Vol.I, P.219~220.

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}=v^\mu(x^1(t),\cdots,x^n(t)),\qquad \mu=1,\cdots,n\,,$$

其中v^μ是v在该坐标基底场的分量，是$x^1,\cdots,x^n$的已知函数. 由微积分学可知这组方程在给定初始条件$x^\mu(0)$ ($\mu=1,\cdots,n$)下存在唯一解. 给定p点就是给定初始条件，即$x^\mu(0)=x^\mu|_p$，故必有唯一解$x^1(t),\cdots,x^n(t)$，这n个函数确定的曲线就是待求的积分曲线. 还应证明所得曲线与所选坐标系无关，留给读者完成. □

[选读 2-2-3]

定理 2-2-8 中的“唯一”应理解为“局部唯一”. 设你找到v的一条积分曲线$C:(a,b)\to M$，且$0\in(a,b)$，$C(0)=p$，你的朋友总可选取含 0 的较小区间$(a',b')\subset(a,b)$并定义新曲线$C':(a',b')\to M$为$C'(t)=C(t)\ \forall t\in(a',b')$. 映射$C'$与$C$的定义域不等，故$C'\neq C$. 在这个意义上说，过$p$点的积分曲线并不唯一. 然而，$C$不过是$C'$的延拓，两者在局部上相同，只要把“唯一”理解为“局部唯一”，定理 2-2-8 就成立.

谈到延拓，自然要问：是否总可把积分曲线C的定义域由区间(a,b)延拓至全$\mathbb{R}$？答案是否定的. 以下的简单例子有助于理解. 定义曲线$C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$为$C(t):=(0,t)\in\mathbb{R}^2\ \forall t\in\mathbb{R}$. 这一曲线映射的像就是$\mathbb{R}^2$中的$x^2$坐标轴. 不难看出这是矢量场$\partial/\partial x^2$的过$(0,0)$点的积分曲线. 如果把$\mathbb{R}^2$的“上半部”挖去，把所余部分取作流形$M$，明确地说，把$M$定义为$M:=\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2|x^2<1\}$，则映射$C$在$t\geqslant 1$处无像，其定义域只是开区间$(-\infty,1)$而非$\mathbb{R}$. 这一定义域不能再延拓，所以映射$C:(-\infty,1)\to M$称为$M$上矢量场$\partial/\partial x^2$的不可延(inextendible)积分曲线. 于是定理 2-2-8 又可表为：

定理 2-2-8′　设v是M上的光滑(其实C^1已足够)矢量场，则M中任一点p必有v的唯一的不可延积分曲线$C(t)$经过[满足$C(0)=p$].　　**[选读 2-2-3 完]**

下面要用到群论的初步知识，故补充如下定义(关于李群和李代数的理论详见下册)：

定义12　一个群(group)是一个集合 G 配以满足以下条件的映射$G\times G\to G$ (叫**群乘法**，元素g_1和g_2的乘积记作g_1g_2)：

(a) $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)$，$\forall g_1,g_2,g_3\in G$；

(b) $\exists$ **恒等元**(identity element) $e\in G$ 使 $eg=ge=g$，$\forall g\in G$；

(c) $\forall g\in G,\exists$ **逆元**(inverse element) $g^{-1}\in G$ 使 $g^{-1}g=gg^{-1}=e$.

对称性在物理学中有重要意义，群论是研究对称性的有力工具. 如果某一对象在某一变换下不变，就说它具有该变换下的对称性. 以图 2-9 为例，考虑带电面上的一个动点，它沿x(或y)轴平移. 由于动点的电荷面密度σ在平移时不变，我们说σ具有沿x(和y)轴的平移对称性. 更明确地说，σ沿x轴的平移对称性是

指函数$\sigma(x,y,z)$满足

$$\sigma(x,y,z)=\sigma(x+a,y,z),\quad \forall a\in\mathbb{R}, \tag{2-2-10}$$

其中

$$x\mapsto x+a,\qquad y\mapsto y,\qquad z\mapsto z \tag{2-2-11}$$

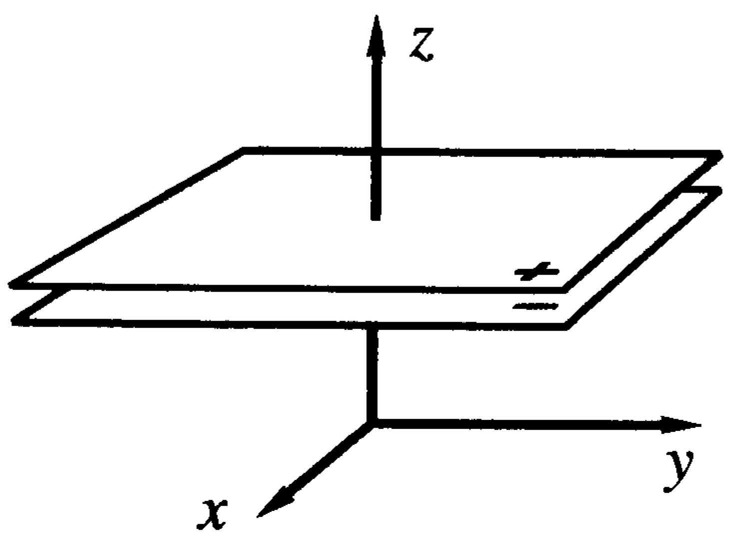


图 2-9　平板电容器的电荷分布具有沿 x 和 y 轴的平移对称性

所代表的点变换称为沿x轴的一个**平移**(translation). 设G是沿x轴的所有平移的集合，则G中的元素由实数a表征，记作$\phi_a\in G$. 把$p\equiv(x,y,z)$和$q\equiv(x+a,y,z)$看作$\mathbb{R}^3$的点，则变换式(2-2-11)相当于映射$\phi_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$[满足$\phi_a(p)=q$]，而且是微分同胚映射. 再者，对$G$用下式定义群乘法

$$\phi_a\phi_b:=\phi_{a+b},\qquad \forall\phi_a,\phi_b\in G, \tag{2-2-12}$$

则G构成群(ϕ_0是恒等元，ϕ_{-a}是ϕ_a的逆元.). 这个群的无限多个元素可用实数a表征，因此称a为**参数**，称G为**单参数群**(one-parameter group). 又因每一群元$\phi_a\in G$都是$\mathbb{R}^3$上的一个微分同胚，故又称G为$\mathbb{R}^3$上的**单参微分同胚群**. 为帮助读者理解一般流形上单参微分同胚群的定义，先做一点铺垫. 设M是流形，则$\mathbb{R}\times M$是比M高一维的流形(见§2.1 末段). 设ϕ是从$\mathbb{R}\times M$到M的映射(即$\phi:\mathbb{R}\times M\to M$)，则它能把一个实数$t\in\mathbb{R}$和一个点$p\in M$变为一个点$\phi(t,p)\in M$. 也可形象地说$\phi$是一部机器，记作$\phi(\cdot,\cdot)$，有两个输入槽，一旦输入原料$t\in\mathbb{R}$和$p\in M$就给出产品$\phi(t,p)\in M$. 如果只输入$t\in\mathbb{R}$，则得半成品$\phi(t,\cdot)$，这也是一部机器，再输入$p\in M$后便给出产品$\phi(t,p)\in M$. 通常把$\phi(t,\cdot)$简记作$\phi_t$，即$\phi_t:M\to M$. 另一方面，如果在$\phi(\cdot,\cdot)$中先输入$p\in M$，便得半成品$\phi(\cdot,p)$，这也是一部机器，有待输入的是$t\in\mathbb{R}$. 通常把$\phi(\cdot,p)$简记作$\phi_p$，即$\phi_p:\mathbb{R}\to M$.

定义13　C^∞映射$\phi:\mathbb{R}\times M\to M$称为$M$上的一个**单参微分同胚群**(one-parameter group of diffeomorphisms)，若

(a) $\phi_t:M\to M$是微分同胚$\forall t\in\mathbb{R}$；

(b) $\phi_t\circ\phi_s=\phi_{t+s}$，$\forall t,s\in\mathbb{R}$.

注 8　集合$\{\phi_t|\ t\in\mathbb{R}\}$是以复合映射为乘法的群，各群元$\phi_t$是从$M$到$M$的微分同胚映射，$\phi_0$是恒等元[由定义13(b)知$\phi_t\circ\phi_0=\phi_t$，故$\phi_0$是恒等映射.]. 所谓$\phi:\mathbb{R}\times M\to M$是$M$上的一个单参微分同胚群，其实是指集合$\{\phi_t|\ t\in\mathbb{R}\}$是一个单参微分同胚群.

设$\phi:\mathbb{R}\times M\to M$是单参微分同胚群，则$\forall p\in M$，$\phi_p:\mathbb{R}\to M$是过$p$点的

一条光滑曲线[满足 $\phi_p(0)=p$]，叫做这个单参微分同胚群过 p 点的**轨道**(orbit). 把这条曲线在点 $\phi_p(0)$ 的切矢记作 $v|_p$，便得 M 上的一个光滑矢量场 v. 可见 M 上的一个单参微分同胚群给出 M 上的一个光滑矢量场. 再看逆命题是否成立. 设 v 是 M 上的光滑矢量场，看来 $\forall t\in\mathbb{R}$ 可借用其积分曲线定义从 M 到 M 的微分同胚映射 ϕ_t [$\forall p\in M$，定义 $\phi_t(p)$ 为这样一个点，它位于过 p 的积分曲线上，其参数值与 p 的参数值之差为 t.]. 于是似乎可得到一个单参微分同胚群. 然而可能出现如下问题：某条积分曲线当参数取某些值时像点不存在(人为挖去 M 的某一区域就可造出这种情况)，因此只能说 M 上的一个光滑矢量场给出一个单参微分同胚局部群，见选读 2-2-4.

[选读 2-2-4]

设矢量场 v 过 p 点的积分曲线 C 的参数取值范围不能遍及 $\mathbb{R}$ (见选读 2-2-3 第二段)，即 $\exists t\in\mathbb{R}$ 使 $C(t)$ 不是 M 的点，则正文定义的 ϕ_t 不是从 M 到 M 的映射[至少像点 $\phi_t(p)$ 不存在]，更谈不上从 M 到 M 的微分同胚. 然而可以证明，$\forall p_0\in M$，总可找到 p_0 的开邻域 U 以及 $\mathbb{R}$ 中含 0 的开区间 I，使正文的映射 ϕ 限制在 $I\times U$ 上有意义(即存在映射 $\phi: I\times U\to M$)，具体定义为 $\forall t\in I$, $\phi_t: U\to M$ 是这样的映射，它把任一 $p\in U$ 映为过 p 的积分曲线上与 p 的参数差为 t 的点(读者不妨借选读 2-2-3 第二段的简例理解). 而且，还可证明 $\phi: I\times U\to M$ 有以下性质：

(a) $\forall t\in I$, $\phi_t: U\to\phi_t[U]$ 是微分同胚映射；

(b) 若 $t,s,t+s\in I$ (意指实数 t,s 和 $t+s$ 都在开区间 I 内)，则 $\phi_t\circ\phi_s=\phi_{t+s}$.

这样的 $\{\phi_t\,|\,t\in I\}$ 称为 p 点的**单参微分同胚局部群**(one-parameter local group of diffeomorphisms)或**单参微分同胚族**(one-parameter family of diffeomorphisms).

矢量场称为**完备的**(complete)，若它的每条(不可延)积分曲线的参数取值范围都是 $\mathbb{R}$. 显然，每个完备的光滑矢量场可以生出一个单参微分同胚群. 可以证明，紧致流形上的任一矢量场都是完备的[本选读参考文献：Hawking and Ellis(1973) P.27；Straumann(1984)P.21, 22.].　**[选读 2-2-4 完]**

§2.3　对偶矢量场

定义1　设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的有限维矢量空间. 线性映射 $\omega: V\to\mathbb{R}$ 称为 V 上的**对偶矢量**(dual vector). V 上全体对偶矢量的集合称为 V 的**对偶空间**，记作 V^*. ①

注 1　由于 V 上有加法和数乘，对映射 ω 的线性要求有确切含义，即

$$\omega(\alpha v+\beta u)=\alpha\omega(v)+\beta\omega(u),\qquad \forall v,\,u\in V,\qquad \alpha,\,\beta\in\mathbb{R}. \tag{2-3-1}$$

例 1　设 V 为全体 2×1 实矩阵的集合，则它在矩阵加法和数乘规则下构成 2

① 今后谈及 V 上的对偶矢量(及张量，见§2.4)时如无声明一律默认 V 是实数域上的有限维矢量空间.

维矢量空间. 以ω代表任一1×2实矩阵(c,d)，其对V的任一元素$v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$的作用可用矩阵乘法定义：

$$\omega(v):=(c,\ d)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(ac+bd)\ ,$$

结果是一个1×1实矩阵，可认同为一个实数$ac+bd$. 这样定义的映射$\omega: V\to\mathbb{R}$显然是线性的，可见任一1×2实矩阵都是V上的对偶矢量. 推广可知：若把列矩阵($n\times 1$矩阵)看作矢量，则行矩阵($1\times n$矩阵)就是对偶矢量.

定理 2-3-1 V^*是矢量空间，且$\dim V^*=\dim V$.

证明 对V^*定义加法、数乘和零元如下：

$$(\omega_1+\omega_2)(v):=\omega_1(v)+\omega_2(v)\ ,\qquad \forall\ \omega_1,\ \omega_2\in V^*,\ \ v\in V\ ;$$

$$(\alpha\omega)(v):=\alpha\cdot\omega(v),\qquad \forall\omega\in V^*,\ \ v\in V,\ \ \alpha\in\mathbb{R};$$

$$\underline{0}(v):=0\in\mathbb{R},\qquad \forall v\in V\ .$$

不难看出这样的V^*是矢量空间. 设$\{e_\mu\}$是V的一组基矢，用下式定义V^*中的n个特别元素e^{1*}, ⋯, e^{n*}：

$$e^{\mu*}(e_\nu):=\delta^\mu{}_\nu,\qquad \mu,\nu=1,\ \cdots,\ n\ . \tag{2-3-2}$$

上式虽只定义了$e^{\mu*}$对V中基矢的作用，但因$e^{\mu*}$的作用是线性的，上式实际上定义了$e^{\mu*}$对V中任一元素的作用. 现在只须证明$\{e^{\mu*}\}$是V^*的一组基矢. 易证$e^{1*},\cdots,e^{n*}$彼此线性独立(练习). $\forall\omega\in V^*$，令

$$\omega_\mu\equiv\omega(e_\mu),\qquad \mu=1,\cdots,\ n\ , \tag{2-3-3}$$

则易证(习题)

$$\omega=\omega_\mu e^{\mu*}\ . \tag{2-3-4}$$

(提示：上式是对偶矢量等式，注意到ω对v的作用为线性，欲证上式只须验证两边作用于任一基矢e_ν得同一实数). 式(2-3-4)说明V^*中任一元素可用$\{e^{\mu*}\}$线性表出，故$\{e^{\mu*}\}$是V^*的一个基底，叫做$\{e_\mu\}$的**对偶基底**. 由是可知$\dim V^*=\dim V$. □

复习 两个矢量空间叫**同构的**(isomorphic)，若两者间存在一一到上的线性映射(这种映射称为**同构映射**). 两矢量空间同构的充要条件是维数相同.

由于$\dim V^*=\dim V$，V^*与V当然同构. 同构映射不难找到. 例如，设$\{e_\mu\}$是V的一个基底，$\{e^{\mu*}\}$是其对偶基底，则由$e_\mu\mapsto e^{\mu*}$定义的线性映射就是一个同构映射. 但$\{e_\mu\}$的选择十分任意，而基底改变后按上述方式定义的同构映射随之而变，故V^*与V之间不存在一个特殊的(与众不同的)同构映射，除非在V上另加结构(见§2.5).

V^*既然是矢量空间，自然也有对偶空间，记作V^{**}. 有别于V与V^*的关系，V

与V^{**}间存在一个自然的、与众不同的同构映射，定义如下：$\forall v \in V$，欲给它自然地定义一个像$v^{**} \in V^{**}$. 因为V^{**}是V^*的对偶空间，v^{**}应是从V^*到$\mathbb{R}$的线性映射. 对它下定义无非是给出一个规律，按照这一规律，每一$\omega \in V^*$对应于唯一的实数$v^{**}(\omega)$. 因为v^{**}有待定义为v的像，所以$v^{**}(\omega)$与v和ω都应有关，而由v和ω构造的最简单的实数就是$\omega(v)$，自然把v^{**}定义为

$$v^{**}(\omega) := \omega(v) \qquad \forall \omega \in V^* . \tag{2-3-5}$$

这个映射$V \to V^{**}$是同构映射(证明留作习题). 这一自然同构关系表明V和V^{**}可视为同一空间(把每一$v \in V$与其像$v^{**} \in V^{**}$认同). 所以，真正有用的是V和V^*，再取对偶(不论多少次)也得不到更多有用的空间[自然同构的准确含义见Spivak(1979)第 7 章习题 6].

定理 2-3-2　若矢量空间V中有一基底变换$e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$($A^\nu{}_\mu$无非是新基矢$e'_\mu$用原基底展开的第$\nu$分量)，以$A^\nu{}_\mu$为元素排成的(非退化)方阵记作$A$，则相应的对偶基底变换为

$$e'^{\mu *} = (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu e^{\nu *} , \tag{2-3-6}$$

其中$\tilde{A}$是A的转置矩阵，$\tilde{A}^{-1}$是$\tilde{A}$之逆.

注 2　读者习惯于把矩阵元写作$A_{\nu\mu}$，此处则写作$A^\nu{}_\mu$. 区分上下标的目的是使求和更加明朗(上ν同下ν结合暗示对ν求和)以及区分张量类型(详见§2.4). 然而矩阵运算中重要的只是分清指标的前后(体现为左右). 因此，如果愿意，不妨暂时把所有上标都改为下标，例如把式(2-3-6)写作$e'_\mu{}^* = (\tilde{A}^{-1})_{\nu\mu} e_\nu{}^*$.

证明　只须证明等式两边作用于e'_α所得结果相同，证明如下：

$$\begin{aligned}(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu e^{\nu *}(e'_\alpha) &= (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu e^{\nu *}(A^\beta{}_\alpha e_\beta) = A^\beta{}_\alpha (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu e^{\nu *}(e_\beta) \\ &= \tilde{A}_\alpha{}^\beta (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu \delta^\nu{}_\beta = \tilde{A}_\alpha{}^\nu (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu = \delta_\alpha{}^\mu = e'^{\mu *}(e'_\alpha) ,\end{aligned}$$

其中第二个等号用到对偶矢量对矢量的作用的线性性，第三、五个等号分别用到转置矩阵和逆矩阵的定义，第六个等号用到对偶基底的定义式(2-3-2).　□

以上属代数范畴，下面回到流形M. 因$p \in M$有矢量空间V_p，故也有$V_p{}^*$. 若在M(或$A \subset M$)上每点指定一个对偶矢量，就得到M(或A)上的一个**对偶矢量场**. M上的对偶矢量场ω叫做**光滑的**，若$\omega(v) \in \mathscr{F}_M$　$\forall$ 光滑矢量场v.

设$f \in \mathscr{F}_M$，我们来说明f自然诱导出M上的一个对偶矢量场，记作$\mathrm{d}f$(读者熟悉的$\mathrm{d}f$代表函数f的微分. 从微分几何看来，f的微分$\mathrm{d}f$本质上是一个对偶矢量场. 选读 2-3-1 将介绍这一全新理解同经典微积分理解的联系.). 要定义$\mathrm{d}f$只须说明它在M的任一点p的值$\mathrm{d}f|_p \in V_p{}^*$的定义，而要定义$\mathrm{d}f|_p$只须给出它对$p$点任一矢量$v \in V_p$的作用所得的实数，这个实数应与$f$和$v$都有关，而由$f$和$v$能

构造的最自然(最简单)的实数便是$v(f)$，因此定义$\mathrm{d}f|_p$为

$$\mathrm{d}f|_p(v) := v(f), \qquad \forall v \in V_p. \tag{2-3-7}$$

由此易证

$$\mathrm{d}(fg)|_p = f|_p(\mathrm{d}g)|_p + g|_p(\mathrm{d}f)|_p. \tag{2-3-8}$$

这正是微分算符 d 所满足的莱布尼茨律.

设(O,ψ)是一坐标系，则第μ个坐标x^μ可看作O上的函数，于是$\mathrm{d}x^\mu$(看作特殊的$\mathrm{d}f$)是定义在O上的对偶矢量场. 设$p\in O$，$\partial/\partial x^\nu$是V_p的第ν个坐标基矢，则由式(2-3-7)知在p点有

$$\mathrm{d}x^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu) = \delta^\mu{}_\nu,$$

同式(2-3-2)对比可见$\{\mathrm{d}x^\mu\}$正是与坐标基底$\{\partial/\partial x^\nu\}$对应的**对偶坐标基底**. 上式对$O$的任一点成立，因此，同$\partial/\partial x^\nu$是$O$上的第$\nu$个坐标基矢场类似，$\mathrm{d}x^\mu$是$O$上的第$\mu$个对偶坐标基矢场，$\{\mathrm{d}x^\mu\}$则是$O$上的一个对偶坐标基底场. O上任一对偶矢量场ω可借$\{\mathrm{d}x^\mu\}$展开：

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu, \tag{2-3-9}$$

其中ω_μ称为ω在该系的坐标分量，由式(2-3-3)可得其表达式

$$\omega_\mu = \omega\ (\partial/\partial x^\mu). \tag{2-3-10}$$

定理 2-3-3　设(O,ψ)是一坐标系，f是O上的光滑函数，$f(x)$是$f\circ\psi^{-1}$对应的n元函数$f(x^1,\cdots,x^n)$的简写，则$\mathrm{d}f$可用对偶坐标基底$\{\mathrm{d}x^\mu\}$展开如下：

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu, \qquad \forall f \in \mathscr{F}_O. \tag{2-3-11}$$

证明　只须验证两边作用于任一坐标基矢$\partial/\partial x^\nu$得相同结果，甚易. □

定理 2-3-4　设坐标系$\{x^\mu\}$和$\{x'^\nu\}$的坐标域有交，则交域中任一点p的对偶矢量ω在两坐标系中的分量ω_μ和ω'_ν的变换关系为

$$\omega'_\nu = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right|_p \omega_\mu. \tag{2-3-12}$$

证明　习题. □

[选读 2-3-1]

现在讨论对$\mathrm{d}f$的理解. 先谈经典微积分学. 考虑函数$y=f(x)$. 设自变量x在x_0处有增量Δx时函数y的相应增量为Δy. 如果$f(x)$为线性函数，即$y=ax+b$ (a,b为常数)，则$\Delta y=a\Delta x$，即Δy正比于Δx. 如果$f(x)$为非线性函数，则$\Delta y=a\Delta x+\varepsilon$，其中$a\equiv f'(x_0)$，$\varepsilon\neq 0$. 经典微积分把$a\Delta x$称为函数的微分，

记作dy，并证明ε在Δx趋于零时是比Δx高阶的无限小. Δx又可记作$\mathrm{d}x$，于是$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$. 然而“无限小的非零量”是一个非常微妙的概念，涉及许多逻辑问题. 莱布尼茨在提出和使用这一概念时曾受到同时代许多数学家的非议[详见克莱因著，李宏魁译(1997)]，至今还有数学家不以为然[例如，可参阅 Spivak(1979) Vol.I. 该书在P.153指出“无限小”变化$\mathrm{d}x^i$是nonsense(无意义的东西).]. 我们无意讨论这种微妙问题的是非，只想说明近代微分几何已经对函数的微分$\mathrm{d}f$赋予了一种不依赖于“无限小非零量”概念的全新解释：$\mathrm{d}f$是意义十分明确的对偶矢量场. 设$\{x^\mu\}$是流形M的一个坐标系，坐标域为O，f是M上的函数，即$f: M\to\mathbb{R}$，则f诱导出一个n元函数$f(x^1,\cdots, x^n)$. 设$p\in O$，经典微积分企图把$\mathrm{d}f|_p$说成p点的函数值的一个(无限小)增量，但这个增量尚不确定，因为它取决于动点(自变点)从p出发“沿什么方向走多远”. 既然p点的一个矢量v反映“从p出发沿什么方向走多远”，给定$v\in V_p$便可使$\mathrm{d}f|_p$真正“成为”一个实数(增量). 既然$\mathrm{d}f|_p$在给定v后能给出一个实数，$\mathrm{d}f|_p$就是从p点的切空间V_p到$\mathbb{R}$的映射. 为使$\mathrm{d}f|_p$具有经典微积分中的微分的性质，还应要求这个映射为线性，于是$\mathrm{d}f|_p$就是V_p上的一个对偶矢量，$\mathrm{d}f$就是O上的一个对偶矢量场，这是对$\mathrm{d}f$的最明确和最准确的解释.

物理学家往往对$\mathrm{d}f$和Δf不加区别，喜欢说“$\mathrm{d}f|_p$等于$f(q)-f(p)$，其中q是与p无限邻近的点.”而且随手在纸上画出p，q两点. 其实，p，q两点一经指定(在图上标出)就不会无限邻近，$f(q)-f(p)$就不是无限小量，因而就只能是Δf而非$\mathrm{d}f$. 然而，由于物理上常常允许一定的近似，把足够小的Δf近似看作$\mathrm{d}f$的做法不但允许而且往往相当有用. 事实上，设曲线$C(t)$满足$C(0)=p$，$(\partial/\partial t)|_p=v$，$q=C(\alpha)$且$\alpha$足够小，则由式(2-3-7)和(2-2-6′)可知$\mathrm{d}f|_p$对αv作用的结果为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f|_p(\alpha v) &= \alpha v(f) = \alpha \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{f[C(\Delta t)] - f[C(0)]\}\\ &\cong \alpha\frac{1}{\alpha}[f(q)-f(p)] = f(q)-f(p) \equiv \Delta f,\end{aligned}$$

可见$\mathrm{d}f|_p$(作用于αv后)果然近似给出Δf. 爱因斯坦说过：“只要数学规律涉及现实，它们就不是确凿的；只要它们是确凿的，它们就不涉及现实.”作为一本物理书，本书也多处采用以Δf近似代替$\mathrm{d}f$的做法. **[选读 2-3-1 完]**

§2.4 张 量 场

定义 1 矢量空间V上的一个(k,l)**型张量**[tensor of type(k,l)]是一个多重线性映射

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k个} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l个} \to \mathbb{R}.$$

注 1　T 可比喻为一部机器，有 k 个"上槽"和 l 个"下槽"，只要在上、下槽分别输入 k 个对偶矢量和 l 个矢量，便生产出一个实数，且此实数对每个输入量都线性依赖(多重线性映射的含义).

例 1　(1) V 上的对偶矢量是 V 上的(0, 1)型张量. (2) V 的元素 v 可看作 V 上的(1, 0)型张量[因 v 可被认同为 v^{**}，而 v^{**} 是从 V^* 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射.].

今后用 $\mathscr{T}_V(k,l)$ 表示 V 上全体 (k,l) 型张量的集合，于是 $V=\mathscr{T}_V(1,0)$，$V^*=\mathscr{T}_V(0,1)$.

设 $T\in\mathscr{T}_V(1,1)$，则 $T: V^*\times V\to\mathbb{R}$. 但 T 也可看成另一种映射. 因为 $\forall\,\omega\in V^*$，$v\in V$ 有 $T(\omega\,;\,v)\in\mathbb{R}$，所以 $T(\omega\,;\,\bullet)$是一部只有一个下槽的机器，能把一个矢量线性地变为实数，这表明 $T(\omega\,;\,\bullet)$是 V 上的对偶矢量，即 $T(\omega\,;\,\bullet)\in V^*$. 给定 T 后，再给一个 $\omega\in V^*$ 便能造出 $T(\omega\,;\,\bullet)\in V^*$，故 T 也可看作把对偶矢量 ω 变为对偶矢量 $T(\omega\,;\,\bullet)$的映射(而且是线性映射)，即 $T: V^* \xrightarrow[\text{线性地}]{} V^*$. 类似地还可把 T 看成 $T: V \xrightarrow[\text{线性地}]{} V$. 对同一 $T\in\mathscr{T}_V(1,1)$ 的这 3 种看法是等价的. 为便于陈述，我们称这种把同一张量看成不同映射的做法为"张量面面观". 能够用"面面观"想问题是用映射定义张量的重要好处之一. 今后将常用到.

定义 2　V 上的 $(k,\ l)$ 和 $(k',\ l')$ 型张量 T 和 T' 的**张量积**(tensor product) $T\otimes T'$ 是一个 $(k+k',\ l+l')$ 型张量，定义如下

$$\begin{aligned}&T\otimes T'(\omega^1,\cdots,\ \omega^k,\ \omega^{k+1},\cdots,\ \omega^{k+k'};\ v_1,\cdots,v_l,\ v_{l+1},\cdots,\ v_{l+l'})\\&:=T(\omega^1,\cdots,\ \omega^k;\ v_1,\cdots,\ v_l)\ T'(\omega^{k+1},\cdots,\ \omega^{k+k'};\ v_{l+1},\cdots,\ v_{l+l'}).\end{aligned}$$

欧氏空间矢量场论中的并矢 $\vec{v}\vec{u}$ 其实就是矢量 $\vec{v}$ 和 $\vec{u}$ 的张量积，只不过略去 $\otimes$ 号.①

张量积是否满足交换律？设 $\omega\in V^*$，$v\in V\equiv V^{**}$，则 $v\otimes\omega\in\mathscr{T}_V(1,\ 1)$，$\omega\otimes v\in\mathscr{T}_V(1,\ 1)$. 由定义 2 知 $\forall\mu\in V^*$，$u\in V$ 有 $v\otimes\omega\,(\mu\,;\,u)=v\,(\mu)\ \omega\,(u)=\omega\,(u)\,v\,(\mu)=\omega\otimes v\ (\mu\,;\,u)$ [其中 $v(\mu)$ 应理解为 $v^{**}(\mu)$]，故 $v\otimes\omega=\omega\otimes v$. 但两个矢量(或两个对偶矢量)的张量积在交换顺序后一般成为另一张量，即 $v\otimes u\neq u\otimes v$，$\omega\otimes\mu\neq\mu\otimes\omega$. 例如，欧氏空间的并矢就不满足交换律.

定理 2-4-1　$\mathscr{T}_V(k,\ l)$ 是矢量空间，$\dim\mathscr{T}_V(k,l)=n^{k+l}$.

证明

(A) 用自然的方法定义加法、数乘和零元使 $\mathscr{T}_V(k,\ l)$ 成为矢量空间(参见定理

---

① 类似地，量子力学的 $|\psi\rangle|\phi\rangle$ 也是 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 的张量积，只不过略去 $\otimes$ 号. 但量子力学中 $|\psi\rangle$ 所在的矢量空间是复数域上的无限维矢量空间，比现在讨论的实数域上的有限维矢量空间复杂，详见下册附录 B.

2-3-1 证明的前半部分).

(B) 证明其基矢共 n^{k+l} 个. 以 $n=2, k=2, l=1$ 为例(不难推广至一般情况). 设 $\{e_1, e_2\}$ 为 V 的一个基底, $\{e^{1*}, e^{2*}\}$ 为其对偶基底. 只须证明以下 8 个元素构成 $\mathscr{T}_V(2, 1)$ 的一个基底:

$$e_1\otimes e_1\otimes e^{1*}, \quad e_1\otimes e_1\otimes e^{2*}, \quad e_1\otimes e_2\otimes e^{1*}, \quad e_1\otimes e_2\otimes e^{2*},$$
$$e_2\otimes e_1\otimes e^{1*}, \quad e_2\otimes e_1\otimes e^{2*}, \quad e_2\otimes e_2\otimes e^{1*}, \quad e_2\otimes e_2\otimes e^{2*}.$$

先证它们线性独立(留作练习), 再证任意 $T\in\mathscr{T}_V(2, 1)$ 可表为

$$T=T^{\mu\nu}{}_\sigma\, e_\mu\otimes e_\nu\otimes e^{\sigma*}, \tag{2-4-1}$$

其中
$$T^{\mu\nu}{}_\sigma=T(e^{\mu*}, e^{\nu*}; e_\sigma). \tag{2-4-2}$$

证明留作练习[注意, 待证等式(2-4-1)是一个(2, 1)型张量等式]. □

注 2 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 是张量 T 在基底 $\{e_\mu\otimes e_\nu\otimes e^{\sigma*}\}$ 的分量, 简称为 T 在基底 $\{e_\mu\}$ 的分量.

下面介绍张量的另一重要运算, 即缩并. 刚才讲过, (1, 1)型张量 T 可看作从 V 到 V 的线性映射, 其实它就是线性代数所讲的线性变换. T 在任一基底 $\{e_\mu\otimes e^{\nu*}\}$ 的分量排成的矩阵 $(T^\mu{}_\nu)$ 显然与基底有关, 不难证明同一 T 在任意两个基底的分量对应的两个矩阵 $(T^\mu{}_\nu)$ 和 $(T'^\mu{}_\nu)$ 互为相似矩阵, 证明如下. 仿照式(2-4-2)得

$$\begin{aligned}T'^\mu{}_\nu&=T(e'^{\mu*}; e'_\nu)=T((\tilde{A}^{-1})_\rho{}^\mu e^{\rho*}; A^\sigma{}_\nu e_\sigma)=(\tilde{A}^{-1})_\rho{}^\mu A^\sigma{}_\nu T(e^{\rho*}; e_\sigma)\\&=(\tilde{A}^{-1})_\rho{}^\mu A^\sigma{}_\nu T^\rho{}_\sigma=(A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma A^\sigma{}_\nu=(A^{-1}TA)^\mu{}_\nu,\end{aligned} \tag{2-4-3}$$

其中第一、四步用到式(2-4-2), 第二步用到定理 2-3-2, 第三步用到 T 的线性性. 于是有矩阵等式 $T'=A^{-1}TA$ (其中 T', A, T 都代表矩阵. T 有时代表张量有时代表矩阵, 读者应能根据上下文识别.). 可见 T' 与 T 互为相似矩阵. 以 $T'^\mu{}_\mu$ (是 $\sum_{\mu=1}^n T'^\mu{}_\mu$ 的简写)及 $T^\rho{}_\rho$ 分别代表矩阵 T' 和 T 的迹, 则由式(2-4-3)易得

$$T'^\mu{}_\mu=(A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma A^\sigma{}_\mu=A^\sigma{}_\mu(A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma=\delta^\sigma{}_\rho T^\rho{}_\sigma=T^\rho{}_\rho.$$

这就证明了同一(1, 1)型张量在不同基底的矩阵有相同的迹. 在关心张量时, 应该抓住其与基底无关的性质, (1, 1)型张量 T 的迹 $T^\mu{}_\mu$ 就是这样一种性质, 通常把它称为 T 的**缩并**(contraction)或**收缩**, 暂记作 $\mathrm{C}T$, 即

$$\mathrm{C}T:=T^\mu{}_\mu=T(e^{\mu*}; e_\mu). \tag{2-4-4}$$

再讨论(2, 1)型张量 T 的缩并. T 可记作 $T(\cdot,\cdot;\ \cdot)$, 它有两个上槽和一个下槽, 故有两种可能缩并: ①第一上槽与下槽的缩并 $\mathrm{C}_1^1T:=T(e^{\mu*},\cdot;\ e_\mu)$; ②第二上槽与下槽的缩并 $\mathrm{C}_1^2T:=T(\cdot, e^{\mu*};\ e_\mu)$. 若改用另一基底 $\{e'_\rho\}$ 定义这两种缩并, 分别记作 $(\mathrm{C}_1^1T)'$ 和 $(\mathrm{C}_1^2T)'$, 则易证(习题) $(\mathrm{C}_1^1T)'=\mathrm{C}_1^1T$, $(\mathrm{C}_1^2T)'=\mathrm{C}_1^2T$. 由"张量面面观"

可知C_1^1T和C_1^2T都是(1, 0)型张量，它们在任一基底的分量可用T在该基底的分量表为$(C_1^1T)^\nu = T(e^{\mu *}, e^{\nu *}; e_\mu) = T^{\mu\nu}{}_\mu$，$(C_1^2T)^\nu = T^{\nu\mu}{}_\mu$(已略去求和号). 不难推广上述讨论而得出$(k, l)$型张量的缩并定义如下：

定义 3　$T \in \mathscr{T}_V(k, l)$的第$i$上标($i \leqslant k$)与第$j$下标($j \leqslant l$)的**缩并**定义为

$$C_j^i T := T(\cdot, \cdots, e^{\mu *}, \cdot, \cdots; \cdot, \cdots, e_\mu, \cdot, \cdots) \in \mathscr{T}_V(k-1, l-1) \text{ (要对}\mu\text{求和).}$$

　　　↑　　　　　　↑

　　第i上槽　　　第j下槽　　　(2-4-5)

注 3　①$C_j^i T$与基底选择无关. ②由式(2-4-5)易见(k, l)型张量的每一缩并都是一个$(k-1, l-1)$型张量. ③联合使用张量积和缩并运算可从原有张量得到各种类型的新张量. 例如，设$v \in V$, $\omega \in V^*$，则$v \otimes \omega$是(1, 1)型张量，而$C(v \otimes \omega)$则是(0, 0)型张量(标量).

后面经常遇到先求张量积再做缩并的运算，其结果可看作张量对矢量(或对偶矢量)的作用. 作为例子，先写出 3 个等式再做证明.

(a)　$C(v \otimes \omega) = \omega_\mu v^\mu = \omega(v) = v(\omega)$，　$\forall v \in V, \ \omega \in V^*$，　(2-4-6)

(其中v^μ，ω_μ是v，ω在同一基底的分量.)

(b)　$C_2^1(T \otimes v) = T(\cdot, v)$，　$\forall v \in V, \ T \in \mathscr{T}_V(0, 2)$.　(2-4-7)

(c)　$C_2^2(T \otimes \omega) = T(\cdot, \omega; \cdot)$，　$\forall \omega \in V^*, \ T \in \mathscr{T}_V(2, 1)$.　(2-4-8)

我们只给出式(2-4-7)的证明，其他两式的证明留作练习. 待证的等式(2-4-7)左边的$T \otimes v$是(1, 2)型张量，是一部有 1 个上槽、2 个下槽的机器，可表为$T \otimes v(\cdot; \cdot, \cdot)$，故

$$C_2^1(T \otimes v) = T \otimes v(e^{\mu *}; \cdot, e_\mu),$$

所以欲证等式(2-4-7)只须证明下式

$$T \otimes v(e^{\mu *}; \cdot, e_\mu) = T(\cdot, v). \qquad (2\text{-}4\text{-}7')$$

而上式是对偶矢量等式，欲证上式只须证明两边作用于任一$u \in V$给出相同实数.

左边作用于$u = T \otimes v(e^{\mu *}; u, e_\mu) = T(u, e_\mu)\ v(e^{\mu *})$

$$= T(u, e_\mu)\ e^{\mu *}(v) = T(u, e_\mu)\ v^\mu = T(u, v) = \text{右边作用于 } u.$$

(其中第四步用到习题 11)，可见式(2-4-7)成立.

除以上三式外还有许多类似等式. 这些等式是如下规律的表现：“T对ω(或v)作用就是先求T与ω(或v)的张量积再缩并”，或者粗略地说，“作用就是先积后并”. 对两个张量先求张量积再缩并的操作常又简称为对它们做缩并，因此上述粗略提法还可简化为“作用就是缩并”.

下面回到流形M. M中任一点p的切空间V_p的全体(k, l)型张量的集合自然记

作 $\mathscr{T}_{V_p}(k,l)$. 设 $\{e_\mu\}$ 及 $\{e^{\mu *}\}$ 是 V_p 的任一基底及对偶基底，则 T 同样可写成类似于式(2-4-1)的展开式. 若选坐标系 $\{x^\mu\}$ 使坐标域含 p，则可用坐标基矢 $\partial/\partial x^\mu$ 和对偶坐标基矢 dx^μ 充当 e_μ 和 $e^{\mu *}$，即把式(2-4-1)改写为

$$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \otimes dx^\sigma, \tag{2-4-1$'$}$$

其中坐标分量 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 仿照式(2-4-2)可表为

$$T^{\mu\nu}{}_\sigma = T(dx^\mu,\ dx^\nu;\ \partial/\partial x^\sigma). \tag{2-4-2$'$}$$

若在流形 M(或 $A \subset M$)上每点指定一个 $(k,\ l)$ 型张量，就得到 M(或 A)上的一个 $(k,\ l)$ 型**张量场**. M 上张量场 T 称为**光滑的**，若 $\forall$ 光滑对偶矢量场 $\omega^1,\ \cdots,\ \omega^k$ 及光滑矢量场 $v_1, \cdots, v_l$ 有 $T(\omega^1,\ \cdots,\ \omega^k;\ v_1, \cdots,\ v_l) \in \mathscr{F}_M$. 今后如无声明，"张量场"均指光滑($C^\infty$)张量场.

定理 2-4-2　$(k,\ l)$型张量在两个坐标系中的分量的变换关系为(简称**张量变换律**)

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1 \cdots \rho_k}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_l}.$$

证明　练习.　□

注 4　许多教科书采用上式作为张量定义.

§2.5　度规张量场

定义 1　矢量空间 V 上的一个**度规**(metric) g 是 V 上的一个对称、非退化的(0, 2)型张量. 对称是指 $g(v,\ u) = g(u,\ v)\quad \forall v,\ u \in V$，非退化是指 $g(v,u) = 0\ \forall u \in V \Rightarrow v = 0 \in V$.

注 1　这一抽象的非退化性定义与读者熟悉的矩阵的非退化性(行列式非零)有密切联系. 可以证明[见式(2-6-8)后的一段]，若 g 非退化，则它在 V 的任一基底 $\{e_\mu\}$ 的分量 $g_{\mu\nu} \equiv g(e_\mu,\ e_\nu)$ 排成的矩阵也非退化. 反之，若 V 有基底使 g 的分量矩阵非退化，则 g 非退化.

度规很像大家熟悉的内积. 但上述度规 g 与一般内积的区别在于 $g(v,\ v)$ 可以为负，且 $g(v,\ v) = 0$ 不意味着 $v = 0$. 今后也常把 $g(v,\ u)$ 称为 v 和 u 在度规 g 下的内积. 矢量空间 V 一旦定义了度规 g，其元素的长度及元素间的正交性就可定义如下:

定义2　$v \in V$ 的**长度**(length)或**大小**(magnitude)定义为 $|v| := \sqrt{|g(v,v)|}$. 矢量 $v, u \in V$ 叫**互相正交的**(orthogonal)，若 $g(v,\ u) = 0$. V 的基底 $\{e_\mu\}$ 叫**正交归一的**(orthonormal)，若任二基矢正交且每一基矢 e_μ 满足 $g(e_\mu,\ e_\mu) = \pm 1$ (不对 μ 求和).

注 2　定义 2 表明度规 g 在正交归一基底的分量满足

$$g_{\mu\nu}=\begin{cases}0, & \mu\neq\nu\\ \pm1, & \mu=\nu\end{cases}. \tag{2-5-1}$$

因此，度规在正交归一基底的分量排成的矩阵是对角矩阵，且对角元为+1 或−1.

定理 2-5-1　任何带度规的矢量空间都有正交归一基底. 度规写成对角矩阵时对角元中+1 和−1 的个数与所选正交归一基底无关.

证明　略[可参阅 Schutz(1980)P.65~66]. □

定义3　用正交归一基底写成对角矩阵后，对角元全为+1 的度规叫**正定的**(positive definite)或**黎曼的**(Riemannian)，对角元全为−1 的度规叫**负定的**(negative definite)，其他度规叫**不定的**(indefinite)，只有一个对角元为−1 的不定度规叫**洛伦兹的**(Lorentzian). 对角元之和叫度规的**号差**(signature). 相对论中用得最多的是洛伦兹度规和正定度规.

注 3　关于洛伦兹度规，文献中历来有两种不同习惯. 定义 3 反映第一种习惯，在这种习惯中，4 维洛伦兹度规的对角元为(−1，1，1，1)，号差为+2. 在另一种习惯中，洛伦兹度规定义为只有一个对角元为+1 的不定度规，于是 4 维洛伦兹度规的对角元为(1，−1，−1，−1)，号差为−2. 本书采用号差为+2 的习惯.

定义 4　带洛伦兹度规 g 的矢量空间 V 的元素可分为三类：①满足 $g(v,v)>0$ 的 v 称为**类空矢量**(spacelike vector)；②满足 $g(v, v)<0$ 的 v 称为**类时矢量**(timelike vector)；③满足 $g(v, v)=0$ 的 v 称为**类光矢量**(lightlike vector 或 null vector).

注 4　①在号差为−2 的习惯中，类空性和类时性的定义恰好相反：类空矢量定义为 $g(v, v)<0$，类时矢量定义为 $g(v,v)>0$. 但两者并无实质差别：一个矢量在一种号差下为类时则在另一号差下也类时. ②多数读者过去只熟悉正定度规，因此一见 $g(v, v)=0$ 就认为 $v=\underline{0}$ (零元). 然而，若度规是洛伦兹的，则 $g(v, v)=0$ 未必导致 $v=\underline{0}$. 非零的 4 维类光矢量在相对论中有重要地位，例如便于描写电磁波及引力波在 4 维时空中的传播. ③许多汉语文献把 null vector 译为“零矢量”，这容易与矢量空间中唯一的零元混淆(零元当然是 null vector，但反之不然. 一个有洛伦兹度规的矢量空间有无数 null vectors.). 如果一定要用“零”字，最好称为“零模矢量”.

度规 g 是(0,2)型张量，即由 $V\times V$ 到 $\mathbb{R}$ 的双重线性映射，所以 $\forall v,u\in V$ 有 $g(v,u)\in\mathbb{R}$，因而 $g(v,\bullet)\in V^*$. 给定 g 后，再给一个 $v\in V$ 便可造出 $g(v,\bullet)\in V^*$，故 g 可看作由 V 到 V^* 的线性映射，即 $g:V\xrightarrow[\text{线性地}]{}V^*$，这是一个同构映射(证明留作习题). 因此，在 V 选定度规后就有了一个自然的、与众不同的从 V 到 V^* 的同构映射，我们很自然地用这一映射把 V 与 V^* 认同. 小结：无论有无度规，V 都与 V^{**} 自然认同[见式(2-3-5)及其前后]；如果有度规，则 V 与 V^* 也自然认同.

下面回到流形 M 上来.

定义5 M上的对称的、处处非退化的(0, 2)型张量场称为**度规张量场**.

注5 本书只关心号差处处一样的度规场.

度规场的一大用处就是定义曲线长度. 先讨论2维欧氏空间. 设曲线$C(t)$在自然坐标系$\{x, y\}$的参数式为$x = x(t)$, $y = y(t)$, 则曲线元段线长的平方dl^2[是$(dl)^2$的简写]为

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]\,dt^2 = [(T^1)^2 + (T^2)^2]\,dt^2 = |T|^2 dt^2 ,$$

其中T是$C(t)$的切矢. 由上式得

$$dl = |T|\,dt , \tag{2-5-2}$$

于是$C(t)$的线长为

$$l = \int |T|\,dt . \tag{2-5-3}$$

上式可推广至带有正定度规场g的任意流形M上. 设$C(t)$是M上任一C^1曲线, T是其切矢, 即$T \equiv \partial/\partial t$, 则$|T| = \sqrt{g(T,T)}$, 故$C(t)$的线长自然定义为

$$l := \int \sqrt{g(T,T)}\,dt . \tag{2-5-4}$$

对有洛伦兹度规场g的流形M, 在定义线长前应注意曲线的类型. 若C^1曲线$C(t)$各点的切矢都类空, 则$C(t)$叫**类空曲线**. 类似地可定义**类时曲线**和**类光曲线**. 类空和类光曲线的线长仍由式(2-5-4)定义(因此类光曲线的线长恒为零). 注意到类时曲线有$g(T, T) < 0$, 其元线长应定义为$dl := \sqrt{-g(T,T)}\,dt$. 于是有如下定义:

定义6 设流形M上有洛伦兹度规场g, 则M上的类空、类光及类时曲线$C(t)$的线长定义为

$$l := \int \sqrt{|g(T,T)|}\,dt , \qquad \text{其中}\ T \equiv \partial/\partial t . \tag{2-5-5}$$

对于从类时转向类空(或相反)的曲线("不伦不类"的曲线), 线长没有定义. 下面对线长的讨论虽是就洛伦兹度规而言的, 但对正定度规也适用(把所有曲线看作类空曲线).

不难证明(习题)曲线的线长与其参数化无关, 就是说, 曲线重参数化(保持映射的像不变而适当改变参数)不改变线长. 此外, 由于线长的定义(定义6)不涉及坐标系, 线长当然与坐标系无关. 但是, 如果曲线位于坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内, 线长也可借助于坐标系计算. 因为

$$g(T,T) = g(T^\mu \partial/\partial x^\mu, T^\nu \partial/\partial x^\nu) = T^\mu T^\nu g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu) = (dx^\mu/dt)(dx^\nu/dt)\, g_{\mu\nu} ,$$

[最末一步用到"曲线切矢的坐标分量等于曲线在该系的参数式对参数的导数"(定理2-2-4), 即$T^\mu = dx^\mu/dt$.] 所以元线长

$$dl = \sqrt{|g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|} . \tag{2-5-6}$$

引入记号

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \tag{2-5-7}$$

则线长

$$l=\int\sqrt{\mathrm{d}s^2}\ (\text{对类空曲线}),\tag{2-5-8}$$

$$l=\int\sqrt{-\mathrm{d}s^2}\ (\text{对类时曲线}).\tag{2-5-9}$$

记号 $\mathrm{d}s^2$ 在微分几何中经常出现，通常称为**线元**(line element). 对类空曲线，$\mathrm{d}s^2$ 等于元段长 $\mathrm{d}l$ 的平方 $\mathrm{d}l^2$；对类时曲线，$\mathrm{d}s^2$ 等于 $-\mathrm{d}l^2$，因而不是任何实数的平方. 实际上，$\mathrm{d}s^2$ 只是一个由式(2-5-7)定义的记号，对类时曲线它根本不是任何实数的平方[对式(2-5-7)的准确理解见选读 2-5-1]，但因 $\mathrm{d}s^2\equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 右边含有度规 g 在所涉及的坐标系的全部分量 $g_{\mu\nu}$，从线元表达式可以直接"读出"度规的全体坐标分量. 例如，设 2 维流形上的度规 g 在某坐标系 $\{t,x\}$ 的线元表达式为

$$\mathrm{d}s^2=-x\,\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}t\mathrm{d}x\,,\tag{2-5-10}$$

便可读出 g 在该系的分量为 $g_{tt}=-x,\ g_{xx}=1,\ g_{tx}=g_{xt}=2$. 可见给定线元(表达式)相当于给定度规场.

设 $C:I\to M$ 是类空或类时曲线，则线上任一点 $C(t)$ 的切矢 T 的长度 $|T|$ 是 t 的函数，可记作 $|T|(t)$. 任意指定线上一点 $C(t_0)$ 作为测量线长的起点，则介于 $C(t_0)$ 点和 $C(t)$ 点的曲线段的线长 $l(t)=\int_{t_0}^{t}|T|(t')\,\mathrm{d}t'$ 是 t 的函数. l 也可充当该线的参数，称为**线长参数**. 由 $\mathrm{d}l\equiv\sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t$ 可知，以线长为参数的曲线切矢满足 $|g(T,T)|=1$，即有单位长.

定义 7　设流形 M 上给定度规场 g，则 $(M,\ g)$ 叫**广义黎曼空间**[若 g 为正定，叫**黎曼空间**(Riemannian space)；若 g 为洛伦兹，叫**伪黎曼空间**(pseudo- Riemannian space)，物理上叫**时空**(spacetime).①].

下面介绍广义黎曼空间的两个简单而重要的例子，即欧氏空间和闵氏空间.

定义 8　设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义度规张量场 δ 为

$$\delta:=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu\,,\tag{2-5-11}$$

则 $(\mathbb{R}^n,\ \delta)$ 称为 ***n* 维欧氏空间**(n-dimensional Euclidean space)，δ 称为**欧氏度规**.

上式表明 δ 在自然坐标系的对偶坐标基底 $\{\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu\}$ 的分量为 $\delta_{\mu\nu}\equiv\begin{cases}0, & \mu\neq\nu,\\ +1, & \mu=\nu,\end{cases}$ 因此，按照式(2-5-7)，欧氏度规在自然坐标系的线元表达式应为 $\mathrm{d}s^2=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$. 若 $n=2$，便有 $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2$. 这正是熟知的 2 维欧氏空间的线元表达式. 由式(2-5-11)可知自然坐标基底用欧氏度规衡量是正交归一的，

① 准确地说，$(M,\ g)$称为时空，若 M 为连通流形，g 为有足够可微程度的洛伦兹度规场.

因为由

$$\delta(\partial/\partial x^\alpha,\ \partial/\partial x^\beta)=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu(\partial/\partial x^\alpha,\ \partial/\partial x^\beta)=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu(\partial/\partial x^\alpha)\,\mathrm{d}x^\nu(\partial/\partial x^\beta)$$

易见

$$\delta(\partial/\partial x^\alpha,\ \partial/\partial x^\beta)=\delta_{\alpha\beta}\,. \tag{2-5-12}$$

但满足式(2-5-12)的坐标系未必是自然坐标系. 例如，对2维欧氏空间，由自然坐标系按下式定义的坐标系

$$x'=x+a,\qquad y'=y+b\qquad (a,\ b\ \text{为常数}) \tag{2-5-13}$$

的基底$\{\partial/\partial x',\ \partial/\partial y'\}$也满足式(2-5-12)(因而也正交归一). 进一步，不难验证(习题)由以下三式分别定义的$\{x', y'\}$的坐标基底$\{\partial/\partial x',\partial/\partial y'\}$也满足式(2-5-12)：

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\qquad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\qquad (\alpha\ \text{为常数}), \tag{2-5-14}$$

$$x'=-x,\qquad y'=y\,, \tag{2-5-15}$$

$$x'=x,\qquad y'=-y\,. \tag{2-5-16}$$

定义9　n维欧氏空间中满足式(2-5-12)的坐标系叫**笛卡儿(Cartesian)坐标系**或**直角坐标系**. 换句话说，一个坐标系叫笛卡儿系，若其坐标基底用欧氏度规δ衡量为正交归一.

注6　①因式(2-5-12)与(2-5-11)等价，也可说满足式(2-5-11)的坐标系是笛卡儿系. ②自然坐标系当然是笛卡儿系. ③2维欧氏空间中任意两个笛卡儿系之间的关系只能取式(2-5-13)~(2-5-16)中的一种形式(或它们的复合). 前二种分别称为**平移**和**转动**，后二种的每一种称为**反射**(reflection). ④要分清符号δ和$\delta_{\mu\nu}$. δ代表欧氏度规，是张量场；而$\delta_{\mu\nu}$则是δ在笛卡儿系的分量. 还要注意δ在非笛卡儿系的分量不是$\delta_{\mu\nu}$.

极坐标系$\{r,\varphi\}$是2维欧氏空间中非笛卡儿系的一例. 物理书中使用极坐标系时，相应的基底常用$\{\hat{e}_r,\ \hat{e}_\varphi\}$(顶上加∧代表单位矢)，它是正交归一的，但却不是极坐标系的坐标基底$\{\partial/\partial r,\ \partial/\partial\varphi\}$，关键在于$\partial/\partial\varphi$不归一，因$\delta(\partial/\partial\varphi,\partial/\partial\varphi)=r^2\neq 1$(证明留作练习). 实际上，$\hat{e}_\varphi$是对$\partial/\partial\varphi$归一化的产物，即$\hat{e}_\varphi := r^{-1}\partial/\partial\varphi$. 可见物理书常用的$\{\hat{e}_r,\ \hat{e}_\varphi\}$不是极坐标系的坐标基底而是与极坐标系相应的正交归一基底.

欧氏空间是最简单的黎曼空间. 下面介绍最简单的伪黎曼空间——闵氏空间. 4维洛伦兹度规在对角化后的对角元为(−1, 1, 1, 1)，为了突出这个唯一的−1，我们把它所在的行、列记为0行0列，三个+1所在行、列分别记为1，2，3行和1，2，3列. 这种对角矩阵的元素记作$\eta_{\mu\nu}$(以区别于$\delta_{\mu\nu}$)，即$\eta_{00}\equiv -1$，$\eta_{11}\equiv\eta_{22}\equiv\eta_{33}\equiv 1$. 推广到$n$维则有

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ -1, & \mu = \nu = 0, \\ +1, & \mu = \nu = 1, \cdots, n-1. \end{cases}$$

下面给出闵氏空间的定义.

定义 10 设$\{x^\mu\}$是$\mathbb{R}^n$的自然坐标，在$\mathbb{R}^n$上定义度规张量场η为

$$\eta := \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu , \tag{2-5-17}$$

则$(\mathbb{R}^4, \eta)$称为 ***n* 维闵氏**(Minkowski)**空间**(物理上称为 ***n* 维闵氏时空**)，η称为**闵氏度规**.

由定义 10 可知闵氏度规在自然坐标系的线元表达式为$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$. 以$n=4$为例，有$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$. 这正是熟知的 4 维闵氏时空的线元(狭义相对论中的元间隔)表达式. 不难证明

$$\eta(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta) = \eta_{\alpha\beta} , \tag{2-5-18}$$

可见自然坐标基底$\{\partial/\partial x^\mu\}$用闵氏度规衡量也是正交归一的(第 0 坐标基矢归$-1$，其他归$+1$.). 但满足式(2-5-18)的却不一定是自然坐标系. 例如，以 2 维闵氏空间为例，设$\{t, x\}$是自然坐标，则

$$t' = t + a, \qquad x' = x + b \quad (a，b \text{为常数}) \tag{2-5-19}$$

的坐标基底$\{\partial/\partial t', \partial/\partial x'\}$也满足式(2-5-18). 不难验证(习题)，由以下三式分别定义的$\{t', x'\}$系的坐标基底$\{\partial/\partial t', \partial/\partial x'\}$也满足式(2-5-18)：

$$t' = t\,\mathrm{ch}\lambda + x\,\mathrm{sh}\lambda, \qquad x' = t\,\mathrm{sh}\lambda + x\,\mathrm{ch}\lambda \quad (\lambda \text{为常数}), \tag{2-5-20}$$

$$t' = -t, \qquad x' = x , \tag{2-5-21}$$

$$t' = t, \qquad x' = -x . \tag{2-5-22}$$

定义 11 n维闵氏空间中满足式(2-5-18)的坐标系叫**洛伦兹**(Lorenzian)**坐标系**或**伪笛卡儿**(pseudo-Cartesian)**坐标系**，也有文献称之为笛卡儿坐标系.

注 7 ①闵氏空间的自然坐标当然是洛伦兹坐标. ②2 维闵氏空间中任意两个洛伦兹坐标系之间的关系只能取式(2-5-19)~(2-5-22)中的一种形式(或它们的复合). 第一种称为**平移**，第二种[式(2-5-20)]称为**伪转动**(boost)，后两种的每一种称为**反射**. ③闵氏度规张量η在非洛伦兹坐标基底的分量不等于$\eta_{\mu\nu}$.

[选读 2-5-1]

与平移、转动及伪转动不同，反射是一种“分立”变换. 此外还有另一种“分立”变换，称为**反演**(inversion)，对 2 维欧氏和闵氏空间分别定义为$x' = -x$，$y' = -y$和$t' = -t$，$x' = -x$. 与反射不同，反演是关于一个点为对称的. 但反演变换不是独立变换，具体说，$x' = -x$，$y' = -y$是式(2-5-14)在$\alpha = \pi$时的特例，而$t' = -t$，$x' = -x$则可由式(2-5-21)和(2-5-22)复合而成. **[选读 2-5-1 完]**

[选读 2-5-2]

正文中把 $\mathrm{d}l^2$ 解释为曲线元段长度的平方，这只是物理学家惯用的“大众化”理解，其实并不确切. 以欧氏空间的

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{2-5-23}$$

为例. 如果曲线是直线，式(2-5-23)所表达的实质是

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \tag{2-5-24}$$

其中 Δl 是直线上的一段有限长度，Δx 和 Δy 分别是该段的 x 和 y 坐标的有限增量. 如果曲线不是直线，式(2-5-24)自然不成立. 直观地想，当元段长度趋于零时总该成立，而 $\mathrm{d}l$ 可看作无限小，因而式(2-5-23)成立. 然而，无论指定多么短的一个元段(只要首末点不重合)，其长度就是确定的实数，就不是无限小，而式(2-5-23)成立的前提是 $\mathrm{d}l$ (因而 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$)为无限小. 我们再次遇到“无限小的非零量”的困惑(见选读 2-3-1). 弯曲空间的 $\mathrm{d}l^2$ 和 $\mathrm{d}s^2$ 当然也有同样问题. 物理学家习惯于用近似手法处理类似问题，他们(含本书正文)写的虽是式(2-5-23)，却把 $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 等理解为某一非零的确定的小量，其实就是 Δl ，Δx 和 Δy ，即把式(2-5-23)理解为式(2-5-24). 下面再谈应如何理解微分几何对式(2-5-23)的推广形式，即线元表达式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu . \tag{2-5-25}$$

既然 $\mathrm{d}x^\mu$ 和 $\mathrm{d}x^\nu$ 都是对偶矢量，其“积” $\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ 只能是张量积 $\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ ，可见式(2-5-25)右边实为 $g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ 的简写. 然而 $g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ 无非是度规张量 g 在对偶坐标基底的展开式，即

$$g = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu . \tag{2-5-26}$$

另一方面，式(2-5-25)左边的 $\mathrm{d}s^2$ 在微分几何中找不到别的解释，其实它无非是 g 的另一记号！ 于是发现式(2-5-25)的准确含义原来就是张量等式(2-5-26). 这一理解虽然最准确，却欠大众化，普及的难度很高. 反之，式(2-5-25)之所以如此常用，一个重要原因是 $\mathrm{d}l^2$ 在近似理解中可看作元段长度的平方，而 $\mathrm{d}s^2$ 无非是 $\mathrm{d}l^2$ (对类空线段)或 $-\mathrm{d}l^2$ (对类时线段)的代号. 本节正文中许多公式都只能做这种近似理解. 例如，若要坚持微分几何的准确写法，式(2-5-8)就应改写为

$$l = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t , \tag{2-5-8$'$}$$

其中 t 为所论曲线的参数. 与式(2-5-8)不同，上式中每一符号都有明确意义，例如 $\mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}t$ 是曲线切矢的第 μ 坐标分量，而 $\mathrm{d}t$ 同积分号相配表明积分变元为 t.

[选读 2-5-2 完]

§2.6 抽象指标记号

表示张量的常用方法有两种. 第一种是用不带指标的字母(如 T)代表张量, 这有两个缺点: ①看不出张量类型; ②不易表明哪一上槽与哪一下槽做缩并(前面所用的记号 C^i_jT 是暂时的,在运算中有诸多不便.). 第二种表示法是用分量(如 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$)代表张量, 用分量服从的等式代表张量服从的等式. 分量等式是数量等式, 因此在采用这种表示法的文献中所有等式都是数量等式. 这种表示法可以克服第一种表示法的两个困难, 但自身却有一严重缺点: 有时由于选用某一(或某类)特殊基底而得到较为简单的分量等式, 它只对特殊基底成立, 因而不代表张量等式. 我们希望知道哪些等式能够代表张量等式而哪些不能, 然而在分量表示法中难以区分. 为了克服这一缺点(同时保留分量表示法的所有优点), Penrose 首创"抽象指标记号" (the abstract index notation), 要点如下:

1. (k,l) 型张量用带有 k 个上标和 l 个下标的字母表示, 上下指标为小写拉丁字母, 只表示张量类型, 故称**抽象指标**. 例如, v^a 代表矢量, 上标 a 与 $\vec{v}$ 中的 → 作用一样(故不能谈及 $a=1$ 或 $a=2$ 的问题), ω_a 代表对偶矢量, $T^{ab}{}_c$ 代表 $(2,1)$ 型张量, 等等. v^b 和 v^a 代表相同的矢量(即矢量 $\vec{v}$), 但写等式时要注意"指标平衡", 例如可以写 $\alpha u^a+v^a=w^a$ 或 $\alpha u^b+v^b=w^b$ 而不可写 $\alpha u^a+v^b=w^a$.

2. 重复上下抽象指标表示对这两个指标求缩并. 例如
$T^a{}_a=T(e^{\mu *};e_\mu)=T^\mu{}_\mu$, $T^{ab}{}_a=T(e^{\mu *},\ \bullet\ ;\ e_\mu)$, $T^{ab}{}_b=T(\bullet,\ e^{\mu *};\ e_\mu)$.

3. 张量积记号省略. 例如, 设 $T\in\mathscr{T}_V(2,1)$, $S\in\mathscr{T}_V(1,1)$, 则 $T\otimes S$ 写成 $T^{ab}{}_cS^d{}_e$. 在不用指标的张量表示法中, 一般来说 $\omega\otimes\mu\neq\mu\otimes\omega$, 因为当作用于对象 $(v,\ u)$ 时, ω 是作用于 v 还是 u 的问题由字母的顺序决定[$\omega\otimes\mu$ 的第一字母 ω 作用于 $(v,\ u)$ 的第一字母 v]. 在抽象指标记号中, 由于重复上下指标代表缩并, $\omega\otimes\mu\ (v,u)$ 既可写成 $\omega_a\mu_bv^au^b$ 又可写成 $\mu_b\omega_av^au^b$ [都代表 $\omega(v)\mu(u)$]. 既然在这种写法中 $\omega_a\mu_b$ 和 $\mu_b\omega_a$ 的作用对象都是 v^au^b, 便有 $\omega_a\mu_b=\mu_b\omega_a$. 就是说, 代表张量的字母带着自己的抽象指标可以交换. 张量积顺序的不可交换性体现为 $\omega_a\mu_b\neq\omega_b\mu_a$.

4. 涉及张量的分量时, 相应指标用小写希腊字母 μ, ν, α, β 等(正如前面一直用的), 这种指标称为**具体指标**, 可以问及 $\mu=1$ 还是 $\mu=2$ 的问题. 张量在基矢上的展开式 $T=T^{\mu\nu}{}_\sigma\, e_\mu\otimes e_\nu\otimes e^{\sigma *}$ 现在写成

$$T^{ab}{}_c=T^{\mu\nu}{}_\sigma(e_\mu)^a(e_\nu)^b(e^\sigma)_c\,, \tag{2-6-1}$$

[$(e^\sigma)_c$ 的抽象下标 c 已表明它是对偶基矢, 无须写为 $(e^{\sigma *})_c$.] 而 $T^{\mu\nu}{}_\sigma=$

$T(e^{\mu *}, e^{\nu *}; e_\sigma)$ 现在写成

$$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T^{ab}{}_{c}(e^\mu)_a(e^\nu)_b(e_\sigma)^c . \tag{2-6-2}$$

注意，式(2-6-1)和(2-6-2)的指标(无论抽象的还是具体的)都是“平衡”的. 设 $T \in \mathscr{T}_V(0, 2)$，则 T 应记作 T_{ab}. 令 e_μ 为某基底的第 μ 基矢，则由式(2-4-7)可知 $T(\bullet, e_\mu) = C^1_2(T \otimes e_\mu)$，而 $T \otimes e_\mu$ 用抽象指标应记为 $T_{ab}(e_\mu)^c$，故 $T(\bullet, e_\mu)$ 应记作 $T_{ab}(e_\mu)^b$，也可简记作 $T_{a\mu}$，即

$$T(\bullet, e_\mu) \equiv T_{ab}(e_\mu)^b \equiv T_{a\mu} . \tag{2-6-3}$$

这是既有抽象指标又有具体指标的张量的表达方式，不妨认为 $T_{a1}, \cdots, T_{an}$ 代表 n 个对偶矢量，其中 $T_{a\mu}$ 代表“第 μ 个对偶矢量”.

5. 由“张量面面观”可知，V 上的(1, 1)型张量 $T^a{}_b$ 既可看作从 V 到 V 的线性映射又可看作从 V^* 到 V^* 的线性映射. 就是说，$T^a{}_b$ 作用于矢量 $v^b \in V$ 仍为矢量，记作 $u^a \equiv T^a{}_b v^b \in V$；$T^a{}_b$ 作用于对偶矢量 $\omega_a \in V^*$ 仍为对偶矢量，记作 $\mu_b \equiv T^a{}_b\, \omega_a \in V^*$. 其实，由抽象指标也可一望而知 $T^a{}_b v^b$ 和 $T^a{}_b \omega_a$ 分别是矢量和对偶矢量，可见抽象指标记号是“张量面面观”的一种简单而直观的体现. 以 $\delta^a{}_b$ 代表从 V 到 V 的恒等映射，即 $\delta^a{}_b v^b := v^a \ \forall v^b \in V$，则易见它也是从 V^* 到 V^* 的恒等映射，即 $\delta^a{}_b \omega_a = \omega_b \ \forall \omega_a \in V^*$. 进一步不难证明(练习) $\delta^a{}_b$ 与任一张量缩并的结果是把该张量的上标 b 换为 a (或把下标 a 换为 b)，例如 $\delta^a{}_b T_{ac} = T_{bc}$，$\delta^a{}_b T^{cb}{}_e = T^{ca}{}_e$. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 V 的基底，$\{(e^\mu)_a\}$ 是其对偶基底，则

$$(e^\mu)_a(e_\mu)^b = \delta^b{}_a . \tag{2-6-4}$$

这是(1, 1)型张量等式，证明时只须验证两边作用于任一矢量 v^a 得相同结果(练习). 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 V 的基底，$\{(e^\mu)_a\}$ 是其对偶基底，则 $\delta^a{}_b$ 在此基底的分量 $\delta^\mu{}_\nu \equiv \delta^a{}_b(e^\mu)_a(e_\nu)^b$ 满足 $\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} +1, (\mu = \nu) \\ 0, (\mu \neq \nu) \end{cases}$. 证明很简单，以 $\delta^1{}_1$ 为例，$\delta^1{}_1 = \delta^a{}_b(e^1)_a \cdot (e_1)^b = (e^1)_a(e_1)^a = 1$. 请注意，即使是洛伦兹号差的情况下也有 $\delta^0{}_0 = +1$.

6. 因度规 $g \in \mathscr{T}_V(0,2)$，故应记为 g_{ab}. 设 $v \in V$，则 $g(\bullet, v) \in V^*$ (见§2.4 例 1 后的一段). 把 g 看作式(2-4-7)的 T，便得 $g(\bullet, v) = C^1_2(g \otimes v) = C^1_2(g_{ab}v^c) = g_{ab}v^b$，故 $g(\bullet, v)$ 应记作 $g_{ab}v^b$. 又因有度规 g 时 V 与 V^* 在同构映射 $g: V \to V^*$ 下自然认同，而 $g_{ab}v^b \equiv g(\bullet, v)$ 正是 v^a 在这一映射下的像，故应与 v^a 认同，索性就把 $g_{ab}v^b$ 记作 v_a (可看作 v_a 的定义). 就是说，虽然在数学上 v^a 与 v_a 是两种不同性质的量

(矢量和对偶矢量)，但在应用上两者代表的是同一事物(故都用v表示). 于是常写

$$v_a = g_{ab} v^b . \tag{2-6-5}$$

又由于$g : V \to V^*$是同构映射，其逆映射g^{-1}自然存在. 不难论证g^{-1}是(2, 0)型张量，本应记作$(g^{-1})^{ab}$，但通常都简记为g^{ab}(有上指标就不会与g_{ab}混淆). 根据类似推理，任一$\omega_b \in V^*$在g^{ab}映射下的像为$g^{ab}\omega_b$，索性记作ω^a，以表示与ω_a代表同一事物，于是(见图 2-10)

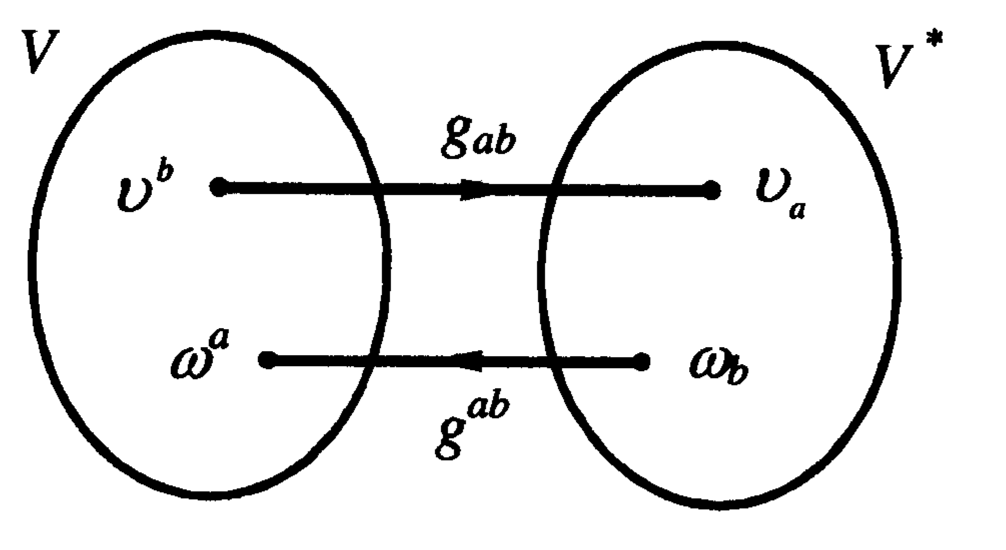


图 2-10　度规g把V和V^*自然认同，从而可升降指标

$$\omega^a = g^{ab}\omega_b . \tag{2-6-6}$$

式(2-6-5)、(2-6-6)表明可用g_{ab}及g^{ab}对上、下指标分别做“下降”和“上升”处理. 这种升降指标操作适用于任何张量中的任何抽象指标. 例如，(1,1)型张量T在抽象指标记号中可表为$T^a{}_b$，所谓用度规对它降指标，其实是用g和T通过张量积及缩并运算求得一个(0,2)型张量$g(\cdot, e_\mu) \otimes T(e^{\mu *}; \cdot)$，在抽象指标记号中就把它记作$T_{ab}$，即$T_{ab} \equiv g_{ac}T^c{}_b$.

依次使用式(2-6-6)、(2-6-5)得

$$\omega^a = g^{ab}\omega_b = g^{ab}(g_{bc}\omega^c) , \qquad \forall \omega^a \in V ,$$

故

$$g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c , \tag{2-6-7}$$

其实这是g^{ab}作为g_{ab}的逆映射的必然结果.

设$\{(e_\mu)^a\}$是V的任一基底，$\{(e^\mu)_a\}$是其对偶基底，以$g_{\mu\nu}$和$g^{\mu\nu}$分别代表g_{ab}和g^{ab}在这一基底的分量，则

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g^{ab}(e^\mu)_a(e^\nu)_b g_{cd}(e_\nu)^c(e_\sigma)^d = g^{ab}(e^\mu)_a g_{bd}(e_\sigma)^d = (e^\mu)_a(e_\sigma)^a = \delta^\mu{}_\sigma , \tag{2-6-8}$$

其中第二、三步分别用到式(2-6-4)和(2-6-7). 式(2-6-8)表明度规g_{ab}在任一基底的分量$g_{\mu\nu}$的矩阵有逆(逆矩阵就是度规g_{ab}之逆g^{ab}在同一基底的分量$g^{\mu\nu}$的矩阵)，因而非退化. 可见g_{ab}的非退化性保证它在任一基底的矩阵$(g_{\mu\nu})$的非退化性. 反之，设存在基底$\{(e_\mu)^a\}$及其对偶基底$\{(e^\mu)_a\}$使$(g_{\mu\nu})$为非退化，则$(g_{\mu\nu})$有逆矩阵$(g^{\mu\nu})$，令$g^{ab} \equiv g^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_\nu)^b$，则由$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma$易证$g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c$，可见$g_{ab}$: $V \to V^*$有逆映射g^{ab}，因而非退化(“有逆$\Rightarrow$非退化”的证明留作练习. 提示：g_{ab}: $V \to V^*$有逆表明它是一一映射，而如果g_{ab}退化，则V中除零元外还有$v^a \neq 0$，其像也为$\underline{0} \in V^*$，与一一性矛盾.).

不难看出，用度规及其逆的分量 $g_{\mu\nu}$ 及 $g^{\mu\nu}$ 可对张量分量的上、下具体指标做下降和上升处理. 例如，可把 $g_{\mu\nu}v^\nu$ 写成 v_μ，因为

$$g_{\mu\nu}v^\nu = g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b v^\nu = g_{ab}(e_\mu)^a v^b = v_a(e_\mu)^a = v_\mu .$$

作为抽象指标记号的例子，此处介绍 4 维闵氏度规 η_{ab} 的抽象指标表达式.

闵氏度规的定义式(2-5-17)在抽象指标记号中应表为

$$\eta_{ab} := \eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b ,$$

其中 $\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$ 是洛伦兹坐标系的对偶基底. 以 $\{t,x,y,z\}$ 代表 $\{x^0,x^1,x^2,x^3\}$，则因为非零的 $\eta_{\mu\nu}$ 只有 $\eta_{00}=-1$，$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1$，上式可表为

$$\eta_{ab} = -(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + (\mathrm{d}x)_a(\mathrm{d}x)_b + (\mathrm{d}y)_a(\mathrm{d}y)_b + (\mathrm{d}z)_a(\mathrm{d}z)_b , \qquad (2\text{-}6\text{-}9\mathrm{a})$$

与线元表达式 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ 相应. 如果改用球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$，则由

$$x = r\sin\theta\cos\varphi , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi , \quad z = r\cos\theta$$

不难从式(2-6-9a)导出

$$\eta_{ab} = -(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + (\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b + r^2(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b + r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b , \qquad (2\text{-}6\text{-}9\mathrm{b})$$

与线元表达式 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi)^2$ 相应.

在许多不用抽象指标记号的文献中，4 维时空和 3 维黎曼空间的分量指标分别用希腊字母 μ，ν，…(都从 0 取到 3)和拉丁字母 i，j，k…(都从 1 取到 3). 拉丁字母在本书中本应代表抽象指标，然而为区分 4 维和 3 维的分量指标，我们允许一个例外，即凡涉及 3 维黎曼空间时用拉丁字母中从 i 起的若干字母 i，j，k…充当具体指标(都从 1 到 3)，其他拉丁字母(如 a，b，c 等)仍为抽象指标. 例如 3 维矢量 $\vec{v}$ 可表为 $v^a = v^i(\partial/\partial x^i)^a$ (i 从 1 到 3 取和).

在抽象指标记号中，坐标基矢记作 $(\partial/\partial x^\mu)^a$，对偶坐标基矢记作 $(\mathrm{d}x^\mu)_a$. 用度规 g_{ab} 和 g^{ab} 对前者和后者分别降、升指标，得对偶矢量 $g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b$ 和矢量 $g^{ab}(\mathrm{d}x^\mu)_b$. 以 ω_a 简记 $g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b$ 并用对偶坐标基矢展开为 $g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b = \omega_\nu(\mathrm{d}x^\nu)_a$，两边作用于 $(\partial/\partial x^\sigma)^a$ 后得 $g_{\sigma\mu} = \omega_\sigma$，故

$$g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b = g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\nu)_a . \qquad (2\text{-}6\text{-}10\mathrm{a})$$

可见 $g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b$ 一般不等于 $(\mathrm{d}x^\mu)_a$. 类似可得

$$g^{ab}(\mathrm{d}x^\mu)_b = g^{\mu\nu}(\partial/\partial x^\nu)^a . \qquad (2\text{-}6\text{-}10\mathrm{b})$$

当 $g_{ab} = \delta_{ab}$ (欧氏度规)且 $\{x^\mu\}$ 为笛卡儿系时上二式简化为

$$\delta_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b = (\mathrm{d}x^\mu)_a , \qquad \delta^{ab}(\mathrm{d}x^\mu)_b = (\partial/\partial x^\mu)^a , \qquad (2\text{-}6\text{-}11)$$

当 $g_{ab} = \eta_{ab}$ (以 4 维闵氏度规为例)且 $\{x^\mu\}$ 为洛伦兹系时则有

$$\eta_{ab}(\partial/\partial x^0)^b = -(\mathrm{d}x^0)_a \,, \qquad \eta_{ab}(\partial/\partial x^i)^b = (\mathrm{d}x^i)_a \,; \tag{2-6-12a}$$

$$\eta^{ab}(\mathrm{d}x^0)_b = -(\partial/\partial x^0)^a \,, \qquad \eta^{ab}(\mathrm{d}x^i)_b = (\partial/\partial x^i)^a \,. \tag{2-6-12b}$$

其中 $i=1$，2，3，此时 i 不是抽象指标.

张量的上指标和下指标在文献中又常分别称为**逆变指标**(contravariant index)和**协变指标**(covariant index). 相应地，矢量 v^a 和对偶矢量 ω_a 也分别称为**逆变矢量**和**协变矢量**.

张量的对称性可方便地用抽象指标表述如下：

定义 1 $T \in \mathscr{T}_V(0,2)$ 称为**对称的**(symmetric)，若 $T(u,v)=T(v,u)$，$\forall u,v \in V$.

由于 $T(u,\ v)=T_{ab}u^a v^b$，$T(v,\ u)=T_{ab}v^a u^b = T_{ba}u^a v^b$，故在抽象指标记号中 T 为对称的充要条件是 $T_{ab}=T_{ba}$. (0, 2)型张量在抽象指标记号中本来既可记作 T_{ab} 又可记作 T_{ba}，两者代表同一张量. 然而只当 T 为对称张量时才允许写为 $T_{ab}=T_{ba}$，可见用抽象指标写等式时比用它单独表示一个张量时要更为小心. 同理，(1,1)型张量既可表为 $T^a{}_b$，也可表为 $T_b{}^a$，用度规降指标后分别为 $g_{ca}T^a{}_b=T_{cb}$ 和 $g_{ca}T_b{}^a=T_{bc}$. 虽然两者代表同一张量，但只有降指标后为对称张量的(1,1)型张量才允许写为 $T^a{}_b=T_b{}^a$. 在不用度规升降指标时，$(k,\,l)$型张量的上、下指标各排各的序，两个上下指标之间没有顺序问题. 因此，如果愿意，(1,1)型张量可写为 T^a_b，(2,1)型张量可写为 T^{ab}_c 等. 然而这种写法在用度规升降指标时出现不确定性. 由于经常要升降指标，本书从一开始就把上下两排指标错开，例如写成 $T^{ab}{}_c$.

以上讨论表明抽象指标记号在形式上与具体指标记号极为相似，这正是抽象指标记号的一大好处：它既可表示张量等式，又保留了具体指标记号的许多优点.

定义 2 (0,2)型张量 T_{ab} 的**对称部分**(记作 $T_{(ab)}$)和**反称部分**(记作 $T_{[ab]}$)分别定义为

$$T_{(ab)} := \frac{1}{2}(T_{ab}+T_{ba})\,, \qquad T_{[ab]} := \frac{1}{2}(T_{ab}-T_{ba})\,,$$

一般地，$(0,\,l)$型张量 $T_{a_1\cdots a_l}$ 的对称和反称部分定义为

$$T_{(a_1\cdots a_l)} := \frac{1}{l\,!}\sum_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}\,, \tag{2-6-13}$$

$$T_{[a_1\cdots a_l]} := \frac{1}{l\,!}\sum_\pi \delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}\,, \tag{2-6-14}$$

其中 π 代表 $(1,\cdots,l)$ 的一种排列，$\pi(1)$是指 π 所代表的那种排列中的第 1 个数字，$\sum\limits_\pi$ 代表对各种排列取和，$\delta_\pi \equiv \pm 1$(偶排列取+，奇排列取−.). 例如

$$T_{(a_1a_2a_3)} = \frac{1}{6}(T_{a_1a_2a_3}+T_{a_3a_1a_2}+T_{a_2a_3a_1}+T_{a_1a_3a_2}+T_{a_3a_2a_1}+T_{a_2a_1a_3})\,,$$

$$T_{[a_1a_2a_3]}=\frac{1}{6}(T_{a_1a_2a_3}+T_{a_3a_1a_2}+T_{a_2a_3a_1}-T_{a_1a_3a_2}-T_{a_3a_2a_1}-T_{a_2a_1a_3}).$$

定义 3　$T\in\mathscr{T}_V(0,l)$ 称为**全对称的**，若 $T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}$；$T$ 称为**全反称的**，若 $T_{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}$.

以上内容(定义 1~3)也适用于$(k,0)$型张量. 例如，T 叫全对称的，若 $T^{a_1\cdots a_k}=T^{(a_1\cdots a_k)}$.

注 1　任一(0, 2)型张量可表为其对称和反称部分之和，即 $T_{ab}=T_{(ab)}+T_{[ab]}$，但对 $l>2$ 的 $(0,l)$ 型张量不成立. 例如，$T_{abc}\neq T_{(abc)}+T_{[abc]}$，然而 $T_{abc}=T_{(abc)}\Rightarrow T_{[abc]}=0$ [见定理 2-6-2(e)].

定理 2-6-1

(a) 设 $T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}$，则

$$T_{a_1\cdots a_l}=T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}\ (\pi\text{代表任一种排列}),\tag{2-6-15}$$

即 $T_{(a_1\cdots a_l)}$ 展开式(共 $l!$ 项)中的每一项都等于 $T_{a_1\cdots a_l}$，例如

$$T_{abc}=T_{(abc)}\Rightarrow T_{abc}=T_{acb}=T_{cab}=T_{cba}=T_{bca}=T_{bac};\tag{2-6-16}$$

(b) 设 $T_{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}$，则

$$T_{a_1\cdots a_l}=\delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}},\tag{2-6-17}$$

即 $T_{[a_1\cdots a_l]}$ 展开式中的偶排列项等于 $T_{a_1\cdots a_l}$，奇排列项等于 $-T_{a_1\cdots a_l}$，例如

$$T_{abc}=T_{[abc]}\Rightarrow T_{abc}=-T_{acb}=T_{cab}=-T_{cba}=T_{bca}=-T_{bac}.\tag{2-6-18}$$

对 $(k,0)$ 型(上指标)全对称和全反称张量也有类似结论.

证明　仅以 $l=3$ 为例. l 为其他正整数时证明仿此.

(a)由 $T_{abc}=T_{(abc)}$ 得 $T_{acb}=T_{(acb)}$ (后式无非是前式左右两边同时改变抽象指标的结果)，而 $T_{(acb)}=T_{(abc)}$ (由 $T_{(abc)}$ 的定义式显见)，故 $T_{acb}=T_{(abc)}=T_{abc}$. 式(2-6-16)右侧其他各等号的证明仿此.

(b) 由 $T_{abc}=T_{[abc]}$ 得 $T_{acb}=T_{[acb]}=-T_{[abc]}=-T_{abc}$. 式(2-6-18)右侧其他等号的证明仿此. □

今后会经常遇到对带有圆、方括号的指标的运算，下面的定理对许多运算将带来很大方便.

定理 2-6-2

(a) 缩并时括号有“传染性”，即

$$T_{[a_1\cdots a_l]}S^{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}S^{[a_1\cdots a_l]}=T_{a_1\cdots a_l}S^{[a_1\cdots a_l]},\tag{2-6-19}$$

对圆括号亦然.

(b) 括号内的同种子括号可随意增删，例如

$$T_{[[ab]c]} = T_{[abc]}\,, \qquad \text{其中} \quad T_{[[ab]c]} \equiv \frac{1}{2}(T_{[abc]} - T_{[bac]})\,. \tag{2-6-20}$$

(c) 括号内加异种子括号得零，例如

$$T_{[(ab)c]} = 0\,, \qquad T_{(a[bcd])} = 0\,. \tag{2-6-21}$$

(d) 异种括号缩并得零，例如

$$T^{(abc)}S_{[abc]} = 0\,. \tag{2-6-22}$$

(e)

$$T_{a_1\cdots a_l} = T_{(a_1\cdots a_l)} \Rightarrow T_{[a_1\cdots a_l]} = 0\,, \tag{2-6-23}$$

$$T_{a_1\cdots a_l} = T_{[a_1\cdots a_l]} \Rightarrow T_{(a_1\cdots a_l)} = 0\,. \tag{2-6-24}$$

对$(k,0)$型(上指标)全对称和全反称张量也有类似结论.

证明　(a)、(b)、(c)的证明留作练习. (d)是(a)和(c)的推论, (e)是(c)的推论. □

习　题

~1. 试证§2.1 例 2 定义的拓扑同胚映射$\psi_i^\pm$在$O_i^\pm$的所有交叠区上满足相容性条件, 从而证实 $\mathbf{S}^1$ 确是 1 维流形.

2. 说明 n 维矢量空间可看作 n 维平庸流形.

3. 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f: X \to Y$ 是同胚. 若 X 还是个流形, 试给 Y 定义一个微分结构使 $f: X \to Y$ 升格为微分同胚.

~4. 设$\{x, y\}$为 $\mathbb{R}^2$ 的自然坐标, $C(t)$是曲线, 参数表达式为 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in (0, \pi)$. 若 $p = C(\pi/3)$, 写出曲线在 p 的切矢在自然坐标基的分量, 并画图表出该曲线及该切矢.

5. 设曲线 $C(t)$和 $C'(t) \equiv C(2t_0 - t)$ 在 $C(t_0) = C'(t_0)$ 点的切矢分别为 v 和 v', 试证 $v + v' = 0$.

~6. 设 O 为坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域, $p \in O$, $v \in V_p$, v^μ 是 v 的坐标分量, 把坐标 x^μ 看作 O 上的 C^∞ 函数, 试证 $v^\mu = v(x^\mu)$. 提示: 用 $v = v^\nu X_\nu$ 两边作用于函数 x^μ.

7. 设 M 是 2 维流形, (O, ψ) 和 (O', ψ') 是 M 上的两个坐标系, 坐标分别为$\{x, y\}$和$\{x', y'\}$, 在 $O \cap O'$ 上的坐标变换为 $x' = x,\ \ y' = y - \Omega x$ (Ω = 常数), 试分别写出坐标基矢 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 用坐标基矢 $\partial/\partial x'$, $\partial/\partial y'$ 的展开式.

~8. (a) 试证式(2-2-9)的$[u, v]$在每点满足矢量定义(§2.2 定义 2)的两条件, 从而的确是矢量场. (b) 设 $u,\ v,\ w$ 为流形 M 上的光滑矢量场, 试证

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0 \quad \text{(此式称为\textbf{雅可比恒等式})}.$$

~9. 设$\{r, \varphi\}$为 $\mathbb{R}^2$ 中某开集(坐标域)上的极坐标, $\{x, y\}$为自然坐标,

(a) 写出极坐标系的坐标基矢 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\varphi$ (作为坐标域上的矢量场)用 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 展开的表达式.

(b) 求矢量场$[\partial/\partial r, \partial/\partial x]$用 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 展开的表达式.

(c) 令 $\hat{e}_r \equiv \partial/\partial r$, $\hat{e}_\varphi \equiv r^{-1}\partial/\partial\varphi$, 求$[\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi]$用 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 展开的表达式.

~10. 设 u, v 为 M 上的矢量场, 试证$[u, v]$在任何坐标基底的分量满足

$[u,v]^\mu = u^\nu \partial v^\mu / \partial x^\nu - v^\nu \partial u^\mu / \partial x^\nu$. 提示：用式(2-2-3′)和(2-2-3).

~11. 设$\{e_\mu\}$为 V 的基底，$\{e^{\mu *}\}$为其对偶基底，$v \in V$，$\omega \in V^*$，试证

$$\omega = \omega(e_\mu) e^{\mu *}, \qquad v = e^{\mu *}(v) e_\mu .$$

~12. 试证$\omega'_\nu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu$ (定理 2-3-4).

~13. 试证由式(2-3-5)定义的映射$v \mapsto v^{**}$是同构映射. 提示：可利用线性代数的结论，即同维矢量空间之间的一一线性映射必到上.

~14. 设$C^1_1 T$ 和 $(C^1_1 T)'$ 分别是(2, 1)型张量 T 借两个基底$\{e_\mu\}$和$\{e'_\mu\}$定义的缩并，试证$(C^1_1 T)' = C^1_1 T$.

*~15. 设 g 为 V 的度规，试证 g：$V \to V^*$ 是同构映射(可参见第 13 题的提示).

~16. 试证线长与曲线的参数化无关.

17. 设$\{x, y\}$是 2 维欧氏空间的笛卡儿坐标系，试证由式(2-5-14)定义的$\{x', y'\}$也是笛卡儿系.

18. 设$\{t, x\}$是 2 维闵氏空间的洛伦兹坐标系，试证由式(2-5-20)定义的$\{t', x'\}$也是洛伦兹系.

~19. (a) 用张量变换律求出 3 维欧氏度规在球坐标系中的全部分量$g'_{\mu\nu}$. (b) 已知 4 维闵氏度规 g 在洛伦兹系中的线元表达式为$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$，求 g 及其逆 g^{-1} 在新坐标系$\{t', x', y', z'\}$的全部分量$g'_{\mu\nu}$及$g'^{\mu\nu}$，该新坐标系定义如下：

$$t' = t, \quad z' = z, \quad x' = (x^2 + y^2)^{1/2} \cos(\varphi - \omega t),$$

$$y' = (x^2 + y^2)^{1/2} \sin(\varphi - \omega t), \quad \omega = \text{常数},$$

其中 φ 满足$\cos\varphi = y(x^2 + y^2)^{-1/2}$，$\sin\varphi = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$. 提示：先求$g'^{\mu\nu}$再求$g'_{\mu\nu}$.

~20. 试证 3 维欧氏空间中球坐标基矢$\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\varphi$的长度依次为 $1, r, r\sin\theta$.

~21. 用抽象指标记号证明$T'^\mu{}_\nu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\rho{}_\sigma$.

22. 以g和g'分别代表度规g_{ab}在坐标系$\{x^\mu\}$和$\{x'^\mu\}$的分量$g_{\mu\nu}$和$g'_{\mu\nu}$组成的两个$n \times n$矩阵的行列式，试证$g' = |\partial x^\rho / \partial x'^\sigma|^2 g$，其中$|\partial x^\rho / \partial x'^\sigma|$是坐标变换$\{x^\mu\} \mapsto \{x'^\mu\}$的雅可比行列式，即由$\partial x^\rho / \partial x'^\sigma$组成的$n \times n$行列式. 注：本题表明度规的行列式在坐标变换下不是不变量. 提示：取等式$g'_{\rho\sigma} = (\partial x^\mu / \partial x'^\rho)(\partial x^\nu / \partial x'^\sigma) g_{\mu\nu}$的行列式.

~23. 设$\{x^\mu\}$是流形上的任一局域坐标系，试判断下列等式的是非：

(1) $(\partial/\partial x^\mu)^a (\partial/\partial x^\nu)_a = g_{\mu\nu}$，其中$(\partial/\partial x^\nu)_a \equiv g_{ab}(\partial/\partial x^\nu)^b$；

(2) $(dx^\mu)^a (dx^\nu)_a = g^{\mu\nu}$，其中$(dx^\mu)^a \equiv g^{ab}(dx^\mu)_b$；

(3) $(\partial/\partial x^\mu)_a = (dx^\mu)_a$；

(4) $(dx^\mu)^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$；

(5) $v^\mu \omega_\mu = v_\mu \omega^\mu$；

(6) $g_{\mu\nu} T^{\nu\rho} S_\rho{}^\sigma = T_{\mu\rho} S^{\rho\sigma}$；

(7) $v^a u^b = v^b u^a$;

(8) $v^a u^b = u^b v^a$.

24. 设 T_{ab} 是矢量空间 V 上的(0, 2)型张量，试证 $T_{ab}v^a v^b = 0,\ \forall v^a \in V \Rightarrow T_{ab} = T_{[ab]}$. 提示：把 v^a 表为任意两个矢量 u^a 和 w^a 之和.

25. 试证 $T_{abcd} = T_{a[bc]d} = T_{ab[cd]} \Rightarrow T_{abcd} = T_{a[bcd]}$.

注 (1) 推广至一般的结论是

$$T_{\cdots a\cdots b\cdots c\cdots} = T_{\cdots[a\cdots b]\cdots c\cdots} = T_{\cdots a\cdots[b\cdots c]\cdots} \Rightarrow T_{\cdots a\cdots b\cdots c\cdots} = T_{\cdots[a\cdots b\cdots c]\cdots}.$$

上式的前提中只有两个等号，关键是 $T_{\cdots[a\cdots b]\cdots c\cdots}$ 和 $T_{\cdots a\cdots[b\cdots c]\cdots}$ 中的指标 b 都在方括号内.

(2) 把前提和结论中的方括号改为圆括号，则推广前后的命题仍成立.

第3章　黎曼(内禀)曲率张量

§3.1　导 数 算 符

欧氏空间有熟知的导数算符 $\vec{\nabla}$，它作用于函数(标量场) f 得矢量场 $\vec{\nabla}f$ (梯度)，作用于矢量场 $\vec{v}$ (再求缩并)得标量场 $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ (散度)等. 由于存在欧氏度规 δ_{ab}，欧氏空间的矢量 v^a 与对偶矢量 $v_a=\delta_{ab}v^b$ 自然认同. 现在要把 $\vec{\nabla}$ 推广到任意流形，其上可以没有度规，所以要分清矢量和对偶矢量. 研究发现在推广时 $\vec{\nabla}$ 更像对偶矢量，故应记作 ∇_a. 其实 ∇ 本身是算符，既非矢量也非对偶矢量，所谓把 ∇ 看作对偶矢量是指它作用于函数 f 的结果 $\nabla_a f$ 是对偶矢量. 推而广之，∇ 作用于任一 $(k,\ l)$ 型张量场的结果是 $(k,\ l+1)$ 型张量场. 于是有如下定义：

定义 1　以 $\mathscr{F}_M(k,l)$ 代表流形 M 上全体 C^∞ 的 (k,l) 型张量场的集合[函数 f 可看作 $(0,0)$ 型张量场(标量场)，故 $\mathscr{F}_M(0,0)\equiv\mathscr{F}_M$.]. 映射 $\nabla:\mathscr{F}_M(k,\ l)\to\mathscr{F}_M(k,\ l+1)$ 称为 M 上的**(无挠)导数算符**(derivative operator)，① 若它满足如下条件：

(a) 具有线性性：

$$\nabla_a(\alpha T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\beta S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l})=\alpha\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\beta\nabla_a S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$

$$\forall T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l},\quad S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}_M(k,l),\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\ ;$$

(b) 满足莱布尼茨(Leibnitz)律：

$$\nabla_a(T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}})=T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\nabla_a S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}+S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$

$$\forall\ T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}_M(k,l),\ S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}\in\mathscr{F}_M(k',l')\ ;$$

(c) 与缩并可交换顺序；

(d) $v(f)=v^a\nabla_a f$，　　$\forall f\in\mathscr{F}_M$，$v\in\mathscr{F}_M(1,0)$ ；

(e) 具有无挠(torsion free)性：$\nabla_a\nabla_b f=\nabla_b\nabla_a f$，　$\forall f\in\mathscr{F}_M$.

注 1

(1) 条件(c)又可表为 $\nabla\circ C=C\circ\nabla$，其中 C 代表缩并. 今后将常写

$$\nabla_a(v^b\omega_b)=v^b\nabla_a\omega_b+\omega_b\nabla_a v^b$$

一类的式子，这就要用到条件(c)，因为上式的导出过程为

---

① $\mathscr{F}(k,l)$ 可放宽为全体 C^1 类 (k,l) 型张量场的集合. 就是说，∇_a 可作用于任一 C^1 类张量场.

$$\nabla_a(v^b\omega_b)=\nabla_a[C(v^b\omega_c)]=C_2^1[\nabla_a(v^b\omega_c)]$$
$$=C_2^1(v^b\nabla_a\omega_c)+C_2^1[(\nabla_a v^b)\omega_c]=v^b\nabla_a\omega_b+\omega_b\nabla_a v^b,$$

其中第二步用到条件(c).

(2) 条件(d)左边的函数$v(f)$不宜记作$v^a(f)$，因$v^a(f)$易被误以为矢量场. 这是应写而不写抽象指标的少数例子之一. 对条件(d)可用欧氏空间的$\vec{\nabla}$为例理解. 设v^a为欧氏空间中任一矢量场，其在笛卡儿系坐标基底的展开式为

$$v^a=v^1(\partial/\partial x)^a+v^2(\partial/\partial y)^a+v^3(\partial/\partial z)^a,$$

则它对函数f的作用可表为

$$v(f)=v^1(\partial f/\partial x)+v^2(\partial f/\partial y)+v^3(\partial f/\partial z)=\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f=v^a\nabla_a f.$$

可见条件(d)是这一性质对任意流形的推广.

(3) 设∇_a是任一导数算符，则由条件(d)易证(练习)

$$\nabla_a f=(\mathrm{d}f)_a,\qquad \forall f\in\mathscr{F}_M, \tag{3-1-1}$$

其中$(\mathrm{d}f)_a$是函数f生成的对偶矢量场$\mathrm{d}f$ [见式(2-3-7)]的抽象指标表示.

(4) 由§2.6 定义 1 可知条件(e)实质上是下式的抽象指标表述：
$(\nabla\nabla f)(u,v)=(\nabla\nabla f)(v,u)\ \forall u,v\in\mathscr{T}(1,0)$，亦即$\nabla\nabla f$是个对称的(0, 2)型张量.

(5) 满足条件(a)~(d)而不满足条件(e)的导数算符叫**有挠导数算符**. 广义相对论中只用无挠导数算符. 本书的∇_a在不加声明时一律代表无挠导数算符.

[选读 3-1-1]

本选读与选读 2-2-1 精神一致. 为行文简练，此处把张量场$T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$简记为$T$.

定理 3-1-1 设$T_1,T_2\in\mathscr{F}_M(k,l)$在$p\in M$的某邻域$N$内相等，即$T_1|_N=T_2|_N$，则$\nabla_a T_1|_p=\nabla_a T_2|_p$.

证明 类似于定理 2-2-1 的证明，留给读者完成. □

注 2 设张量场T只在$p\in M$的邻域$U(\neq M)$上有定义，即$T\in\mathscr{F}_U(k,l)$，$T\notin\mathscr{F}_M(k,l)$. 按照定义 1, ∇_a只能作用于M上的张量场，所以$\nabla_a T$无意义. 然而总可找到$\bar{T}\in\mathscr{F}_M(k,l)$及$p$的邻域$N\subset U$使$\bar{T}|_N=T|_N$，因而可把$\nabla_a T$定义为$\nabla_a\bar{T}$. 虽然对同一$T$存在无数满足上述要求的$\bar{T}$，但定理 3-1-1 保证$\nabla_a\bar{T}$对所有$\bar{T}$一样. 可见用$\nabla_a\bar{T}$给$\nabla_a T$下定义合法. 于是我们说$\nabla_a$有**局域性**，它对张量场$T$的作用结果在$p$点的值只取决于$T$在$p$点的一个邻域(多么“小”都可以)上的表现. 读者早已熟知微积分学中对函数的求导有类似性质.

[选读 3-1-1 完]

任何流形必定存在满足定义 1 的导数算符[见陈省身，陈维桓(1983)第四章定理 1.1]. 事实上，导数算符不但存在，而且很多. 下面讨论多到什么程度. 由式(3-1-1)可知任意两个导数算符∇_a和$\tilde{\nabla}_a$作用于同一函数的结果相同，即

$$\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f = (\mathrm{d}f)_a , \qquad \forall f \in \mathscr{F}_M . \tag{3-1-2}$$

可见∇_a与$\tilde{\nabla}_a$的不同只能体现在对非(0, 0)型张量场的作用上. 先讨论(0, 1)型张量场(对偶矢量场). 设在点$p \in M$给定一个对偶矢量$\mu_b \in V_p{}^*$, 考虑M上的任意两个对偶矢量场$\omega_b, \omega'_b \in \mathscr{F}_M(0,1)$, 满足$\omega'_b|_p = \omega_b|_p = \mu_b$ (ω_b和ω'_b称为μ_b在M上的两个延拓). 设∇_a为导数算符, 则$\nabla_a \omega'_b|_p$与$\nabla_a \omega_b|_p$一般并不相同. 这类似于以下事实: 两个一元函数$f(x)$和$f'(x)$在x_0点取值相同[$f'(x_0) = f(x_0)$]并不保证$(\mathrm{d}f'/\mathrm{d}x)|_{x_0} = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)|_{x_0}$. 然而下面要证明, 对$M$上任意两个导数算符$\nabla_a$和$\tilde{\nabla}_a$, 只要$\omega'_b|_p = \omega_b|_p$就有

$$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega'_b]_p = [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p ,$$

其中$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b$是$\tilde{\nabla}_a \omega_b - \nabla_a \omega_b$的简写.

定理 3-1-2　设$p \in M$, ω_b, $\omega'_b \in \mathscr{F}(0, 1)$满足$\omega'_b|_p = \omega_b|_p$, 则

$$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega'_b]_p = [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p . \tag{3-1-3}$$

证明　只须证明

$$[\nabla_a(\omega'_b - \omega_b)]_p = [\tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b)]_p . \tag{3-1-4}$$

设$\Omega_b \equiv \omega'_b - \omega_b$. 选坐标系$\{x^\mu\}$使其坐标域含$p$, 则$\omega'_b|_p = \omega_b|_p$导致$\Omega_\mu(p) = 0$, 其中$\Omega_\mu$是$\Omega_b$的坐标分量. 于是对$p$点有

$$\begin{aligned}[\nabla_a(\omega'_b - \omega_b)]_p &= [\nabla_a \Omega_b]_p = \{\nabla_a[\Omega_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_b]\}|_p \\ &= \Omega_\mu(p)[\nabla_a(\mathrm{d}x^\mu)_b]_p + [(\mathrm{d}x^\mu)_b \nabla_a \Omega_\mu]_p = [(\mathrm{d}x^\mu)_b \nabla_a \Omega_\mu]_p ,\end{aligned}$$

同理有$[\tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b)]_p = [(\mathrm{d}x^\mu)_b \tilde{\nabla}_a \Omega_\mu]_p$. 由式(3-1-2)知$[\nabla_a \Omega_\mu]_p = [\tilde{\nabla}_a \Omega_\mu]_p$, 得证. □

虽然导数$[\nabla_a \omega_b]_p$和$[\tilde{\nabla}_a \omega_b]_p$依赖于$\omega_b$在$p$点的一个邻域内的值, 然而定理 3-1-2 表明$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$只依赖于$\omega_b$在$p$点的值, 这说明$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$是把$p$点的对偶矢量$\omega_b|_p$变为$p$点的(0, 2)型张量$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$的线性映射(给定$p$点的任一对偶矢量$\mu_b$, 任选对偶矢量场$\omega_b$使它在$p$点的值$\omega_b|_p = \mu_b$, 则$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$便是$\mu_b$在该映射下的像.). 所以$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$在$p$点对应于一个(1, 2)型张量$C^c{}_{ab}$, 满足

$$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p = C^c{}_{ab}\omega_c|_p . \tag{3-1-5}$$

因为p点可任选, 所以M上两个导数算符∇_a和$\tilde{\nabla}_a$在对ω_b的作用上的差别体现为M上的一个(1, 2)型张量场$C^c{}_{ab}$, 即

定理 3-1-3　$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c , \qquad \forall \omega_b \in \mathscr{F}(0, 1) .$　(3-1-6)

∇_a的无挠性导致张量场$C^c{}_{ab}$的如下对称性:

定理 3-1-4　$C^c{}_{ab}=C^c{}_{ba}$.

证明　令 $\omega_b=\nabla_b f=\tilde{\nabla}_b f$ [用到式(3-1-2)]，其中 $f\in\mathscr{F}_M$，则式(3-1-6)给出 $\nabla_a\nabla_b f=\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b f-C^c{}_{ab}\nabla_c f$. 交换指标 a，b 得 $\nabla_b\nabla_a f=\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a f-C^c{}_{ba}\nabla_c f$. 两式相减，注意到无挠性条件(e)，便有 $C^c{}_{ab}\nabla_c f=C^c{}_{ba}\nabla_c f$. 令 $T^c{}_{ab}\equiv C^c{}_{ab}-C^c{}_{ba}$，则 $\forall f\in\mathscr{F}_M$ 有 $T^c{}_{ab}\nabla_c f=0$，于是 $T^c{}_{ab}$ 在任一坐标基底的分量 $T^\sigma{}_{\mu\nu}=T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b=0$ [其中第二步是因为 $T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c=T^c{}_{ab}\nabla_c x^\sigma=0$(把 x^σ 看作 f)]，因而 $T^c{}_{ab}=0$. □

定理 3-1-5　$\nabla_a v^b=\tilde{\nabla}_a v^b+C^b{}_{ac}v^c\qquad\forall v^b\in\mathscr{F}_M(1,0)$.　(3-1-7)

证明　设 ω_b 为 M 上任一对偶矢量场，则

$$\nabla_a(\omega_b v^b)=\omega_b\nabla_a v^b+v^b\nabla_a\omega_b=\omega_b\nabla_a v^b+v^b(\tilde{\nabla}_a\omega_b-C^c{}_{ab}\omega_c),$$

其中最后一步用到式(3-1-6). 另一方面，$\tilde{\nabla}_a(\omega_b v^b)=\omega_b\tilde{\nabla}_a v^b+v^b\tilde{\nabla}_a\omega_b$. 而 $\omega_b v^b$ 为标量场，由式(3-1-2)知 $\nabla_a(\omega_b v^b)=\tilde{\nabla}_a(\omega_b v^b)$，故以上两式右边相等，因而得

$$\omega_b\nabla_a v^b=\omega_b\tilde{\nabla}_a v^b+C^c{}_{ab}v^b\omega_c=\omega_b\tilde{\nabla}_a v^b+C^b{}_{ac}v^c\omega_b,\qquad\forall\omega_b\in\mathscr{F}_M(0,1),$$

于是有式(3-1-7). □

用类似方法可以证明 ∇_a 与 $\tilde{\nabla}_a$ 作用于任一(k,l)型张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 所得结果之差 $\nabla_a T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}-\tilde{\nabla}_a T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 可表为 $k+l$ 项，每项都含 $C^c{}_{ab}$，与 T 的某一上指标缩并的 k 项前面为 + 号，与 T 的某一下指标缩并的 l 项前面为−号，例如

$$\nabla_a T^b{}_c=\tilde{\nabla}_a T^b{}_c+C^b{}_{ad}T^d{}_c-C^d{}_{ac}T^b{}_d,$$

一般形式见下面的定理：

定理 3-1-6

$$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}=\tilde{\nabla}_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\sum_i C^{b_i}{}_{ad}T^{b_1\cdots d\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}-\sum_j C^d{}_{ac_j}T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots d\cdots c_l}$$

$$\forall T\in\mathscr{F}_M(k,l).\qquad(3\text{-}1\text{-}8)$$

证明　练习. □

定理 3-1-6 表明任意两个导数算符的差别仅体现在一个张量场 $C^c{}_{ab}$ 上. 反之也不难验证，任给一个导数算符 $\tilde{\nabla}_a$ 和一个下标对称的光滑张量场 $C^c{}_{ab}$，由式(3-1-8)定义的 ∇_a 必满足导数算符的全部条件，因而也是一个导数算符. 可见流形上只要有一个导数算符就会有许多导数算符. 选定导数算符 ∇_a 后的流形 M 可记作 (M,∇_a)，它比 M 本身有更多结构(∇_a 提供附加结构)，例如可谈及矢量沿曲线的平移(见§3.2)及 (M,∇_a) 的曲率(见§3.4).

设 $\{x^\mu\}$ 是 M 的一个坐标系，其坐标基底和对偶基底分别为 $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$ 和 $\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$. 在坐标域 O 上定义映射 $\partial_a:\mathscr{F}_O(k,l)\to\mathscr{F}_O(k,l+1)$ 如下[仅以 $T^b{}_c\in$

$\mathscr{T}_O(1,1)$ 为例写出]:

$$\partial_a T^b{}_c := (\mathrm{d}x^\mu)_a(\partial/\partial x^\nu)^b(\mathrm{d}x^\sigma)_c\, \partial_\mu T^\nu{}_\sigma\ , \tag{3-1-9}$$

其中 $T^\nu{}_\sigma$ 是 $T^b{}_c$ 在该坐标系的分量，∂_μ 是对坐标 x^μ 求偏导数的符号 $\partial/\partial x^\mu$ 的简写. 不难验证 ∂_a 满足定义 1 的 5 个条件，可见 ∂_a 是 O 上的一个导数算符. 这是一个从定义起就依赖于坐标系的导数算符，而且只在该坐标系的坐标域上有定义，称为该坐标系的**普通导数**(ordinary derivative)**算符**. 式(3-1-9)表明 $\partial_\mu T^\nu{}_\sigma$ 是张量场 $\partial_a T^b{}_c$ 在该坐标系的分量，所以 ∂_a 的定义亦可表为：张量场 $T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$ 的普通导数 $\partial_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$ 的坐标分量等于该张量场的坐标分量对坐标的偏导数 $\partial(T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l})/\partial x^\mu$. 由此易见：

(1) 任一坐标系的 ∂_a 作用于该系的任一坐标基矢和任一对偶坐标基矢结果为零，即

$$\partial_a(\partial/\partial x^\nu)^b = 0, \qquad \partial_a(\mathrm{d}x^\nu)_b = 0. \tag{3-1-10}$$

(2) ∂_a 满足比定义 1 条件(e)强得多的条件，即

$$\partial_a\partial_b T^{\cdots}{}_{\cdots} = \partial_b\partial_a T^{\cdots}{}_{\cdots}\ ,\quad \text{或}\ \partial_{[a}\partial_{b]} T^{\cdots}{}_{\cdots} = 0\ ,$$

其中 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 是任意型张量场.

∂_a 虽可看作 ∇_a 的特例，但其定义依赖于坐标系. 我们把与坐标系(或其他人为因素)无关的那些 ∇_a 称为**协变导数**(covariant derivative)**算符**，∂_a 不在此列.

定义 2 设 ∂_a 是 (M, ∇_a) 上任给的坐标系的普通导数算符，则体现 ∇_a 与 ∂_a 的差别的张量场 $C^c{}_{ab}$ [把 ∂_a 看作式(3-1-6)的 $\tilde{\nabla}_a$]称为 ∇_a 在该坐标系的**克氏符**(Christoffel symbol)，记作 $\Gamma^c{}_{ab}$.

注 3 一般书强调克氏符不是张量，本书及某些书[如 Wald(1984)]却说它是张量. 这没有实质性矛盾，只是克氏符的定义有微妙的不同. 不用抽象指标的书把克氏符定义为与坐标系有关的一堆数，在坐标变换下不服从张量变换律，故不构成张量. 我们一开始就用映射语言把克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ 定义为张量，但因它与 ∂_a 相应，而 ∂_a 依赖于坐标系，故克氏符是依赖于坐标系的张量(坐标系改变时张量本身要变). 设 ∇_a 是 M 上指定的导数算符，$\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 是 M 上的两个坐标系，坐标域之交为 U，∇_a 在两系中的克氏符分别为 $\Gamma^c{}_{ab}$ 和 $\bar{\Gamma}^c{}_{ab}$. 作为张量，它们(在 U 中)既可用 $\{x^\mu\}$ 系也可用 $\{x'^\mu\}$ 系求分量，设 $\Gamma^c{}_{ab}$ 在 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 系的分量为 $\{\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 和 $\{\Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ (这两堆数当然满足张量变换律)，$\bar{\Gamma}^c{}_{ab}$ 在 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 系的分量为 $\{\bar{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 和 $\{\bar{\Gamma}'^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ (也满足张量变换律)，但 $\{\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 与 $\{\bar{\Gamma}'^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 不满足张量变换律. 而一般书恰恰是把 $\{\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 及 $\{\bar{\Gamma}'^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 分别定义为 $\{x^\mu\}$ 系及 $\{x'^\mu\}$ 系的克氏符，自然不构成

张量. 一般书强调"克氏符不是张量"是对的，本书则应强调"克氏符是坐标系依赖的张量". 读者常问：你们为什么非把克氏符说成张量不可？回答是：只要采用抽象指标并按照上述思路讨论(包括使用"张量面面观"的优雅论辩)，自然要承认反映两个导数算符∇_a与$\tilde{\nabla}_a$之差的$C^c{}_{ab}$是张量. 在M指定了一个导数算符∇_a的前提下，选定坐标系就有导数算符∂_a，把∂_a看作$\tilde{\nabla}_a$，则反映∇_a与∂_a之差的$C^c{}_{ab}$(此时记作$\Gamma^c{}_{ab}$)当然是张量. 如果我们不承认$\Gamma^c{}_{ab}$是张量，就是自打嘴巴. 然而与此同时应该强调$\Gamma^c{}_{ab}$是坐标系依赖的张量(有多少个坐标系就有多少个不同的∂_a，因而有多少个不同的$\Gamma^c{}_{ab}$.). 这种强调的实质就是在强调一般书所强调的"克氏符不是张量". 两种强调只是同一问题的两种提法. 重要的不在于提法而在于充分注意问题的实质，即切记两组分量$\{\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\}$与$\{\bar{\Gamma}'^\sigma{}_{\mu\nu}\}$之间不遵守张量变换律.

类似地，设v^b是矢量场，则$\partial_a v^b$也是坐标系依赖的张量场. 把$\partial_a v^b$在∂_a所在坐标系展开：

$$\partial_a v^b = (\mathrm{d}x^\mu)_a (\partial/\partial x^\nu)^b v^\nu{}_{,\mu},$$

$$\text{其中 } v^\nu{}_{,\mu} \equiv \partial_\mu v^\nu \equiv \partial v^\nu / \partial x^\mu \quad \text{(逗号代表求偏导数)},$$

一般书强调$v^\nu{}_{,\mu}$不构成张量，我们说$\partial_a v^b$是坐标系依赖的张量，也是同一问题的两种提法. 说得更具体些，设∂_a和∂'_a分别是坐标系$\{x^\mu\}$和$\{x'^\mu\}$的普通导数算符，则一般有$\partial_a v^b \neq \partial'_a v^b$(所以说$\partial_a v^b$是坐标系依赖的张量). 把$\partial_a v^b$和$\partial'_a v^b$在各自坐标基底展开：

$$\partial_a v^b = (\mathrm{d}x^\mu)_a (\partial/\partial x^\nu)^b v^\nu{}_{,\mu}, \qquad \partial'_a v^b = (\mathrm{d}x'^\mu)_a (\partial/\partial x'^\nu)^b v'^\nu{}_{,\mu},$$

$$\text{其中 } v'^\nu{}_{,\mu} \equiv \partial v'^\nu / \partial x'^\mu,$$

则$\partial_a v^b \neq \partial'_a v^b$导致$v^\nu{}_{,\mu}$与$v'^\nu{}_{,\mu}$之间一般不满足张量分量变换律(也可直接验证，见习题2). 所以一般书说$v^\nu{}_{,\mu}$不是张量. 至于$\nabla_a v^b$，则是与坐标系无关的张量，它在坐标系中的分量通常记为$v^\nu{}_{;\mu}$，即$\nabla_a v^b = v^\nu{}_{;\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\partial/\partial x^\nu)^b$. 由于$\nabla_a v^b$与坐标系无关，$v^\nu{}_{;\mu}$满足张量变换律，故一般书说它是张量(其实是张量的分量)，并称之为v^ν的**协变导数**(其实是协变导数$\nabla_a v^b$的坐标分量). 类似地，$\nabla_a \omega_b$的坐标分量$\omega_{\nu;\mu}$也被称为ω_ν的协变导数.

定理 3-1-7 $v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} v^\sigma, \qquad \omega_{\nu;\mu} = \omega_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma$, (3-1-11)

其中v^ν及ω_ν为任意矢量场和对偶矢量场在任一坐标基底的分量，$\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}$是该系的克氏符$\Gamma^b{}_{ac}$在该基底的分量(一般书的说法是"$\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}$是该系的克氏符"，本书后

面为简单起见也常用这一说法.).

证明　习题. □

定理 3-1-8　定义 1 的条件(c)等价于

$$\nabla_a \delta^b{}_c = 0\,, \tag{3-1-12}$$

其中$\delta^b{}_c$看作(1, 1)型张量场，其在每点$p \in M$的定义为$\delta^b{}_c v^c = v^b$, $\forall v^c \in V_p$.

证明[选读]

(A) 设∇_a满足定义 1 的条件(a)~(d)，欲证它满足式(3-1-12). $\forall v^b \in \mathscr{F}_M(1,0)$有

$$\nabla_a v^b = \nabla_a(\delta^b{}_c v^c) = \nabla_a[C(\delta^b{}_c v^d)] = C[\nabla_a(\delta^b{}_c v^d)]$$

$$= C(v^d \nabla_a \delta^b{}_c + \delta^b{}_c \nabla_a v^d) = v^c \nabla_a \delta^b{}_c + \delta^b{}_c \nabla_a v^c = v^c \nabla_a \delta^b{}_c + \nabla_a v^b\,,$$

其中 C 代表对指标 c, d 的缩并，第三步用到条件(c)，最末一步用到$\delta^b{}_c T_a{}^c = T_a{}^b\ \forall T_a{}^c$. 上式表明$v^c \nabla_a \delta^b{}_c = 0\ \ \forall v^c \in \mathscr{F}(1,0)$，所以$\nabla_a \delta^b{}_c = 0$.

(B) 设$\tilde{\nabla}_a$满足定义 1 的条件(a), (b), (d)和式(3-1-12)，欲证它满足条件(c). 为此，设∇_a满足条件(a)~(d). 因为定理 3-1-2 的证明不用条件(c)，故式(3-1-6)成立. 定理 3-1-4 的证明要用条件(c)，不能直接应用，但可由∇_a和$\tilde{\nabla}_a$满足的条件证明它仍成立(有余力的读者可作为一个有挑战性的练习)，于是有式(3-1-8). 由此出发，利用∇_a满足条件(c)便可证明$\tilde{\nabla}_a$满足条件(c). □

流形M上矢量场对易子$[u,v]^a$的定义无需M有附加结构[式(2-2-9)]，但该式的不方便之处在于它不能脱离被作用对象(标量场f). 现在，在有了导数算符的概念之后，就可借助于随便一个导数算符∇_a写出矢量场对易子$[u,v]^a$的显表达式，见如下定理：

定理 3-1-9　$[u,v]^a = u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a\,,$ (3-1-13)

其中∇_b是任一无挠导数算符.

证明　$\forall f \in \mathscr{F}$有

$$[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f)) = u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^b \nabla_b (u^a \nabla_a f)$$

$$= u^b (\nabla_b v^a) \nabla_a f + v^a u^b \nabla_b \nabla_a f - v^b (\nabla_b u^a) \nabla_a f - u^a v^b \nabla_b \nabla_a f$$

$$= (u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a) \nabla_a f\,,$$

其中第二步用到导数算符条件(d)，第三步用到条件(b)和(c)，第四步用到无挠性条件(e). 最后，再用一次(d)，即$[u,v](f) = [u,v]^a \nabla_a f$，便得式(3-1-13). □

注 4　取任一坐标系$\{x^\mu\}$的普通导数算符∂_b作为式(3-1-13)的∇_b，便有

$$[u,v]^\mu = (\mathrm{d}x^\mu)_a [u,v]^a = u^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu u^\mu\,.$$

此即第 2 章习题 10 的待证命题.

§3.2 矢量场沿曲线的导数和平移

3.2.1 矢量场沿曲线的平移

在流形 M 上选定一个导数算符 ∇_a 后，就有矢量沿曲线平移的概念.

定义1 设 v^a 是沿曲线 $C(t)$的矢量场. v^a 称为**沿 $C(t)$平移的**[parallelly transported along $C(t)$]，若$T^b\nabla_b v^a=0$，其中$T^a\equiv(\partial/\partial t)^a$是曲线的切矢.

正如$T^a\nabla_a f=T(f)$可解释为函数f沿T^a [即沿$C(t)$]的导数那样，$T^b\nabla_b v^a$可解释为矢量场v^a沿T^b的导数(详见3.2.3小节). 于是定义1也可解释为：v^a沿$C(t)$平移的充要条件是它沿T^b的导数为零.

定理 3-2-1 设曲线 $C(t)$位于坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内，曲线的参数式为$x^\mu(t)$. 令$T^a\equiv(\partial/\partial t)^a$，则沿$C(t)$的矢量场$v^a$满足

$$T^b\nabla_b v^a=(\partial/\partial x^\mu)^a(\mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}t+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma).\tag{3-2-1}$$

证明 以∂_a代表坐标系$\{x^\mu\}$的普通导数算符，则由式(3-1-7)得

$$\begin{aligned}T^b\nabla_b v^a&=T^b(\partial_b v^a+\Gamma^a{}_{bc}v^c)=T^b[(\mathrm{d}x^\nu)_b(\partial/\partial x^\mu)^a\partial_\nu v^\mu+\Gamma^a{}_{bc}v^c]\\&=T^\nu(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial v^\mu/\partial x^\nu)+\Gamma^a{}_{bc}T^b v^c=(\partial/\partial x^\mu)^a[T^\nu(\partial v^\mu/\partial x^\nu)+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma],\end{aligned}\tag{3-2-2}$$

其中T^ν是曲线切矢T^b的坐标分量. 由式(2-2-7)知$T^\nu=\mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t$，故

$$T^\nu(\partial v^\mu/\partial x^\nu)=[\mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t][\partial v^\mu(t(x))/\partial x^\nu]=\mathrm{d}v^\nu(t)/\mathrm{d}t.$$

代入式(3-2-2)便得式(3-2-1). □

[选读 3-2-1]

有一个问题要讲清楚. 按照选读 3-1-1，$\forall p\in C(t)$，要使$\nabla_b v^a|_p$有意义至少要v^a在p的一个邻域U上有定义. 偏偏v^a却只定义在曲线$C(t)$上，而p的任一邻域都包含不在$C(t)$上的点，于是式(3-2-1)中的$\nabla_b v^a$并无意义！好在$\nabla_b v^a$只以$T^b\nabla_b v^a$的形式出现在式(3-2-1)中，而$T^b\nabla_b v^a$没有这个问题. 关键在于$\nabla_b v^a$前加上T^b表明是对v^a沿曲线切向求导，因而只涉及v^a在曲线上的值. 下面具体阐明. 把式(3-2-2)在点$p\in C(t)$取值得

$$T^b\nabla_b v^a|_p=(\partial/\partial x^\mu)^a|_p[T^\nu(\partial v^\mu(x)/\partial x^\nu)+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma]|_p.\tag{3-2-3}$$

方括号内第一项的$\partial v^\mu(x)/\partial x^\nu$是函数$v^\mu$对自变数$x^\nu$求导. 求导时$x^\nu$的微小改变$\Delta x^\nu$导致以$x^\nu$为坐标的点(称为求导动点)离开$p$点. 因$\Delta x^\nu$ $(\nu=1,\cdots,n)$可任取，动点的活动范围是p点的一个邻域U，其中必有不在$C(t)$上的点，它们的v^μ值无

意义，因此$\partial v^\mu(x)/\partial x^\nu$本质上就是个无意义量. 为解决问题可在邻域$U$上定义矢量场$\bar{v}^a$(称为$v^a$的延拓)，只要求它在$U\cap C(t)$上等于$v^a$. 现在把$T^b\nabla_b v^a|_p$就定义为$T^b\nabla_b \bar{v}^a|_p$，即

$$T^b\nabla_b v^a|_p \equiv T^b\nabla_b \bar{v}^a|_p = (\partial/\partial x^\mu)^a|_p [T^\nu(\partial \bar{v}^\mu(x)/\partial x^\nu) + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma]|_p . \tag{3-2-4}$$

与$\partial v^\mu(x)/\partial x^\nu$不同，$\partial \bar{v}^\mu(x)/\partial x^\nu$有明确意义. 然而同一$v^a$有无数延拓$\bar{v}^a$，如果不同延拓的$T^b\nabla_b \bar{v}^a|_p$不同，则用式(3-2-4)定义$T^b\nabla_b v^a|_p$将毫无意义. 事实上，设$\bar{v}^a$和$\bar{v}'^a$是两个不同延拓，的确有$\partial \bar{v}^\mu(x)/\partial x^\nu \neq \partial \bar{v}'^\mu(x)/\partial x^\nu$. 然而配上$T^\nu$就不再有问题，因为在$p$点有

$$\begin{aligned} T^\nu \partial \bar{v}^\mu(x)/\partial x^\nu &= [\mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t][\partial \bar{v}^\mu(t(x))/\partial x^\nu] = \mathrm{d}\bar{v}^\mu(t)/\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}\bar{v}'^\mu(t)/\mathrm{d}t = T^\nu \partial \bar{v}'^\mu(x)/\partial x^\nu , \end{aligned}$$

其中关键一步(第三步)是因为$\bar{v}^\mu(t)$[由U上矢量场$\bar{v}^a$与曲线$C(t)$结合而得的一元函数]等于$v^\mu(t)$. 结论：$\nabla_b v^a|_p$无意义，但$T^b\nabla_b v^a|_p$有意义. **[选读 3-2-1 完]**

定理 3-2-2　曲线上一点$C(t_0)$及该点的一个矢量决定唯一的沿曲线平移的矢量场.

证明　若存在把整条曲线含于其坐标域内的坐标系，则由式(3-2-1)可知平移定义$T^b\nabla_b v^a=0$等价于

$$\mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}t + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma = 0, \qquad \mu = 1,\cdots,n . \tag{3-2-5}$$

这是关于n个待求函数$v^\mu(t)$的n个一阶常微分方程(注意$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$及T^ν均为t的已知函数)，而给定$C(t_0)$点的一个矢量就是给定初始条件$v^\nu(t_0)$，故有唯一解$v^\nu(t)$. 读者可用“接力法”把上述证明推广至曲线不能被一个坐标域覆盖的情况. □

设$p,q\in M$，则V_p和V_q是两个矢量空间，两者的元素无法比较. 但若有一曲线$C(t)$联接p，q，就可用下法定义一个由V_p到V_q的映射：$\forall v^a\in V_p$，由定理3-2-2知在$C(t)$上有唯一的平移矢量场(其在p点的值为v^a)，它在q点的值就定义为v^a的像. 注意，这是一个曲线依赖的映射，另选一条联接p，q的曲线，v^a的像可能不同. 然而，无论如何，∇_a的存在毕竟使原来毫无联系的V_p与V_q发生了某种联系(虽然曲线依赖)，因此也把∇_a叫做**联络**(connection).

初学者经常提出这样的问题：为什么把∇_a称为导数算符？或者说，为什么说这个∇_a是3维欧氏空间中熟知的$\vec{\nabla}$在一般流形上的某种推广？为什么把$T^b\nabla_b v^a$解释为v^a沿T^b的导数？为什么把满足$T^b\nabla_b v^a=0$的v^a称为沿曲线平移的矢量场？为了回答这些问题，还须先讲3.2.2小节.

3.2.2 与度规相适配的导数算符

从本章开始至今未涉及度规，只假定 M 上选了一个联络 ∇_a．如果 M 上还指定了度规 g_{ab}，矢量之间就可谈及内积．为使平移概念与欧氏空间中熟知的平移一致，应补充以下要求：设 u^a, v^a 为沿 $C(t)$ 平移的矢量场，则 $u^a v_a (\equiv g_{ab}u^a v^b)$ 在 $C(t)$ 上是常数(两个矢量平移时“内积”不变)．设 T^a 为曲线 $C(t)$ 的切矢，则这一要求等价于

$$0 = T^c\nabla_c(g_{ab}u^a v^b) = g_{ab}u^a T^c\nabla_c v^b + g_{ab}v^b T^c\nabla_c u^a + u^a v^b T^c\nabla_c g_{ab} = u^a v^b T^c\nabla_c g_{ab}\,.$$

上式对所有曲线以及沿它平移的任意两个矢量场 u^a，v^a 成立的充要条件为

$$\nabla_c g_{ab} = 0\,. \tag{3-2-6}$$

没有度规时，∇_c 的选择非常任意．指定度规后，选 ∇_c 时就宜满足附加要求 $\nabla_c g_{ab}=0$．下面证明这一要求决定了唯一的 ∇_a．

定理 3-2-3 流形 M 上选定度规场 g_{ab} 后，存在唯一的 ∇_a 使 $\nabla_a g_{bc}=0$．

证明 设 $\tilde\nabla_a$ 为任一导数算符，欲求适当的 $C^c{}_{ab}$ 使它与 $\tilde\nabla_a$ 决定的 ∇_a 满足 $\nabla_a g_{bc}=0$．由式(3-1-8)有

$$\nabla_a g_{bc} = \tilde\nabla_a g_{bc} - C^d{}_{ab}g_{dc} - C^d{}_{ac}g_{bd} = \tilde\nabla_a g_{bc} - C_{cab} - C_{bac}\,.$$

故由 $\nabla_a g_{bc}=0$ 得

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde\nabla_a g_{bc}\,, \tag{3-2-7}$$

同理有

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde\nabla_b g_{ac}\,, \tag{3-2-8}$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde\nabla_c g_{ab}\,. \tag{3-2-9}$$

式(3-2-7)加式(3-2-8)减式(3-2-9)并利用 $C_{cab}=C_{cba}$，得

$$2C_{cab} = \tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ac} - \tilde\nabla_c g_{ab}\,,$$

或

$$C^c{}_{ab} = \tfrac{1}{2}g^{cd}(\tilde\nabla_a g_{bd} + \tilde\nabla_b g_{ad} - \tilde\nabla_d g_{ab})\,. \tag{3-2-10}$$

这 $C^c{}_{ab}$ 与 $\tilde\nabla_a$ 结合而得的 ∇_a 便是方程 $\nabla_a g_{bc}=0$ 的解．这必定是唯一解，因若 ∇'_a 也满足 $\nabla'_a g_{bc}=0$，把 ∇'_a 作为式(3-2-10)中的 $\tilde\nabla_a$ 便知反映 ∇_a 与 ∇'_a 差别的 $C^c{}_{ab}$ 为零． □

满足 $\nabla_a g_{bc}=0$ 的 ∇_a 称为**与 g_{bc} 适配(或相容)的导数算符**．今后如无声明，在有 g_{ab} 时谈到 ∇_a 都是指与 g_{ab} 适配的导数算符．可以证明(练习)，$\nabla_a g_{bc}=0$ 保证 $\nabla_a g^{bc}=0$(反之亦然)．这为计算带来很大方便．

例 1 欧氏空间存在无数满足§3.1 定义 1 的导数算符，但与欧氏度规 δ_{ab} 相适配的导数算符只有一个，这就是笛卡儿坐标系 $\{x^\mu\}$ 的普通导数算符 ∂_a (所有笛卡

儿系的 ∂_a 都相同)，因为由 δ_{ab} 的定义式(2-5-11)得 $\partial_c\delta_{ab}=(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b\partial_\sigma\delta_{\mu\nu}=0$. 对3维欧氏空间，笛卡儿坐标系的 ∂_a 就是普通矢量场论中熟知的 $\vec{\nabla}$.

设 ∇_a 与 g_{bc} 相适配，取 $\tilde{\nabla}_a$ 为任一坐标系的 ∂_a，则式(3-2-10)的 $C^c{}_{ab}$ 便是 ∇_a 在该坐标系的克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$，由该式不难推得 $\Gamma^c{}_{ab}$ 在该系的分量 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 的如下表达式：

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}), \tag{3-2-10'}$$

推导如下：把 ∂_a 看作式(3-2-10)中的 $\tilde{\nabla}_a$，则式中的 $C^c{}_{ab}$ 就是 $\Gamma^c{}_{ab}$，故

$$\Gamma^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}),$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}&=\Gamma^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab})\\&=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho}+\partial_\nu g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\nu})=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\nu\rho,\mu}+g_{\mu\rho,\nu}-g_{\mu\nu,\rho}).\end{aligned}$$

[倒数第二步用到 $\partial_a(\partial/\partial x^\nu)^b=0$.] 利用对称性 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ 不难看出这就是式(3-2-10′). 此式与式(3-1-11)结合可方便地求得矢量场 v^a 和对偶矢量场 ω_a 的协变导数 $\nabla_a v^b$ 和 $\nabla_a\omega_b$ 的坐标分量 $v^\nu{}_{;\mu}$ 和 $\omega_{\nu;\mu}$.

注1　$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 既依赖于 M 上选定的 ∇_a 又依赖于坐标系. 若 M 有度规 g_{ab}，则不加声明时 ∇_a 就是指同 g_{ab} 适配的导数算符，而“某系的克氏符”就是指这个 ∇_a 在该系的克氏符. 例如，谈到3维欧氏空间中某坐标系的克氏符时，指的就是同欧氏度规相适配的 ∇_a (即笛卡儿系的 ∂_a)在该系的克氏符. 一个笛卡儿系的 ∂_a 在任一笛卡儿系的克氏符显然为零. 作为习题，读者试用式(3-2-10′)求出 ∂_a 在球坐标系的全部非零 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$.

设 $\vec{T}$ 是3维欧氏空间的矢量场，则 $\vec{T}\cdot\vec{\nabla}f$ 是梯度 $\vec{\nabla}f$ 在 $\vec{T}$ 方向的分量，即 f 沿 $\vec{T}$ 方向的导数. 另一方面，由导数算符条件(d)有 $T^a\partial_a f=T(f)$，而右边正是 f 沿 T^a 的导数. 可见 $T^a\partial_a f=\vec{T}\cdot\vec{\nabla}f$. 进一步的问题是：$T^b\partial_b v^a$ 代表什么？答案自然是 v^a 沿 T^a 的导数. 详见3.2.3小节.

3.2.3　矢量场沿曲线的导数与沿曲线的平移的关系

先讨论最简单的特例，即欧氏空间. 欧氏空间有一类特殊坐标系(笛卡儿系)，用它可定义矢量的绝对(非曲线依赖)平移.

定义2　欧氏空间中 p 点的矢量 $\vec{\tilde{v}}$ 称为 q 点的矢量 $\vec{v}$ **平移**至 p 点的结果，若两者在同一笛卡儿系的分量相等(注，对某一笛卡儿系为平移则对任意笛卡儿系也

为平移.).

定义 3　欧氏空间中曲线 $C(t)$上的矢量场 $\vec{v}$ 沿线的导数 $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ 定义为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_p := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\tilde{\vec{v}}|_p - \vec{v}|_p) \qquad \forall p\in C(t)\,, \tag{3-2-11}$$

其中 $\tilde{\vec{v}}|_p$ 是把 $\vec{v}|_q$ (q 为 p 在线上的邻点)平移至 p 点的结果，$\Delta t\equiv t(q)-t(p)$. 现在证明 $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ 在抽象指标记号中就是 $T^b\partial_b v^a$ [其中 T^b 是 $C(t)$的切矢，∂_b 是笛卡儿系的普通导数算符.]，为此只须证明两者在笛卡儿系 $\{x^i\}$ 的分量相等：

$T^b\partial_b v^a$ 的第 i 分量 $=(\mathrm{d}x^i)_a T^b\partial_b v^a = T^b\partial_b[(\mathrm{d}x^i)_a v^a] = T^b\partial_b v^i = T(v^i) = \mathrm{d}v^i/\mathrm{d}t$；

[其中第四步用到导数算符条件(d)，第五步用到切矢定义式(2-2-6′).] 另一方面，由式(3-2-11)可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_p \text{的第}\,i\,\text{分量} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\tilde{v}^i|_p - v^i|_p) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(v^i|_q - v^i|_p) = \left.\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\right|_p\,,$$

[第二步用到定义 2，第三步无非是函数 $v^i(t)$ 的导数的定义.] 对比两式可见

$$\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = T^b\partial_b v^a\,. \tag{3-2-12}$$

推广到带任意 ∇_a 的任意流形 M 的任意曲线 $C(t)$，便自然地把 $T^b\nabla_b v^a$ 称为 v^a 沿 T^b[或沿 $C(t)$]的导数. 有时也用记号 $\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}t$ 代表这一导数，即

$$\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}t \equiv T^b\nabla_b v^a\,. \tag{3-2-13}$$

然而定义 2 不能推广到带有任意联络 ∇_a 的任意流形 (M, ∇_a). §3.4 将介绍流形的内禀曲率概念(并将看到欧氏和闵氏空间的内禀曲率为零)，§3.5 还将指出只有内禀曲率为零的空间才有绝对的(即与曲线无关的)平移概念. 不过，鉴于欧氏空间中 $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t=0$ 与 $\vec{v}$ 沿 $C(t)$平移等价[见式(3-2-11)]，可以自然地把 $T^b\nabla_b v^a=0$ 作为 (M, ∇_a) 中曲线 $C(t)$上的矢量场 v^a 的平移定义，这就解释了 3.2.1 小节定义 1 的提出动机(但应特别注意这样定义的平移一般是曲线依赖的). 在这种讲法中，我们是先定义 v^a 沿曲线的导数 $T^b\nabla_b v^a$ 再用它定义 v^a 沿曲线的平移(与欧氏空间的顺序相反). 由于 v^a 沿曲线的导数 $T^b\nabla_b v^a$ 毕竟比较抽象，在有了曲线依赖的平移概念后，借用平移这一术语反过来对 $T^b\nabla_b v^a$ 作一解释是有益的. 这一解释的实质就是式(3-2-11)所表达的含义，见如下定理.

定理 3-2-4　设 v^a 是 (M, ∇_a) 的曲线 $C(t)$上的矢量场，T^b 是 $C(t)$的切矢，p，q 是 $C(t)$上的邻点(见图 3-1)，则

$$T^b\nabla_b v^a|_p = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\tilde{v}^a|_p - v^a|_p)\,, \tag{3-2-14}$$

其中 $\Delta t\equiv t(q)-t(p)$，$\tilde{v}^a|_p$ 是 $v^a|_q$ 沿 $C(t)$平移至 p 点的结果.

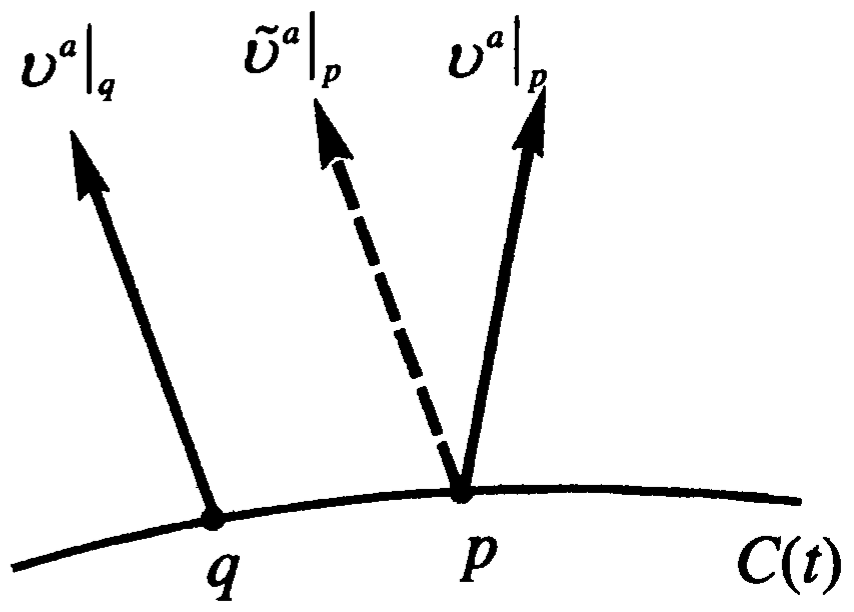


图 3-1　把 $v^a|_q$ 沿曲线平移至 p 点得 $\tilde{v}^a|_p$，便可与 $v^a|_p$ 相减并定义 v^a 沿曲线的导数

证明[选读]　只须证明如下等价命题：

$$T^b\nabla_b v^a|_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\psi_{s,t}v(s)]^a\bigg|_{s=t}, \tag{3-2-15}$$

其中 $T^b\nabla_b v^a|_t$ 和 $v^a(s)$ 分别是 $T^b\nabla_b v^a|_{C(t)}$ 和 $v^a(C(s))$ 的简写，$\psi_{s,t}$ 是由矢量空间 $V_{C(s)}$ 到 $V_{C(t)}$ 的平移映射(见图 3-2). 不难证明(习题) $\psi_{s,t}: V_{C(s)} \to V_{C(t)}$ 是同构映射.

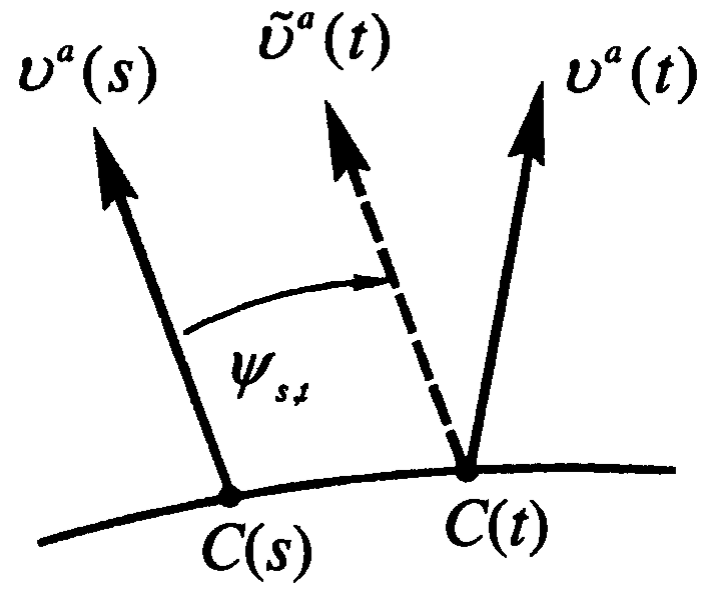


图 3-2　映射 $\psi_{s,t}$ 把 $v^a(s)$ 变为 $\tilde{v}^a(t)$

设 $\tilde{v}^a$ 是由 $v^a(s)$ 决定的沿 $C(t)$ 平移的矢量场，则

$$\tilde{v}^a(t) = [\psi_{s,t}v(s)]^a, \tag{3-2-16}$$

$$T^b\nabla_b\tilde{v}^a = 0. \tag{3-2-17}$$

式(3-2-16)的坐标分量表述为

$$\tilde{v}^\mu(t) = (\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s), \tag{3-2-15'}$$

其中 $(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu$ 是矩阵 $(\psi_{s,t})$ 的元素. 式(3-2-17)的坐标分量表述为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}^\mu(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma\tilde{v}^\nu = 0.$$

上式又可借助式(3-2-15')写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)] + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma(\psi_{s,t})^\nu{}_\rho v^\rho(s) = 0.$$

把上式用于 $t=s$，注意到 $\psi_{s,s}$ 是恒等映射，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\nu}\right|_{t=s}=-\left.(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\sigma})\right|_{s}. \tag{3-2-18}$$

另一方面，由定义知$\psi_{t,s}$是$\psi_{s,t}$的逆映射，即$(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\rho}(\psi_{t,s})^{\rho}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}$，故

$$0=\left[\frac{\mathrm{d}(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\rho}}{\mathrm{d}s}(\psi_{t,s})^{\rho}{}_{\nu}\right]_{s=t}+\left[(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\rho}\frac{\mathrm{d}(\psi_{t,s})^{\rho}{}_{\nu}}{\mathrm{d}s}\right]_{s=t}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\nu}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}+\left.\frac{\mathrm{d}(\psi_{t,s})^{\mu}{}_{\nu}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}. \tag{3-2-19}$$

现在来证式(3-2-15). 此式右边的第μ坐标分量为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\psi_{s,t}v(s)]^{\mu}\right|_{s=t}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}(s)]\right|_{s=t}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\nu}\right|_{s=t}v^{\nu}(t)+\left.(\psi_{s,t})^{\mu}{}_{\nu}\right|_{s=t}\left.\frac{\mathrm{d}v^{\nu}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}$$

$$=-\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\psi_{t,s})^{\mu}{}_{\nu}\right|_{s=t}v^{\nu}(t)+\delta^{\mu}{}_{\nu}\left.\frac{\mathrm{d}v^{\nu}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}$$

$$=(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\sigma})|_{t}\,v^{\nu}(t)+\left.\frac{\mathrm{d}v^{\mu}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}$$

$$=(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\sigma}v^{\nu})|_{t}+\left.\frac{\mathrm{d}v^{\mu}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}=(T^{b}\nabla_{b}v^{a})^{\mu}|_{t},$$

其中第三步用到式(3-2-19)，第四步用到式(3-2-18). 上式右边即为式(3-2-15)左边的第μ坐标分量，可见式(3-2-14)成立. □

§3.3 测 地 线

定义1 (M,∇_a)上的曲线$\gamma(t)$叫**测地线**(geodesic)，若其切矢T^a满足$T^b\nabla_b T^a=0$.

注1 ①可见测地线的充要条件是其切矢沿线平移. ②$T^b\nabla_b T^a=0$称为**测地线方程**. ③设流形M上有度规场g_{ab},则(M,g_{ab})的测地线是指(M,∇_a)的测地线，其中∇_a与g_{ab}适配.

设测地线$\gamma(t)$位于某坐标系的坐标域内，则以T^a代替式(3-2-5)的v^a便得

$$\frac{\mathrm{d}T^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\nu}T^{\sigma}=0,\qquad \mu=1,\cdots,n.$$

设 $x^\nu = x^\nu(t)$ 是测地线 $\gamma(t)$ 的参数式，则 $T^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$，故上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \mu = 1, \cdots, n. \tag{3-3-1}$$

这就是测地线方程的坐标分量表达式.

例 1　欧(闵)氏度规在笛卡儿(洛伦兹)系的克氏符为零，测地线方程(3-3-1)的通解为 $x^\mu(t) = a^\mu t + b^\mu$ (其中 a^μ，b^μ 是常数). 如果把欧(闵)氏空间中在笛卡儿(洛伦兹)系的参数式为 $x^\mu(t) = a^\mu t + b^\mu$ 的曲线称为直线(段)，欧(闵)氏空间的测地线便同义于直线(段). 可见测地线可看作欧氏空间直线概念向广义黎曼空间的推广.

例 2　设 S^2 是 3 维欧氏空间的 2 维球面，以球心为原点建球坐标系，则 3 维欧氏线元为 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$. 若元线段躺在 S^2 上，则 $r = R$ (球半径)导致 $\mathrm{d}r = 0$，故球面上的"诱导线元"(称为标准球面线元)为 $\mathrm{d}\hat{s}^2 = R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$，就是说，3 维欧氏度规 δ_{ab} 在球面 S^2 上诱导出 2 维度规 g_{ab}，其在坐标基底 $\{(\partial/\partial\theta)^a, (\partial/\partial\varphi)^a\}$ 的分量为 $g_{\theta\theta} = R^2$，$g_{\varphi\varphi} = R^2\sin^2\theta$，$g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$. 从式(3-3-1)出发可以证明，以这个度规衡量，球面上的曲线为测地线当且仅当它是大圆弧(并配以适当的参数化).

定理 3-3-1　设 $\gamma(t)$ 为测地线，则其重参数化 $\gamma'(t')\,[=\gamma(t)]$ 的切矢 T'^a 满足

$$T'^b\nabla_b T'^a = \alpha T'^a \quad [\alpha \text{ 为 } \gamma(t) \text{ 上的某个函数}]. \tag{3-3-2}$$

证明
$$T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^a,$$

$$0 = T^b\nabla_b T^a = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^b\nabla_b\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^a\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^2 T'^b\nabla_b T'^a + T'^a\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^b\nabla_b\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right),$$

右边第二项 $= T'^a\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right) = T'^a\dfrac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}$，故 $T'^b\nabla_b T'^a = -\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}T'^a$. 令

$\alpha \equiv -\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}$，得证.　□

定理 3-3-2　设曲线 $\gamma(t)$ 的切矢 T^a 满足 $T^b\nabla_b T^a = \alpha T^a$ [α 为 $\gamma(t)$ 上的函数]，则存在 $t' = t'(t)$ 使得 $\gamma'(t')\,[=\gamma(t)]$ 为测地线.

证明　习题.　□

定义 2　能使曲线成为测地线的参数叫该曲线的**仿射参数**(affine parameter).

注 2　有时也把满足 $T^b\nabla_b T^a = \alpha T^a$ 的曲线叫测地线. 不过，为避免混淆，最好称之为"非仿射参数化的测地线".

定理 3-3-3　若 t 是某测地线的仿射参数，则该线的任一参数 t' 是仿射参数的

充要条件为 $t' = at + b$ (其中 a，b 为常数且 $a \neq 0$).

证明 习题. □

定理 3-3-4 流形 M 的一点 p 及 p 点的一个矢量 v^a 决定唯一的测地线 $\gamma(t)$，满足

(1) $\gamma(0) = p$；

(2) $\gamma(t)$ 在 p 点的切矢等于 v^a.

证明 任取一坐标系 $\{x^\mu\}$ 使坐标域含 p，则测地线定义等价于式(3-3-1). 把它看作关于 n 个待求函数 $x^\mu(t)$ 的 n 个二阶常微分方程，则给定 $p \in M$ 及 $v^a \in V_p$ 就是给定初始条件 $x^\mu(0) = x^\mu|_p$ 及 $(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t)|_0 = v^\mu$，故有唯一解. □

注 3 与定理 2-2-8 类似，定理 3-3-4 中的"唯一"也应理解为"局部唯一".

以上讨论未涉及度规. 从现在起设流形 M 上有度规场 g_{ab}. 因为切矢 T^a 沿测地线平移，而平移矢量的自我"内积" $g_{ab}T^aT^b$ 为常数，所以 $g_{ab}T^aT^b$ 沿测地线不变号，这表明在 g_{ab} 为洛伦兹的情况下测地线总可分为类时、类空和类光三大类(不存在"不伦不类"的测地线).

定理 3-3-5 测地线的线长参数必为仿射参数.

证明 习题. 提示：先证以仿射参数为参数的测地线切矢长度沿线为常数. □

众所周知，欧氏空间中两点之间直线(段)最短. 现在讨论这一结论在多大程度上适用于带洛伦兹度规的流形(时空).

定理 3-3-6 设 g_{ab} 是流形 M 上的洛伦兹度规场，$p, q \in M$，则 p，q 间的光滑类空(类时)曲线为测地线当且仅当其线长取极值.

注 4 ①本定理也适用于 g_{ab} 为正定度规的情况[这时曲线的定语"类空(类时)"略去]. ②线长取极值的含义如下：设 C 是 p，q 间的类空(类时)曲线，则可对它做微小修改而得到 p，q 间的与 C"无限邻近"的许多类空(类时)曲线. 定理 3-3-6 断定 C 为测地线的充要条件是其长度在所有这些类空(类时)曲线的长度中取极值. 一元函数 $f(x)$ 取极值的条件是一阶导数为零，然而定理 3-3-6 涉及的长度 l (看作"因变量")相应的"自变量"不是实数而是曲线，关心的是从一条曲线变到另一曲线时 l 的变化，因此 l 不是一元函数而是泛函. 根据变分理论，l 取极值的充要条件是 l 的变分 δl 为零.

证明[选读]

我们借用坐标系给出证明. 设 $C(t)$ 是曲线，$x^\mu(t)$ 是其在某坐标系的参数表达式，$p \equiv C(t_1)$，$q \equiv C(t_2)$，则由式(2-5-6)知道从 p 到 q 的线长可用坐标语言表为

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} \right)^{1/2} \mathrm{d}t. \tag{3-3-3}$$

[默认 $C(t)$为类空曲线. 若 $C(t)$为类时，则上式括号内应添一负号，对结果并无影响.] 设 $C'(t)$ 为一“无限邻近”类空曲线，其参数式 $x'^{\mu}(t)$ 满足 $x'^{\mu}(t_1)=x^{\mu}(t_1)$，$x'^{\mu}(t_2)=x^{\mu}(t_2)$，且变分 $\delta x^{\mu}(t)\equiv x'^{\mu}(t)-x^{\mu}(t)$ 为“无限小”. 这一变分导致 $g_{\mu\nu}$ 和切矢分量 $\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}t$ 的微小改变依次为

$$\delta g_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}[x^{\sigma}(t)+\delta x^{\sigma}(t)]-g_{\mu\nu}[x^{\sigma}(t)]=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\delta x^{\sigma}(t)$$

和

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)\equiv\frac{\mathrm{d}(x^{\mu}+\delta x^{\mu})}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\delta x^{\mu})}{\mathrm{d}t},$$

它们又通过式(3-3-3)导致 l 的如下变分：

$$\delta l=\frac{1}{2}\times$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right)^{-1/2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\nu})+g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mu})+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t.$$

由于线长与曲线的参数化无关，可选择最便于计算的参数. 定理 3-3-5 表明，无论曲线原来的参数(暂记作 $\tilde{t}$)如何，总可选新参数 $t=t(\tilde{t})$ 使曲线上每点的切矢长度归一，即 $g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}=1$ (此即线长参数). 再注意到 $g_{\mu\nu}$ 的对称性，上式便简化为

$$\begin{aligned}\delta l&=\int_{t_1}^{t_2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\nu})+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\delta x^{\nu}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)\delta x^{\nu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right](\delta x^{\sigma})\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中最末一步用到 δx^{σ} 在点 $C(t_1)$和 $C(t_2)$为零这一前提. 上式表明δl 对任选的 δx^{σ} 都为零的充要条件是

$$\begin{aligned}0&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\\&=-g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

以 $g^{\rho\sigma}$ 缩并上式得

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\sigma})\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} \\
&= -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} \\
&= -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}.
\end{aligned}
$$

上式正是测地线定义的坐标表达式[式(3-3-2)]. □

作为思考题，请读者考虑如果不取 $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=1$ 将导致怎样的结果.

一元函数 $f(x)$的极值既可为极小[其充分条件为 $f'(x)=0$， $f''(x)>0$]，也可为极大[其充分条件为 $f'(x)=0$， $f''(x)<0$]，还可既非极小又非极大 [其必要条件为 $f'(x)=0, f''(x)=0$]. 与此类似，线长的极值也有上述三种可能，讨论如下.

先讨论 g_{ab} 为正定度规的情况. 给定 p，q 之间的任一曲线，总可略加修改而得长度更大的曲线，故 p，q 间的曲线长度无极大可言. 设 C 是 p，q 间长度极小的一条曲线，由定理 3-3-6 知它必为测地线. 然而 p，q 间的测地线却未必长度极小，因为极值可以既非极小又非极大. 例如，图 3-3 是一球面，γ_1 和 γ_2 是由南极 s 到北极 n 的两条非常邻近的测地线，γ 是另一测地线，曲线 $sand$ 虽是 s 与 d 间的测地线，其长度却并非极小，因其非常邻近的曲线 $sb\cup\gamma$ 比它还短. ① 测地线 $sand$ 的长度之所以不是极小，关键在于线上有北极点 n，它与南极点 s “共轭”，即存在从 s 到 n 的与测地线 γ_1 “无限邻近”的测地线 γ_2 (“共轭点对”的准确定义见选读 7-6-3). 可以证明，测地线长度取极小值的充要条件是线上不存在共轭点对. 欧氏空间当然没有共轭点对，因此两点之间直线(段)最短.

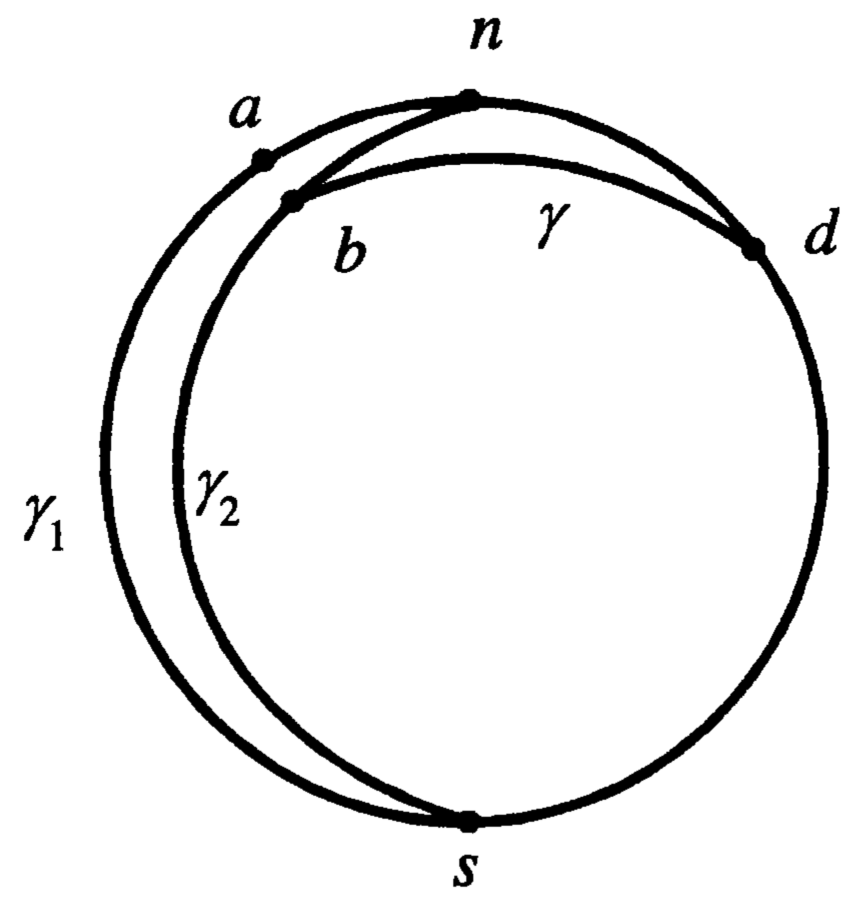


图 3-3　测地线 $sand$ 的长度不取极小值

再讨论 g_{ab} 为洛伦兹度规的情况. 先看闵氏时空这一最简单特例. 前已说过闵

① 曲线 $sb\cup\gamma$ 在 b 点不可微，严格说应在 b 点附近对它“磨光”，磨光后的曲线的长度与 $sb\cup\gamma$ 的长度“要多接近有多接近”.

氏时空中直线与测地线同义. 设 p, q 间有类时测地线 γ 相连. 它是否为 p, q 间的最短线? 否. 由于类光曲线长度为零, 任一类时曲线 C 都不是最短线, 因为总可对它略加修改而成为足够接近类光的类时曲线 C', 其长度小于 C (见图 3-4). 事实上, 类时测地线 γ 非但不是最短线, 而且是 p, q 间的最长线. 以 2 维闵氏时空为例证明(容易推广至任意维闵氏时空). 由于 γ 的参数式 $x^\mu(t)$ 为线性函数, 可通过洛伦兹坐标的平移和伪转动[式(2-5-19)、(2-5-20)]选择洛伦兹系 $\{x^0,x^1\}$ 使其 x^0 坐标线与 γ 重合. 设 C 是 p, q 间的任一类时非测地线, 用许多等 x^0 线把 γ 分成许多元段(见图 3-5), 由闵氏线元表达式

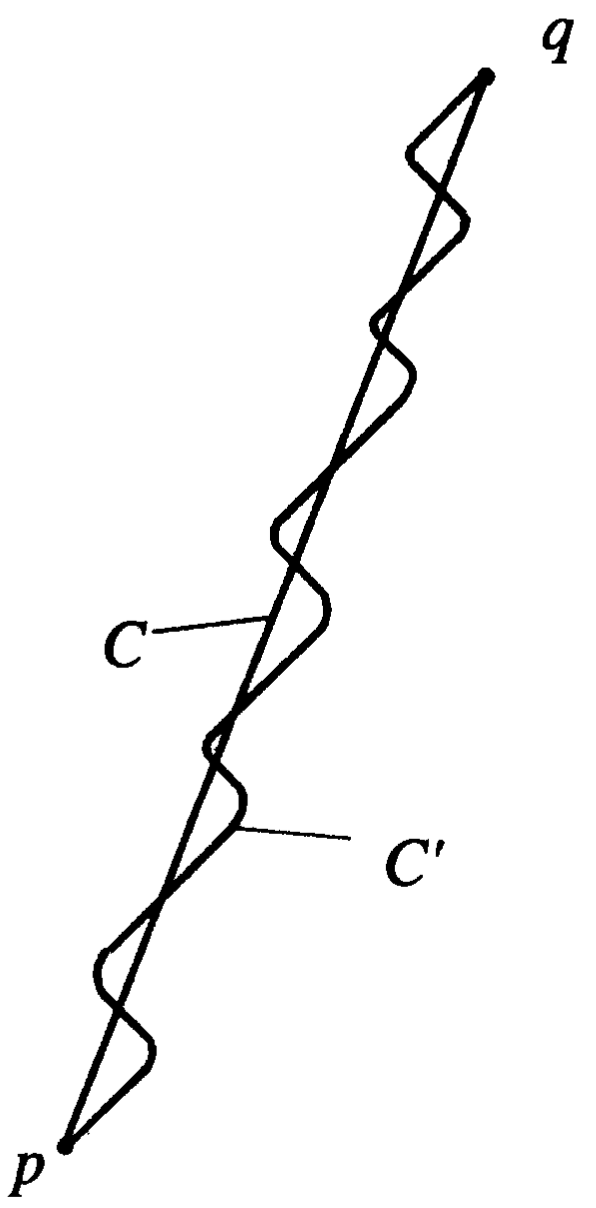


图 3-4 给定 p, q 间的类时线 C, 总可找到比它短的邻近类时线 C'

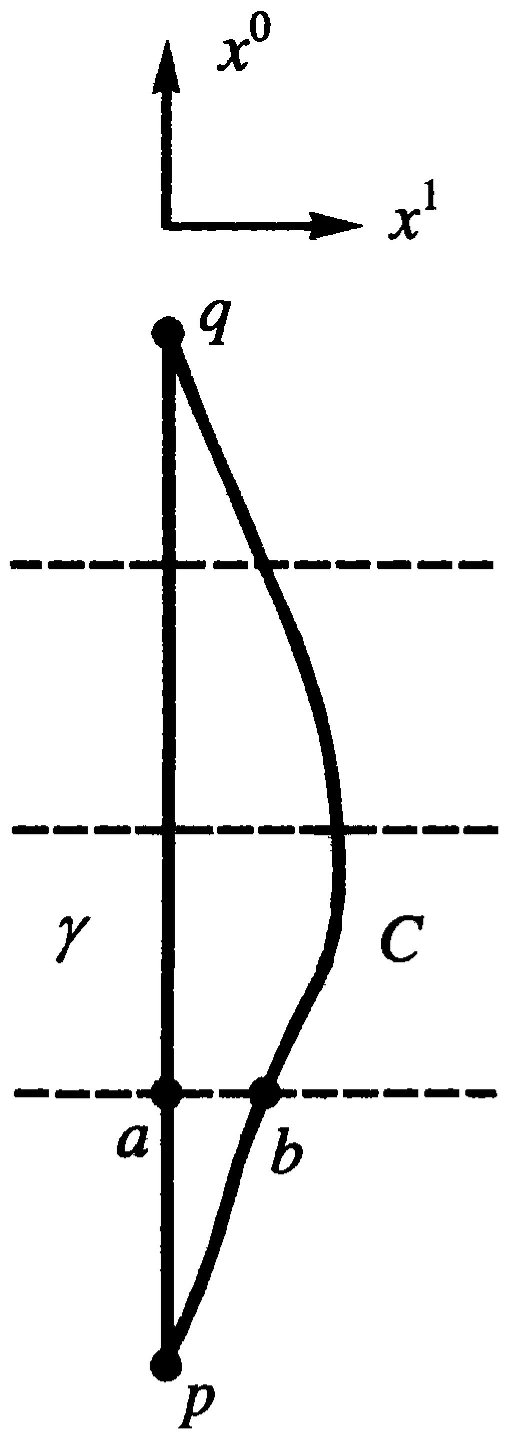


图 3-5 测地线 γ 是 p, q 间最长的类时线

可知元段 pa 和 pb 的线长依次为

$$\mathrm{d}\,l_{pa} = \sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \sqrt{-[-(\mathrm{d}\,x^0)^2 + 0]} = \mathrm{d}x^0\,,$$

$$\mathrm{d}\,l_{pb} = \sqrt{-[-(\mathrm{d}\,x^0)^2 + (\mathrm{d}\,x^1)^2]} < \mathrm{d}\,x^0 = \mathrm{d}\,l_{pa}\,,$$

上述结果也适用于其他任一对元段, 可见 $l_\gamma > l_C$, 即闵氏时空的类时测地线是最长类时线. 换句话说, 闵氏时空中两点之间(类时)直线(段)最长. 又因为最长线必为测地线, 所以对闵氏时空而言, 两点间的类时线为最长线的充要条件是它为测地线. 再讨论一般时空. 设 C 是 p, q 间长度极大的类时线, 则由定理 3-3-6 可知它是测地线. 然而反过来却未必, 因为定理 3-3-6 只保证 p, q 间的类时测地线长取极值, 不保证它是极大(当然, 由于类光曲线长度为零, 它肯定也不是极小.). 可以证明, 任意时空中类时测地线长为极大的充要条件是线上不存在共轭点对. 小结: 对任意时空中有类时联系的两点: ①两点间的最长线是类时测地线; ②两点

间的类时测地线未必是最长线(对闵氏时空一定是)；③两点间没有最短类时线.

[选读 3-3-1]

用测地线可定义两个有用概念，即广义黎曼空间(M, g_{ab})的指数映射和黎曼法坐标.

$p\in M$ 的**指数映射**(exponential map)是从 V_p(或其子集)到流形 M 的映射，记作

$$\exp_p: V_p\text{(或其子集)}\to M,$$

定义如下：$\forall v^a\in V_p$，(p, v^a) 决定唯一的测地线$\gamma(t)$，选 p 为仿射参数t的零点，则v^a 在$\exp_p$ 映射下的像定义为测地线上$t=1$的点，即$\exp_p(v^a):=\gamma(1)$. 设$\underline{0}$是V_p的零元. 因为由$(p,\underline{0})$ 决定的唯一测地线是把$\mathbb{R}$(或它的一个区间)的所有点映到 p 点的映射，故$\exp_p(\underline{0})=p$. 然而，如果从 M 中挖去点$\gamma(1)$，即以$M-\{\gamma(1)\}$为背景流形(见图 3-6)，则v^a 在$\exp_p$ 映射下无像. 因此指数映射的定义域可能只是V_p的一个子集$\hat{V}_p$，即$\exp_p:\hat{V}_p\to M$. 图 3-7 表明由(p, v^a)和(p, v'^a)决定的两条测地线$\gamma(t)$和$\gamma'(t)$交于 q 点. 适当选择v^a 和v'^a 的长度可使$q=\gamma(1)=\gamma'(1)$，从而

$$q=\exp_p(v^a)=\exp_p(v'^a),$$

可见在这种情况下$\exp_p$ 不是一一映射. 图 3-6 中由于挖去一点，对q点而言就不存在$u^a\in V_p$使$q=\exp_p(u^a)$，可见这种情况下$\exp_p$ 不是到上映射. 然而可以证明，只要把$\exp_p$ 的定义域和值域做适当限制，则它不但一一到上，而且是微分同胚. 请看如下定理：

定理 3-3-7　$\forall p\in M$，总可在其切空间 V_p(看作 n 维流形)内找到含零元的开子集$\hat{V}_p$，在流形 M 中找到含p 的开子集N，使$\exp_p:\hat{V}_p\to N$是微分同胚映射(见图 3-8).

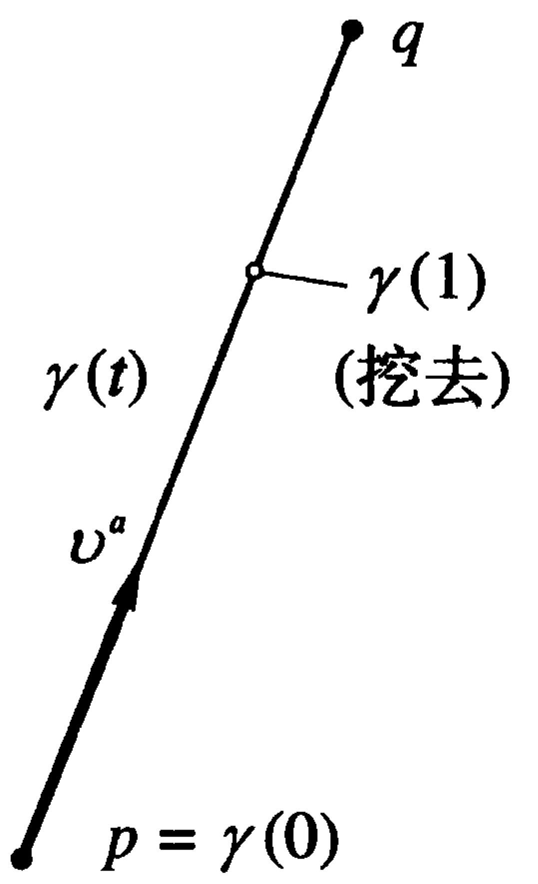


图 3-6　挖去点$\gamma(1)$，则v^a在$\exp_p$下无像

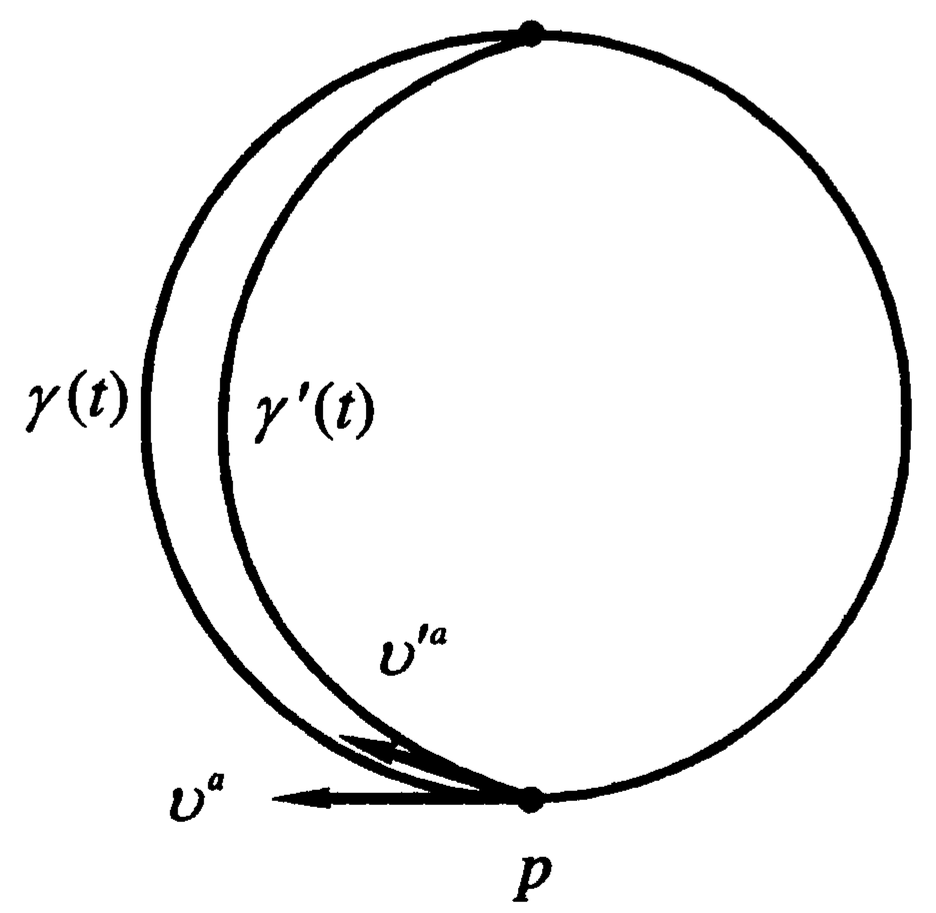


图 3-7　p与v^a和v'^a决定的两条测地线交于q. 选v^a和v'^a长度使$q=\gamma(1)=\gamma'(1)$，便可知$\exp_p$不是一一映射

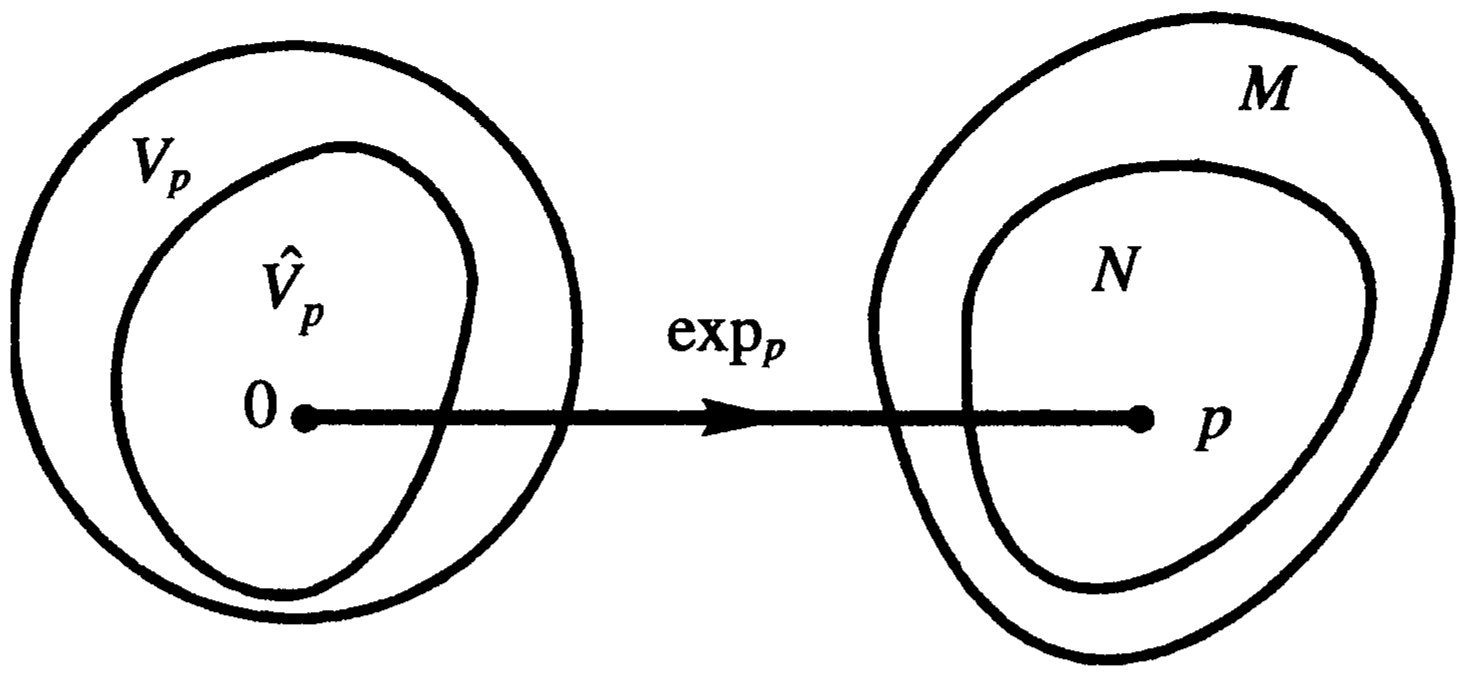


图 3-8　$\exp_p : \hat{V}_p \to N$ 是微分同胚

证明　可参阅 Hawking and Ellis(1973)P.33~34.　□

定义 3　$p \in M$ 的邻域 N 称为 p 点的**法邻域**(normal neighborhood)，若 V_p 存在开子集 $\hat{V}_p$ 使 $\exp_p : \hat{V}_p \to N$ 是微分同胚.

利用上述微分同胚指数映射 $\exp_p : \hat{V}_p \to N$ 可在 N 内定义坐标：任选 V_p 的一个基底 $\{(e_\mu)^a\}$，把 $q \in N$ 在 $\exp_p$ 下的逆像 $v^a \equiv \exp_p^{-1}(q) \in \hat{V}_p$ 在此基底的 n 个分量定义为 q 点的 n 个坐标，这样定义的坐标系称为 p 点的**黎曼法坐标**(Riemannian normal coordinate)系，其坐标域为 N.

定理 3-3-8　设 (N, ψ) 是 p 点的黎曼法坐标系，则 N 中过 p 的每一测地线 $\gamma(t)$ 在 ψ 映射下的像 $\psi(\gamma(t))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中过原点的直线(见图 3-9).

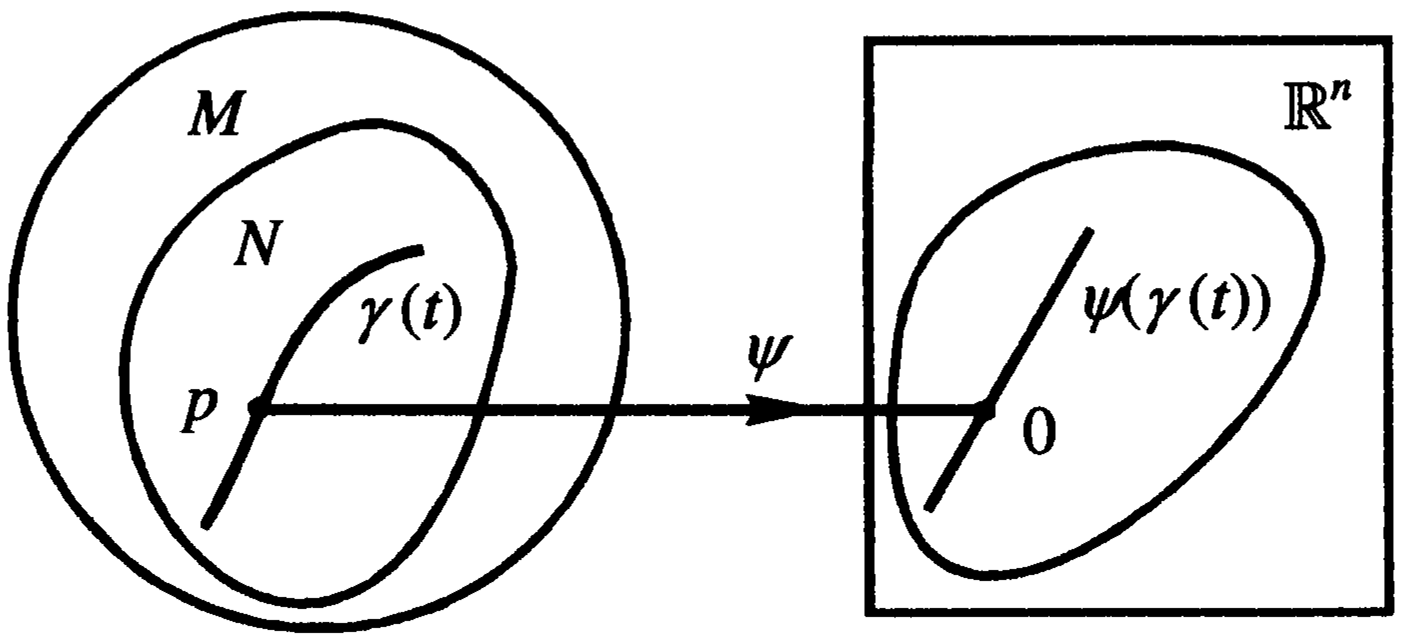


图 3-9　定理 3-3-8 示意

证明　不失一般性，可认为 $p = \gamma(0)$. 记 $v_1{}^a \equiv (\partial/\partial t)^a|_p$，$q_1 \equiv \gamma(1)$，则 $q_1 = \exp_p(v_1{}^a)$. 设 q 为 $\gamma(t)$ 的任一点，$q \equiv \gamma(t_q)$. 对 $\gamma(t)$ 做重参数化，选新参数 $t' = \alpha^{-1} t$（α = 常数)得测地线 $\gamma'(t') = \gamma(t)$，适当选择常数 α 可使 $\gamma'(1) = q$，故 $q = \exp_p(v^a)$，其中

$$v^a \equiv (\partial/\partial t')^a|_p = [(\partial/\partial t)^a \mathrm{d}t/\mathrm{d}t']_p = \alpha v_1{}^a ,$$

于是 q 点的黎曼法坐标值

$$x^\mu(q) = v^\mu = \alpha v_1{}^\mu , \tag{3-3-4}$$

(其中 $v^\mu, v_1{}^\mu$ 是 $v^a, v_1{}^a$ 在 V_p 事先选定的基底的分量.) $\gamma'(1) = q$ 表明 q 点的新参数值 $t'_q = 1$，配以由 $t' = \alpha^{-1} t$ 导致的 $t'_q = \alpha^{-1} t_q$ 便得 $\alpha = t_q$，故式(3-3-4)成为 $x^\mu(q) = t_q v_1{}^\mu$，

也可表为 $x^\mu(t_q)=v_1{}^\mu t_q$. 因 q 是 $\gamma(t)$ 的任一点，去掉下标 q 便得 $x^\mu(t)=v_1{}^\mu t$，注意到 $v_1{}^\mu=$ 常数，可知以 $x^\mu(t)=v_1{}^\mu t$ 为参数式的曲线 $\psi(\gamma(t))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中过原点的直线. □

定理 3-3-9 (M, g_{ab}) 的联络 ∇_a 在 p 点的黎曼法坐标系的克氏符满足 $\Gamma^c{}_{ab}|_p=0$.

证明 过 p 点的任一测地线 $\gamma(t)$ 可借 p 点的黎曼法坐标系表为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}=0\,,\qquad \mu=1\,,\cdots,\,n\,.$$

因为黎曼法坐标系 $(N,\ \psi)$ 把 $\gamma(t)$ 映射为 $\mathbb{R}^n$ 中的直线，有 $\mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}t^2=0$，所以

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}=0\,,\qquad \mu=1\,,\cdots,\,n\,.$$

过 p 点的任一测地线 $\gamma(t)$ 的方程都可表为上式. 以 T^a 代表测地线在 p 点的切矢，则上式给出

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}|_p\,T^\nu T^\sigma=0\,,\qquad \mu=1\,,\cdots,\,n\,.$$

对每一 μ 值而言，上式是关于 n 个变量 T^ν 的二次多项式，它对任意 T^ν 成立便导致全部系数为零，即 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}|_p$，$\nu,\sigma=1\,,\cdots,\,n$，因而 $\Gamma^c{}_{ab}|_p=0$. □

[选读 3-3-1 完]

§3.4 黎曼曲率张量

3.4.1 黎曼曲率的定义和性质

导数算符 ∇_a 的无挠性保证 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)f=0$，即 $\nabla_a\nabla_b f$ 是个对称的(0, 2)型张量. 把算符 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ 称为导数算符 ∇_a 的**对易子**(commutator)，则 ∇_a 的无挠性体现为其对易子对函数的作用结果为零. 然而无挠导数算符的对易子对其他型号的张量场的作用结果却未必为零，黎曼曲率张量正是这种非对易性的表现.

定理 3-4-1 设 $f\in\mathscr{F}$，$\omega_a\in\mathscr{F}(0,1)$，则

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(f\omega_c)=f(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\,\omega_c\,.\tag{3-4-1}$$

证明 把 $\nabla_a\nabla_b(f\omega_c)$ 和 $\nabla_b\nabla_a(f\omega_c)$ 分别展为 4 项，两者相减，注意到无挠性条件(e)，便得式(3-4-1). □

定理 3-4-2 设 $\omega_c,\omega'_c\in\mathscr{F}(0,1)$ 且 $\omega'_c|_p=\omega_c|_p$，则

$$[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\,\omega'_c]|_p=[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\,\omega_c]|_p\,.\tag{3-4-2}$$

证明　习题. 提示：利用定理 3-4-1. □

定理 3-4-2 表明 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ 是把 p 点的对偶矢量 $\omega_c|_p$ 变为 p 点的(0, 3)型张量 $[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c]|_p$ 的线性映射，做法是：把 $\omega_c|_p$ 任意延拓而得一个定义于 p 点某邻域的对偶矢量场 ω_c，求出 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c$，再取其在 p 点的值便得映射的像. 定理 3-4-2 保证这个像与延拓方式无关. 于是 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ 对应于 p 点的一个(1, 3)型张量，叫**黎曼曲率张量**(Riemann curvature tensor)，记作 $R_{abc}{}^d$. 又因 p 点任意，故 $R_{abc}{}^d$ 是张量场. 于是有：

定义 1　导数算符 ∇_a 的**黎曼曲率张量场** $R_{abc}{}^d$ 由下式定义

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\,\omega_c=R_{abc}{}^d\omega_d\,,\qquad \forall\omega_c\in\mathscr{F}(0,1)\,.\qquad(3\text{-}4\text{-}3)$$

黎曼张量场反映导数算符的非对易性，是描述 (M,∇_a) 的内禀性质的张量场. 只要选定导数算符就可谈及其黎曼张量. 当然，对广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 也可谈及黎曼张量，亦称 g_{ab} 的黎曼张量，是指与 g_{ab} 适配的那个导数算符 ∇_a 的黎曼张量场. 黎曼张量场为零的度规称为**平直度规**(flat metric). 下面证明欧氏和闵氏度规都是平直度规.

定理 3-4-3　欧氏空间 $(\mathbb{R}^n,\delta_{ab})$ 和闵氏空间 $(\mathbb{R}^n,\eta_{ab})$ 的黎曼曲率张量场为零.

证明　欧(闵)氏空间任一笛卡儿(洛伦兹)系的普通导数算符 ∂_a 是与 δ_{bc} 适配的那个特定的导数算符. 而

$$(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\omega_c=(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial_\mu\partial_\nu\omega_\sigma-\partial_\nu\partial_\mu\omega_\sigma)=0\,,\qquad\forall\omega_c\,,$$

故 ∂_a 的 $R_{abc}{}^d$ 为零. □

因此欧氏空间和闵氏空间都称为**平直空间**(flat space). 事实上，闵氏空间在许多方面类似于欧氏空间，故又称**伪欧**(pseudo Euclidean)**空间**.

式(3-4-3)反映导数算符作用于对偶矢量场的非对易性. 由此可推知导数算符作用于任意型张量场 $T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}$ 的非对易性，即推出用 $R_{abc}{}^d$ 表述 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}$ 的公式. 我们有以下定理：

定理 3-4-4　$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)v^c=-R_{abd}{}^cv^d\qquad\forall v^c\in\mathscr{F}(1,0)\,.\qquad(3\text{-}4\text{-}4)$

证明　$\forall\omega_c\in\mathscr{F}(0,1)$，有 $v^c\omega_c\in\mathscr{F}$，故由无挠性条件得

$$\begin{aligned}0&=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)(v^c\omega_c)=\nabla_a(v^c\nabla_b\omega_c+\omega_c\nabla_bv^c)-\nabla_b(v^c\nabla_a\omega_c+\omega_c\nabla_av^c)\\&=v^c\nabla_a\nabla_b\omega_c+\omega_c\nabla_a\nabla_bv^c-v^c\nabla_b\nabla_a\omega_c-\omega_c\nabla_b\nabla_av^c\,,\end{aligned}$$

从而 $\omega_c(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)v^c=-v^c(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c=-v^cR_{abc}{}^d\omega_d=-\omega_cR_{abd}{}^cv^d$，于是得式(3-4-4). □

定理 3-4-5　$\forall T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}\in\mathscr{F}(k,l)$ 有

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}=-\sum_{i=1}^{k}R_{abe}{}^{c_i}T^{c_1\cdots e\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}+\sum_{j=1}^{l}R_{abd_j}{}^{e}T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots e\cdots d_l}\,. \tag{3-4-5}$$

证明　略. □

定理 3-4-6　黎曼曲率张量有以下性质:

(1) $R_{abc}{}^{d}=-R_{bac}{}^{d}$; (3-4-6)

(2) $R_{[abc]}{}^{d}=0$ [**循环**(cyclic)**恒等式**]; (3-4-7)

(3) $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e}=0$ [**比安基恒等式**，比安基(Bianchi)发表于1902年]; (3-4-8)

若M上有度规场g_{ab}且$\nabla_a g_{bc}=0$，则可定义$R_{abcd}\equiv g_{de}R_{abc}{}^{e}$，且$R_{abcd}$还满足

(4) $R_{abcd}=-R_{abdc}$; (3-4-9)

(5) $R_{abcd}=R_{cdab}$. (3-4-10)

证明

(1) 由定义显见.

(2) 因$R_{[abc]}{}^{d}\omega_d=\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}-\nabla_{[b}\nabla_a\omega_{c]}=2\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}$，故欲证式(3-4-7)只须证

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}=0,\qquad \forall\omega_c\in\mathscr{F}(0,1). \tag{3-4-11}$$

由式(3-1-8)(令其$\tilde\nabla_a=\partial_a$)得

$$\begin{aligned}\nabla_a(\nabla_b\omega_c)&=\partial_a(\nabla_b\omega_c)-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d\\&=\partial_a(\partial_b\omega_c-\Gamma^e{}_{bc}\omega_e)-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d\\&=(\partial_a\partial_b\omega_c-\Gamma^e{}_{bc}\partial_a\omega_e-\omega_e\partial_a\Gamma^e{}_{bc})-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d\,,\end{aligned} \tag{3-4-12}$$

故

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}=\partial_{[a}\partial_b\omega_{c]}-\Gamma^e{}_{[bc}\partial_{a]}\omega_e-\omega_e\partial_{[a}\Gamma^e{}_{bc]}-\Gamma^d{}_{[ab}\nabla_{|d|}\omega_{c]}-\Gamma^d{}_{[ac}\nabla_{b]}\omega_d\,,$$

下标$[ab|d|c]$中的$|d|$表明d不参与反称化. 注意到$\partial_a\partial_b\omega_c=\partial_b\partial_a\omega_c$和$\Gamma^e{}_{bc}=\Gamma^e{}_{cb}$，由定理2-6-2(c)可知上式右边每项都为零.

(3) 欲证式(3-4-8)，只须证$\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e}=0\quad\forall\omega_e\in\mathscr{F}(0,1)$，而

$$\begin{aligned}\omega_e\nabla_aR_{bcd}{}^{e}&=\nabla_a(R_{bcd}{}^{e}\omega_e)-R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\omega_e\\&=\nabla_a(\nabla_b\nabla_c\omega_d-\nabla_c\nabla_b\omega_d)-R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\omega_e\,,\end{aligned}$$

故　$$\begin{aligned}\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e}&=\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d-\nabla_{[a}\nabla_c\nabla_{b]}\omega_d-R_{[bc|d|}{}^{e}\nabla_{a]}\omega_e\\&=\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d-\nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\omega_d-R_{[bc|d|}{}^{e}\nabla_{a]}\omega_e\,.\end{aligned} \tag{3-4-13}$$

为求右边前二项之和，先写出它们去掉方括号的表达式

$$\nabla_a\nabla_b\nabla_c\omega_d-\nabla_b\nabla_a\nabla_c\omega_d=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d=R_{abc}{}^{e}\nabla_e\omega_d+R_{abd}{}^{e}\nabla_c\omega_e\,,$$

其中第二步用到式(3-4-5). 对下标 a, b, c 做反称化，注意到式(3-4-7)，便有

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d - \nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\omega_d = R_{[ab|d|}{}^e\nabla_{c]}\omega_e = R_{[bc|d|}{}^e\nabla_{a]}\omega_e\,,$$

上式表明式(3-4-13)右边为零，于是 $\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0$.

(4) 把式(3-4-5)用于 g_{cd}，由 $\nabla_a g_{cd} = 0$ 得

$$0 = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}\,,$$

故式(3-4-9)成立.

(5) 留作习题. □

注1 设 $\dim M = n$，则 $R_{abc}{}^d$ 的分量 $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$ 共有 n^4 个. 但由于满足代数等式(3-4-6)、(3-4-7)、(3-4-9)和(3-4-10)，独立分量数仅为[证明见 Bergmann(1976)P.172~174]

$$N = n^2(n^2-1)/12.$$

选定度规后，每个(0, 2)型张量 T_{ab} 对应于一个(1, 1)型张量 $T^a{}_b \equiv g^{ac}T_{cb}$，即矢量空间上的一个线性变换，其在任意基底的分量组成一个矩阵，不同基底对应的矩阵互为相似矩阵，故有相同的迹，其值为 $T^a{}_a = g^{ac}T_{ac}$，称为张量 $T^a{}_b$ 的迹，也称为 T_{ab} 的迹. 类似地，给定(0, 4)型张量 R_{abcd}，原则上可通过缩并得到以下六个"迹"[每个"迹"是一个(0, 2)型张量]：$g^{ab}R_{abcd}$，$g^{ac}R_{abcd}$，$g^{ad}R_{abcd}$，$g^{bc}R_{abcd}$，$g^{bd}R_{abcd}$ 及 $g^{cd}R_{abcd}$. 然而，由于黎曼张量 $R_{abc}{}^d$ 降指标后所得 R_{abcd} 的性质[定理 3-4-6 的(1)、(4)、(5)]及 g^{ac} 的对称性，由定理 2-6-2 的(d)易见上述六个缩并中的第一、六个为零；第二、五个相等(理由：$g^{ac}R_{abcd} = g^{ac}R_{badc}$，与 $g^{bd}R_{abcd}$ 实质一样，只因要照顾指标平衡而不写 $g^{ac}R_{abcd} = g^{bd}R_{abcd}$.)；第三、四个相等并等于第二、五个之负，故六个缩并中只有一个独立，例如可取 $g^{bd}R_{abcd} = R_{abc}{}^b$，记作 R_{ac}，称为**里奇张量**(Ricci tensor). 应该强调的是为定义里奇张量无需借用度规，因为 $R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b$ 天生就有明确意义. R_{ac} 还可借度规求迹，即 $g^{ac}R_{ac}$，记作 R，称为**标量曲率**(scalar curvature). 由式(3-4-10)易证 $R_{ac} = R_{ca}$. 此外还应掌握 $R_{abc}{}^d$ 的无迹部分，叫外尔张量，定义如下：

定义 2 对维数 $n \geqslant 3$ 的广义黎曼空间，**外尔张量**(Weyl tensor)C_{abcd} 由下式定义：

$$C_{abcd} := R_{abcd} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}R\,g_{a[c}g_{d]b}\,. \tag{3-4-14}$$

定理 3-4-7 外尔张量有以下性质：

(1) $C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab}$，　$C_{[abc]d} = 0$.　(3-4-15)

(2) C_{abcd} 的各种迹都为零，例如 $g^{ac}C_{abcd} = 0$.

证明 练习. □

注 2 式(3-4-14)说明 R_{abcd} 是其无迹部分 C_{abcd} 与有迹部分

$$\frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b}-g_{b[c}R_{d]a})-\frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

之和.

定义 3 广义黎曼空间的**爱因斯坦张量** G_{ab} 由下式定义

$$G_{ab}:=R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}. \tag{3-4-16}$$

定理 3-4-8 $\nabla^a G_{ab}=0$ (其中 $\nabla^a G_{ab}\equiv g^{ac}\nabla_c G_{ab}$). (3-4-17)

证明 由比安基恒等式(3-4-8)及(3-4-6)有 $0=\nabla_a R_{bcd}{}^e+\nabla_c R_{abd}{}^e+\nabla_b R_{cad}{}^e$. 指标 a 同 e 缩并得 $0=\nabla_a R_{bcd}{}^a+\nabla_c R_{abd}{}^a+\nabla_b R_{cad}{}^a=\nabla_a R_{bcd}{}^a-\nabla_c R_{bd}+\nabla_b R_{cd}$. 以 g^{bd} 作用得

$$\begin{aligned}0&=g^{bd}\nabla_a R_{bcd}{}^a-g^{bd}\nabla_c R_{bd}+g^{bd}\nabla_b R_{cd}\\&=\nabla_a R_c{}^a-\nabla_c R+\nabla_b R_c{}^b=2\nabla_a R_c{}^a-\nabla_c R.\end{aligned} \tag{3-4-18}$$

故 $\nabla^a G_{ab}=\nabla^a R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a R=\nabla_a R_b{}^a-\frac{1}{2}\nabla_b R=0$，其中第二步用到 $R_{ab}=R_{ba}$，第三步用到式(3-4-18). □

爱因斯坦张量 G_{ab} 及其满足的式(3-4-17)对建立广义相对论的爱因斯坦方程有重要作用，详见§7.7.

3.4.2 由度规计算黎曼曲率

设 M 上给定度规 g_{ab}，由 $\nabla_a g_{bc}=0$ 便决定唯一的联络 ∇_a，因而有黎曼张量 $R_{abc}{}^d$. 常见的问题是已知 g_{ab} 欲求 $R_{abc}{}^d$. 所谓计算某张量，就是求出它在某基底的分量. 基底分为坐标基底和非坐标基底两大类，本小节只讲用坐标基底求曲率的方法，用非坐标基底的方法将在§5.7 和§8.7 介绍.

任选坐标系后，度规分量 $g_{\mu\nu}$ 便是已知量，满足 $\nabla_a g_{bc}=0$ 的联络 ∇_a 在此坐标系下的体现就是它在该系的克氏符

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho})\ [\text{此即式(3-2-10}')]. \tag{3-4-19}$$

$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 有三个具体指标，故 $\{\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\}$ 含 n^3 个数. 对称性 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ 使这 n^3 个数中只有 $n^2(n+1)/2$ 个独立(当 $n=4$ 时有 40 个数独立). 计算的第一步就是从已知的 $g_{\mu\nu}$ 求出全部非零的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$.

由黎曼张量定义有 $R_{abc}{}^d\omega_d=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c$，其中 $\nabla_a\nabla_b\omega_c$ 可借式(3-4-12)表为 6 项(该式共 5 项，第 5 项的 $\nabla_b\omega_d$ 又可展为两项，即 $\partial_b\omega_d-\Gamma^e{}_{bd}\omega_e$.)，对每项的指标 a, b 反称化，注意到 $\partial_{[a}\partial_{b]}\omega_c=0$，$\Gamma^d{}_{[ab]}=\Gamma^d{}_{[(ab)]}=0$，便得

$$R_{abc}{}^{d}\omega_d = 2\,(-\Gamma^{e}{}_{c[b}\partial_{a]}\omega_e - \omega_e\partial_{[a}\Gamma^{e}{}_{b]c} - \Gamma^{d}{}_{c[a}\partial_{b]}\omega_d + \Gamma^{d}{}_{c[a}\Gamma^{e}{}_{b]d}\omega_e)$$
$$= -2\,\omega_d\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{e}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]e}\omega_d, \quad \forall \omega_d \in \mathscr{F}(0,1).$$

故
$$R_{abc}{}^{d} = -2\,\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{e}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]e}, \tag{3-4-20}$$

其坐标分量为

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}, \tag{3-4-20'}$$

其中$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} \equiv \partial\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}/\partial x^{\nu}$. 由上式又可得里奇张量的坐标分量表达式

$$R_{\mu\sigma} = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\nu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}. \tag{3-4-21}$$

[选读 3-4-1]

若度规 g_{ab} 在某坐标系的分量 $g_{\mu\nu}$ 全部为常数，则其克氏符全部为零($\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=0$)，故由式(3-4-20′)可知其黎曼张量$R_{abc}{}^{d}=0$，因而(至少在该坐标域内)是平直度规. 反之，若已知g_{ab}的$R_{abc}{}^{d}=0$，是否一定存在坐标系使g_{ab}的坐标分量$g_{\mu\nu}$全部为常数? 答案是肯定的. 请看如下定理.

定理 3-4-9 度规场g_{ab}是(局域)平直的(即其$R_{abc}{}^{d}=0$)当且仅当存在坐标系使g_{ab}的坐标分量全部为常数.

证明 这一证明在相当铺垫的基础上方可给出，见下册附录J. □

[选读 3-4-1 完]

[选读 3-4-2]

式(3-4-21)中含有$\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma}$，其实许多计算都涉及这种"缩并克氏符". 例如，受3维欧氏空间散度$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$定义的启发，我们定义(M,∇_a)的矢量场v^a的散度为$\nabla_a v^a$(而且还常把$\nabla_a T^{ab}$称为张量场T^{ab}的散度). 因为$\nabla_a v^a = \partial_a v^a + \Gamma^{a}{}_{ab}v^b$，计算散度时也要涉及"缩并克氏符"$\Gamma^{a}{}_{ab}$. 下面推导$\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma}$的表达式. 由式(3-4-19)得

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\sigma\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\sigma} - g_{\mu\sigma,\lambda}) = \left(\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\sigma} + g^{\mu\lambda}g_{\sigma[\lambda,\mu]}\right) = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\sigma},$$

其中最后一步用到$g^{[\mu\lambda]}=0$. 改写上式为

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}. \tag{3-4-22}$$

另一方面，由$g_{\mu\lambda}$组成的矩阵的行列式g可借第μ行展开为$g = g_{\mu\lambda}A^{\mu\lambda}$(只对$\lambda$求和，$A^{\mu\lambda}$是$g_{\mu\lambda}$的代数余子式.)，故$\partial g/\partial g_{\mu\lambda} = A^{\mu\lambda}$. 于是由逆矩阵元的表达式$g^{\mu\lambda} = A^{\lambda\mu}/g$有

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}} = g\,g^{\mu\lambda}. \tag{3-4-23}$$

因 $g_{\mu\lambda}$ 是坐标 x^σ 的函数，故 g 也是，且

$$\frac{\partial g}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}=g\,g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}\,, \tag{3-4-24}$$

其中最后一步用到式(3-4-23). 式(3-4-22)和(3-4-24)结合给出

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\sigma}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^\sigma}. \tag{3-4-25}$$

此即“缩并克氏符”表达式. 散度 $\nabla_a v^a$ (作为标量场)可借任意基底求得. 借用坐标基底，由式(3-4-25)和 $\nabla_a v^a=\partial_a v^a+\Gamma^a{}_{ab}v^b$ 易得

$$\nabla_a v^a=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\sqrt{|g|}\;v^\sigma)\,. \tag{3-4-26}$$

作为应用例子，我们来推导 3 维欧氏空间中矢量场 $\vec{v}$ 的散度 $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ 在笛卡儿系和球坐标系的表达式. 先把上式改写为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\nabla_a v^a=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}\;v^i)\,. \tag{3-4-27}$$

(1) 对笛卡儿系，$g=1$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\dfrac{\partial v^i}{\partial x^i}=\dfrac{\partial v^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial v^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial v^3}{\partial x^3}$，此即熟知的散度公式.

(2) 对球坐标系，$\sqrt{g}=r^2\sin\theta$，

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i r^2\sin\theta)\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(v^1r^2\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial(v^2r^2\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(v^3r^2\sin\theta)}{\partial\varphi}\right],\end{aligned} \tag{3-4-28}$$

其中 v^1，v^2，v^3 是 v^a 在坐标基底 $\{(\partial/\partial r)^a,(\partial/\partial\theta)^a,(\partial/\partial\varphi)^a\}$ 的分量. 然而一般电动力学书所给的公式是用 v^a 在正交归一基底 $\{(e_r)^a,(e_\theta)^a,(e_\varphi)^a\}$ 的分量(记作 v^r, v^θ, v^φ). 注意到

$$(e_r)^a=(\partial/\partial r)^a,\qquad (e_\theta)^a=r^{-1}(\partial/\partial\theta)^a,\qquad (e_\varphi)^a=(r\sin\theta)^{-1}(\partial/\partial\varphi)^a\,,$$

有 $v^1=v^r$, $v^2=r^{-1}v^\theta$, $v^3=(r\sin\theta)^{-1}v^\varphi$，代入式(3-4-27)便得

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v^r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v^\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v^\varphi}{\partial\varphi}.$$

与电动力学书的公式一致. **[选读 3-4-2 完]**

§3.5 内禀曲率和外曲率

根据直觉，平面是平直的，曲面是弯曲的．说得准确些，这“平面”和“曲面”都是指镶嵌在 3 维欧氏空间中的 2 维面(后者例如球面和柱面)．现在问：对给定的 n 维流形，可否也仿照这一思路谈及它是否弯曲？只要它能被镶嵌进 n+1 维流形，就可这样讨论．把流形镶进高一维流形所定义的曲率叫“外曲率”，有准确定义(详见第 14 章)．3 维欧氏空间中的球面和圆柱面由这一定义求得的外曲率都非零，同直观感觉吻合．然而本章介绍的黎曼张量却是内禀曲率，它反映流形 M 在指定联络 ∇_a 后的“内禀弯曲性”，无须镶嵌进高一维的流形去判断，与外曲率并不相同[一般而言，(M, g_{ab})中凡是只由 g_{ab} (而不必嵌入高一维流形)决定的性质都称为(M, g_{ab})的**内禀**(intrinsic)**性质**．]．“内禀弯曲性”的“弯曲”一词反映的只是以下三个等价性质，具有这些性质的广义黎曼空间叫弯曲空间．

(1) 导数算符的非对易性，即 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d$，$\forall \omega_d \in \mathscr{F}(0, 1)$，其中非零张量场 $R_{abc}{}^d$ 被用作内禀(黎曼)曲率的定义，见§3.4.

(2) 矢量平移的曲线依赖性

§3.2 讲过，(M, ∇_a) 中两点 p，q 的切空间 V_p 和 V_q 之间存在一个曲线依赖的平移映射：对 p，q 之间的一段曲线，p 点的任一矢量 v^a 决定线上的一个平移矢量场 $\tilde{v}^a$ (满足 $\tilde{v}^a|_p = v^a$)，它在 q 点的值 $\tilde{v}^a|_q$ 就定义为 v^a 的像，或说 $\tilde{v}^a|_q$ 是 v^a 沿线平移至 q 的结果．对欧氏、闵氏以及所有平直空间，这一平移与曲线无关，因此在谈到“把 p 点的矢量平移到 q 点”时不必说明沿哪条曲线，这种简单性称为平移的绝对性，是人们十分熟悉的(你在谈及把欧氏空间一点的矢量平移到另一点时还用说明沿哪条曲线平移吗?)．然而弯曲空间就不如此简单．可以证明[见 Wald(1984) P.37~38；Straumann(1984)定理 5.7.]．内禀曲率 $R_{abc}{}^d$ 非零的充要条件是存在这样的闭合曲线，线上某点的一个矢量沿线平移一周后不复原(所得矢量与原矢量不等)，因此平移同曲线有关(只存在曲线依赖的平移概念)．球面几何为这一现象提供了一个简单而形象的例子：

例 1 由计算知 3 维欧氏空间中的 2 维球面(配以诱导度规)的 $R_{abc}{}^d$ 非零(见习题 13)．图 3-10 表明球面上存在这样的闭合曲线 $abcd$(每段都是大圆弧)，矢量沿它平移一周后不复原．以图中 a 点的矢量 v^a 为例，它是测地线 ab 的切矢，而测地线的切矢沿线平移，故 v^a 平移至 b 点的结果是图中的 u^a，与测地线 bc 的切矢 T^a 正交．因平移保正交性，故 u^a 平移至 c 点的结果如图的 w^a．w^a 切于测地线 ac，故平移至 a 点所得的 v'^a 也应切于 ac，于是 $v'^a \neq v^a$．

(3) 存在初始平行后来不平行的测地线

图 3-10 中的两条经线是一个直观例子. 准确含义见§7.6.

平直空间的曲率张量场 $R_{abc}{}^d$ 为零, 因此不具有以上三个性质中的任一个. 具体地说, ①与平直度规适配的导数算符 ∂_a (即笛卡儿或洛伦兹系的普通导数算符)不存在非对易性; ②矢量平移同曲线无关, 因此可谈及矢量的"绝对平移"; ③平行直线永不相交.

内禀曲率与外曲率是不同概念. 例如, 3 维欧氏空间中的 2 维圆柱面的外曲率非零而内禀曲率为零. 圆柱面可看作平面上介于两条直线 l_1 和 l_2 之间的部分在两直线认同(粘合)后的结果(见图 3-11). 由于 p 点的 $R_{abc}{}^d$ 的计算只涉及 p 点的一个邻域, p 点的 $R_{abc}{}^d$ 不会因 l_1 和 l_2 的认同而变得非零.

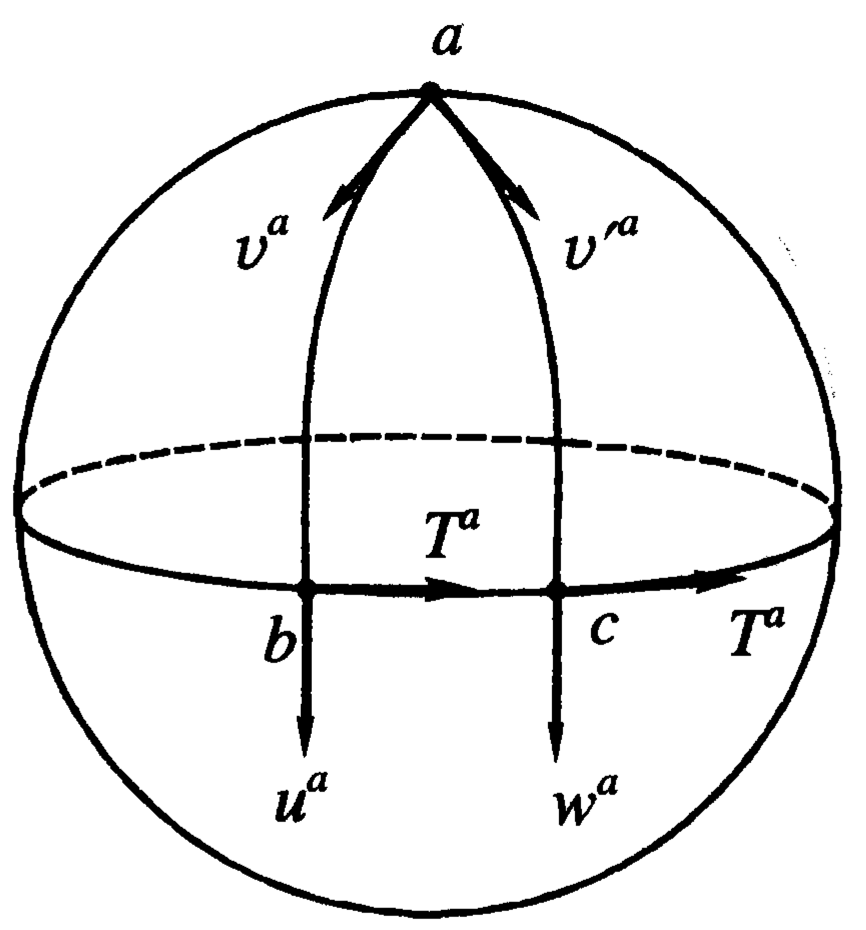


图 3-10　a 点的矢量 v^a 沿球面上闭曲线 $abca$ 平移一周后得 $v'^a \neq v^a$

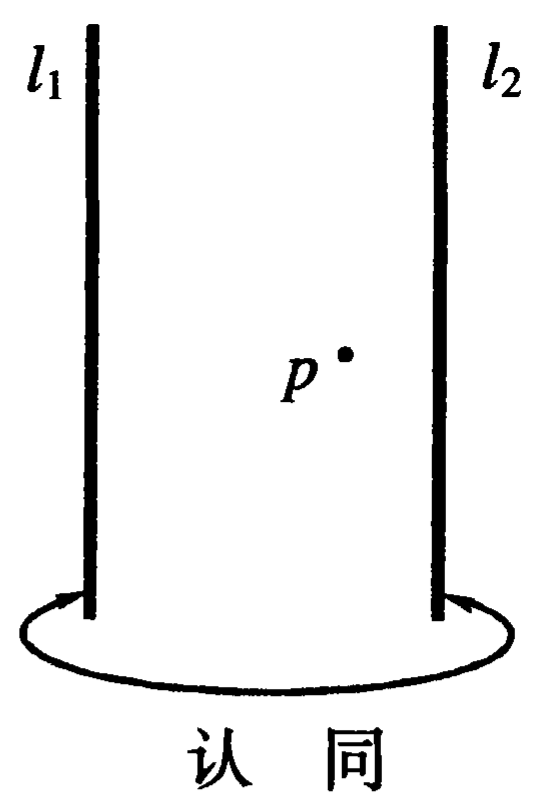


图 3-11　认同 l_1 和 l_2 得柱面

习　题

~1. 放弃 ∇_a 定义中的无挠性条件(e),

(1) 试证存在张量 $T^c{}_{ab}$ (叫**挠率张量**)使

$$\nabla_a\nabla_b f - \nabla_b\nabla_a f = -T^c{}_{ab}\nabla_c f, \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

提示: 令 $\tilde{\nabla}_a$ 为无挠算符, 模仿定理 3-1-4 证明中的推导.

(2) 试证 $T^c{}_{ab}u^a v^b = u^a\nabla_a v^c - v^a\nabla_a u^c - [u, v]^c \quad \forall u^a, v^a \in \mathscr{F}(1, 0)$.

~2. 设 v^a 为矢量场, v^ν 和 v'^ν 为 v^a 在坐标系 $\{x^\nu\}$ 和 $\{x'^\nu\}$ 的分量, $A^\nu{}_\mu \equiv \partial v^\nu/\partial x^\mu$, $A'^\nu{}_\mu \equiv \partial v'^\nu/\partial x'^\mu$, 试证 $A^\nu{}_\mu$ 和 $A'^\nu{}_\mu$ 的关系一般而言不满足张量分量变换律. 提示: 利用 v^ν 与 v'^ν 之间的变换规律.

~3. 试证定理 3-1-7.

4. 用下式定义 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$: $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \nabla_b \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$, 试证

(a) $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ (提示: 利用 ∇_a 的无挠性和坐标基矢间的对易性.);

(b) $v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta}v^\beta$ (注: 这其实是克氏符的等价定义.).

~5. 判断是非：

(1) $\nabla_a (\mathrm{d}x^\mu)_b = 0$;

(2) $v^\nu{}_{;\mu} = (\nabla_a v^b)(\partial/\partial x^\mu)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b$;

(3) $v^\nu{}_{,\mu} = (\partial_a v^b)(\partial/\partial x^\mu)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b$;

(4) $v^\nu{}_{;\mu} = (\partial/\partial x^\mu)^a \nabla_a v^\nu$;

(5) $v^\nu{}_{,\mu} = (\partial/\partial x^\mu)^a \nabla_a v^\nu$.

~6. 设 $C(t)$是$\{x^\mu\}$的坐标域内的曲线，$x^\mu(t)$是$C(t)$在该系的参数表达式，v^a是$C(t)$上的矢量场，令$\mathrm{D}v^\mu/\mathrm{d}t \equiv (\mathrm{d}x^\mu)_a (\partial/\partial t)^b \nabla_b v^a$，试证

$$\mathrm{D}v^\mu/\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}t + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} v^\sigma \mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t .$$

~7. 求出 3 维欧氏空间中球坐标系的全部非零$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$.

8. 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，$C: I \to M$ 是(M, ∇_a)中的曲线，试证$\forall s, t \in I$，平移映射 $\psi: V_{C(s)} \to V_{C(t)}$(见图 3-2)是同构映射.

~9. 试证定理 3-3-2、3-3-3 和 3-3-5.

~10. (a) 写出球面度规$\mathrm{d}s^2 = R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$($R$为常数)的测地线方程；(b) 验证任一大圆弧(配以适当参数)满足测地线方程．提示：选球面坐标系$\{\theta, \varphi\}$使所给大圆弧为赤道的一部分，并以φ为仿射参数.

~11. 试证定理 3-4-2.

*12. 试证式(3-4-10).

~13. 求出球面度规(见题 10)的黎曼张量在坐标系$\{\theta, \varphi\}$的全部分量.

14. 求度规$\mathrm{d}s^2 = \Omega^2(t, x)(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2)$的黎曼张量在$\{t, x\}$系的全部分量(在结果中以$\dot{\Omega}$和$\Omega'$分别代表函数$\Omega$对$t$和$x$的偏导数).

15. 求度规$\mathrm{d}s^2 = z^{-1/2}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2) + z(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$的黎曼张量在$\{t, x, y, z\}$系的全部分量.

16. 设$\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\gamma(z)$为任意函数，$h = t + \alpha(z)x + \beta(z)y + \gamma(z)$，求度规

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + h^2 \mathrm{d}z^2$$

的黎曼张量在$\{t, x, y, z\}$系的全部分量.

17. 试证 2 维广义黎曼空间的爱因斯坦张量为零．提示：2 维广义黎曼空间的黎曼张量只有一个独立分量.

第 4 章　李导数、Killing 场和超曲面

§4.1　流形间的映射

设 M、N 为流形(维数可不同)，$\phi: M \to N$ 为光滑映射. 以 $\mathscr{F}_M$ 和 $\mathscr{F}_N$ 分别代表 M 和 N 上光滑函数的集合，$\mathscr{F}_M(k,l)$ 和 $\mathscr{F}_N(k,l)$ 分别代表 M 和 N 上光滑$(k,\ l)$型张量场的集合. ϕ 自然诱导出一系列映射如下.

定义 1　拉回(pull back)映射 $\phi^*: \mathscr{F}_N \to \mathscr{F}_M$ 定义为

$$(\phi^* f)|_p := f|_{\phi(p)}, \qquad \forall f \in \mathscr{F}_N,\ p \in M,$$

即 $\phi^* f = f \circ \phi$，见图 4-1.

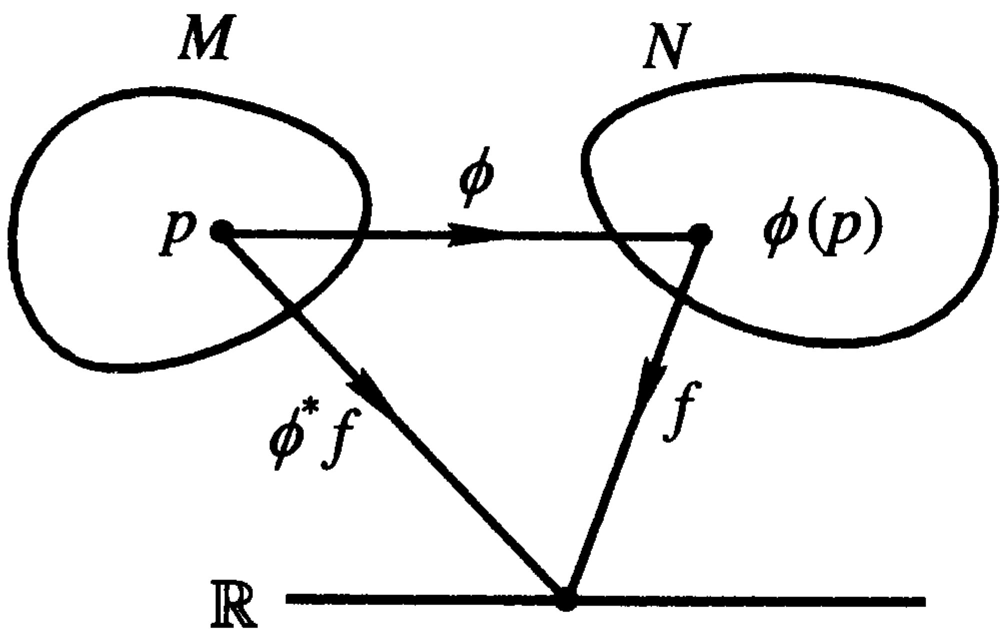


图 4-1　$\phi^* f$ 的定义

由定义 1 不难证明：

(1) $\phi^*: \mathscr{F}_N \to \mathscr{F}_M$ 是线性映射，即

$$\phi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\, \phi^*(f) + \beta\, \phi^*(g) \quad \forall f,\ g \in \mathscr{F}_N,\quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

(2) $$\phi^*(f g) = \phi^*(f)\phi^*(g), \qquad \forall f,\ g \in \mathscr{F}_N. \tag{4-1-1}$$

定义 2　对 M 中任一点 p 可定义**推前(push forward)映射** $\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$ 如下：$\forall v^a \in V_p$，定义其像 $\phi_* v^a \in V_{\phi(p)}$ 为

$$(\phi_* v)(f) := v\,(\phi^* f), \qquad \forall f \in \mathscr{F}_N. \tag{4-1-2}$$

还应证明(习题)这样定义的 $\phi_* v^a$ 满足§2.2 定义 2 对矢量的两个要求，从而确是 $\phi(p)$ 点的矢量. 许多文献也把 ϕ_* 称为 ϕ 的**切映射**.

定理 4-1-1　$\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$ 是线性映射，即

$$\phi_*(\alpha\, u^a + \beta\, v^a) = \alpha\, \phi_* u^a + \beta\, \phi_* v^a, \qquad \forall u^a,\ v^a \in V_p,\quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

证明　习题. □

定理 4-1-2　设 $C(t)$ 是 M 中的曲线，T^a 为曲线在 $C(t_0)$ 点的切矢，则 $\phi_* T^a \in$

$V_{\phi(C(t_0))}$ 是曲线 $\phi(C(t))$ 在 $\phi(C(t_0))$ 点的切矢(曲线切矢的像是曲线像的切矢).

证明　习题. 提示：利用曲线切矢定义[式(2-2-6)]. □

定义 3　拉回映射可按如下方式延拓至 $\phi^*: \mathscr{T}_N(0,\ l) \to \mathscr{T}_M(0,\ l)$：$\forall T \in \mathscr{T}_N(0,\ l)$，定义 $\phi^* T \in \mathscr{T}_M(0,l)$ 为

$$(\phi^* T)_{a_1 \cdots a_l}|_p (v_1)^{a_1} \cdots (v_l)^{a_l} := T_{a_1 \cdots a_l}|_{\phi(p)} (\phi_* v_1)^{a_1} \cdots (\phi_* v_l)^{a_l},$$

$$\forall p \in M,\ v_1, \cdots, v_l \in V_p. \tag{4-1-3}$$

定义4　$\forall p \in M$，推前映射 ϕ_* 可按如下方式延拓至 $\phi_*: \mathscr{T}_{V_p}(k,\ 0) \to \mathscr{T}_{V_{\phi(p)}}(k,\ 0)$ [即 ϕ_* 是把 p 点的$(k,\ 0)$型张量变为 $\phi(p)$ 点的同型张量的映射]：$\forall T \in \mathscr{T}_{V_p}(k,0)$，其像 $\phi_* T \in \mathscr{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$ 由下式定义：

$$(\phi_* T)^{a_1 \cdots a_k} (\omega^1)_{a_1} \cdots (\omega^k)_{a_k} := T^{a_1 \cdots a_k} (\phi^* \omega^1)_{a_1} \cdots (\phi^* \omega^k)_{a_k},$$

$$\forall \omega^1, \cdots, \omega^k \in V^*_{\phi(p)},$$

其中 $(\phi^* \omega)_a$ 定义为 $(\phi^* \omega)_a v^a := \omega_a (\phi_* v)^a \quad \forall v^a \in V_p$.

注 1　定义 2 无非是定义 4 在 $k=1$ 时的特例. 把标量场称为(0, 0)型张量场，则定义 1 无非是定义 3 在 $l=0$ 时的特例. 定义 3 表明拉回映射 ϕ^* 能把N上的$(0,l)$型张量场变为 M 上的同型张量场，是场变为场的映射；而根据定义 4，推前映射 ϕ_* 只把 M 中一点 p 的$(k,\ 0)$型张量变为其像点 $\phi(p)$ 的同型张量. 可否将 ϕ_* 延拓为把 M 上的$(k, 0)$型张量场变为 N 上的同型张量场的映射？在一般情况下不能. 以矢量场为例. 关键在于，给定 M 上一个矢量场 v 后，要定义 N 上的像矢量场 $\phi_* v$ 就要对 N 的任一点 q 定义一个矢量，而这势必涉及 q 点的逆像 $\phi^{-1}(q)$ [可比照定义 3 理解. 根据定义 3，ϕ^* 可把 N 上的场 T 变为 M 上的场 $\phi^* T$，而为了定义 $\phi^* T$ 在 M 的任一点 p 的值，自然要用到 T 在 $\phi(p)$ 点的值.]. 如果 ϕ 不是到上映射，则 $\phi^{-1}(q)$ 可能不存在，从而无法用 $\phi^{-1}(q)$ 点的 v 作为式(4-1-2)右边的 v；如果 ϕ 不是一一映射，则逆像 $\phi^{-1}(q)$ 可能多于一点，从而无从确定该用哪一逆像点的 v 作为式(4-1-2)右边的 v. 这暗示，如果 ϕ 只是光滑映射，则 ϕ_* 未必能把场推前为场. 然而，如果 $\phi: M \to N$ 是微分同胚映射，则上述困难不复存在，推前映射 ϕ_* 可看作把 M 上 $(k,0)$ 型张量场变为 N 上同型张量场的映射，即 $\phi_*: \mathscr{T}_M(k,0) \to \mathscr{T}_N(k,\ 0)$. 再者，由于 ϕ^{-1} 存在而且光滑，其拉回映射 ϕ^{-1*} 把 $\mathscr{T}_M(0,l)$ 映到 $\mathscr{T}_N(0,l)$，这可看作 ϕ 的推前映射 ϕ_*，于是 ϕ_* 又可进一步推广为 $\phi_*: \mathscr{T}_M(k,l) \to \mathscr{T}_N(k,l)$. 例如，设 $T^a{}_b \in \mathscr{T}_M(1,1)$，则 $(\phi_* T)^a{}_b \in \mathscr{T}_N(1,1)$ 定义为

$$(\phi_* T)^a{}_b|_q\, \omega_a v^b := T^a{}_b|_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* \omega)_a (\phi^* v)^b, \qquad \forall q \in N,\ \omega_a \in V^*_q,\ v^b \in V_q,$$

其中 $(\phi^* v)^b$ 应理解为 $(\phi^{-1}_* v)^b$. 同理，拉回映射也可推广为 $\phi^*: \mathscr{T}_N(k,l)\to\mathscr{T}_M(k,l)$. 推广后的 ϕ_* 和 ϕ^* 仍为线性映射，而且互逆.

设 $\phi: M\to N$ 是微分同胚， $p\in M$ ， $\{x^\mu\}$ 和 $\{y^\mu\}$ 分别是 M 和 N 的局部坐标系，坐标域 O_1 和 O_2 满足 $p\in O_1, \phi(p)\in O_2$. 于是 $p\in\phi^{-1}[O_2]$. ϕ 为微分同胚保证 M 和 N 维数相等，故 $\{x^\mu\}$ 和 $\{y^\mu\}$ 的 μ 都是从 1 到 n. 微分同胚本是点的变换，但也可等价地看作坐标变换，因为可用 $\phi: M\to N$ 在 $\phi^{-1}[O_2]$ 上定义一组新坐标 $\{x'^\mu\}$ 如下： $\forall q\in\phi^{-1}[O_2]$ ，定义 $x'^\mu(q) := y^\mu(\phi(q))$.可见微分同胚映射 ϕ 在 p 的邻域 $O_1\cap\phi^{-1}[O_2]$ 上自动诱导出一个坐标变换 $x^\mu\mapsto x'^\mu$. 由定理 4-1-2 不难证明 $\forall q\in O_1\cap\phi^{-1}[O_2]$ 有

$$\phi_*[(\partial/\partial x'^\mu)^a|_q] = (\partial/\partial y^\mu)^a|_{\phi(q)}, \tag{4-1-4}$$

由此又可证明

$$\phi_*[(\mathrm{d}x'^\mu)_a|_q] = (\mathrm{d}y^\mu)_a|_{\phi(q)}. \tag{4-1-5}$$

于是对微分同胚映射 $\phi: M\to N$ 就存在两种观点：①**主动观点**(active viewpoint)，它如实地认为 ϕ 是点的变换[把 p 变为 $\phi(p)$]以及由此导致的张量变换[把 p 点的张量 T 变为 $\phi(p)$ 点的张量 $\phi_* T$]；②**被动观点**(passive viewpoint)，它认为点 p 及其上的所有张量 T 都没变， $\phi: M\to N$ 的后果是坐标系有了变换(从 $\{x^\mu\}$ 变为 $\{x'^\mu\}$). 这两种观点虽然似乎相去甚远，但在实用上是等价的. 下面的定理可以看作等价性的某种表现.

定理 4-1-3 $(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p$ ， $\forall T\in\mathscr{T}_M(k,l)$ ，(4-1-6)

式中左边是新点 $\phi(p)$ 的新张量 $\phi_* T$ 在老坐标系 $\{y^\mu\}$ 的分量，右边是老点 p 的老张量 T 在新坐标系 $\{x'^\mu\}$ 的分量.

证明 习题. □

注 2 式(4-1-6)是实数等式，左边是由主动观点(认为点和张量变了而坐标系没变)所得的数，右边是由被动观点(认为点和张量没变但坐标系变了)所得的数. 两边相等就表明两种观点在实用上等价.

例 1 设定理 4-1-3 中的 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 是矢量 v^a ，令 $u^a \equiv \phi_* v^a \in V_{\phi(p)}$ ，则由式(4-1-6)不难证明

$$u^\mu = v^\nu(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)|_p. \tag{4-1-7}$$

[选读 4-1-1]

现在进一步说明主、被动观点的等价性. 设 T_{ab} 是流形 M 上的张量场，则它在坐标系 $\{x^\sigma\}$ 的分量 $T_{\mu\nu}(x^\sigma)$ 是坐标 x^σ 的一组函数. 设有坐标变换 $\{x^\sigma\}\to\{x'^\sigma\}$ ，则 T_{ab} 在 $\{x'^\sigma\}$ 系的分量 $T'_{\mu\nu}(x'^\sigma)$ 是坐标 x'^σ 的一组函数. 两组函数

一般不同(指函数关系$T_{\mu\nu}$和$T'_{\mu\nu}$不同，至于自变量用什么符号则无所谓．)．要从函数组$T_{\mu\nu}$出发获得另一函数组$T'_{\mu\nu}$，只须进行坐标变换而不必对流形的点及张量做变换，即无须借助于流形间的映射以及它诱导的对张量的映射．这可称为获得新函数组$T'_{\mu\nu}$的"被动途径"．然而，采取如下的"主动途径"也可收到相同效果．设N是另一流形且存在微分同胚映射$\phi: M \to N$，则$\tilde{T}_{ab} \equiv \phi_* T_{ab}$是$N$上的张量场，且$\tilde{T}_{ab}$在$N$上坐标系$\{y^\sigma\}$的分量$\tilde{T}_{\mu\nu}(y^\sigma)$也是一组函数，其函数关系$\tilde{T}_{\mu\nu}$一般也与$T_{\mu\nu}$不同．这途径涉及点的变换($\phi: M \to N$)及张量场的变换($\phi_*: T_{ab} \mapsto \tilde{T}_{ab}$)而不涉及坐标变换，这正是主动观点的特征．为保证殊途同归，即由主、被动途径得到的新函数组$\tilde{T}_{\mu\nu}$和$T'_{\mu\nu}$相同，只须令主动途径中的微分同胚$\phi: M \to N$在M上诱导的坐标变换恰为被动途径中的坐标变换$\{x^\sigma\} \to \{x'^\sigma\}$．事实上，设$p \in M$，$q \equiv \phi(p) \in N$，则

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(y^\sigma(q)) = \tilde{T}_{\mu\nu}|_q = (\phi_* T)_{\mu\nu}|_q = T'_{\mu\nu}|_p = T'_{\mu\nu}(x'^\sigma(p)) = T'_{\mu\nu}(y^\sigma(q)),$$

其中第三、五步分别用到定理 4-1-3 和"$\phi: M \to N$诱导的坐标变换恰为$\{x^\sigma\} \to \{x'^\sigma\}$"的要求．上式表明$\tilde{T}_{\mu\nu}(y^\sigma) = T'_{\mu\nu}(y^\sigma)$，即函数关系$\tilde{T}_{\mu\nu}$和$T'_{\mu\nu}$相同．

以上只是说明主、被动观点在实用中的等价性的一例，其中关键一步用到定理 4-1-3．这再次表明此定理是这一等价性的某种体现．　**[选读 4-1-1 完]**

[选读 4-1-2]

本选读补充几个有用的定理．

定理 4-1-4　设$\phi: M \to N$为光滑映射，则$\forall T \in \mathscr{F}_N(0,l)$，$T' \in \mathscr{F}_N(0,l')$有

$$\phi^*(TT') = \phi^*(T)\phi^*(T'). \tag{4-1-8}$$

证明　请读者补上抽象指标后给出证明．　□

定理 4-1-5　设$\phi: M \to N$为光滑映射，则$\forall T \in \mathscr{T}_{V_p}(k,0)$，$T' \in \mathscr{T}_{V_p}(k',0)$有

$$\phi_*(TT') = \phi_*(T)\phi_*(T'). \tag{4-1-9}$$

证明　请读者补上抽象指标后给出证明．　□

定理 4-1-6　设$\phi: M \to N$是微分同胚，则$\forall T \in \mathscr{F}_M(k,l)$，$T' \in \mathscr{F}_M(k',l')$有

$$\phi_*(TT') = \phi_*(T)\phi_*(T'). \tag{4-1-10}$$

注 3　①上式是N上的张量场等式，而式(4-1-9)只是点$\phi(p) \in N$的张量等式．②上式的ϕ_*换为ϕ^*也成立，但式中的T和T'应看成N上的张量场，新公式应看作M上的张量场等式．

证明　练习．　□

定理 4-1-7　设$\phi: M \to N$是微分同胚，则ϕ_*(及ϕ^*)与缩并可交换顺序．

证明　欲证$\phi_*(CT) = C(\phi_* T)$．先以M上张量场$T^a{}_b$为例，这时$\phi_*(CT) = C(\phi_* T)$是N上的标量场等式，只须证明它对任一$p \in M$的像点$\phi(p) \in N$

成立. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 和 $\{(e^\mu)_a\}$ 是 p 的一个基底及对偶基底，则 $T^a{}_b = T^\mu{}_\nu (e_\mu)^a (e^\nu)_b$. 由式(4-1-10)得

$$\phi_* T^a{}_b = (\phi_* T^\mu{}_\nu)[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_b] ,$$

故
$$C(\phi_* T) = (\phi_* T^\mu{}_\nu)[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_a] .$$

取 $(e_\mu)^a$ 和 $(e^\mu)_a$ 分别为式(4-1-4)的 $(\partial/\partial x'^\mu)^a$ 和式(4-1-5)的 $(\mathrm{d}x'^\mu)_a$ ，则

$$[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_b] = (\partial/\partial y^\mu)^a (\mathrm{d}x^\nu)_a = \delta^\nu{}_\mu .$$

(其实可证明对 p 点的任一 $\{(e_\mu)^a\}$ 和 $\{(e^\mu)_a\}$ 都有 $[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_b] = \delta^\nu{}_\mu$.) 因而

$$C(\phi_* T) = (\phi_* T^\mu{}_\nu)\,\delta^\nu{}_\mu = \phi_*(T^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\mu) = \phi_*(T^\mu{}_\mu) = \phi_*(CT) .$$

请读者把这一证明推广到 M 上任意型号的张量场. □

[选读 4-1-2 完]

§4.2 李 导 数

§2.2 末讲过，M 上的一个光滑矢量场 v^a 给出一个单参微分同胚群 ϕ . ① 设 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 是 M 上的光滑张量场，则 $\phi_t^* T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 也是同型光滑张量场，其中 ϕ_t 是单参微分同胚群 ϕ 的一个群元. 这两个张量场在点 $p \in M$ 的值之差 $\phi_t^* T^{\cdots}{}_{\cdots}|_p - T^{\cdots}{}_{\cdots}|_p$ 是 p 点的张量，它与 t 之商 $(\phi_t^* T^{\cdots}{}_{\cdots}|_p - T^{\cdots}{}_{\cdots}|_p)/t$ 在 t 趋于零时的极限可看作张量场 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 在 p 点的某种导数，于是有以下定义：

定义 1 $\mathscr{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} := \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t{}^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l})$ (4-2-1)

称为张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 沿矢量场 v^a 的**李导数**(Lie derivative)($\mathscr{L}_v$ 中的 v 不写为 v^a ，以免误解.).

注 1 因 $\phi_t{}^*$ 为线性映射，故李导数是由 $\mathscr{F}_M(k,l)$ 到 $\mathscr{F}_M(k,l)$ 的线性映射. 由式(4-2-1)及定理 4-1-7 还知 $\mathscr{L}_v$ 同缩并可交换顺序.

定理 4-2-1 $\mathscr{L}_v f = v(f)$， $\forall f \in \mathscr{F}$. (4-2-2)

证明 $\forall p \in M$, 设 $C(t)$ 是 ϕ 过 p 点的轨道，$p = C(0)$, 则 $\phi_t(p) = C(t)$ 且 $v^a|_p \equiv (\partial/\partial t)^a|_p$ 是 $C(t)$在 p 点的切矢(图 4-2)，故

---

① 若 v^a 不完备，则只能给出单参微分同胚局部群. 本节只涉及局部性质，无须明确区分局部和整体.

$$\mathscr{L}_v f|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* f - f)|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\phi_t(p)) - f(p)]$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(C(t)) - f(C(0))] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ C)|_{t=0} = v(f)|_p .$$ □

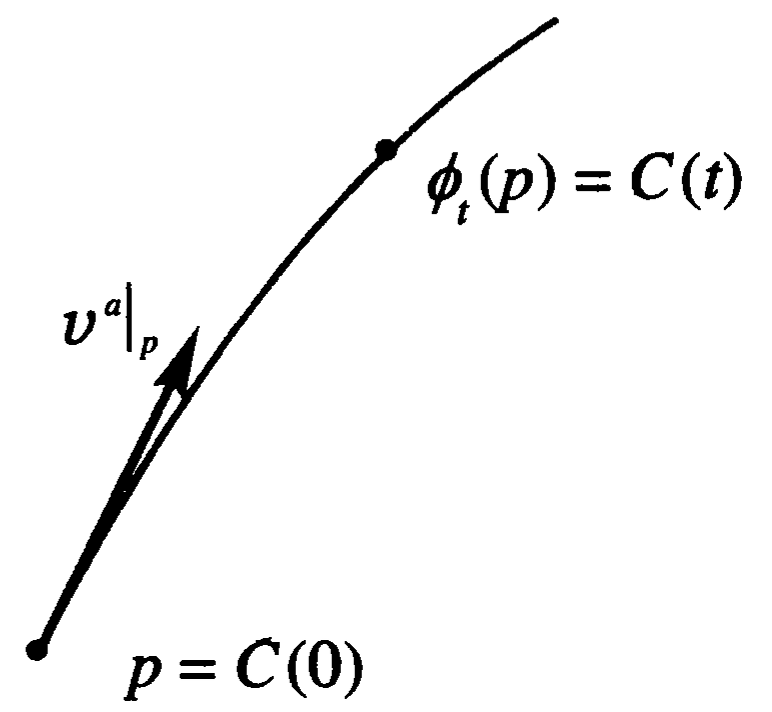


图 4-2　定理 4-2-1 证明用图

下面以 $n=2$ 为例介绍一种对计算李导数很有用的坐标系. 设 $\{x^1,x^2\}$ 为坐标系，则 x^1 坐标线和 x^2 坐标线组成坐标“网格”，欲知坐标域中某点的坐标，只须看它位于网格的哪两条坐标线的交点. 求李导数时总要给定矢量场 v^a，可以选定它的积分曲线为 x^1 坐标线(t 充当 x^1)，再相当任意地选定另一组与这组曲线横截(即交点上两线切矢不平行)的曲线作为 x^2 坐标线，这样得到的坐标系称为矢量场 v^a 的**适配坐标系**①(adapted coordinate system). 换句话说，矢量场 v^a 就是其适配坐标系的第一坐标基矢场，即 $v^a=(\partial/\partial x^1)^a$. 以上讨论可推广至任意维流形.

定理 4-2-2　张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 沿 v^a 的李导数在 v^a 的适配坐标系的分量

$$(\mathscr{L}_v T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}. \tag{4-2-3}$$

注 2　上式左边在坐标变换时满足张量变换律而右边则否，故不能改写为张量等式.

证明　仅以 $n=2$，$k=l=1$ 为例(容易推广至一般情况). 因 $\phi_t^*=(\phi_t^{-1})_*=\phi_{-t*}$，式(4-2-1)在任一坐标系(现在取适配坐标系)的分量式为

$$(\mathscr{L}_v T)^\mu{}_\nu|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu|_p - T^\mu{}_\nu|_p] \qquad \forall\, p\in M . \tag{4-2-4}$$

令 $q\equiv\phi_t(p)$，因式(4-2-4)只涉及 p 点附近的情况，总可认为 p，q 点都在同一适配坐标域内. 对 ϕ_{-t} 而言，q 为老点，p 为新点，故由式(4-1-6)得

$$(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu\Big|_p = T'^\mu{}_\nu\Big|_q = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}T^\rho{}_\sigma\right]_q , \tag{4-2-5}$$

式中 x^σ 为适配(老)坐标，x'^μ 是由 ϕ_{-t} 诱导的新坐标. 上式右边涉及新老坐标间的偏导数在 q 点的值，要计算就须找出 q 点的一个小邻域 N 内的坐标变换. $\forall\,\bar{q}\in N$，

① 只要某点的 $v^a\neq 0$，总可在它的一个邻域内定义适配坐标系.

记 $\bar{p} \equiv \phi_{-t}(\bar{q})$. 由适配坐标的定义知 $x^1(\bar{q}) = x^1(\bar{p}) + t$, $x^2(\bar{q}) = x^2(\bar{p})$，而按定义，$\phi_{-t}$ 在 $\bar{q}$ 诱导的新坐标则为 $x'^1(\bar{q}) \equiv x^1(\bar{p})$，$x'^2(\bar{q}) \equiv x^2(\bar{p})$，故 $x'^1(\bar{q}) = x^1(\bar{q}) - t$，$x'^2(\bar{q}) = x^2(\bar{q})$.因 $\bar{q}$ 为 N 内任一点，故对 N 有 $x'^1 = x^1 - t$，$x'^2 = x^2$，求导得 $(\partial x'^\mu / \partial x^\rho)|_q = \delta^\mu{}_\rho$，$(\partial x^\sigma / \partial x'^\nu)|_q = \delta^\sigma{}_\nu$，于是式(4-2-5)成为 $(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu|_p = T^\mu{}_\nu|_q$，代入式(4-2-4)便得 $(\mathscr{L}_v T)^\mu{}_\nu|_p = \partial T^\mu{}_\nu / \partial x^1|_p$. □

由定理 4-2-2 可知 $\mathscr{L}_v$ 满足莱布尼茨律.

定理 4-2-3　$\mathscr{L}_v u^a = [v, u]^a$，　$\forall u^a,\ v^a \in \mathscr{F}(1,0)$，　(4-2-6)

或者，借助于对易子的表达式(3-1-13)，有

$$\mathscr{L}_v u^a = v^b \nabla_b u^a - u^b \nabla_b v^a, \tag{4-2-6'}$$

其中 ∇_a 为任一无挠导数算符.

证明　待证命题是矢量等式，只须证明它在某一坐标系的分量等式 $(\mathscr{L}_v u)^\mu = [v, u]^\mu$ 成立. 最方便的当然是适配坐标系. 设 v^a 的适配坐标系 $\{x^\mu\}$ 的普通导数算符是 ∂_a，则

$$[v,\ u]^\mu = (\mathrm{d}x^\mu)_a [v,\ u]^a = (\mathrm{d}x^\mu)_a (v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a) = v^b \partial_b u^\mu$$
$$= v(u^\mu) = \partial u^\mu / \partial x^1 = (\mathscr{L}_v u)^\mu,$$

其中第三步是因为 $v^a = (\partial / \partial x^1)^a$ 导致 $\partial_b v^a = 0$，第四步用到导数算符定义的条件(d)，最后一步用到式(4-2-3). □

定理 4-2-4　$\mathscr{L}_v \omega_a = v^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a v^b$，　$\forall v^a \in \mathscr{F}(1,0),\ \omega_a \in \mathscr{F}(0,1)$，　(4-2-7)

其中 ∇_a 为任一无挠导数算符.

证明　习题. 提示：用定理 4-2-3 及 4-2-1，后者给出 $\mathscr{L}_v(\omega_a u^a) = v^b \nabla_b (\omega_a u^a)$. □

定理 4-2-5

$$\mathscr{L}_v T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \cdots c \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots c \cdots b_l} \nabla_{b_j} v^c$$

$\forall T \in \mathscr{F}(k,l),\ v \in \mathscr{F}(1,0)$，$\nabla_a$ 为任一导数算符.　(4-2-8)

证明　练习. □

§4.3　Killing 矢量场

本章至此未涉及度规及与之适配的导数算符，李导数的定义不要求流形 M 有

附加结构. 但若 M 上选定了度规场 g_{ab}，则对微分同胚映射 $\phi: M \to M$ 还可提出更高的要求，即 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$. 于是有如下定义：

定义1　微分同胚 $\phi: M \to M$ 称为**等度规映射**，简称**等度规**(isometry)，若 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$.

注 1　①等度规映射是特殊的微分同胚映射，其特殊性在于“保度规”性，即 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$. 注意这是张量场的等式，其含义是每点 p 的两个张量 $g_{ab}|_p$ 和 $\phi^* g_{ab}|_p$ 相等. ②由 $\phi^{-1*} \circ \phi^* = (\phi \circ \phi^{-1})^* =$ 恒等映射[见习题 5(c)]易见 $\phi: M \to M$ 为等度规映射当且仅当 $\phi^{-1}: M \to M$ 为等度规映射.

流形 M 上众多矢量场中有一类特殊矢量场，即光滑矢量场. 每一光滑矢量场给出一个单参微分同胚群.[①] 如果 M 上指定了度规场 g_{ab}，则众多光滑矢量场中还可挑出特殊的一个子类，其中每个矢量场给出的单参微分同胚群是单参等度规群，即每个群元 $\phi_t: M \to M$ 是 M 上的一个等度规映射. 于是有以下定义：

定义 2　(M, g_{ab})上的矢量场 ξ^a 称为 **Killing 矢量场**，若它给出的单参微分同胚(局部)群是单参等度规(局部)群. 等价地(有余力的读者可自证)，ξ^a 称为 Killing 矢量场，若 $\mathscr{L}_\xi g_{ab} = 0$.

定理 4-3-1　ξ^a 为 Killing 矢量场的充要条件是 ξ^a 满足如下的 **Killing 方程**：

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0, \quad \text{或} \nabla_{(a}\xi_{b)} = 0, \quad \text{或} \nabla_a \xi_b = \nabla_{[a}\xi_{b]}.$$

$$(\text{其中} \nabla_a \text{满足} \nabla_a g_{bc} = 0) \tag{4-3-1}$$

证明　$0 = \mathscr{L}_\xi g_{ab} = \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$，

其中第二步用到式(4-2-8). □

定理 4-3-2　若存在坐标系 $\{x^\mu\}$ 使 g_{ab} 的全部分量满足 $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^1 = 0$，则 $(\partial/\partial x^1)^a$ 是坐标域上的 Killing 矢量场.

证明　$\{x^\mu\}$ 是 $(\partial/\partial x^1)^a$ 的适配坐标系. 由式(4-2-3)得 $(\mathscr{L}_{\partial/\partial x^1} g)_{\mu\nu} = \partial g_{\mu\nu}/\partial x^1 = 0$，故 $\mathscr{L}_{\partial/\partial x^1} g_{ab} = 0$，即 $(\partial/\partial x^1)^a$ 为 Killing 矢量场. □

定理 4-3-3　设 ξ^a 为 Killing 矢量场，T^a 为测地线的切矢，则 $T^a \nabla_a (T^b \xi_b) = 0$，即 $T^b \xi_b$ 在测地线上为常数.

证明　$T^a \nabla_a (T^b \xi_b) = \xi_b T^a \nabla_a T^b + T^b T^a \nabla_a \xi_b = T^b T^a \nabla_a \xi_b = 0$，其中第二步用到测地线定义，第三步用到定理 4-3-1(即 $\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a}\xi_{b]}$)及定理 2-6-2(d). □

设 ξ^a，η^a 是 Killing 矢量场，α，β 是常实数，则由 Killing 方程的线性性知 $\alpha\xi^a + \beta\eta^a$ 也是 Killing 矢量场. 不难看出 M 上所有 Killing 矢量场的集合是个矢

① 不要求矢量场完备. 谈到矢量场的单参微分同胚群时，对非完备矢量场是指其单参微分同胚局部群.

量空间. 还可证明(习题)对易子$[\xi,\eta]^a$也是 Killing 矢量场.

定理 4-3-4　(M, g_{ab})上最多有 $n(n+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量场($n \equiv \dim M$), 即 M 上所有 Killing 矢量场的集合(作为矢量空间)的维数小于等于 $n(n+1)/2$.

证明　见 Wald(1984)P.442~443. □

注 2　①等度规映射可看作一种"保度规"的对称变换, 所以一个 Killing 矢量场代表(M, g_{ab})的一个对称性, 具有 $n(n+1)/2$ 个独立 Killing 矢量场的广义黎曼空间(M, g_{ab})称为最高对称性空间. ②寻找(M, g_{ab})的全体 Killing 矢量场的一般方法是求 Killing 方程的通解. 然而对某些简单的(M, g_{ab})还存在容易得多的方法. 下面仅举数例.

例 1　找出下列广义黎曼空间的全体独立的 Killing 矢量场.

(1) 2 维欧氏空间$(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$. 设$\{x, y\}$为笛卡儿坐标系, 则$ds^2 = dx^2 + dy^2$, 即欧氏度规$\delta_{ab}$在此系中的全部分量为常数, 故由定理 4-3-2 知$(\partial/\partial x)^a$和$(\partial/\partial y)^a$为 Killing 矢量场. 我们相信欧氏空间有最高对称性, 由定理 4-3-4 可知$n=2$时应有 3 个独立的 Killing 场. 果然, 若改用极坐标系, 便有$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, 可见欧氏度规$\delta_{ab}$在此系中的全部分量与$\varphi$无关, 所以由定理 4-3-2 可知$(\partial/\partial\varphi)^a$为 Killing 矢量场, 它在笛卡儿系的坐标基底的展开式为$(\partial/\partial\varphi)^a = -y\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial y)^a$. 展开系数与坐标有关, 由此不难证明$(\partial/\partial\varphi)^a$独立于前两个 Killing 场. $(\partial/\partial x)^a$和$(\partial/\partial y)^a$的 Killing 性反映 2 维欧氏度规沿x和y轴的平移不变性, $(\partial/\partial\varphi)^a$的 Killing 性表明它有旋转不变性.

(2) 3 维欧氏空间$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$. 因为$n=3$, 故有 6 个独立 Killing 场, 即$(\partial/\partial x)^a$, $(\partial/\partial y)^a$, $(\partial/\partial z)^a$, $-y\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial y)^a$, $-z\,(\partial/\partial y)^a + y\,(\partial/\partial z)^a$和$-x\,(\partial/\partial z)^a + z(\partial/\partial x)^a$. 前 3 个反映 3 维欧氏度规沿$x$, y, z轴的平移不变性; 后 3 个反映它绕z, x, y轴的旋转不变性.

(3) 2 维闵氏空间$(\mathbb{R}^2, \eta_{ab})$. 在洛伦兹坐标系$\{t, x\}$中有$ds^2 = -dt^2 + dx^2$, 故知$(\partial/\partial t)^a$和$(\partial/\partial x)^a$为 Killing 场. 为求第 3 个, 用下式定义新坐标ψ, η:

$$x = \psi\,\mathrm{ch}\,\eta, \qquad t = \psi\,\mathrm{sh}\,\eta, \qquad 0<\psi<\infty, \qquad -\infty<\eta<\infty, \tag{4-3-2}$$

闵氏线元可用新坐标表为$ds^2 = d\psi^2 - \psi^2 d\eta^2$. 上式表明$\eta_{ab}$在新坐标系的全体分量与坐标$\eta$无关, 故$(\partial/\partial\eta)^a$也是 Killing 矢量场(其积分曲线是双曲线), 它在洛伦兹坐标基底的展开式为

$$(\partial/\partial\eta)^a = t\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial t)^a, \tag{4-3-3}$$

由展开系数与坐标有关可知$(\partial/\partial\eta)^a$与前两个 Killing 场独立. 式(4-3-2)定义的ψ, η的坐标域只是$\mathbb{R}^2$的、由$x>|t|$限定的一个开子集(见图 4-3 的 A 区). 但式(4-3-3)

却在全$\mathbb{R}^2$有定义，而且不难验证$(\partial/\partial\eta)^a$是$\mathbb{R}^2$上的 Killing 矢量场，它在图 4-3 的 A，B 区类时，在 C，D 区类空，在两条 45°斜直线上类光. $t\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial t)^a$叫做**伪转动** (boost) Killing 矢量场，表明闵氏度规具有伪转动下的不变性，对应于洛伦兹变换(详见定理 4-3-5).

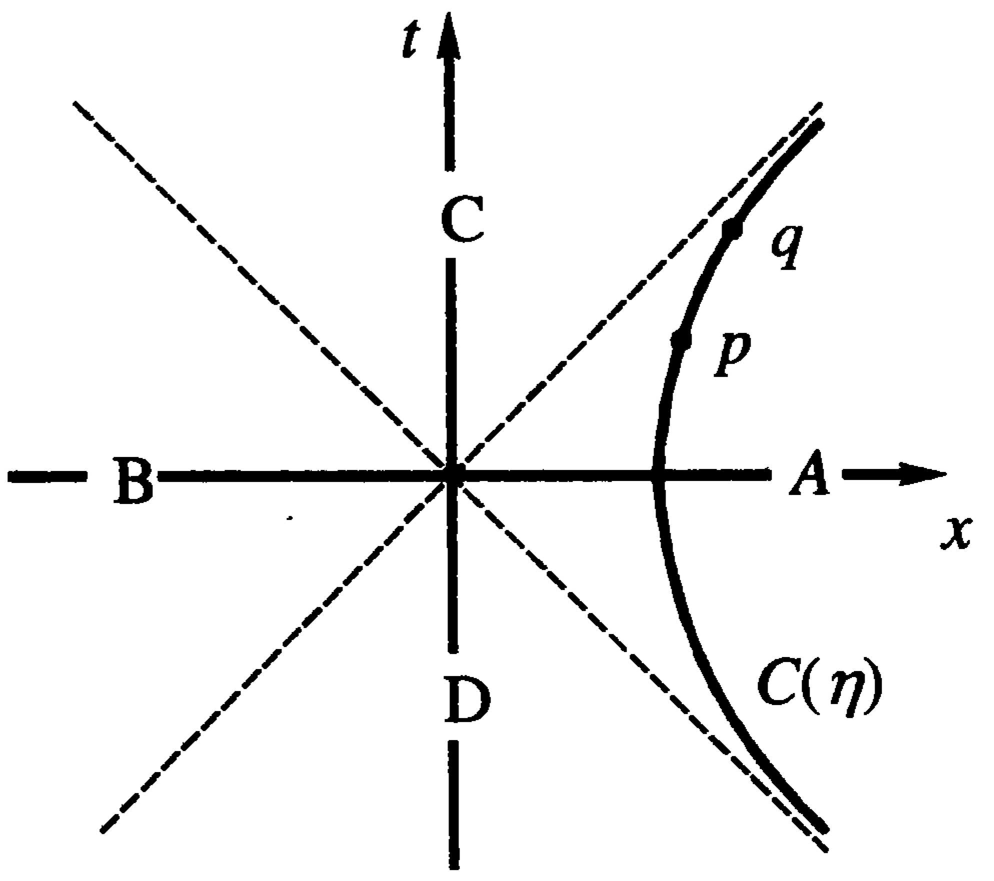


图 4-3　伪转动 Killing 矢量场$(\partial/\partial\eta)^a$在 A，B 区类时，在 C，D 区类空，在两条 45°直线上类光

(4) 4 维闵氏空间$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$. 因$n=4$，故独立的 Killing 场共 10 个，分三组：

(a) 4 个平移$(\partial/\partial t)^a$，$(\partial/\partial x)^a$，$(\partial/\partial y)^a$，$(\partial/\partial z)^a$；

(b) 3 个空间转动

$-y\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial y)^a$，$-z\,(\partial/\partial y)^a+y\,(\partial/\partial z)^a$，$-x(\partial/\partial z)^a+z\,(\partial/\partial x)^a$；

(c) 3 个伪转动$t\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial t)^a$，$t\,(\partial/\partial y)^a+y\,(\partial/\partial t)^a$，$t\,(\partial/\partial z)^a+z\,(\partial/\partial t)^a$.

组(a)反映闵氏度规沿t，x，y，z轴的平移不变性，组(b)反映它绕z，x，y轴的空间旋转不变性，组(c)反映它在t~x，t~y，t~z面内的伪转动下的不变性.

定理 4-3-5　设$\{x,t\}$是 2 维闵氏空间$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$的洛伦兹坐标系，$\phi_\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是伪转动 Killing 场$\xi^a\equiv t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$对应的单参等度规群的一个群元(即以参数$\lambda\in\mathbb{R}$刻画的那个等度规映射)，则由$\phi_\lambda$诱导的坐标变换$\{x,t\}\mapsto\{x',t'\}$是洛伦兹变换.

注 3　本定理表明伪转动和洛伦兹变换是同一变换的两种(主动与被动)提法. 类似地，欧氏空间的转动 Killing 场$-y\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial y)^a$与坐标变换

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\,,\qquad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

也是同一变换的两种提法.

证明　矢量场$\xi^a\equiv(\partial/\partial\eta)^a$的积分曲线的参数方程为$\mathrm{d}x^\mu(\eta)/\mathrm{d}\eta=\xi^\mu$ $(\mu=0,1)$. 注意到$\xi^a\equiv t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$，便得

$$\frac{\mathrm{d}x(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=t(\eta), \qquad \frac{\mathrm{d}t(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=x(\eta). \tag{4-3-4}$$

$\forall p\in\mathbb{R}^2$，设$C(\eta)$是满足$p=C(0)$的积分曲线，即$x(0)=x_p$，$t(0)=t_p$，则不难证明方程(4-3-4)的特解[即该线的参数式]为

$$x(\eta)=x_p\mathrm{ch}\eta+t_p\mathrm{sh}\eta, \qquad t(\eta)=x_p\mathrm{sh}\eta+t_p\mathrm{ch}\eta. \tag{4-3-5}$$

设$q\equiv\phi_\lambda(p)$，则q就是$C(\eta)$上参数值$\eta=\lambda$的点，即$q=C(\lambda)$，故由ϕ_λ诱导的新坐标t'和x'满足

$$x'_p\equiv x_q=x_p\mathrm{ch}\lambda+t_p\mathrm{sh}\lambda, \qquad t'_p\equiv t_q=x_p\mathrm{sh}\lambda+t_p\mathrm{ch}\lambda.$$

因p点任意，故可去掉下标p而写成

$$x'=x\mathrm{ch}\,\lambda+t\mathrm{sh}\lambda=\mathrm{ch}\,\lambda\,(x+t\ \mathrm{th}\,\lambda), \quad t'=t\mathrm{ch}\,\lambda+x\mathrm{sh}\lambda=\mathrm{ch}\,\lambda\,(t+x\ \mathrm{th}\,\lambda). \tag{4-3-6}$$

令$v\equiv\mathrm{th}\,\lambda$，$\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}=\mathrm{ch}\,\lambda$，则

$$x'=\gamma(x+vt), \qquad t'=\gamma(t+vx). \tag{4-3-7}$$

这便是熟知的洛伦兹变换(注意，我们用几何单位制，其中光速$c=1.$)． □

[选读 4-3-1]

上述证明中的$C(\eta)$对$\mathbb{R}^2$的任一点p都是完备曲线，即$\eta\in(-\infty,\infty)$．若p在A或B区，则$C(\eta)$类时；若p在C或D区，则$C(\eta)$类空；若p在45°斜直线上，则$C(\eta)$类光．最特别的情况是$p=(0,0)$，即p为$\{t,x\}$系的原点，这时$C(\eta)=p$(独点线)．所以每条45°斜直线不是一条积分曲线而是3条积分曲线之并，第一、二条分别是斜直线的上、下半段(不含原点)，第三条则是独点线$\{p\}$．这3条线的参数范围都是$(-\infty,\infty)$．

[选读 4-3-1 完]

由$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2$和式(4-3-7)易得$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t'^2+\mathrm{d}x'^2$，可见伪转动对应的等度规映射诱导的坐标变换把洛伦兹系$\{t,x\}$变为洛伦兹系$\{t',x'\}$．此结果可推广为如下定理：

定理 4-3-6　设$\{x^\mu\}$是$(\mathbb{R}^n,\eta_{ab})$的洛伦兹坐标系，则$\{x'^\mu\}$也是洛伦兹坐标系的充要条件是它由$\{x^\mu\}$通过等度规映射ϕ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$诱导而得．

证明　把η_{ab}记作g_{ab}，其在$\{x^\mu\}$和$\{x'^\mu\}$系的分量分别记作$g_{\mu\nu}$和$g'_{\mu\nu}$．

(A) 设ϕ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是等度规映射(即$\phi^*g_{ab}=g_{ab}$)，$\{x'^\mu\}$是由洛伦兹系$\{x^\mu\}$通过$\phi$诱导而得的坐标系，则$\forall p\in\mathbb{R}^n$有$g'_{\mu\nu}|_p=(\phi_*g)_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=(\phi^{-1*}g)_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=g_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=\eta_{\mu\nu}$，其中第一步用到式(4-1-6)，第三步是由于$\phi$为等度规导致$\phi^{-1}$为等度规，第四步用到$\{x^\mu\}$的洛伦兹性．上式说明$p$点的$g_{ab}$在$\{x'^\mu\}$系的分量为$\eta_{\mu\nu}$，故$\{x'^\mu\}$为洛伦兹系．

(B) 设$\{x^\mu\}$和$\{x'^\mu\}$都是洛伦兹系，ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是与坐标变换$\{x^\mu\} \mapsto \{x'^\mu\}$对应的微分同胚映射，则$\forall p \in \mathbb{R}^n$有$(\phi^{-1*}g)_{\mu\nu}|_p = (\phi_* g)_{\mu\nu}|_p = g'_{\mu\nu}|_{\phi^{-1}(p)} = \eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}|_p$，其中第二步用到式(4-1-6)，第三、四步用到$\{x'^\mu\}$和$\{x^\mu\}$的洛伦兹性. 上式表明$\phi^{-1*}g_{ab} = g_{ab}$，故$\phi^{-1}$(因而$\phi$)是等度规映射. □

注 4　本定理也适用于欧氏空间，只须把洛伦兹系改为笛卡儿系. 可以说等度规映射保持坐标系的洛伦兹(笛卡儿)性.

§4.4　超　曲　面

定义 1　设M，S为流形，$\dim S \leqslant \dim M \equiv n$. 映射$\phi: S \to M$称为**嵌入**(imbedding)，若$\phi$ 是一一和C^∞的，而且$\forall p \in S$，推前映射$\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$非退化[$V_{\phi(p)}$是指$\phi(p)$作为$M$的一点的切空间]，即$\phi_* v^a = 0 \Rightarrow v^a = 0$.

注 1　嵌入的上述条件使S的拓扑和流形结构可自然地被带到$\phi[S]$上去，从而使$\phi: S \to \phi[S]$成为微分同胚映射.

定义 2　嵌入$\phi: S \to M$称为M的一个**嵌入子流形**(imbedded submanifold)，简称**子流形**. 也常把映射的像$\phi[S]$称为嵌入子流形. 若$\dim S = n-1$，则$\phi[S] \subset M$称为M的一张**超曲面**(hypersurface).

例 1　设U是M的开子集，把M的流形结构限制在U上，U便成为与M同维的流形. 把U看作定义 1 的S，令$\phi: U \to M$为恒等映射，则$U \equiv \phi[U]$便是M的一个嵌入子流形(同维嵌入).

例 2　设S是$\mathbb{R}^3$(看作M)中的单位球面S^2，则恒等映射$\phi: S^2 \to \mathbb{R}^3$给出$\mathbb{R}^3$的一个嵌入子流形. 注意到$S^2$比$\mathbb{R}^3$低一维，可知$S^2$是$\mathbb{R}^3$的一个超曲面.

[选读 4-4-1]

嵌入子流形$\phi[S]$有两个拓扑，其一是由嵌入自然带来的拓扑(见注 1)，其二是由M的拓扑在$\phi[S]$(作为M的子集)上诱导的拓扑. 这两个拓扑不一定相同. 如果进一步要求它们相同，就对嵌入$\phi: S \to M$提出了更高的要求. 满足这一附加要求的嵌入称为**正则嵌入**[见陈省身，陈维桓(1983).]. Hawking and Ellis(1973)的嵌入指的就是正则嵌入. 设$S = \mathbb{R}$，$M = \mathbb{R}^2$，则嵌入$\phi: S \to M$是$\mathbb{R}^2$中的光滑曲线. 定义中ϕ的一一性不允许嵌入子流形为自相交曲线(例如图 4-4 的 8 字形曲线). 图 4-5 的“任意接近自相交”而不自相交的曲线是不是嵌入子流形？ 答案是：它是嵌入子流形但不是正则嵌入子流形. 本书今后谈到嵌入子流形时，在许多情况下是指正则嵌入子流形. **[选读 4-4-1 完]**

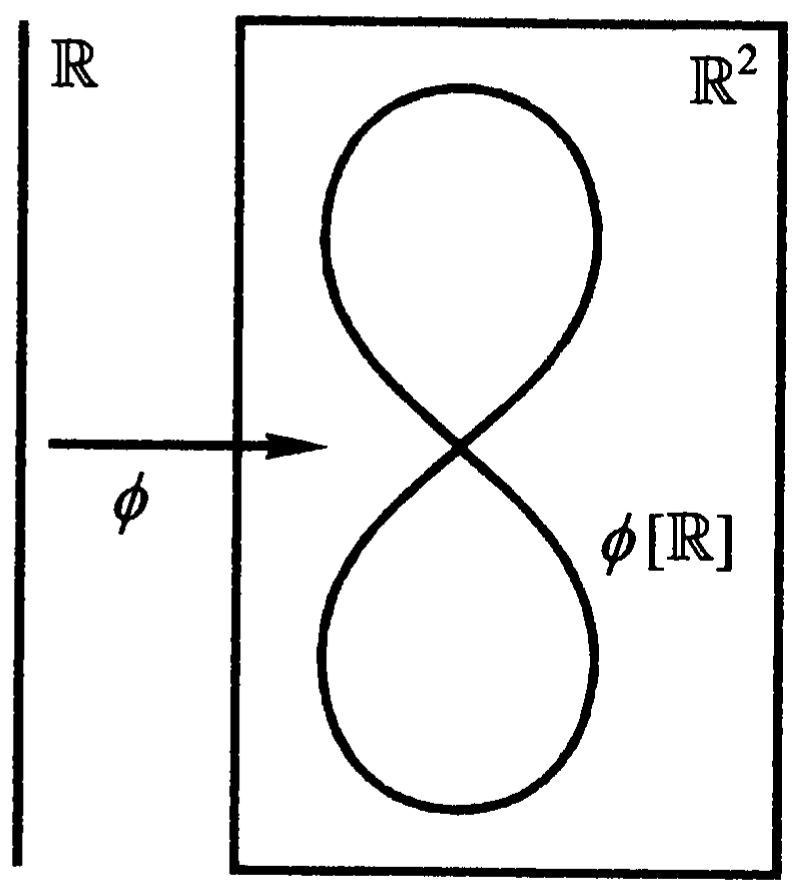


图 4-4　自相交曲线不是嵌入子流形

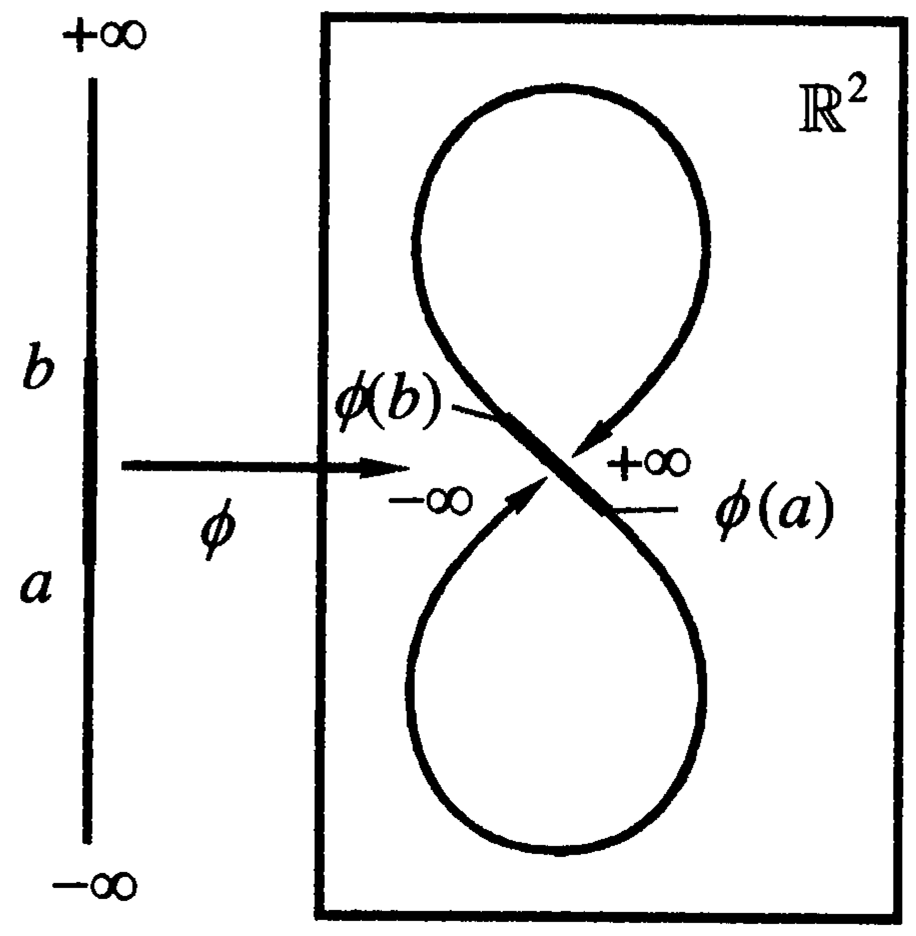


图 4-5　“任意接近自相交”的曲线是嵌入子流形，但不是正则嵌入子流形

设$\phi[S]$是M的超曲面，$q\in\phi[S]\subset M$．作为M的一点，q有n维切空间V_q．若$w^a\in V_q$是过q且躺在$\phi[S]$上的某曲线的切矢（“躺在”是指曲线每点都在$\phi[S]$上），则说w^a切于$\phi[S]$．V_q中全体切于$\phi[S]$的元素构成的子集记作W_q．超曲面的定义保证W_q是V_q的$n-1$维子空间．谈到超曲面时自然想到它的法矢．设$\phi[S]$是超曲面，$q\in\phi[S]$，则q点的法矢n^a应定义为与q点所有切于$\phi[S]$的矢量正交的矢量．然而正交性只有在指定度规后才有意义．当M没有度规时，不能定义法矢n^a，但可定义“法余矢”n_a．**余矢**(covector)是对偶矢量的别名．由于对偶矢量作用于矢量给出实数(无需度规)，可定义法余矢如下：

定义 3　设$\phi[S]$是超曲面，$q\in\phi[S]$．非零对偶矢量$n_a\in V_q{}^*$称为$\phi[S]$在q点的**法余矢**(normal covector)，若$n_a w^a=0,\ \ \forall w^a\in W_q$．

定理 4-4-1　超曲面$\phi[S]$上任一点q必有法余矢n_a．法余矢不唯一，但q点的任意两个法余矢之间只能差一实数因子．

证明　设$\{(e_2)^a,\cdots,(e_n)^a\}$为$W_q$任一基底，因$\dim V_q=n$，$V_q$必有与$\{(e_2)^a,\cdots,(e_n)^a\}$线性无关的元素，任取其一并记作$(e_1)^a$，则$\{(e_\mu)^a\mid\mu=1,\cdots,n\}$为$V_q$的基底，其对偶基底记作$\{(e^\mu)_a\}$．令$n_a=(e^1)_a$，则$n_a(e_\tau)^a=\delta^1{}_\tau=0\ (\tau=2,\cdots,n)$，故$n_a w^a=0\ \ \forall w^a\in W_q$，可见$n_a$为法余矢．若存在$m_a$满足$m_a(e_\tau)^a=0\ (\tau=2,\cdots,n)$，则其在对偶基底$\{(e^\mu)_a\}$的分量$m_\tau=m_a(e_\tau)^a=0\ (\tau=2,\cdots,n)$，因而$m_a=m_1(e^1)_a=m_1 n_a$，即$m_a$与$n_a$只差一因子$m_1$．　□

注 2　非超曲面的嵌入子流形(如 3 维流形中的曲线)的法余矢没有这样好的唯一性．

[选读 4-4-2]

设$x,\ y,\ z$是$\mathbb{R}^3$的自然坐标，考虑函数$f=ax+by+cz$（$a,\ b,\ c$为常数），则

$\mathbb{R}^3$ 中满足方程 $f=0$ 的点便组成 $\mathbb{R}^3$ 中的一个超曲面(平面). 若 $f=x^2+y^2+z^2-a^2$，则方程 $f=0$ 代表另一超曲面(球面). 然而，若 $f=x^2+y^2+z^2$，则只有坐标原点满足 $f=0$，因此 $f=0$ 不代表超曲面. 关键在于这时 $\mathrm{d}f|_{f=0}=0$. 另一个极端的例子是 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定义为 $f(p)=0\ \ \forall p\in\mathbb{R}^3$ 的情况. 这时满足方程 $f=0$ 的点的子集是 $\mathbb{R}^3$ 自身，所以也不是超曲面. 关键仍然在于 $\mathrm{d}f|_{f=0}=0$. 推广至 f 是任意流形 M 上光滑函数的情况，可以证明，只要 $\mathrm{d}f|_{f=c}\neq 0$(即 $\nabla_a f|_{f=c}\neq 0$)，则 $f=c$(常数)给出 M 中的一个超曲面[详见 D. Chillingworth(1976)P.156~158].

[选读 4-4-2 完]

定理 4-4-2　设 $\phi[S]$ 是由 $f=$ 常数　给出的超曲面,则面上的 $\nabla_a f$ 是超曲面的法余矢.

证明　只须对任一 $q\in\phi[S]$ 证明 $w^a\nabla_a f=0,\forall\ w^a\in W_q$. 因 w^a 总切于过 q 并躺在 $\phi[S]$ 上的某曲线 $C(t)$, 故 $w^a\nabla_a f=\dfrac{\partial}{\partial t}(f)=0\quad\forall\ w^a\in W_q$,最后一步是因 f 在 $C(t)$ 上为常数. □

若 M 上有度规 g_{ab}，则 $n^a\equiv g^{ab}n_b\in V_q$ 与 $\phi[S]$ 的所有矢量正交(因 $g_{ab}n^a w^b=n_b w^b=0,\forall\ w^b\in W_q$)，故 n^a 叫超曲面 $\phi[S]$ 在 q 点的**法矢**(normal vector). 若 g_{ab} 为正定度规(例如 $\mathbb{R}^2$ 嵌入 3 维欧氏空间)，n^a 自然不属于 W_q，即 $n^a\in V_q-W_q$；然而，若 g_{ab} 为洛伦兹度规，n^a 却有可能属于 W_q. 以下就 g_{ab} 为洛伦兹度规的情况进行讨论.

定理 4-4-3　$n^a\in W_q$ 的充要条件为 $n^a n_a=0$.

证明

(A) 设 $n^a\in W_q$，则 n^a 可看作 $n_a w^a=0$ 中的 w^a，故 $n_a n^a=0$.

(B) 由定理 4-4-1 的证明知对任一法余矢 n_a 存在基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_2)^a,\cdots,(e_n)^a\in W_q$ 且 $n_a=(e^1)_a$，故 n^a 在该基底的第一分量 $n^1=n^a(e^1)_a=n^a n_a$. 因此 $n_a n^a=0\Rightarrow n^1=0\Rightarrow n^a=\sum\limits_{\tau=2}^{n}n^\tau(e_\tau)^a\in W_q$. □

例 3　设 $S=\mathbb{R}$，$M=\mathbb{R}^2$，M 上度规 $g_{ab}=\eta_{ab}$，$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 为嵌入，则 $\phi[\mathbb{R}]$ 是 2 维闵氏时空中的超曲面. 设 t，x 为洛伦兹坐标，讨论以下三种有代表性的情况：

(1) $\phi[\mathbb{R}]$ 与 x 轴平行(图 4-6a). $\forall q\in\phi[\mathbb{R}]$，令 $(e_2)^a=(\partial/\partial x)^a$，选

$$(e_1)^a=\alpha(\partial/\partial t)^a+\beta(\partial/\partial x)^a,\ (\alpha,\ \beta \text{可为任意实数，但} \alpha\neq 0.)$$

则不难验证 $(e^1)_a=\alpha^{-1}(\mathrm{d}t)_a$. 注意到定理 4-4-1 的证明过程，可知 $(e^1)_a$ 为法余矢 n_a，

相应的法矢为$n^a=\alpha^{-1}g^{ab}(\mathrm{d}t)_b=-\alpha^{-1}(\partial/\partial t)^a$,满足$n^a\notin W_q$且$n_an^a<0$(即$n^a$为类时).

(2) $\phi[\mathbb{R}]$与t轴平行[见图 4-6(b)]. $\forall q\in\phi[\mathbb{R}]$，令$(e_2)^a=(\partial/\partial t)^a$，选

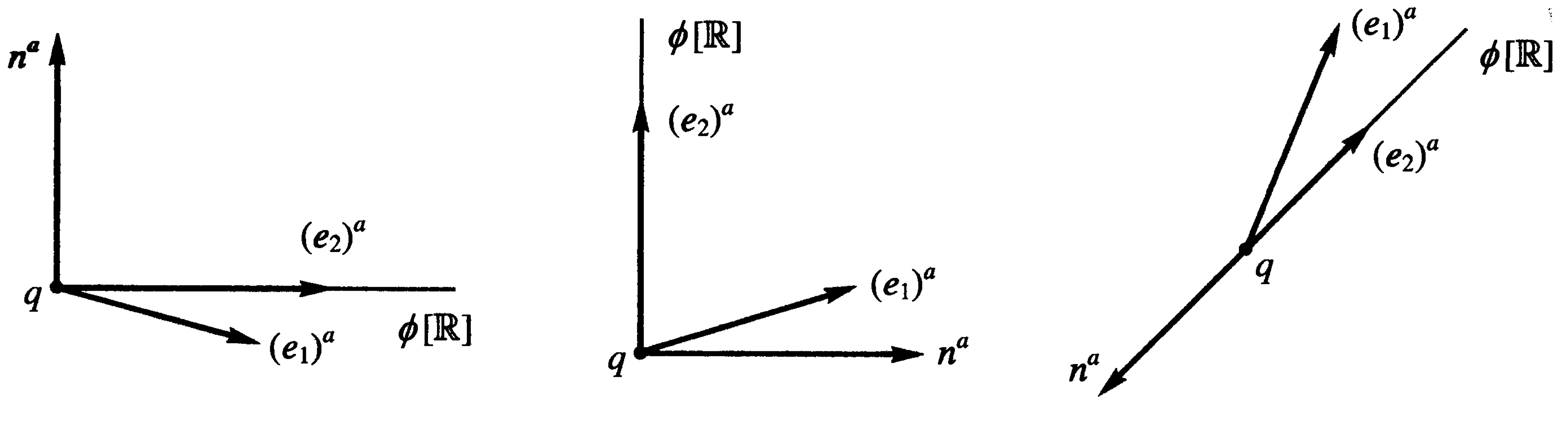
$$(e_1)^a=\alpha(\partial/\partial t)^a+\beta(\partial/\partial x)^a,\ (\alpha,\ \beta\text{可为任意实数，但}\beta\neq 0.)$$

则$(e^1)_a=\beta^{-1}(\mathrm{d}x)_a$. 取$(e^1)_a$为法余矢$n_a$，相应的法矢为$n^a=\beta^{-1}(\partial/\partial x)^a$，满足$n^a\notin W_q$且$n_an^a>0$(即$n^a$为类空).

(3) $\phi[\mathbb{R}]$与x轴夹45°角(按欧氏)[见图 4-6(c)]. $\forall q\in\phi[\mathbb{R}]$，令$(e_2)^a=(\partial/\partial t)^a+(\partial/\partial x)^a$，选$(e_1)^a=\alpha(\partial/\partial t)^a+\beta(\partial/\partial x)^a$，$\alpha\neq\beta$，则$(e^1)_a=(\alpha-\beta)^{-1}[(\mathrm{d}t)_a-(\mathrm{d}x)_a]$. 取$(e^1)_a$为法余矢$n_a$，相应的法矢为

$$n^a=(\alpha-\beta)^{-1}g^{ab}[(\mathrm{d}t)_b-(\mathrm{d}x)_b]=-(\alpha-\beta)^{-1}[(\partial/\partial t)^a+(\partial/\partial x)^a]=-(\alpha-\beta)^{-1}(e_2)^a,$$

满足$n^a\in W_q$且$n_an^a=0$(即n^a为类光). 在这种情况下，超曲面的法矢既与面上所有切矢垂直(法矢定义)，本身又是切矢之一！



(a) $n_an^a<0$(类空超曲面)　(b) $n_an^a>0$(类时超曲面)　(c) $n_an^a=0$(类光超曲面)

图 4-6　$\mathbb{R}$嵌入$\mathbb{R}^2$的三种情况(t轴竖直向上，x轴水平向右)

定义4　超曲面叫**类空的**，若其法矢处处类时($n^an_a<0$)；超曲面叫**类时的**，若其法矢处处类空($n^an_a>0$)；超曲面叫**类光的**，若其法矢处处类光($n_an^a=0$).

若$n^an_a\neq 0$，今后谈法矢时都指归一化法矢，即$n^an_a=\pm 1$.

定义5　设$\phi[S]$是流形M中的嵌入子流形(不一定是超曲面)，$q\in\phi[S]$，W_q是q点切于$\phi[S]$的切空间. W_q的度规h_{ab}叫做由V_q的度规g_{ab}生出的诱导度规(induced metric)，若

$$h_{ab}w_1{}^aw_2{}^b=g_{ab}w_1{}^aw_2{}^b,\qquad \forall w_1{}^a,\ w_2{}^b\in W_q. \tag{4-4-1}$$

诱导度规h_{ab}实质上是把V_q上度规g_{ab}的作用对象限制于W_q的结果. 当$\phi[S]$为类时或类空超曲面时，诱导度规h_{ab}可用其归一化法矢($n^an_a=\pm 1$)方便地表为

$$h_{ab}\equiv g_{ab}\mp n_an_b,\qquad (n^an_a=+1\text{时取}-,\ n^an_a=-1\text{时取}+.) \tag{4-4-2}$$

因为$\forall w_1{}^a,w_2{}^b\in W_q$有$h_{ab}w_1{}^aw_2{}^b=g_{ab}w_1{}^aw_2{}^b\mp n_aw_1{}^an_bw_2{}^b=g_{ab}w_1{}^aw_2{}^b$，即满足式

(4-4-1). 然而满足式(4-4-1)的 h_{ab} 很多，为什么只能用式(4-4-2)的那个？理由见选读 4-4-3.

[选读 4-4-3]

为便于陈述，设 V_q 为 4 维(因而 W_q 为 3 维). 作为诱导度规(W_q 上的度规)，式(4-4-1)的 h_{ab} 是 W_q 上的张量(3 维张量)，即 $h_{ab}\in\mathscr{T}_{W_q}(0,2)$ (它不能作用于 V_q-W_q 的元素). 但为了便于用 4 维等式演算，我们希望找到一个 4 维的(0, 2)型张量[即 $\mathscr{T}_{V_q}(0,2)$ 的元素]，它能代表 3 维张量 h_{ab}. $h_{ab}\equiv g_{ab}\mp n_a n_b$ 中的 h_{ab} 就是这样的 4 维张量(注意，右边两项都是 4 维张量). 为与式(4-4-1)的 h_{ab} 相区别，暂时把 $h_{ab}\equiv g_{ab}\mp n_a n_b$ 中的 h_{ab} 记作 $\bar{h}_{ab}$. 可以证明 $\mathscr{T}_{V_q}(0,2)$ 的子集 $\mathscr{S}_{V_q}(0,2)\equiv\{T_{ab}\in\mathscr{T}_{V_q}(0,2)\,|\,T_{ab}n^a=0, T_{ab}n^b=0\}$ 与 $\mathscr{T}_{W_q}(0,2)$ 自然同构，因而可以自然认同(详见第 14 章). 易见 $g_{ab}\notin\mathscr{S}_{V_q}(0,2)$ 而 $\bar{h}_{ab}\in\mathscr{S}_{V_q}(0,2)$ ，且 $\bar{h}_{ab}w_1{}^a w_2{}^b=g_{ab}w_1{}^a w_2{}^b\,\forall w_1{}^a,\ w_2{}^b\in W_q$ ，所以可把 $\bar{h}_{ab}$ 认同为 h_{ab}. 还可证明(读者自证) $\mathscr{S}_{V_q}(0,2)$ 中满足式(4-4-1)(因而可充当 h_{ab})的元素只有 $\bar{h}_{ab}$ ，这就是把 4 维张量 $\bar{h}_{ab}\equiv g_{ab}\mp n_a n_b$ 看作诱导度规的理由. 以后将不在符号上区分 $\bar{h}_{ab}$ 和 h_{ab}.

以上关于(0, 2)型张量的结论还可推广为：$\mathscr{T}_{V_q}(0,l)$ 的子集 $\{T_{a\cdots a_l}\in\mathscr{T}_{V_q}(0,l)\,|\,T_{a\cdots a_l}$ 的任一下标与 n^a 缩并为零$\}$ 与 $\mathscr{T}_{W_q}(0,l)$ 有自然同构关系，因而可自然认同. 这种认同使我们在讨论和书写公式时可用前者的元素代替后者的元素(写成 4 维而非 3 维张量等式)，从而带来许多方便. **[选读 4-4-3 完]**

注 3　式(4-4-2)在 g_{ab} 为正定时也成立(把∓号改为−号). 作为练习，读者试写出 3 维欧氏度规 g_{ab} 用球坐标系对偶坐标基底的展开式，并验证球面上诱导度规 $h_{ab}=g_{ab}-n_a n_b$ 同§3.3 例 2 所定义的诱导度规 $\hat{g}_{ab}$ 一致. [提示：球面上的归一化法余矢 $n_a=(\mathrm{d}r)_a$.]

设 $\phi[S]$ 为类时或类空超曲面，$q\in\phi[S]$ ，h_{ab} 满足式(4-4-2). 令

$$h^a{}_b\equiv g^{ac}h_{cb}=\delta^a{}_b\mp n^a n_b\,, \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

则 $\forall v^a\in V_q$ 有 $h^a{}_b v^b=v^a\mp n^a(n_b v^b)$ ，或

$$v^a=h^a{}_b v^b\pm n^a(n_b v^b)\,. \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

上式代表矢量 v^a 的一种分解(图 4-7)，其中 $\pm n^a(n_b v^b)$ 与法矢 n^a 平行，称为法向分量，$h^a{}_b v^b$ 与法矢 n^a 垂直[因为 $n_a(h^a{}_b v^b)=0$]，称为切向分量(切于 $\phi[S]$ 的分量). $h^a{}_b$ 称为从 V_q 到 W_q 的**投影映射**(projection map).

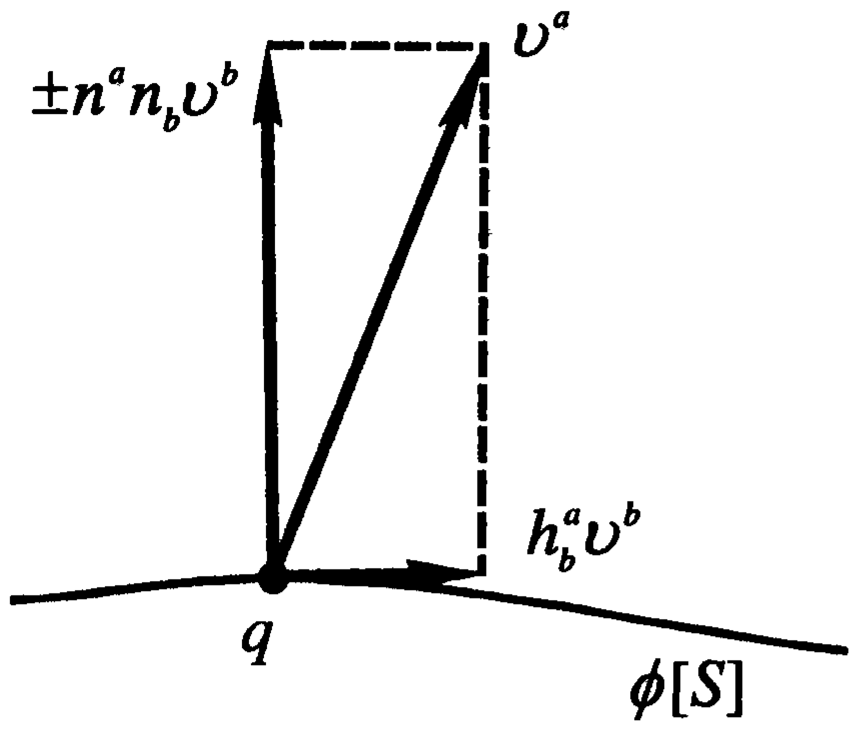


图 4-7　矢量 $v^a\in V_q$ 分解为法向分量 $\pm n^a(n_b v^b)$ 和切向分量 $h^a{}_b v^b\in W_p$

定理 4-4-4　类光超曲面上的诱导"度规"是退化的(因而没有诱导度规).

证明　以 h_{ab} 代表诱导"度规". 超曲面的类光性导致 $n^a \in W_q$(见定理 4-4-3), 故 W_q 有非零元素 n^a 使 $h_{ab}n^a w^b = g_{ab}n^a w^b = 0, \forall w^a \in W_q$. 可见 h_{ab} 是 W_q 上的退化张量. □

例 4　设 t, x, y, z 是 4 维闵氏空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的洛伦兹坐标, 则 η_{ab} 可用对偶坐标基矢表为

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b = -(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + (\mathrm{d}z)_a(\mathrm{d}z)_b + (\mathrm{d}x)_a(\mathrm{d}x)_b + (\mathrm{d}y)_a(\mathrm{d}y)_b. \quad (4\text{-}4\text{-}5)$$

方程 $t-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=0$ 定义了一个类光超曲面 $\mathscr{S}$, 它是以原点为锥顶的圆锥面(见图 4-8). $\forall q \in \mathscr{S} \subset \mathbb{R}^4$, 有 4 维切空间 V_q 和 3 维切空间(切于 $\mathscr{S}$) $W_q \subset V_q$. 令

$$n^a|_q \equiv (\partial/\partial t)^a|_q + (\partial/\partial z)^a|_q \text{(以下略去下标 } q\text{)},$$

则 n^a 是 $\mathscr{S}$ 在 q 点的类光法矢, 故 $n^a \in W_q$, 因而 $\{(\partial/\partial x)^a, (\partial/\partial y)^a, n^a\}$ 是 W_q 的基底. 现在计算 η_{ab} 在 W_q 上的诱导"度规" h_{ab} 在此基底的分量 $h_{\mu\nu}$.

$$h_{11} \equiv h_{ab}(\partial/\partial x)^a(\partial/\partial x)^b = \eta_{ab}(\partial/\partial x)^a(\partial/\partial x)^b = 1,$$

其中第二步用到式(4-4-1), 第三步用到式(4-4-5). 类似地, 有 $h_{22} \equiv h_{ab}(\partial/\partial y)^a (\partial/\partial y)^b = 1$. 而 $h_{\mu\nu}$ 的第三个对角元(记作 h_{nn})则为

$$h_{nn} \equiv h_{ab}n^a n^b = \eta_{ab}[(\partial/\partial t)^a + (\partial/\partial z)^a][(\partial/\partial t)^b + (\partial/\partial z)^b] = 1-1=0,$$

而且容易验证 $h_{\mu\nu}$ 的所有非对角元为零, 故

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因而 h_{ab} 退化[也说其"号差"为 $(+,+,0)$]. 可见 η_{ab} 在类光超曲面 $\mathscr{S}$ 上无诱导度规. 然而, 令 S 为 $\mathscr{S}$ 与任一等 t 面($t>0$)之交(是 2 维球面), 以 $\hat{W}_q \subset W_q$ 代表 W_q 中所有切于 S 的元素组成的子空间(见图 4-8), 则 η_{ab} 在 $\hat{W}_q$ 却有诱导度规, 记作 $\hat{h}_{ab}$, 而且不难验证

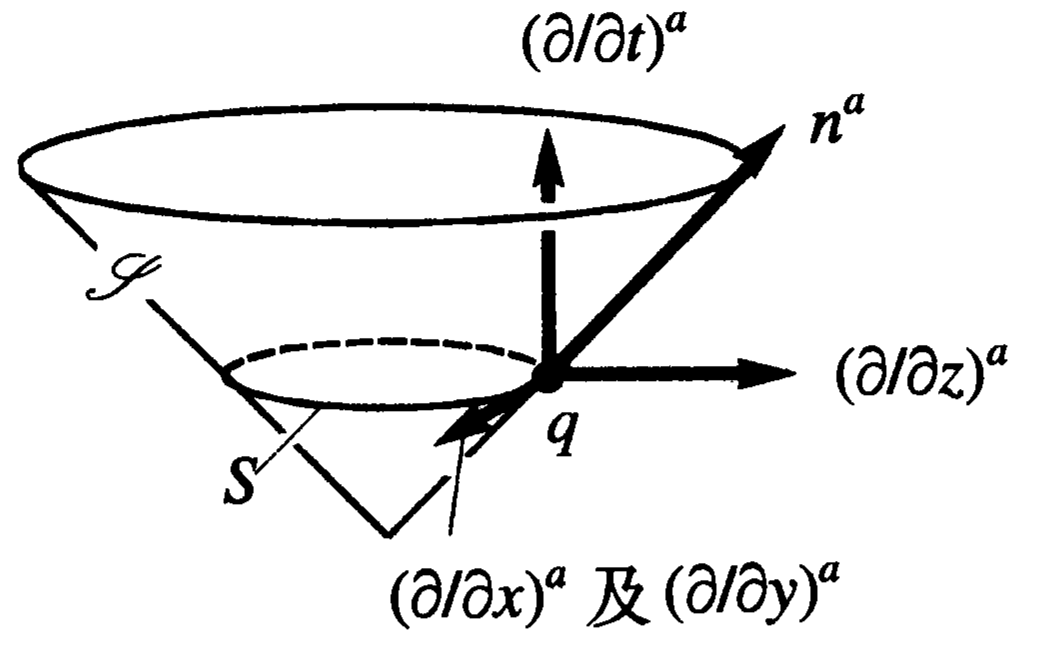


图 4-8　类光超曲面 $\mathscr{S}$ 的诱导"度规"退化

$$\hat{h}_{ab} = (\mathrm{d}x)_a(\mathrm{d}x)_b + (\mathrm{d}y)_a(\mathrm{d}y)_b. \tag{4-4-6}$$

读者不难对 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中由 $t-z=0$ 定义的类光超曲面做类似讨论.

习　题

~1. 试证由式(4-1-1)定义的 $(\phi_* v)^a$ 满足§2.2 定义 2 对矢量的两个要求，从而确是 $\phi(p)$ 点的矢量.

~2. 试证定理 4-1-1、4-1-2 和 4-1-3.

3. 设 $\phi: M \to N$ 为光滑映射，$p \in M$，$\{y^\mu\}$ 是 $\phi(p)$ 点某邻域上的坐标，试证

$$(\phi_* v)^a = v\,(\phi^* y^\mu)\;(\partial/\partial y^\mu)^a\,, \qquad \forall\, v^a \in V_p\,.$$

4. 设 M, N 是流形，$\phi: M \to N$ 是微分同胚，$p \in M$，$q \equiv \phi(p)$，试证推前映射 $\phi_*: V_p \to V_q$ 是同构映射.

5. 设 M, N, Q 是流形，$\phi: M \to N$ 和 $\psi: N \to Q$ 是光滑映射.

(a) 试证 $(\psi \circ \phi)^* f = (\phi^* \circ \psi^*) f$，$\forall f \in \mathscr{F}_Q$.

(b) 试证 $(\psi \circ \phi)_* v^a = \psi_*(\phi_* v^a)$，$\forall p \in M$，$v^a \in V_p$.

(c) 把 $(\psi \circ \phi)^*$ 和 $\phi^* \circ \psi^*$ 都看作由 $\mathscr{F}_Q(0,l)$ 到 $\mathscr{F}_M(0,l)$ 的映射，试证

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

6. 设 $\phi: M \to N$ 是微分同胚，v^a，u^a 是 M 上矢量场，试证 $\phi_*([v,u]^a) = [\phi_* v, \phi_* u]^a$，其中 $[v,u]^a$ 代表对易子.

~7. 试证定理 4-2-4.

~8. 设 $v^a \in \mathscr{F}_M(1,0)$，$\omega_a \in \mathscr{F}_M(0,1)$，试证对任一坐标系 $\{x^\mu\}$ 有

$(\mathscr{L}_v \omega)_\mu = v^\nu \partial \omega_\mu / \partial x^\nu + \omega_\nu \partial v^\nu / \partial x^\mu$.　提示：用式(4-2-7)并令其 ∇_a 为 ∂_a.

~9. 设 u^a, $v^a \in \mathscr{F}_M(1, 0)$，则下式作用于任意张量场都成立

$$[\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_u] = \mathscr{L}_{[v,u]} \quad (\text{其中 } [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_u] \equiv \mathscr{L}_v\mathscr{L}_u - \mathscr{L}_u\mathscr{L}_v).$$

试就作用对象为 $f \in \mathscr{F}_M$ 和 $w^a \in \mathscr{F}_M(1, 0)$ 的情况给出证明. 提示：当作用对象为 w^a 时可用雅可比恒等式(第 2 章习题 8).

10. 设 F_{ab} 是 4 维闵氏空间上的反对称张量场，其在洛伦兹坐标系$\{t, x, y, z\}$的分量为 $F_{01} = -F_{13} = x\rho^{-1}$，$F_{02} = -F_{23} = y\rho^{-1}$，$F_{03} = F_{12} = 0$，其中 $\rho \equiv (x^2+y^2)^{1/2}$. 试证 F_{ab} 有旋转对称性，即 $\mathscr{L}_v F_{ab} = 0$，其中 $v^a = -y\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial y)^a$.

11. 设 ξ^a 是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场，∇_a 与 g_{ab} 适配，试证 $\nabla_a \xi^a = 0$.

12. 设 ξ^a 是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场，$\phi: M \to N$ 是等度规映射，试证 $\phi_* \xi^a$ 也是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场. 提示：利用习题 5(c)的结论.

13. 设 ξ^a，η^a 是 (M, g_{ab}) 的 Killing 矢量场，试证其对易子 $[\xi,\eta]^a$ 也是 Killing 矢量场. 注：此结论使得 M 上全体 Killing 矢量场的集合不但是矢量空间，而且是李代数(详见下册附录 G).

14. 设 ξ^a 是广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 的 Killing 矢量场，$R_{abc}{}^d$ 是 g_{ab} 的黎曼曲率张量.

(a) 试证 $\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d$. 注：此式对证明定理 4-3-4 有重要用处. 提示：由 $R_{abc}{}^d$ 的定义以及 Killing 方程(4-3-1)可知 $\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}{}^d \xi_d$. 此式称为第一式. 作指标替换 $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$ 得第二式，再替换一次得第三式. 以第一、二式之和减第三式并利用式(3-4-7)便得证.

(b) 利用(a)的结果证明 $\nabla^a \nabla_a \xi_c = -R_{cd} \xi^d$，其中 R_{cd} 是里奇张量.

~15. 验证式(4-3-3)中的 $(\partial/\partial\eta)^a$ 的确满足 Killing 方程(4-3-1).

~16. 找出 2 维欧氏空间中由 $R^a = x(\partial/\partial y)^a - y(\partial/\partial x)^a$ 生出的单参等度规群的任一元素 ϕ_α 诱导的坐标变换.

*17. 设时空(M, g_{ab})中的超曲面 $\phi[S]$ 上每点都有类光切矢而无类时切矢(“切矢”指切于 $\phi[S]$)，试证它必为类光超曲面. 提示：①证明与类时矢量 t^a 正交的矢量必类空[选正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_0)^a = t^a$]；②证明类时超曲面上每点都有类时切矢；③由以上两点证明本命题.

第 5 章　微分形式及其积分

§5.1　微 分 形 式

先介绍 n 维矢量空间 V 上的"形式"，再讨论 n 维流形 M 上的"微分形式场".

定义 1　$\omega_{a_1\cdots a_l}\in\mathscr{T}_V(0,l)$ 叫 V 上的 **l 次形式**(简称 **l 形式**)(l-form)，若

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{[a_1\cdots a_l]}.$$

为书写方便，有时略去下标而把 l 形式 $\omega_{a_1\cdots a_l}$ 写为 $\boldsymbol{\omega}$.

定理 5-1-1　(a) $\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{[a_1\cdots a_l]}$ $\Rightarrow$ 对任意基底有 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$；

(b) $\exists$ 基底使 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$ $\Rightarrow$ $\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{[a_1\cdots a_l]}$.

证明　练习. □

定理 5-1-2　设 $\boldsymbol{\omega}$ 为 l 形式，则

(a) $\omega_{a_1\cdots a_l}=\delta_\pi\omega_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$，　(5-1-1)

[其中 δ_π，$a_{\pi(1)}$，…的含义见式(2-6-14)后的说明.]例如 $\omega_{abc}=-\omega_{acb}=\omega_{cab}=\cdots$；

(b) 对任意基底，　$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\delta_\pi\omega_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(l)}}$.　(5-1-1′)

证明　(a) 见定理 2-6-1(b)的证明；

(b) 练习. □

由式(5-1-1′)可知，在 l 形式的分量 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$ 中，凡有重复具体指标者必为零，例如

$$\omega_{112}=\omega_{133}=\omega_{212}=0.$$

V 上全体 l 形式的集合记作 $\Lambda(l)$. 1 形式其实就是 V 上的对偶矢量，故 $\Lambda(1)=V^*$. 约定把任一实数称为 V 上的 **0 形式**，则 $\Lambda(0)=\mathbb{R}$. l 形式既然是$(0,l)$型张量，自然有 $\Lambda(l)\subset\mathscr{T}_V(0,l)$. 不但如此，还容易证明 $\Lambda(l)$ 是 $\mathscr{T}_V(0,l)$ 的线性子空间，其维数的计算可从定理 2-4-1 关于 $\mathscr{T}_V(k,l)$ 维数的计算得到启发：为求 $\mathscr{T}_V(k,l)$ 的维数可先找一个基底，而为此则要先定义张量积. 然而两个微分形式(作为两个张量)的张量积并非全反称，故不再是微分形式. 但可对全体指标施行全反称操作使之成为微分形式，于是有如下定义：

定义 2　设 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别为 l 形式和 m 形式，则其**楔形积**(wedge product，简称**楔积**)是按下式定义的 $l+m$ 形式：

$$(\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m}:=\frac{(l+m)!}{l!m!}\omega_{[a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m]}.\qquad(5\text{-}1\text{-}2)$$

或者说，楔积是满足式(5-1-2)的映射 $\wedge: \Lambda(l)\times\Lambda(m)\to\Lambda(l+m)$.

楔积 $(\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m}$ 亦可记作 $\omega_{a_1\cdots a_l}\wedge\mu_{b_1\cdots b_m}$ ，也常简记为 $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}$.

由定义可知楔积满足结合律和分配律，即 $(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu})\wedge\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\nu})$ (因而 $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\nu}$ 有明确意义)和 $\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\nu}$. 但楔积一般不服从交换律，例如对 1 形式 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 有

$$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}\equiv\omega_a\wedge\mu_b\equiv(\omega\wedge\mu)_{ab}=2\omega_{[a}\mu_{b]}=\omega_a\mu_b-\omega_b\mu_a$$

和

$$\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}\equiv(\mu\wedge\omega)_{ab}=2\mu_{[a}\omega_{b]}=\mu_a\omega_b-\mu_b\omega_a ,$$

可见对两个 1 形式的楔积有 $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}=-\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}$. 推广至一般情况，设 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别是 l 和 m 形式，则

$$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}=(-1)^{lm}\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega} . \tag{5-1-3}$$

定理 5-1-3　设 $\dim V=n$ ，则 $\dim\Lambda(l)=\dfrac{n!}{l!\,(n-l)!}$ ，若 $l\leqslant n$ ；　　(5-1-4)

$\Lambda(l)=\{0\}$ (只有零元)，若 $l>n$.

证明　以 $n=3$ ，$l=2$ 为例. 设 $\{(e_1)^a,(e_2)^a,(e_3)^a\}$ 是 V 的基底，$\{(e^1)_a,(e^2)_a,(e^3)_a\}$ 为其对偶基底，则 ω_{ab} (作为 V 上的张量)可展开为

$$\begin{aligned}\omega_{ab}=&\ \omega_{11}(e^1)_a(e^1)_b+\omega_{12}(e^1)_a(e^2)_b+\omega_{13}(e^1)_a(e^3)_b\\&+\omega_{21}(e^2)_a(e^1)_b+\omega_{22}(e^2)_a(e^2)_b+\omega_{23}(e^2)_a(e^3)_b\\&+\omega_{31}(e^3)_a(e^1)_b+\omega_{32}(e^3)_a(e^2)_b+\omega_{33}(e^3)_a(e^3)_b .\end{aligned}$$

注意到 $\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0$, $\omega_{21}=-\omega_{12}$, $\omega_{32}=-\omega_{23}$, $\omega_{13}=-\omega_{31}$ ，上式成为

$$\begin{aligned}\omega_{ab}=&\ \omega_{12}[(e^1)_a(e^2)_b-(e^2)_a(e^1)_b]+\omega_{23}[(e^2)_a(e^3)_b-(e^3)_a(e^2)_b]+\omega_{31}[(e^3)_a(e^1)_b\\&-(e^1)_a(e^3)_b]=\omega_{12}(e^1)_a\wedge(e^2)_b+\omega_{23}(e^2)_a\wedge(e^3)_b+\omega_{31}(e^3)_a\wedge(e^1)_b .\end{aligned} \tag{5-1-5}$$

可见任一 $\omega_{ab}\in\Lambda(2)$ 可用 $\{(e^1)_a\wedge(e^2)_b,\ (e^2)_a\wedge(e^3)_b,\ (e^3)_a\wedge(e^1)_b\}$ 线性表出. 不难证明花括号中的三个 2 形式彼此线性独立(习题)，故它们构成 $\Lambda(2)$ 的一组基矢，因而 $\dim\Lambda(2)=3$. 读者可把以上讨论推广至 l, n 为任意正整数且 $l\leqslant n$ 的情况，证明任一 l 形式 $\boldsymbol{\omega}$ 可展开为

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum_{C}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l} , \tag{5-1-6}$$

其中 $\{(e^1)_a,\cdots,(e^n)_a\}$ 为 V^* 的任一基底，$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 在由这一基底构成的 $\mathscr{T}_V(0,l)$ 的基底的分量，即

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{a_1\cdots a_l}(e_{\mu_1})^{a_1}\cdots(e_{\mu_l})^{a_l} , \tag{5-1-7}$$

$\sum\limits_{C}$ 表示对 n 个数 $(1,\cdots,n)$ 中取 l 个的各种组合求和，即 $\Lambda(l)$ 的基底中的矢量共 C_n^l 个，故得式(5-1-4). 至于 $l>n$ 的情况，由定理 5-1-2(b)易见此时任何 $\boldsymbol{\omega}\in\Lambda(l)$ 的全

部分量为零，故 $\Lambda(l)$ 中只有一个元素，即零元：$\Lambda(l)=\{0\}$. □

式(5-1-5)是式(5-1-6)在 $n=3$，$l=2$ 时的特例. 为便于理解，再举一特例：设 $n=4$，$l=3$，则式(5-1-6)表现为

$$\omega_{abc}=\omega_{123}(e^1)_a\wedge(e^2)_b\wedge(e^3)_c+\omega_{124}(e^1)_a\wedge(e^2)_b\wedge(e^4)_c$$
$$+\omega_{134}(e^1)_a\wedge(e^3)_b\wedge(e^4)_c+\omega_{234}(e^2)_a\wedge(e^3)_b\wedge(e^4)_c\,,$$

其中各分量由式(5-1-7)决定，例如 $\omega_{134}=\omega_{abc}(e_1)^a(e_3)^b(e_4)^c$.

[选读 5-1-1]

式(5-1-6)也可表为

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\frac{1}{l\,!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}\ (\text{求和号}\sum_{\mu_1,\cdots,\mu_l}^{n}\ \text{已按惯例略去}). \tag{5-1-6'}$$

右边的非零项数等于 n 个数中取 l 个的排列数 $\mathrm{P}_n^l=n!/(n-l)!$ ，可分为 $\mathrm{C}_n^l=n!/l!(n-l)!$ 组，每组含 $l!$ 项，组内各项相同，除以 $l!$ 便得 $\mathrm{C}_n^l=n!/l!(n-l)!$ 项，与式(5-1-6)同.

[选读 5-1-1 完]

下面回到流形 M 上来. 若对 M (或 $A\subset M$)的任一点 p 指定 V_p 上的一个 l 形式，就得到 M (或 A)上的一个 l 形式场(“场”字常略去). 1 形式场和 0 形式场分别是对偶矢量场和标量场. M 上光滑的 l 形式场称为 **l 次微分形式场**(differential l-form)，也简称作 **l 形式场或 l 形式**.

设 (O,ψ) 为一坐标系，则 O 上的 l 形式场可方便地用对偶坐标基底场 $\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$ 逐点线性表出. 令式(5-1-6)中的 $(e^\mu)_a$ 为 $(\mathrm{d}x^\mu)_a$ ，有

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum_{\mathrm{C}}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}\,, \tag{5-1-8}$$

其中

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{a_1\cdots a_l}(\partial/\partial x^{\mu_1})^{a_1}\cdots(\partial/\partial x^{\mu_l})^{a_l} \tag{5-1-9}$$

是 O 上的函数. 一个重要特例是 $l=n$ 的情况. 因为 $\mathrm{C}_n^l=\mathrm{C}_n^n=1$ ，式(5-1-8)右边的求和只有一项，即

$$\omega_{a_1\cdots a_n}=\omega_{1\cdots n}(\mathrm{d}x^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^n)_{a_n}\,, \tag{5-1-10}$$

简写为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\,. \tag{5-1-10'}$$

上式也可这样理解：M 中任一点 p 的所有 n 形式的集合是 1 维矢量空间，只有一个基矢，可取为 $\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n|_p$ ，式(5-1-10′)就是 $\boldsymbol{\omega}|_p$ 用这一基矢的展开式. 注意，展开系数 $\omega_{1\cdots n}$ 对不同点可以不同，因而是坐标域上的函数，也可表为坐标的 n 元函数 $\omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n)$.

我们以 $\Lambda_M(l)$ 代表 M 上全体 l 形式场的集合.

定义3　流形 M 上的**外微分算符**(exterior differentiation operator)是一个映射

d: $\Lambda_M(l) \to \Lambda_M(l+1)$，定义为

$$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} := (l+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]}\ , \tag{5-1-11}$$

其中 ∇_b 可为任一导数算符(因由 $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$ 可证对任意 ∇_a 和 $\tilde{\nabla}_a$ 有 $\tilde{\nabla}_{[b}\omega_{\ldots]} = \nabla_{[b}\omega_{\ldots]}$). 可见在定义外微分之前无须在 M 上指定导数算符(及任何其他附加结构，如度规．).

例 1 §2.3 曾定义过$(\mathrm{d}f)_a$，由式(3-1-1)又知 $(\mathrm{d}f)_a = \nabla_a f$，可见$(\mathrm{d}f)_a$ 就是 $f \in \Lambda_M(0)$ 的外微分，这正是当时用符号 df 的原因.

把 l 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 写成对偶坐标基矢的展开式(5-1-8)的一个好处是便于计算 d$\boldsymbol{\omega}$，请看如下定理：

定理 5-1-4 设 $\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum\limits_{C} \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}$，则

$$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} = \sum_{C} (\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l})_b \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}\ . \tag{5-1-12}$$

证明 习题. 提示：选该坐标系的普通导数算符 ∂_b 作为式(5-1-11)的 ∇_b . □

定理 5-1-5 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

证明 选任一坐标系的导数算符 ∂_b 作为式(5-1-11)的 ∇_b，便有

$$[\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)]_{cba_1\cdots a_l} = (l+2)(l+1)\partial_{[c}\partial_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]]} = (l+2)(l+1)\partial_{[[c}\partial_{b]}\omega_{a_1\cdots a_l]} = 0\ ,$$

其中第二步用到定理 2-6-2(b)，第四步用到§3.1 的 $\partial_{[a}\partial_{b]}T^{\cdots}{}_{\cdots} = 0$. □

定义 4 设 $\boldsymbol{\omega}$为 M 上的 l 形式场. $\boldsymbol{\omega}$ 叫**闭的**(closed)，若 d$\boldsymbol{\omega} = 0$；$\boldsymbol{\omega}$ 叫**恰当的**(exact)，若存在 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$ 使 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$.

注 1 定理 5-1-5 亦可表述为：若$\boldsymbol{\omega}$是恰当的，则$\boldsymbol{\omega}$是闭的. 然而，要使逆命题成立则还须对流形 M 提出一定要求(略). 平凡流形 $\mathbb{R}^n$ 满足这一要求，而流形一定局域平凡，所以对任意流形 M 而言，闭的 l 形式场至少是局域恰当的. 就是说，设 $\boldsymbol{\omega}$ 是流形 M 上的闭的 l 形式场，则 M 的任一点 p 必有邻域 N，在 N 上存在 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$ 使 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$.

推论 5-1-6 当$M = \mathbb{R}^2$时，定理 5-1-5 及其逆定理给出普通微积分的下述命题：给定函数 $X(x, y)$及 $Y(x, y)$，存在函数 $f(x, y)$使 d$f = X$d$x + Y$dy 的充要条件是 $\partial X/\partial y = \partial Y/\partial x$.

证明 由定理 5-1-4 可知 1 形式场 Xd$x + Y$dy 的外微分为

$$\mathrm{d}(X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y) = \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial X}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Y}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial X}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Y}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\ . \tag{5-1-13}$$

(A) 若存在函数f 使 1 形式等式 d$f = X$d$x + Y$dy 成立，则由式(5-1-13)得

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{dd}f=0\ ,$$

故$\partial X/\partial y=\partial Y/\partial x$.

(B) 若$\partial X/\partial y=\partial Y/\partial x$，则由式(5-1-13)得 $\mathrm{d}(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y)=0$，即 1 形式场 $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$ 为闭，于是 $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$ 为恰当，即存在函数 f 使 $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\mathrm{d}f$. □

[选读 5-1-2]

所谓某性质在流形 M 上局域成立，是指 $\forall p\in M\ \exists\ p$ 的邻域 N 使该性质在 N 上成立. 重要的是 $\forall p\in M$ 都有这样的 N，可见"局域成立"不是只在某个局域成立而在他处不成立."局域"一词的要害是强调在全流形 M 上(整体地)未必成立. 兹举 3 例以助理解.

1. 常听说"任何流形 M 局域看来都像 $\mathbb{R}^n$"，其准确含义就是：M 的任一点 p 都有坐标邻域 O 使得存在同胚 (后又升格为微分同胚) 映射 $\psi: O\to\psi[O]\subset\mathbb{R}^n$，可见 O 与 $\psi[O]$"像得不能再像". 总可选 O 使 $\psi[O]$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$，故 M 局域看来像 $\mathbb{R}^n$. 但 M 整体看来未必像 $\mathbb{R}^n$，即未必存在从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的微分同胚映射.

2. "闭的 l 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 是局域恰当的"是指 $\forall p\in M\ \exists\ p$ 的邻域 N，N 上有 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$ 使 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$. 但 M 上未必存在一个统一的 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$ 满足 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$.

3. "莫比乌斯带(见图 5-3)局域像 C^2(柱面)"是指 $\forall p\in M\ \exists\ p$ 的开邻域 N 使 N 与 C^2 的一个开子集微分同胚. 但不存在从整条莫比乌斯带到 C^2 的微分同胚映射.

以上 3 例涉及的性质都只局域地成立. 可见分清局域性质与整体性质的重要性.

[选读 5-1-2 完]

§5.2　流形上的积分

先以 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 为例. 设 $\vec{v}$ 为矢量场，L 为光滑曲线，S 为光滑曲面. 在指定 L 的方向(图 5-1 中箭头)和 S 的法向(图 5-2 中的箭头 $\vec{n}$)之前，积分 $\int_L\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 和 $\iint_S\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 都只唯一确定到差一个负号的程度. 要完全确定这两个积分就要指定 L 的方向和 S 的法向. 推而广之，计算任意流形上的积分之前应指定该流形的"定向". 然而并非所有流形都是可定向的.

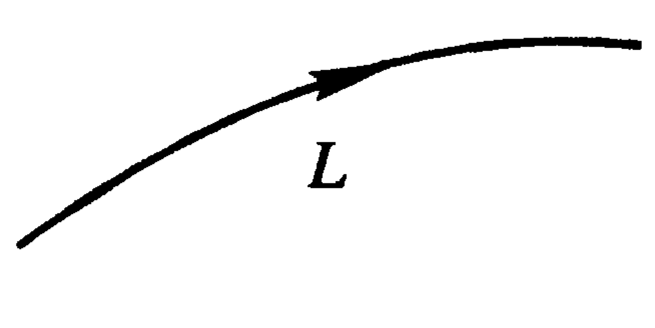


图 5-1 欧氏空间的曲线. 箭头为指定积分方向

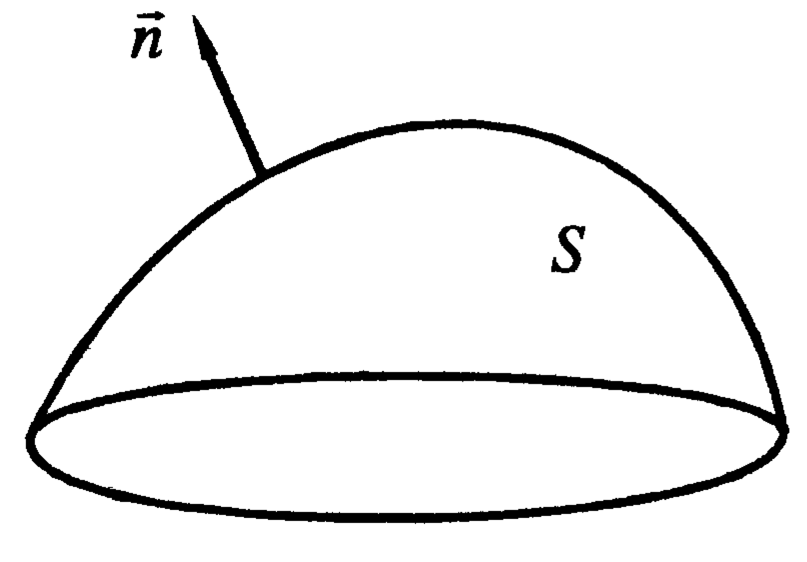


图 5-2　欧氏空间的曲面. $\vec{n}$ 是指定法向

定义1 n 维流形称为**可定向的**(orientable)，若其上存在 C^0 且处处非零的 n 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon}$.

例 1 $\mathbb{R}^3$ 是可定向流形，因为其上存在 C^∞ 的 3 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$，其中 x，y，z 为自然坐标.

例 2 莫比乌斯带(Mobius strip)是不可定向流形(图 5-3).

图 5-3 莫比乌斯带(不可定向流形一例)

定义 2 若在 n 维可定向流形 M 上选定一个 C^0 且处处非零的 n 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon}$，就说 M 是**定向的**(“已经定向”之意). 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是两个 C^0 且处处非零的 n 形式场，若存在处处为正的函数 h 使 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = h\boldsymbol{\varepsilon}_2$，就说 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 给出 M 的同一个**定向**.

注 1 从给出 M 的定向这个角度看，满足 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = h\boldsymbol{\varepsilon}_2$ $(h>0)$ 的 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是等价的. 由于 n 维流形 M 上每点的全体 n 形式的集合是 1 维矢量空间[见式(5-1-4)]，任意两个 n 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 必有关系 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = h\boldsymbol{\varepsilon}_2$，其中 h 是 M 上的函数. 若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 处处非零，则 h 处处非零；若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 为 C^0 的，则 h 为 C^0 的. 对连通流形①来说(我们只讨论连通流形)，一个处处非零的连续函数只能处处为正或处处为负. 可见连通流形只能有两种定向.

定义 3 M 上选好以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为代表的定向后，开域 $O \subset M$ 上的基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 叫做以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 衡量为**右手的**(right handed)，若 O 上存在处处为正的函数 h 使 $\boldsymbol{\varepsilon} = h\,(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n}$，其中 $\{(e^\mu)_a\}$ 是 $\{(e_\mu)^a\}$ 的对偶基(否则称为**左手的**). 一个坐标系叫**右(左)手系**，若其坐标基底是右(左)手的.

下面介绍 n 维定向流形 M 上的 n 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 的积分. $\boldsymbol{\omega}$ 可用对偶坐标基矢的楔形积 $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 展开为[见式(5-1-10′)]

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\,, \tag{5-2-1}$$

① 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为**连通的**，若它只有两个既开又闭的子集(§1.2定义7)；称为**弧连通的**(arcwise connected)，若 X 的任意两点可被一条在 X 中的连续曲线连接. 流形称为**连通的**(或**弧连通的**)，若其底拓扑空间是连通的(或弧连通的). 对拓扑空间，弧连通必定连通，但连通不一定弧连通(存在“擦边性”反例). 对流形，弧连通与连通等价[见 Abraham and Marsden(1967)命题 A7.8].

可见每一 n 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 在坐标域上给出一个 n 元函数 $\omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n)$，我们就把这个 n 元函数的普通 n 重积分称为 n 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 的积分，准确定义如下：

定义 4　设 (O,ψ) 是 n 维定向流形 M 上的右手坐标系，$\boldsymbol{\omega}$ 是开子集 $G\subset O$ 上的连续 n 形式场，则 $\boldsymbol{\omega}$ 在 G 上的**积分**(integral)定义为

$$\int_G \boldsymbol{\omega} := \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,\ x^n)\ \mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n. \tag{5-2-2}$$

上式右边是 n 元函数 $\omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,\ x^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 $\psi[G]$ 上的普通积分，① 早已有定义.

注 2

(1) 为说明定义 4 的合理性，还应证明 $\boldsymbol{\omega}$ 在 G 上的积分与所选右手坐标系无关. 仅以 $n=2$ 为例证明如下，对一般情况的推广由读者完成.

设 (O,ψ) 和 $(O',\ \psi')$ 为右手坐标系，满足 $G\subset O\cap O'$，两系坐标分别记作 x^1，x^2 和 x'^1，x'^2，则

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{12}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 = \omega'_{12}\mathrm{d}x'^1\wedge\mathrm{d}x'^2 .$$

令 $\int_G \boldsymbol{\omega} \equiv \int_{\psi[G]} \omega_{12}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$，$(\int_G \boldsymbol{\omega})' \equiv \int_{\psi'[G]} \omega'_{12}\,\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2$，欲证

$$(\int_G \boldsymbol{\omega})' = \int_G \boldsymbol{\omega}. \tag{5-2-3}$$

由张量变换律知 $\omega'_{12} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^1}\dfrac{\partial x^2}{\partial x'^2}\omega_{12} + \dfrac{\partial x^2}{\partial x'^1}\dfrac{\partial x^1}{\partial x'^2}\omega_{21} = \omega_{12}\det\left(\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)$，其中

$$\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^2} \\[2ex] \dfrac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{vmatrix}$$

是这个坐标变换的雅可比行列式. 根据多元微积分学的熟知法则，

$$\int_{\psi[G]} \omega_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 = \int_{\psi'[G]} \omega_{12}\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)\ \mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2 = \int_{\psi'[G]} \omega'_{12}\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\ , \tag{5-2-4}$$

故式(5-2-3)得证.

然而，如果 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 分别是右、左手系，则 $\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)<0$，由多元微积分可知式(5-2-4)的第一个等号右边的 $\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)$ 应改为 $|\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)| = -\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)$，故式(5-2-4)变为

$$\int_{\psi[G]} \omega_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 = -\int_{\psi'[G]} \omega_{12}\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)\ \mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2 = -\int_{\psi'[G]} \omega'_{12}\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\ . \tag{5-2-5}$$

---

① 指 Riemann 或 Lebesgue 积分.

因此，为了定义出同一积分，当$\{x^\mu\}$是左手系时应把$\int_G \boldsymbol{\omega}$定义为

$$\int_G \boldsymbol{\omega} := -\int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n)\, \mathrm{d}x^1\cdots \mathrm{d}x^n . \tag{5-2-6}$$

(2) 一个坐标系是右手系还是左手系取决于流形所选的定向，故由式(5-2-2)和(5-2-6)定义的$\int_G \boldsymbol{\omega}$是依赖于由$\boldsymbol{\varepsilon}$所给出的定向的，定向改变后积分变号.

(3) 定义 4 只定义了$\boldsymbol{\omega}$在坐标域内开子集G上的积分. $\boldsymbol{\omega}$在全流形M上的积分$\int_M \boldsymbol{\omega}$可由局部积分"缝合"而成，其定义涉及"单位分解"，从略[可参见 Wald(1984)].

设S, M是流形，维数分别是l和$n(>l)$，$\phi: S\to M$是嵌入(见§4.4). 因为$\phi[S]$是子流形，当然可谈及其上的l形式场$\boldsymbol{\mu}$的积分(定义 4 适用). 然而，"$\phi[S]$嵌入在M内"的事实导致"$\phi[S]$上的l形式场"具有两种可能含义. 正如"$\phi[S]$上的矢量场"有切于和不切于$\phi[S]$之分那样，"$\phi[S]$上的l形式场"也可分为"切于"和不"切于"$\phi[S]$两种. 准确地说，$\phi[S]$上的l形式场$\boldsymbol{\mu}$称为"切于"$\phi[S]$的，如果$\forall q\in\phi[S]$，$\boldsymbol{\mu}|_q$是W_q(而非V_q)上的l形式(能把W_q的任意l个元素变为一个实数的线性映射). "$\phi[S]$上的l形式场"既可能是"切于"$\phi[S]$的，也可能不是"切于"$\phi[S]$的. 因为谈及l形式场在$\phi[S]$上的积分时是把$\phi[S]$作为独立流形看待的(不顾及它"外面"的情况)，所以只有"切于"$\phi[S]$的l形式场$\boldsymbol{\mu}$的积分才有意义. 不过，既然$\phi[S]$上的、不"切于"$\phi[S]$的l形式场$\boldsymbol{\mu}$是能把每点$q\in\phi[S]$的V_q(而不只是W_q)的任意l个元素变为一个实数的线性映射，而W_q无非是V_q的子空间，只要把$\boldsymbol{\mu}$的作用范围限制在W_q便得到一个"切于"$\phi[S]$的l形式场，我们把它记作$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$，并称之为$\boldsymbol{\mu}$**的限制**. 准确说来有如下定义：

定义 5　设$\mu_{a_1\cdots a_l}$是l维子流形$\phi[S]\subset M$上的l形式场. $\phi[S]$(看作脱离M而独立存在的流形)上的l形式场$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}$称为$\mu_{a_1\cdots a_l}$在$\phi[S]$上的**限制**(restriction)，若

$$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}|_q (w_1)^{a_1}\cdots(w_l)^{a_l} = \mu_{a_1\cdots a_l}|_q (w_1)^{a_1}\cdots(w_l)^{a_l},$$
$$\forall q\in\phi[S],\quad (w_1)^a,\cdots,(w_l)^a\in W_q . \tag{5-2-7}$$

今后凡谈及l形式场$\boldsymbol{\mu}$在l维子流形$\phi[S]$上的积分时，一律理解为$\boldsymbol{\mu}$的限制$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$的积分，即总把$\int_{\phi[S]}\boldsymbol{\mu}$理解为$\int_{\phi[S]}\tilde{\boldsymbol{\mu}}$.

§5.3　Stokes 定理

3 维欧氏空间的 Stokes 定理

$$\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

和 Gauss 定理

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}V = \oiint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

的共性是反映区域上的积分和它的边界上的积分的联系. 在介绍一般的 Stokes 定理前，先引入“带边流形”的概念. n 维带边流形的最简单例子是

$$\mathbb{R}^{n-} := \{(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^1 \leqslant 0\},$$

其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是自然坐标，由 $x^1=0$ 的所有点组成的子集叫 $\mathbb{R}^{n-}$ 的边界，它本身是个 $n-1$ 维流形(其实就是 $\mathbb{R}^{n-1}$). 推广至一般情况，n **维带边流形**(manifold with boundary) N 与 n 维流形定义相仿，只是把该定义中的 $\mathbb{R}^n$ 改为 $\mathbb{R}^{n-}$，即 N 的开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 的每一元素 O_α 都应同胚于 $\mathbb{R}^{n-}$ 的一个开子集，N 中全体被映到 $x^1=0$ 处的点(例如图 5-4 的 p)组成 N 的**边界**，记作 ∂N. 请注意 ∂N 是 $n-1$ 维流形；$\mathrm{i}(N)\equiv N-\partial N$ 是 n 维流形. 例如，$\mathbb{R}^3$ 中的实心球体 B 是 3 维带边流形，其边界(2 维球面 S^2)是 2 维流形，i(B)则是 3 维流形.

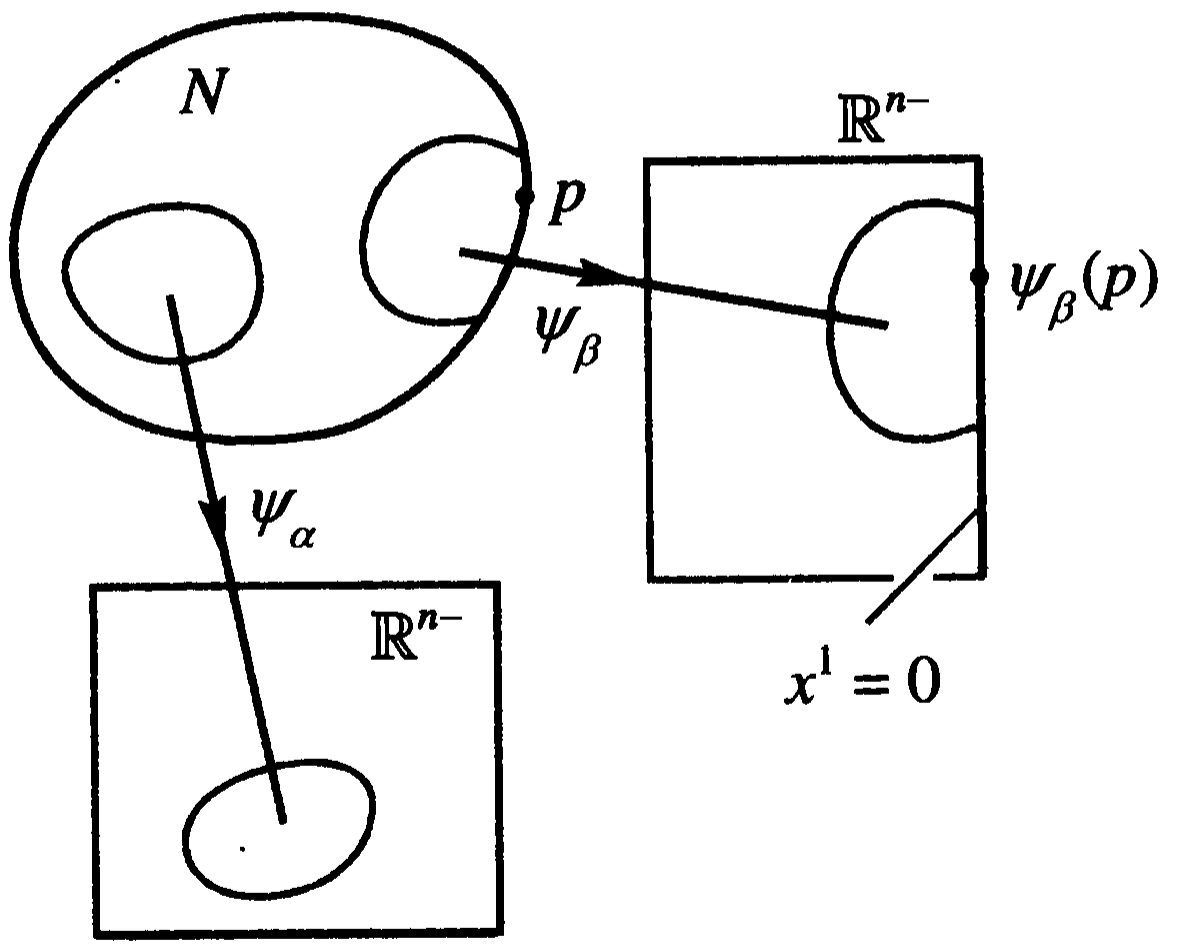


图 5-4　带边流形 N 示意，p 为边界点

定理 5-3-1(Stokes 定理)　设 n 维定向流形 M 的紧致子集 N 是个 n 维带边流形，$\boldsymbol{\omega}$ 是 M 上的 $n-1$ 形式场(可微性至少为 C^1)，则

$$\int_{\mathrm{i}(N)} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \boldsymbol{\omega}. \tag{5-3-1}$$

证明　见微分几何教材. □

注 1　把 M 的定向 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 限制在 N 上便得到 N 的定向，仍记作 $\boldsymbol{\varepsilon}$，它在 N 的边界 ∂N (M 中的超曲面)上自然诱导出一个定向，记作 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$，是 $\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 的简写. 仅以 $\mathbb{R}^{2-}$ 为例介绍，这时 $M=\mathbb{R}^2$，$N=\mathbb{R}^{2-}$，$\partial N=\{(x^1,x^2)\mid x^1=0\}$. 设 $\mathbb{R}^2$ (因而 $\mathbb{R}^{2-}$)的定向为 $\varepsilon_{ab}=(\mathrm{d}x^1)_a\wedge(\mathrm{d}x^2)_b$，则 $\{x^1,x^2\}$ 以 ε_{ab} 衡量为右手系. 因 $x^1|_{\partial N}=0$，把 x^1 开除后所得的 $\{x^2\}$ 便是 ∂N 的一个坐标系. 我们这样定义 ∂N 的诱导定向 $\bar{\varepsilon}_a$，使坐标系 $\{x^2\}$ 以 $\bar{\varepsilon}_a$ 衡量为右手系. 选 $\bar{\varepsilon}_a=(\mathrm{d}x^2)_a$ 便可满足这一要求. 诱导定向的这个基本要求可以推广到任意带边流形 N [详见 Wald(1984)P.431]. 式(5-3-1)左边是 n 形

式场 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ 在 n 维流形 $\mathrm{i}(N)$ (以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为定向)上的积分，右边是 $n-1$ 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $n-1$ 维流形 ∂N (以 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为定向)上的积分.

例 1 设 $\vec{A}$ 是 2 维欧氏空间的矢量场，L 是 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑闭合曲线，S 是由 L 包围的开子集(见图 5-5)，x^1，x^2 为笛卡儿坐标，则熟知的 2 维欧氏空间 Stokes 定理(又称 Green 定理)为

$$\iint_S (\partial A_2/\partial x^1 - \partial A_1/\partial x^2)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 = \oint_L A_l \mathrm{d}l. \tag{5-3-2}$$

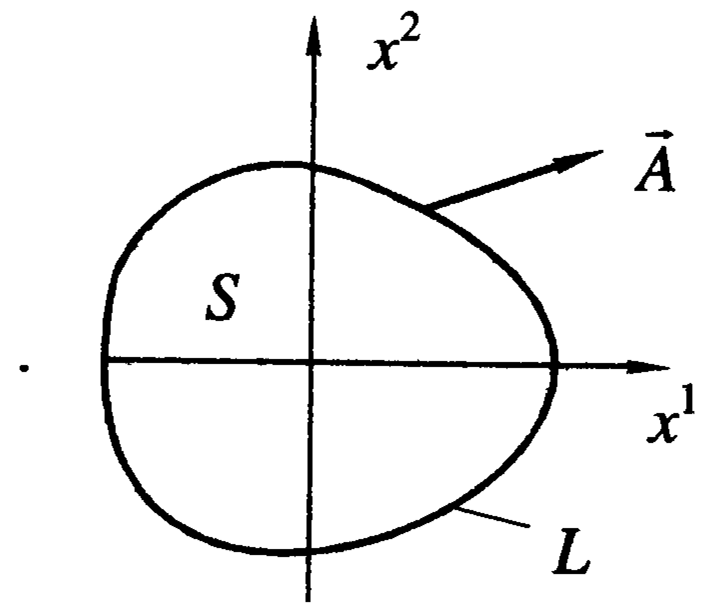


图 5-5　2 维欧氏空间的 Stokes 定理

现在说明上式是定理 5-3-1 的特例. 令 $M=\mathbb{R}^2$，则 $S\cup L$ 可充当定理 5-3-1 的 N，其中 S 和 L 分别充当 $\mathrm{i}(N)$和 ∂N . 用欧氏度规 δ_{ab} 把 A^a 变为 1 形式场 $A_a \equiv \delta_{ab}A^b$，则 A_a 可充当定理 5-3-1 的 $\boldsymbol{\omega}$. 把 A_a 用笛卡儿系对偶坐标基矢展开：$\boldsymbol{\omega} = A_a = A_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_a$，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}A_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$
$$= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,$$

所以式(5-3-2)左边可表为 $\int_{\mathrm{i}(N)} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$，即是式(5-3-1)左边的特例. 另一方面，式(5-3-1)右边为 $\int_{\partial N} \boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$. 选线长 l 为 L 的局部坐标，按式(5-2-1)把 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 用坐标基矢展为 $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_1(l)(\mathrm{d}l)_a$，两边与 $(\partial/\partial l)^a$ 缩并得

$$\tilde{\omega}_1(l) = \tilde{\omega}_a(\partial/\partial l)^a = \omega_a(\partial/\partial l)^a = A_a(\partial/\partial l)^a = A_l,$$

故 $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = A_l \mathrm{d}l$，于是式(5-3-2)右边可写为

$$\oint_L A_l \mathrm{d}l = \int_{\partial N} \boldsymbol{\omega}. \tag{5-3-3}$$

可见式(5-3-2)是式(5-3-1)的特例.

[选读 5-3-1]

式(5-3-3)的推导中有一点要讲清楚. $\int_L \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 的积分域是闭合曲线 L，这是个 1 维非平凡流形，至少要用两个坐标域覆盖，因此应先对每个坐标域做局部积分再“缝合”. 幸好现在可做简单处理：设 L' 是 L 挖去一点所得流形，则它可用一个

坐标域覆盖，但挖去一点不影响积分值，故推导成立．　**[选读 5-3-1 完]**

以上介绍了微分形式在流形上的积分及有关定理．为了讲解函数在流形上的积分，§5.4 先介绍体元的概念．

§5.4 体　　元

定义 1 n 维可定向流形 M 上的任一个 C^0 而且处处非零的 n 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 称为一个**体元**(volume element).

注 1 体元与定向的区别在于：若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是两个 C^0 且处处非零的 n 形式场，而且有处处为正的函数 h 使 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = h\boldsymbol{\varepsilon}_2$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 代表同一定向，但只要 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \neq \boldsymbol{\varepsilon}_2$，它们就是两个不同体元．对可定向连通流形，定向只有两个，而体元却有无限多个．谈及定向流形上的积分和体元时不要求流形上选定度规场，这时体元的选择十分任意(只有一个要求，就是体元与定向相容，即代表体元的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与代表定向的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间的乘子为正．)，没有一个与众不同的体元．然而，如果流形上给定了度规场 g_{ab}，便存在选择特定体元的自然方法．

先考虑带度规 g_{ab} 的 2 维定向流形．设 $\varepsilon_{a_1a_2}$ 为任一体元，则 $\varepsilon^{a_1a_2} \equiv g^{a_1b_1} g^{a_2b_2}\varepsilon_{b_1b_2}$ 有意义，且 $\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2}$ 是标量场，可借任一基底计算．我们用正交归一基底．若 g_{ab} 为正定度规，则

$$\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2} = \delta^{\mu_1\nu_1}\delta^{\mu_2\nu_2}\varepsilon_{\nu_1\nu_2}\varepsilon_{\mu_1\mu_2} = \delta^{11}\delta^{22}\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} + \delta^{22}\delta^{11}\varepsilon_{21}\varepsilon_{21} = 2(\varepsilon_{12})^2 .$$

若 g_{ab} 为洛伦兹度规，则

$$\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2} = \eta^{11}\eta^{22}\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} + \eta^{22}\eta^{11}\varepsilon_{21}\varepsilon_{21} = -2\,(\varepsilon_{12})^2 .$$

推广至带任意度规 g_{ab} 的 n 维流形有

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!\,(\varepsilon_{1\cdots n})^2 ,$$

其中 $\varepsilon_{1\cdots n}$ 是 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 在正交归一基底的分量，s 是 g_{ab} 在正交归一基底的分量中-1 的个数，例如正定度规有 $s=0$，洛伦兹度规有 $s=1$．所谓借用度规选择一个特定的体元，是指规定体元 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 在正交归一基 $\{(e^\mu)_a\}$ 的分量满足如下的简单性要求：

$$\varepsilon_{1\cdots n} = \pm 1 , \tag{5-4-1}$$

即

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n} \quad (\text{对正交归一基}), \tag{5-4-2}$$

这相当于要求

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!\, . \tag{5-4-3}$$

满足上式的 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 称为**与度规 g_{ab} 相适配(相容)的体元**．上式只把体元确定到差一

个负号的程度，加上“体元与定向相容”的要求才确定唯一的体元. 于是式(5-4-2)右边的 + 和 − 号分别对应于右手和左手正交归一基.

小结 涉及积分时，我们只关心可定向流形 M. 首先选好一个定向使 M 成为定向流形. 任一基底的右(左)手性由所选定向规定. 没有度规场 g_{ab} (或其他可资利用的几何结构)时，体元相当任意，但要求与定向相容. 指定 g_{ab} 后，体元 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 由 g_{ab} 以及“体元与定向相容”的要求唯一确定，简称**适配体元**. 今后如无特别声明，在有度规时提到体元都指这个唯一的适配体元.

在 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中任取一个符合直观含义的右手笛卡儿系 $\{x, y, z\}$ 并指定 3 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 为定向，则 $\{x, y, z\}$ 按§5.2 定义 3 就是以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 衡量的右手系. 把 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 与式(5-4-2)对比可知 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是适配体元. 设 G 是 $\mathbb{R}^3$ 的开子集且普通积分 $\iiint_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 存在，则此积分自然代表 G 的体积(按普通微积分学的体积定义). 另一方面，由§5.2 定义 4 可知 3 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 在 $G \subset \mathbb{R}^3$ 上的积分 $\int_G \boldsymbol{\varepsilon}$ 正是 $\iiint_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，可见 $\int_G \boldsymbol{\varepsilon}$ 就是 G 的体积. 推广至任意带正定度规 g_{ab} 的定向流形 N，设 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为适配体元，若 $\int_N \boldsymbol{\varepsilon}$ 存在，就称它为 N 的(用 g_{ab} 衡量的)**体积**(对 1, 2 维流形又分别叫**长度**和**面积**). 这可看作把 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 称为体元的由来.

定理 5-4-1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为适配体元，$\{(e_\mu)^a\}$ 及 $\{(e^\mu)_a\}$ 为基底及其对偶基底，g 为 g_{ab} 在此基底的分量组成的行列式，$|g|$ 为 g 的绝对值，则(式中+、−号分别适用于右手和左手基底)

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm\sqrt{|g|}(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n}\,. \tag{5-4-4}$$

证明[选读] 由式(5-4-3)知 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 及 g_{ab} 在所给基底的分量满足

$$(-1)^s n\,! = \varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} = g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_n\nu_n}\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}\,. \tag{5-4-5}$$

上式右边应理解为对 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 及 $\nu_1,\cdots,\nu_n$ 中的每一个都从 1 到 n 求和. 考虑到 $\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}$ 和 $\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 的全反称性，上述求和简化为对排列的求和. 准确地说，以 $\sum\limits_{\pi(\nu_1\cdots\nu_n)}$ 代表对 1, 2, ⋯, n 的所有排列求和，则

$$\begin{aligned}
\text{式(5-4-5)右边} &= \sum_{\pi(\mu_1\cdots\mu_n)}\ \sum_{\pi(\nu_1\cdots\nu_n)} g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_n\nu_n}\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} \\
&= \sum_{\pi(\mu_1\cdots\mu_n)} g^{\mu_1 1}g^{\mu_2 2}g^{\mu_3 3}\cdots g^{\mu_n n}\varepsilon_{123\cdots n}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} \\
&\quad + \sum_{\pi(\mu_1\cdots\mu_n)} g^{\mu_1 2}g^{\mu_2 1}g^{\mu_3 3}\cdots g^{\mu_n n}\varepsilon_{213\cdots n}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} + \cdots.
\end{aligned} \tag{5-4-5'}$$

上式右边共有 $n!$ 项. 以 $\hat{\varepsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 代表 Levi-Civita 记号，即

$$\hat{\varepsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n} \equiv \begin{cases} +1, & (\text{当}\mu_1\cdots\mu_n\text{是}1,2,\cdots,n\text{的一个偶排列}), \\ -1, & (\text{当}\mu_1\cdots\mu_n\text{是}1,2,\cdots,n\text{的一个奇排列}), \\ 0, & (\text{当}\mu_1,\cdots,\mu_n\text{中有两个相等}), \end{cases}$$

有 $\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} = \varepsilon_{123\cdots n}\hat{\varepsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n}$. 再把 $\sum\limits_{\pi(\mu_1\cdots\mu_n)}$ 简记为 $\sum\limits_{\pi}$ ，则

式(5-4-5′)右边第一项

$$= (\varepsilon_{123\cdots n})^2 \sum_{\pi} g^{\mu_1 1} g^{\mu_2 2} g^{\mu_3 3} \cdots g^{\mu_n n} \hat{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} = (\varepsilon_{1\cdots n})^2 \det(g^{\mu\nu}),$$

其中 $\det(g^{\mu\nu})$ 代表矩阵 $(g^{\mu\nu})$ 的行列式(最末一步用到行列式的定义). 而

式(5-4-5′)右边第二项

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{\pi} g^{\mu_1 2} g^{\mu_2 1} g^{\mu_3 3} \cdots g^{\mu_n n} \varepsilon_{123\cdots n} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} \\
&= -(\varepsilon_{123\cdots n})^2 \sum_{\pi} g^{\mu_1 2} g^{\mu_2 1} g^{\mu_3 3} \cdots g^{\mu_n n} \hat{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} \\
&= -(\varepsilon_{1\cdots n})^2 \sum_{\pi} g^{\mu_2 2} g^{\mu_1 1} g^{\mu_3 3} \cdots g^{\mu_n n} \hat{\varepsilon}_{\mu_2\mu_1\mu_3\cdots\mu_n} \\
&= (\varepsilon_{1\cdots n})^2 \sum_{\pi} g^{\mu_1 1} g^{\mu_2 2} g^{\mu_3 3} \cdots g^{\mu_n n} \hat{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} \\
&= (\varepsilon_{1\cdots n})^2 \det(g^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

同理可证式(5-4-5′)右边每一项都等于 $(\varepsilon_{1\cdots n})^2\det(g^{\mu\nu})$. 注意到该式右边共有 $n!$ 项，代回式(5-4-5)便得 $(-1)^s n! = (n!)(\varepsilon_{1\cdots n})^2\det(g^{\mu\nu})$，或 $(-1)^s = (\varepsilon_{1\cdots n})^2\det(g^{\mu\nu})$. 矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 与 $(g^{\mu\nu})$ 互逆导致 $\det(g^{\mu\nu}) = 1/\det(g_{\mu\nu}) \equiv 1/g$. 代入上式得

$$(-1)^s g = (\varepsilon_{1\cdots n})^2, \qquad \varepsilon_{1\cdots n} = \pm\sqrt{|g|},$$

故有式(5-4-4). □

注 2 对正交归一基底有 $|g|=1$，故式(5-4-4)回到式(5-4-2).

定理 5-4-2 设 ∇_a 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别是与度规相适配的导数算符和体元，则

$$\nabla_b \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0. \tag{5-4-6}$$

证明 由 $\nabla_b g_{ac} = 0$ 及式(5-4-3)得 $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$，于是对任一矢量场 v^b 有

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n} v^b \nabla_b \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0. \tag{5-4-7}$$

因 M 中任一点的 n 形式的集合是 1 维矢量空间，故该点的任意两个 n 形式只能差到一个乘子 h (对不同点 h 可不同)，因此 $v^b\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = h\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$. 代入式(5-4-7)便给出 $h=0$，所以 $v^b\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$. 因 v^b 为任意矢量场，故 $\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$. □

下面要证明关于体元的两个十分有用的等式，为此先要证明下述引理.

引理 5-4-3 $\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\dfrac{(n-j)!\,j!}{n!}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$. (5-4-8)

证明[选读] 只给出主要步骤，每步的证明由读者自补. 先证

$$\delta^{[a_1}{}_{a_1}\delta^{a_2}{}_{b_2}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{1}{n}\delta^{[a_2}{}_{b_2}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n},$$

$$\delta^{[a_2}{}_{a_2}\delta^{a_3}{}_{b_3}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{2}{n-1}\delta^{[a_3}{}_{b_3}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n},$$

推广至一般为

$$\delta^{[a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{j}{n-(j-1)}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}.$$

于是可证

$$\begin{aligned}\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}&=\frac{1}{n}\frac{2}{n-1}\frac{3}{n-2}\cdots\frac{j}{n-j+1}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}\\&=\frac{(n-j)!\,j!}{n!}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}.\end{aligned}$$

□

定理 5-4-4 (a) $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=(-1)^s n!\,\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$, (5-4-9)

(b) $\varepsilon^{a_1\cdots a_j a_{j+1}\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_j b_{j+1}\cdots b_n}=(-1)^s(n-j)!\,j!\,\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$. (5-4-10)

证明 $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=\varepsilon^{[a_1\cdots a_n]}\varepsilon_{[b_1\cdots b_n]}$表明$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}$对全部上标和全部下标都为反称. 不难证明这种$(n,n)$型张量的集合是1维矢量空间，而$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$属于这类张量(因为不难证明$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\delta^{[a_1}{}_{[b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n]}$)，故任何这类张量与$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$只差一个乘子，从而$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=K\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$. 与$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\varepsilon^{b_1\cdots b_n}$缩并，左边结果为$(-1)^s n!(-1)^s n!$，右边结果为$K\varepsilon_{b_1\cdots b_n}\varepsilon^{b_1\cdots b_n}=K(-1)^s n!$，于是$K=(-1)^s n!$，故得式(5-4-9). 两边分别对前$j$个上、下指标缩并得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{a_1\cdots a_j a_{j+1}\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_j b_{j+1}\cdots b_n}&=(-1)^s n!\;\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}\\&=(-1)^s(n-j)!\,j!\,\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}.\end{aligned}$$

(其中最末一步用到引理 5-4-3.) 可见式(5-4-10)成立. □

§5.5 函数在流形上的积分，Gauss 定理

定义 1 设$\boldsymbol{\varepsilon}$为流形M上的任一体元，f为M上的C^0函数，则**f在M上的积分**(记作$\int_M f$)定义为n形式场$f\boldsymbol{\varepsilon}$在$M$上的积分，即

$$\int_M f:=\int_M f\boldsymbol{\varepsilon}.\tag{5-5-1}$$

由定义 1 知函数的积分与体元的选择有关. 只要流形上给定度规，我们约定总是用适配体元来定义函数的积分. 这样，在带度规的定向流形上，函数给定后其积分也就确定. 以 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 为例. 设 $\{x,y,z\}$ 为右手笛卡儿系，则 $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 是适配体元，于是 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 上的函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 的积分按定义为 $\int_{\mathbb{R}^3}f=\int_{\mathbb{R}^3}f\boldsymbol{\varepsilon}$，而右边无非是 3 形式场 $\boldsymbol{\omega}\equiv f\boldsymbol{\varepsilon}$ 的积分，按定义(§5.2 定义 4)，应把 $\boldsymbol{\omega}$ 用右手系对偶基表为式(5-2-1)的形式. 设 f 与笛卡儿系 $\{x,y,z\}$ 结合而得的 3 元函数为 $F(x,y,z)$，则

$$\boldsymbol{\omega}=F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \quad \text{[此即式(5-2-1)在现在特例下的表现]},$$

故
$$\int f=\int f\boldsymbol{\varepsilon}=\int\boldsymbol{\omega}=\iiint F(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\,.$$

如果愿意，也可用(右手)球坐标系 $\{r,\theta,\varphi\}$ 计算. 由线元式 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$ 可知 $g=r^4\sin^2\theta$，故由式(5-4-4)知 $\boldsymbol{\varepsilon}=r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$，于是式(5-2-1)用于现在的情况就是 $\boldsymbol{\omega}\equiv f\boldsymbol{\varepsilon}=\hat{F}(r,\theta,\varphi)\,r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ [其中 $\hat{F}(r,\theta,\varphi)$ 是由 f 与 $\{r,\theta,\varphi\}$ 结合而得的 3 元函数]，故

$$\int f=\int f\,\boldsymbol{\varepsilon}=\int\boldsymbol{\omega}=\iiint\hat{F}(r,\theta,\varphi)\,r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi\,.$$

下面介绍一般形式的 Gauss 定理. 读者熟悉的 Gauss 定理是

$$\iiint_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}V=\oiint_S\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\cdot \tag{5-5-2}$$

上式左右两边可分别形象地说成是"函数 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ 与体元 $\mathrm{d}V$ 的乘积的积分"和"函数 $\vec{A}\cdot\vec{n}$ 与面元(2 维体元) $\mathrm{d}S$ 的乘积的积分". 下面分两步证明由 Stokes 定理[式(5-3-1)]可以导出一个公式，它把式(5-5-2)作为特例包括在内. 第一步是导出定理 5-5-1，其左边可看作式(5-5-2)左边的推广.

定理 5-5-1 设 M 是 n 维定向流形，N 是 M 中的 n 维紧致带边嵌入子流形，g_{ab} 是 M 上的度规，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 ∇_a 分别是适配体元和适配导数算符，v^a 是 M 上的 C^1 矢量场，则

$$\int_{\mathrm{i}(N)}(\nabla_b v^b)\boldsymbol{\varepsilon}=\int_{\partial N}v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\,. \tag{5-5-3}$$

注 1 上式左边可看作式(5-5-2)左边的推广.

证明 $n-1$ 形式场 $\boldsymbol{\omega}\equiv v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 的外微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=n\nabla_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})$ 是 n 形式场，其中 ∇_c 可为任意导数算符. N 中任一点的 n 形式的集合是 1 维矢量空间，故该点的两个 n 形式 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 只差一个因子，即

$$n\nabla_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})=h\varepsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}\,, \tag{5-5-4}$$

其中 h 是 N 上的函数，可求之如下：上式两边与 $\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}$ 缩并，右边得 $(-1)^s hn!$，左边得

$$n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\nabla_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]}) = n\varepsilon^{[ca_1\cdots a_{n-1}]}\nabla_c(v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}})$$
$$= n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c v^b = n(-1)^s(n-1)!\delta^c{}_b\nabla_c v^b = (-1)^s n!\nabla_b v^b,$$

[其中第一步用到定理 2-6-2(a)，从第二步起约定 ∇_c 与 g_{ab} 适配，从而有 $\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=0$，第三步用到式(5-4-10).] 故 $h=\nabla_b v^b$，$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\varepsilon}\,\nabla_b v^b$. 于是 Stokes 定理在现在的情况下取式(5-5-3)的形式. □

现在进一步把式(5-5-3)右边改写为同式(5-5-2)右边类似的形式. 由于后者涉及边界 S 上的体元 $\mathrm{d}S$，我们先从 ∂N 的体元谈起. 此处只讨论 ∂N 不是类光超曲面的情况，这时可谈及 ∂N 的归一化法矢 n^a，满足 $n^a n_a=\pm 1$ (见§4.4). N 上的度规 g_{ab} 在 ∂N 上的诱导度规为 $h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$ [见式(4-4-2)]. 把 ∂N 看作带度规 h_{ab} 的 $n-1$ 维流形，其体元(记作 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$)应满足两个条件：①与 ∂N 的诱导定向(记作 $\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$，见§5.3 注 1)相容；②与度规 h_{ab} 相适配，即

$$\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=(-1)^{\hat{s}}(n-1)!\,, \tag{5-5-5}$$

其中 $\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}$ 是用 h^{ab} 对 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 升指标的结果，$\hat{s}$ 是 h_{ab} 的对角元中负数的个数. ∂N 上满足这两个条件的体元 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 称为**诱导体元**. 设 n^b 是 ∂N 的外向单位法矢[以 i(N)作为内部，“外向”有明确意义.]，则诱导体元 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 与 N 上体元 $\varepsilon_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 有如下关系(证明见选读 5-5-1)：

$$\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\,. \tag{5-5-6}$$

[选读 5-5-1]

现在证明上式的 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 的确满足诱导体元的两条件. $\forall q\in\partial N$，设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 q 点的右手正交归一基底，满足 $(e_1)^a=n^a$，则

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=(e^1\wedge\cdots\wedge e^n)_{a_1\cdots a_n}=\pm n_{a_1}\wedge(e^2\wedge\cdots\wedge e^n)_{a_2\cdots a_n}\,.$$

由§5.3 注 1 的精神[详见 Wald (1984)P.431]知道 $(e^2\wedge\cdots\wedge e^n)_{a_2\cdots a_n}$ 可充当点 $q\in\partial N$ 的诱导定向 $\bar{\varepsilon}_{a_2\cdots a_n}$，故

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\pm n_{a_1}\wedge\bar{\varepsilon}_{a_2\cdots a_n}\text{，也可写为 }\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}=\pm n_b\wedge\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}\,.$$

由此易证 $\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，故由式(5-5-6)知 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=+1\cdot\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$，所以 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 与诱导定向 $\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 相容，即满足条件①. 作为习题，请读者验证 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 也满足条件②，即式(5-5-5). 请注意，条件②只把 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 确定到差负号的程度[即 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=-n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 同样满足式(5-5-5)]，加上条件①才把 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 完全确定为 $n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$.　　**[选读 5-5-1 完]**

下面就是把式(5-5-2)作为特例包括在内的一般 Gauss 定理.

定理 5-5-2(Gauss 定理)　设 M 是 n 维定向流形，N 是 M 中的 n 维紧致带边嵌

入子流形，g_{ab}是M上的度规，$\boldsymbol{\varepsilon}$和∇_a分别是适配体元和适配导数算符，$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$是$\partial N$上的诱导体元，$\partial N$的外向法矢$n^a$满足$n^a n_a = \pm 1$，$v^a$是$M$上的$C^1$矢量场，则

$$\int_{i(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (n^a n_a = +1 \text{时取}+，\ n^a n_a = -1 \text{时取}-.) \tag{5-5-7}$$

证明　由定理 5-5-1 知只须证明$\int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. 令$\boldsymbol{\omega} = v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，注意到§5.2 末关于$\int_{\phi[S]} \boldsymbol{\omega} \equiv \int_{\phi[S]} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$的讨论，可知此处的$\int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$是指$\int_{\partial N} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$，故只须证明

$$\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = \pm v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}, \qquad \forall q \in \partial N, \tag{5-5-8}$$

其中n^a为∂N的单位外向法矢. 上式两边都是W_q上的$n-1$形式，故必有K使

$$\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}, \tag{5-5-9}$$

于是只须证明$K = \pm 1$. 设$\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$是$V_q$的一个右手正交归一基底，用$(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}$缩并上式，右边给出

$$K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{12\cdots(n-1)} = \pm K v^b (e^0)_b \hat{\varepsilon}_{12\cdots(n-1)} = \pm K v^0, \tag{5-5-10}$$

[其中第一步用到$n_b = \pm (e^0)_b$，第二步用到如下事实：由诱导定向$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$的定义可以证明$\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$的右手性(用定向$\boldsymbol{\varepsilon}$衡量)保证$\{(e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$的右手性(用$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$衡量)，因而$\hat{\varepsilon}_{12\cdots n-1} = 1$.] 另一方面，式(5-5-9)左边缩并结果为

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} &= \omega_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} \\ &= v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} = v^\mu \varepsilon_{\mu 12\cdots(n-1)} = v^0 \varepsilon_{012\cdots(n-1)} = v^0,\end{aligned} \tag{5-5-11}$$

[其中第一步用到式(5-2-7)，第五步用到$\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$的右手性.]

对比式(5-5-10)和(5-5-11)得$K = \pm 1$. □

注 2　式(5-5-7)的条件是n^a为∂N的外向单位法矢. 把规定改为"当$n^a n_a = +1$时n^a朝外向，$n^a n_a = -1$时n^a朝内向"，则式(5-5-7)右边的±号消失，Gauss 定理改取如下形式

$$\int_{i(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{5-5-7'}$$

若∂N为类光超曲面，即$n^a n_a = 0$，则式(5-5-7)仍成立，但$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$要按下式定义(证略)：

$$\frac{1}{n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = n_{[a_1}\hat{\varepsilon}_{a_2\cdots a_n]}.$$

§5.6　对偶微分形式

以$\Lambda_p(l)$代表$p \in M$的全部l形式的集合，则由式(5-1-4)有

$$\dim \Lambda_p(l)=\frac{n!}{l!(n-l)!}=\dim \Lambda_p(n-l).$$

若 M 为带度规 g_{ab} 的定向流形，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为适配体元，则可用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 及 g_{ab} 在 $\Lambda_M(l)$ 和 $\Lambda_M(n-l)$ 之间定义一个同构映射如下：

定义 1　$\forall \boldsymbol{\omega} \in \Lambda_M(l)$，定义 $\boldsymbol{\omega}$ 的**对偶微分形式**(dual form) ${}^*\boldsymbol{\omega} \in \Lambda_M(n-l)$ 为

$${}^*\omega_{a_1\cdots a_{n-l}} := \frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}, \tag{5-6-1}$$

其中
$$\omega^{b_1\cdots b_l} = g^{b_1 c_1}\cdots g^{b_l c_l}\omega_{c_1\cdots c_l}.$$

注 1　以上定义的 $*$ 称为 Hodge star . 不难看出：① $*: \Lambda_M(l)\to\Lambda_M(n-l)$ 是同构映射；② $f\in\mathscr{F}_M$ 作为 0 形式场，其对偶形式场按定义为

$${}^*f_{a_1\cdots a_n}=\frac{1}{0!}f\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=f\varepsilon_{a_1\cdots a_n},$$

即 ${}^*f$ 等于与度规适配的体元 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的 f 倍，因此可以说函数 f 的积分定义为其对偶形式场的积分. 对上式再取 $*$ 得

$${}^*({}^*f)={}^*(f\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{n!}f\varepsilon^{b_1\cdots b_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=(-1)^s f.$$

[其中第三步用到式(5-4-3).] 这一结果可推广为如下定理：

定理 5-6-1
$${}^{**}\boldsymbol{\omega}=(-1)^{s+l(n-l)}\boldsymbol{\omega}. \tag{5-6-2}$$

证明　习题. □

现在用微分几何观点重新观察早已熟悉的 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 上的矢量代数和矢量场论(其中 M 就是 $\mathbb{R}^3$).

(1) 为什么过去从未听说过 1、2 和 3 形式场？首先，利用欧氏度规 δ_{ab} 可把对偶矢量场 ω_a 变为矢量场 $\omega^a=\delta^{ab}\omega_b$，从而消除了使用 1 形式场的必要性. 今后在只涉及 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 时将不再认真区分上下标. 其次，由于 $n=3$，$\Lambda_M(2)$ 与 $\Lambda_M(1)$ 维数相同并可用同构映射 $*:\Lambda_M(2)\to\Lambda_M(1)$ 把 $\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(2)$ 与 ${}^*\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(1)$ 认同，从而消除了使用 2 形式场的必要性. 类似地，$\Lambda_M(3)$ 与 $\Lambda_M(0)$ 维数相同并可用同构映射 $*:\Lambda_M(3)\to\Lambda_M(0)$ 把 $\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(3)$ 与 ${}^*\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(0)$ 认同，而后者(0 形式场)就是 $\mathbb{R}^3$ 上的函数. 可见 3 维欧氏空间的微分形式场都可由函数和矢量场代替.

(2) 现在讨论矢量代数的点乘和叉乘运算. 把矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 分别记作 A^a 和 B^b. $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的点乘积 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 自然就是 A_aB^a，但对叉乘积 $\vec{A}\times\vec{B}$ 如何理解？令

$$\omega_{ab}\equiv A_a\wedge B_b=2A_{[a}B_{b]}\quad (\text{其中 } A_a\equiv\delta_{ab}A^b,\ B_b\equiv\delta_{ba}B^a.),$$

则
$${}^*\omega_c=\frac{1}{2}\,\omega^{ab}\varepsilon_{abc}=\varepsilon_{abc}\,A^{[a}B^{b]}=\varepsilon_{abc}\,A^aB^b, \tag{5-6-3}$$

其中 ε_{abc} 是欧氏度规的适配体元. 设 $\{x,\ y,\ z\}$ 为右手笛卡儿坐标系，则其坐标基

底正交归一，由式(5-4-2)可知ε_{abc}在此系的非零分量ε_{ijk}为

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=-\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{321}=-\varepsilon_{213}=1\,,$$

可见ε_{ijk}就是熟知的 Levi-Civita 记号. 于是 $^*\omega_c$ 在该笛卡儿系的第 k 分量为

$$^*\omega_k=\varepsilon_{ijk}A^iB^j,\qquad k=1,2,3. \tag{5-6-4}$$

上式右边正是$\vec{A}\times\vec{B}$按叉乘定义的第 k 分量$(\vec{A}\times\vec{B})_k$，故$\vec{A}\times\vec{B}$可看作 $^*\boldsymbol{\omega}$ (准确地说是对偶矢量 $^*\boldsymbol{\omega}$ 对应的矢量). 而$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$，可见对$\vec{A}$和$\vec{B}$求叉积就是先求楔积$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$再求其对偶形式，可直观地表达为$\times={*}\circ\wedge$.

(3) 再从微分几何看 3 维欧氏空间的矢量场论. 如前所述，矢量场论的$\vec{\nabla}$就是与欧氏度规δ_{ab}适配的导数算符∂_a，涉及$\vec{\nabla}$的公式原则上都可用∂_a表出. 例如

(a) $\vec{\nabla}f=\partial_a f$;

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\partial_a A^a$;

(c) $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\varepsilon^{abc}\partial_a A_b$ [推导仿式(5-6-3)];

(d) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\vec{B})=\partial_a(A^aB^b)$;

(e) $\vec{\nabla}\vec{A}=\partial^a A^b$;

(f) $\nabla^2 f=\partial_a\partial^a f$;

(g) $\nabla^2\vec{A}=\partial_a\partial^a A^b$. (5-6-5)

借用∂_a及抽象指标还可使一些常用公式的推证简化而且理由清晰. 仅举二例.

例 1 用∂_a证明

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\,. \tag{5-6-6}$$

证明
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\partial_c(\varepsilon^{cab}A_aB_b)=\varepsilon^{cab}(A_a\partial_cB_b+B_b\partial_cA_a)\,, \tag{5-6-7}$$

而
$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=B_b(\vec{\nabla}\times\vec{A})^b=B_b\varepsilon^{bca}\partial_cA_a=\varepsilon^{cab}B_b\partial_cA_a\,,$$

$$-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-A_a(\vec{\nabla}\times\vec{B})^a=-A_a\varepsilon^{acb}\partial_cB_b=\varepsilon^{cab}A_a\partial_cB_b\,,$$

代入式(5-6-7)便得式(5-6-6). □

例 2 用∂_a证明

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,. \tag{5-6-8}$$

证明 式(5-6-8)右边第一项$=A_a\partial^aB^b$， 右边第二项$=B_a\partial^aA^b$，

右边第三项$=\vec{A}\times(\varepsilon^{cde}\partial_dB_e)=\varepsilon^{bac}A_a(\varepsilon_{cde}\partial^dB^e)$

$$=2\,\delta^b_{[d}\delta^a_{e]}A_a\partial^dB^e=(\delta^b_d\delta^a_e-\delta^b_e\delta^a_d)A_a\partial^dB^e=A_a\partial^bB^a-A_a\partial^aB^b,$$

同理，

$$\text{右边第四项}=B_a\partial^bA^a-B_a\partial^aA^b\,,$$

故

$$\text{式(5-6-8)右边}=A_a\partial^bB^a+B_a\partial^bA^a=\partial^b(A_aB^a)=\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})\,.$$ □

(4) 3 维欧氏空间中的梯度、旋度和散度可用外微分简单表述如下：

定理 5-6-2　设 f 和 $\vec{A}$ 是 3 维欧氏空间的函数和矢量场，则

$$\text{grad}\, f = \mathrm{d}f\,, \qquad \text{curl}\,\vec{A} = {}^*\mathrm{d}A\,, \qquad \text{div}\,\vec{A} = {}^*\mathrm{d}({}^*A)\,. \tag{5-6-9}$$

证明　习题.　□

$\mathbb{R}^3$ 是平凡流形保证 $\mathbb{R}^3$ 上的闭形式场必恰当(见§5.1 注 1)，再同式(5-6-9)结合便很容易证明(习题) 3 维欧氏空间场论中并不易证的下列熟知命题：

(1) 无旋矢量场必可表为梯度，即

$$\text{curl}\vec{E} = 0 \Rightarrow \exists \text{标量场}\ \phi\ \text{使}\ \vec{E} = \text{grad}\phi\,,$$

(2) 无散矢量场必可表为旋度，即

$$\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \text{矢量场}\ \vec{A}\ \text{使}\ \vec{B} = \text{curl}\vec{A}\,.$$

§5.7　用标架计算曲率张量[选读]

导数算符 ∇_a 的曲率张量 $R_{abc}{}^d$ 的求法有两大类，第一类借用坐标基底场，第二类借用非坐标基底场. 3.4.2 小节已讲过第一类方法，其中关键一步是先求出 ∇_a 借坐标基底场的体现，即克氏符 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$. 本节讨论用非坐标基底场计算 $R_{abc}{}^d$ 的方法. 首先，也要找出 ∇_a 借该基底场的体现. 对给定的导数算符 ∇_a，设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是任一基底场，定义域为 $U \subset M$，其第 μ 基矢场 $(e_\mu)^a$ 沿第 τ 基矢场 $(e_\tau)^a$ 的导数 $(e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a$ 也是 U 上的矢量场，故可用基底场 $\{(e_\sigma)^a\}$ 展开：

$$(e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau} (e_\sigma)^a\,, \tag{5-7-1}$$

其中展开系数 $\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 称为**联络系数**(connection coefficients)，可看作 ∇_a 借基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 的体现. 坐标基底场的 $\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 专记作 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$，不难证明(习题)这组 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 正是§3.1 定义的克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ 在该坐标基底场的分量. 就是说，克氏符的坐标分量可用下式作为等价定义：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a. \tag{5-7-2}$$

式(5-7-1)与对偶基矢 $(e^\nu)_a$ 缩并给出 $\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 的显表达式：

$$\gamma^\nu{}_{\mu\tau} = (e^\nu)_a (e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a\,. \tag{5-7-3}$$

对给定的 ν，μ 值，τ 可从 1 取到 n，所以 $\{\gamma^\nu{}_{\mu\tau} | \nu, \mu \text{固定}, \tau = 1, \cdots, n\}$ 是 n 个实函数 $\gamma^\nu{}_{\mu 1}, \cdots, \gamma^\nu{}_{\mu n}$ 的集合，以它们(加负号)为分量定义的 1 形式 $(\omega_\mu{}^\nu)_a$ 称为 ∇_a 在基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 的**联络 1 形式**(connection 1-form)，简记作 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$，即

$$\omega_\mu{}^\nu{}_a := -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a \ , \tag{5-7-4}$$

注意，$\omega_\mu{}^\nu{}_a$的下标a是抽象指标，说明它是1形式；μ, ν是编号指标，标明它是第几个联络1形式. 由上式及式(5-7-3)易得

$$\omega_\mu{}^\nu{}_a = -(e^\nu)_c\nabla_a(e_\mu)^c = (e_\mu)^c\nabla_a(e^\nu)_c \ , \tag{5-7-5}$$

其中第一步用到$(e^\tau)_a(e_\tau)^b = \delta^b{}_a$ [为证此式，只须验证两边作用于$(e^\mu)_b$得相同结果.]，第二步用到莱布尼茨律和对偶基底的定义式$(e^\nu)_c(e_\mu)^c = \delta^\nu{}_\mu$. 所有联络1形式的集合$\{\omega_\mu{}^\nu{}_a | \mu,\nu = 1 ,\cdots, n\}$可视为$\nabla_a$借基底场$\{(e_\mu)^a\}$的体现. 对给定的$\nabla_a$，原则上可任选一个基底场$\{(e_\mu)^a\}$，先计算$\nabla_a$关于该基底场的全部联络1形式$\omega_\mu{}^\nu{}_a$，再计算其曲率张量. 基底又称**标架**(frame，4维标架又专称tetrad.). 在许多情况下标架又专指非坐标基底. 下面介绍嘉当首创的用标架计算曲率的方法.

既然$\omega_\mu{}^\nu{}_a$和对偶基矢$(e^\mu)_c$都是1形式,就可去掉抽象下标a而分别记作$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$和$\boldsymbol{e}^\mu$，它们有以下关系：

定理 5-7-1 [嘉当(Cartan)第一结构方程]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^\nu = -\boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu \ . \tag{5-7-6}$$

证明 $-(e^\mu)_a \wedge \omega_\mu{}^\nu{}_b = -(e^\mu)_a \wedge [(e_\mu)^c\nabla_b(e^\nu)_c] = -2(e^\mu)_{[a}(e_\mu)^c\nabla_{b]}(e^\nu)_c$

$= -2\delta^c{}_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c = -2\nabla_{[b}(e^\nu)_{a]} = (\mathrm{d}e^\nu)_{ab}$. □

现在讨论如何从$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$计算曲率张量$R_{abc}{}^d$. 令

$$R_{ab\mu}{}^\nu \equiv R_{abc}{}^d(e_\mu)^c(e^\nu)_d \ , \tag{5-7-7}$$

则$R_{ab\mu}{}^\nu = -R_{ba\mu}{}^\nu$表明$R_{ab\mu}{}^\nu$可看作"第$\mu$，$\nu$个"2形式场并可简记作$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$. 由式(5-7-7)知$\mu, \nu$本是$R_{abc}{}^d$的分量指标(标架分量)，但也可看作2形式场$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$的编号指标(但$\omega_\mu{}^\nu{}_a$中的$\mu$，$\nu$却只能看作编号指标). 曲率2形式$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$与联络1形式$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$有以下关系：

定理 5-7-2 (嘉当第二结构方程) $\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu + \boldsymbol{\omega}_\mu{}^\lambda \wedge \boldsymbol{\omega}_\lambda{}^\nu$. (5-7-8)

证明 由式(5-7-7)及$R_{abc}{}^d$的定义得$R_{ab\mu}{}^\nu = 2(e_\mu)^c\nabla_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c$. 而

$$\begin{aligned}(e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e^\nu)_c &= \nabla_a[(e_\mu)^c\nabla_b(e^\nu)_c] - [\nabla_a(e_\mu)^c]\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a\omega_\mu{}^\nu{}_b - [\nabla_a(e_\mu)^d]\delta^c{}_d\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a\omega_\mu{}^\nu{}_b - [\nabla_a(e_\mu)^d](e^\lambda)_d(e_\lambda)^c\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a\omega_\mu{}^\nu{}_b + \omega_\mu{}^\lambda{}_a\,\omega_\lambda{}^\nu{}_b \ ,\end{aligned}$$

故 $$R_{ab\mu}{}^\nu = 2\nabla_{[a}\omega_\mu{}^\nu{}_{b]} + 2\omega_\mu{}^\lambda{}_{[a}\omega_\lambda{}^\nu{}_{b]} = (\mathrm{d}\omega_\mu{}^\nu)_{ab} + (\omega_\mu{}^\lambda \wedge \omega_\lambda{}^\nu)_{ab} \ , \tag{5-7-8'}$$

此即式(5-7-8). □

注1　上式只对无挠联络成立. 当∇_a有挠时应补一挠率项(见下册附录I).

注2　式(5-7-8)等价于式(3-4-20′)，分别是曲率定义(曲率与联络的关系)在标架和坐标基底的分量表达式.

由第二结构方程可知，在$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$已经求得的情况下，只须对$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$求外微分和楔积即可方便地求得$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$. 若要得到$R_{abc}{}^d$在所选标架的全部分量$R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu$，只须用如下公式求缩并：

$$R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu = R_{ab\mu}{}^\nu (e_\rho)^a (e_\sigma)^b . \tag{5-7-9}$$

许多文献用$\boldsymbol{\Omega}_i{}^j$(或$\boldsymbol{\Theta}_i{}^j$)，$R_{mni}{}^j$和$\boldsymbol{\theta}^i$分别代表本书的$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$，$R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu$和$\boldsymbol{e}^\mu$(注意，它们的$i$，$j$或$a$，$b$都是具体指标)，并写出曲率2形式$\boldsymbol{\Omega}_i{}^j$与曲率张量的标架分量$R_{mni}{}^j$的如下关系：

$$\boldsymbol{\Omega}_i{}^j = \frac{1}{2} R_{mni}{}^j \boldsymbol{\theta}^m \wedge \boldsymbol{\theta}^n ,$$

此式用本书符号则应表为

$$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu = \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu \boldsymbol{e}^\rho \wedge \boldsymbol{e}^\sigma , \qquad \text{即}\quad R_{ab\mu}{}^\nu = \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu (e^\rho)_a \wedge (e^\sigma)_b . \tag{5-7-10}$$

其实这无非是式(5-1-6′)在$l=2$的特例.

如果流形M上除给定∇_a外还给定度规g_{ab},而且两者满足适配关系$\nabla_a g_{bc}=0$，则还可进行以下讨论. 以$g_{\mu\nu}$和$g^{\mu\nu}$分别代表g_{ab}和g^{ab}在所选标架的分量，即

$$g_{\mu\nu} = g_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b , \tag{5-7-11}$$

$$g^{\mu\nu} = g^{ab}(e^\mu)_a (e^\nu)_b , \tag{5-7-12}$$

引进以下两个记号：

$$\text{(a)}\ \ (e_\mu)_a \equiv g_{ab}(e_\mu)^b , \qquad \text{(b)}\ \ (e^\mu)^a \equiv g^{ab}(e^\mu)_b , \tag{5-7-13}$$

则有

$$\text{(a)}\ \ (e^\mu)_a = g^{\mu\nu}(e_\nu)_a , \qquad \text{(b)}\ \ (e_\mu)^a = g_{\mu\nu}(e^\nu)^a , \tag{5-7-14}$$

为证明上式的(a)式，只须验证等式两边作用于$(e_\sigma)^a$得相同结果. 为证明(b)式，只须验证等式两边作用于$(e^\sigma)_a$得相同结果. 留给读者完成.

用g^{ab}和g_{ab}对式(5-7-14)的两式分别升降指标得

$$\text{(a)}\ \ (e^\mu)^a = g^{\mu\nu}(e_\nu)^a , \qquad \text{(b)}\ \ (e_\mu)_a = g_{\mu\nu}(e^\nu)_a . \tag{5-7-15}$$

式(5-7-14a)和(5-7-15a)说明基矢的编号ν可用$g^{\mu\nu}$上升，式(5-7-14b)和(5-7-15b)说明基矢的编号ν可用$g_{\mu\nu}$下降. 类似地也可用$g_{\mu\nu}$对$\omega_\mu{}^\nu{}_a$做降指标处理，即定义

$$\omega_{\mu\nu a} := g_{\nu\sigma}\omega_\mu{}^\sigma{}_a = g_{\nu\sigma}(e_\mu)^c \nabla_a (e^\sigma)_c \quad \text{(请注意此前}\ \omega_{\mu\nu a}\ \text{并无意义).} \tag{5-7-16}$$

$g_{\mu\nu}$ 为常数(即 $\nabla_a g_{\mu\nu}=0$)的标架称为**刚性标架**(rigid frame). 正交归一标架是最简单的刚性标架. 对于洛伦兹度规，正交归一标架满足 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$，为计算带来很大方便(详见节末例题). 广义相对论中还经常使用另一种刚性标架——复类光标架，详见§8.7 和§8.8. 由式(5-7-16)及 $\nabla_a g_{\mu\nu}=0$ 易见下式对刚性标架成立：

$$\omega_{\mu\nu a}=(e_\mu)_b\nabla_a(e_\nu)^b. \tag{5-7-17}$$

定理 5-7-3　对刚性标架有

$$\omega_{\mu\nu a}=-\omega_{\nu\mu a}. \tag{5-7-18}$$

证明　由式(5-7-17)得

$$\omega_{\mu\nu a}=\nabla_a[(e_\mu)_b(e_\nu)^b]-(e_\nu)^b\nabla_a(e_\mu)_b=-(e_\nu)^b\nabla_a(e_\mu)_b=-\omega_{\nu\mu a},$$

其中第二步是由于 $\nabla_a[(e_\mu)_b(e_\nu)^b]=\nabla_a[g_{bc}(e_\mu)^c(e_\nu)^b]=\nabla_a g_{\nu\mu}=0$.　□

式(5-7-18)表明，对刚性标架而言，联络 1 形式 $\omega_{\mu\nu a}$ 关于其编号指标 μ，ν 为反称，这使独立的联络 1 形式的数目从 n^2 (n 是 M 的维数)减为 $n(n-1)/2$ (当 $n=4$ 时只有 6 个独立). $\omega_{\mu\nu a}$ 在所选基底的分量 $\omega_{\mu\nu\rho}\equiv\omega_{\mu\nu a}(e_\rho)^a$ 在计算中的地位类似于坐标基底法的克氏符 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$，也有 n^3 个数，但只有 $n^2(n-1)/2$ 个独立(当 $n=4$ 时只有 24 个独立)，故独立的 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 少于独立的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ [由下标的对称性可知独立的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 共 $n^2(n+1)/2$ 个]. $\omega_{\mu\nu\rho}$ 称为**里奇旋转系数**(Ricci rotation coefficients).

曲率张量的标架计算法可分为如下三步：(a)选定标架；(b)计算 ∇_a 在所选标架的全部联络 1 形式 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$；(c)由 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ 通过嘉当第二结构方程(5-7-8)计算全部曲率 2 形式 $\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$. 其中第(b)步还须再费笔墨. 由于刚性标架最为常用，我们只介绍用刚性标架时 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ 的求法. 借用任一坐标系 $\{x^\mu\}$，引入符号

$$\Lambda_{\mu\nu\rho}\equiv[(e_\nu)_{\lambda,\tau}-(e_\nu)_{\tau,\lambda}](e_\mu)^\lambda(e_\rho)^\tau, \tag{5-7-19}$$

其中 $(e_\nu)_\lambda$ 和 $(e_\mu)^\lambda$ 是 $(e_\nu)_a$ 和 $(e_\mu)^a$ 在坐标系 $\{x^\mu\}$ 的第 λ 个分量，即

$$(e_\nu)_\lambda\equiv(e_\nu)_a(\partial/\partial x^\lambda)^a, \qquad (e_\mu)^\lambda\equiv(e_\mu)^a(\mathrm{d}x^\lambda)_a,$$

$(e_\nu)_{\lambda,\tau}$ 是 $\partial(e_\nu)_\lambda/\partial x^\tau$ 的简写. 易见 $\Lambda_{\mu\nu\rho}=-\Lambda_{\rho\nu\mu}$，故只有 $n^2(n-1)/2$ 个独立的 $\Lambda_{\mu\nu\rho}$. 由式(5-7-19)求得全部 $\Lambda_{\mu\nu\rho}$ 后可由以下定理直接计算全部 $\omega_{\mu\nu\rho}$.

定理 5-7-4

$$\omega_{\mu\nu\rho}=\frac{1}{2}(\Lambda_{\mu\nu\rho}+\Lambda_{\rho\mu\nu}-\Lambda_{\nu\rho\mu}). \tag{5-7-20}$$

证明　由 ∇_a 的无挠性得克氏符关于下指标的对称性 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}=\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$，故

$$(e_\nu)_{\lambda,\tau}-(e_\nu)_{\tau,\lambda}=(e_\nu)_{\lambda;\tau}-(e_\nu)_{\tau;\lambda},$$

于是式(5-7-19)可改写为

$$\Lambda_{\mu\nu\rho}=[\nabla_a(e_\nu)_b-\nabla_b(e_\nu)_a](\partial/\partial x^\tau)^a(\partial/\partial x^\lambda)^b(e_\mu)^\lambda(e_\rho)^\tau$$
$$=[\nabla_a(e_\nu)_b-\nabla_b(e_\nu)_a](e_\rho)^a(e_\mu)^b=\omega_{\mu\nu\rho}-\omega_{\rho\nu\mu}.$$

由此不难证明式(5-7-20). □

式(5-7-20)是 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 的显表达式，易于直接计算. 缺点是算式较多. 在度规有某些对称性时用嘉当第一结构方程往往可更快地求得刚性标架的 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ (见例1[解毕]之后). 下面给出求解实例.

例 1 已知时空度规 g_{ab} 在坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 的线元表达式为

$$ds^2=-e^{2A(r)}dt^2+e^{2B(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{5-7-21}$$

试用正交归一标架计算其全部曲率 2 形式 $\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$.

解

(a) 选正交归一标架. 由式(5-7-21)知坐标基矢正交而不归一，因此将其归一化便得正交归一基底，即可选

$$(e_0)^a=e^{-A}(\partial/\partial t)^a\,,\qquad (e_1)^a=e^{-B}(\partial/\partial r)^a\,,$$
$$(e_2)^a=r^{-1}(\partial/\partial\theta)^a\,,\qquad (e_3)^a=(r\sin\theta)^{-1}(\partial/\partial\varphi)^a\,, \tag{5-7-22}$$

其相应对偶基矢为

$$(e^0)_a=e^A(dt)_a\,,\qquad (e^1)_a=e^B(dr)_a\,,$$
$$(e^2)_a=r(d\theta)_a\,,\qquad (e^3)_a=r\sin\theta(d\varphi)_a\,, \tag{5-7-23}$$

或者，用 g_{ab} 对式(5-7-22)降指标得

$$(e_0)_a=-e^A(dt)_a\,,\qquad (e_1)_a=e^B(dr)_a\,,$$
$$(e_2)_a=r(d\theta)_a\,,\qquad (e_3)_a=r\sin\theta(d\varphi)_a\,. \tag{5-7-24}$$

(b) 用式(5-7-19)计算 $\Lambda_{\mu\nu\rho}$. 计算时要借用一个坐标系，自然选题目所给的 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 系. 注意到反称关系 $\Lambda_{\mu\nu\rho}=-\Lambda_{\rho\nu\mu}$，可先求出全部(6 个)独立的 $\Lambda_{\mu0\rho}$ (即 Λ_{001}，Λ_{002}，Λ_{003}，Λ_{102}，Λ_{103}，Λ_{203}.)，再求全部独立的 $\Lambda_{\mu1\rho}$，…. 式(5-7-24)表明 $(e_0)_\lambda$ 的非零分量只有 $(e_0)_0=-e^A$，它只是 r 的函数，故 $(e_0)_{0,\tau}$ 的非零元素只有 $(e_0)_{0,1}=-A'e^A$ ($'$ 代表对 r 的导数)，于是

$$\Lambda_{\mu0\rho}=[(e_0)_{0,1}-0](e_\mu)^0(e_\rho)^1=-A'e^A(e_\mu)^0(e_\rho)^1.$$

而 $(e_\mu)^0$ 和 $(e_\rho)^1$ 为零除非 $\mu=0$ 和 $\rho=1$，故 $\Lambda_{\mu0\rho}$ 的唯一非零元素为

$$\Lambda_{001}=-A'e^A(e_0)^0(e_1)^1=-A'e^Ae^{-A}e^{-B}=-A'e^{-B}.$$

类似地可知非零的 $\Lambda_{\mu\nu\rho}$ 共有

$$\Lambda_{001}=-\Lambda_{100}=-A'e^{-B}\,,\qquad \Lambda_{122}=-\Lambda_{221}=-r^{-1}e^{-B}\,,$$
$$\Lambda_{133}=-\Lambda_{331}=-r^{-1}e^{-B}\,,\qquad \Lambda_{233}=-\Lambda_{332}=-r^{-1}\cot\theta.$$

代入式(5-7-20)得非零的 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 为(注意反称关系 $\omega_{\mu\nu\rho}=-\omega_{\nu\mu\rho}$)

$$\omega_{010}=-\omega_{100}=-A'\mathrm{e}^{-B}, \qquad \omega_{122}=-\omega_{212}=-r^{-1}\mathrm{e}^{-B},$$
$$\omega_{133}=-\omega_{313}=-r^{-1}\mathrm{e}^{-B}, \qquad \omega_{233}=-\omega_{323}=-r^{-1}\cot\theta,$$

因而 6 个独立的联络 1 形式 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_{01}=-A'\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^0, \qquad \boldsymbol{\omega}_{02}=0, \qquad \boldsymbol{\omega}_{03}=0,$$
$$\boldsymbol{\omega}_{12}=-r^{-1}\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^2, \qquad \boldsymbol{\omega}_{13}=-r^{-1}\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^3, \qquad \boldsymbol{\omega}_{23}=-r^{-1}\cot\theta\,\boldsymbol{e}^3.$$

(c) 用嘉当第二结构方程求曲率 2 形式. 为便于求外微分，把非零的 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ 改用对偶坐标基矢表出：

$$\boldsymbol{\omega}_{01}=-A'\mathrm{e}^{A-B}\mathrm{d}t, \qquad \boldsymbol{\omega}_{12}=-\mathrm{e}^{-B}\mathrm{d}\theta,$$
$$\boldsymbol{\omega}_{13}=-\mathrm{e}^{-B}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \boldsymbol{\omega}_{23}=-\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

由 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu=g^{\nu\sigma}\boldsymbol{\omega}_{\mu\sigma}=\eta^{\nu\sigma}\boldsymbol{\omega}_{\mu\sigma}$ 得 $\boldsymbol{\omega}_0{}^i=\boldsymbol{\omega}_{0i}$，$\boldsymbol{\omega}_i{}^j=\boldsymbol{\omega}_{ij}\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，代入式(5-7-8)不难求得

$$\boldsymbol{R}_0{}^1=\mathrm{e}^{-2B}(A''-A'B'+A'^2)\,\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1, \qquad \boldsymbol{R}_0{}^2=r^{-1}A'\mathrm{e}^{-2B}\,\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^2,$$
$$\boldsymbol{R}_0{}^3=r^{-1}A'\mathrm{e}^{-2B}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^3, \qquad \boldsymbol{R}_1{}^2=r^{-1}B'\mathrm{e}^{-2B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2,$$
$$\boldsymbol{R}_1{}^3=r^{-1}B'\mathrm{e}^{-2B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3, \qquad \boldsymbol{R}_2{}^3=r^{-2}(1-\mathrm{e}^{-2B})\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3.$$

我们只以计算最长的 $\boldsymbol{R}_1{}^3$ 为例写出算式：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^3&=-\left[\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{e}^{-B}\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{e}^{-B}\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]\wedge\mathrm{d}\varphi\\&=\mathrm{e}^{-B}(B'\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi-\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi)\\&=r^{-1}B'\mathrm{e}^{-2B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3-r^{-2}\mathrm{e}^{-B}\cot\theta\,\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3,\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{\omega}_1{}^\lambda\wedge\boldsymbol{\omega}_\lambda{}^3=\boldsymbol{\omega}_1{}^2\wedge\boldsymbol{\omega}_2{}^3=\boldsymbol{\omega}_{12}\wedge\boldsymbol{\omega}_{23}=r^{-2}\mathrm{e}^{-B}\cot\theta\ \boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3,$$
$$\boldsymbol{R}_1{}^3=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^3+\boldsymbol{\omega}_1{}^\lambda\wedge\boldsymbol{\omega}_\lambda{}^3=r^{-1}B'\,\mathrm{e}^{-2B}\,\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3.$$

[解毕]

上例展示了用式(5-7-20)计算联络 1 形式 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ 的过程，下面仍以上例为例介绍用嘉当第一结构方程求 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ 的等价方法. 对式(5-7-23)求外微分，代入嘉当第一方程(5-7-6)得

$$A'\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^0=-\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{\omega}_1{}^0-\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{\omega}_2{}^0-\boldsymbol{e}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^0, \tag{5-7-25a}$$
$$0=-\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{\omega}_0{}^1-\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{\omega}_2{}^1-\boldsymbol{e}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^1, \tag{5-7-25b}$$
$$r^{-1}\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2=-\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{\omega}_0{}^2-\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{\omega}_1{}^2-\boldsymbol{e}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^2, \tag{5-7-25c}$$
$$r^{-1}\mathrm{e}^{-B}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3+r^{-1}\cot\theta\ \boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3=-\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{\omega}_0{}^3-\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{\omega}_1{}^3-\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{\omega}_2{}^3. \tag{5-7-25d}$$

从原则上说，把 1 形式 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$ 用 $\boldsymbol{e}^\mu$ 展开(例如 $\boldsymbol{\omega}_1{}^0=\alpha_0\boldsymbol{e}^0+\alpha_1\boldsymbol{e}^1+\alpha_2\boldsymbol{e}^2+\alpha_3\boldsymbol{e}^3$)，代入式(5-7-25)便可求得全部 $\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$. 然而实际上往往可用简单得多的方法“读出”或猜

出正确解. 例如，对$\omega_1{}^0$，$\omega_2{}^0$和$\omega_3{}^0$的如下猜测解自然满足方程(5-7-25a)：

$$\omega_1{}^0 = -A'\mathrm{e}^{-B}e^0 + \alpha_1 e^1\,, \qquad \omega_2{}^0 = \omega_3{}^0 = 0\,. \tag{5-7-26}$$

把上式代入方程(5-7-25b)得

$$0 = -\alpha_1 e^0 \wedge e^1 - e^2 \wedge \omega_2{}^1 - e^3 \wedge \omega_3{}^1\,.$$

上式后两项不含$e^0 \wedge e^1$，故$\alpha_1 = 0$. 由上式似乎可猜$\omega_2{}^1 = \omega_3{}^1 = 0$，但$\omega_2{}^1 = 0$使式(5-7-25c)无法满足，$\omega_3{}^1 = 0$使式(5-7-25d)无法满足. 由式(5-7-25c)可猜$\omega_1{}^2 = -r^{-1}\mathrm{e}^{-B}e^2$，由式(5-7-25d)可猜$\omega_1{}^3 = -r^{-1}\mathrm{e}^{-B}e^3$和$\omega_2{}^3 = -r^{-1}\cot\theta e^3$，且易见这一猜测也满足式(5-7-25b, c)，于是猜测解

$$\omega_1{}^0 = -A'\mathrm{e}^{-B}e^0\,, \qquad \omega_2{}^0 = \omega_3{}^0 = 0\,,$$

$$\omega_1{}^2 = -r^{-1}\mathrm{e}^{-B}e^2\,, \qquad \omega_1{}^3 = -r^{-1}\mathrm{e}^{-B}e^3\,, \qquad \omega_2{}^3 = -r^{-1}\cot\theta\, e^3$$

满足嘉当方程，因而是正确答案[与例 1 求解中的(b)的结果同].

至此我们介绍了计算黎曼张量$R_{abc}{}^d$的两种方法：坐标基底法和标架法(特别是正交归一标架法). 两种方法各有优缺点，可根据问题本身以及计算者的熟练程度任择其一. 有人希望集坐标基底法和正交归一基底法于一身，即寻求一个正交归一的坐标基底. 然而这是做不到的，除非g_{ab}为平直度规场. 原因很简单：坐标基底$\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$为正交归一表明$g_{ab} = \eta_{\mu\nu}(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b$. 设$\partial_a$是坐标系的普通导数算符，则$\partial_a g_{bc} = 0$，故$\partial_a$就是与$g_{ab}$适配的导数算符，而$\partial_{[a}\partial_{b]}\omega_c = 0\ \forall \omega_c$，所以$g_{ab}$的$R_{abc}{}^d$为零，即$g_{ab}$平直.

习　题

~1. 在定理 5-1-3 证明中补证$\{(e^1)_a \wedge (e^2)_b,\ (e^2)_a \wedge (e^3)_b,\ (e^3)_a \wedge (e^1)_b\}$线性独立.

~2. 设V为矢量空间，$\{(e^1)_a, (e^2)_a, (e^3)_a, (e^4)_a\}$是$V^*$的基底，写出$\omega_a \in \Lambda(1)$，$\omega_{abc} \in \Lambda(3)$和$\omega_{abcd} \in \Lambda(4)$在此基底的展开式，说明展开系数(如$\omega_{12}$)的定义.

~3. 用数学归纳法证明$(\omega^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\omega^l)_{a_l} = l!\,(\omega^1)_{[a_1} \cdots (\omega^l)_{a_l]}$，其中$(\omega^1)_a$，…，$(\omega^l)_a$为任意对偶矢量.

~4. 试证定理 5-1-4.

5. 设$\boldsymbol{\omega}$是 1 形式场，u, v是矢量场，试证$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(u,v) = u(\boldsymbol{\omega}(v)) - v(\boldsymbol{\omega}(u)) - \boldsymbol{\omega}([u,v])$.等式左边代表$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$对$u, v$的作用结果，即$(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})_{ab}u^a v^a$.

~6. 设v^b和$\omega_{a_1\cdots a_l}$分别是流形M上的矢量场和l形式场，试证

(a) $\mathscr{L}_v \omega_{a_1\cdots a_l} = \mathrm{d}_{a_1}(v^b \omega_{ba_2\cdots a_l}) + (\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} v^b$.

注：令$\mu_{a_2\cdots a_l} \equiv v^b \omega_{ba_2\cdots a_l}$，则$\mathrm{d}_{a_1}\mu_{a_2\cdots a_l}$是指$(\mathrm{d}\mu)_{a_1 a_2\cdots a_l}$.

(b) $\mathscr{L}_v \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathscr{L}_v \boldsymbol{\omega}$ (这本身就是一个很有用的命题).

提示：(1) 证(a)时可先证$l = 2$的特例，找到感觉后不难推广至一般情况.

(2) 利用(a)的结果将使(b)的证明变得十分简单.

7. 设 O 是 n 维流形 M 上坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域(且 O 同胚于$\mathbb{R}^n$)，ω_a 是 O 上的 1 形式场，试证

$$\partial\omega_\mu/\partial x^\nu=\partial\omega_\nu/\partial x^\mu\ (\mu,\nu=1,\cdots,n)\text{ 当且仅当存在}f: O\to\mathbb{R}\text{ 使 }\nabla_a f=\omega_a\,.$$

提示：仿照 §5.1 推论 5-1-6 的证明.

8. 设 $\{x,y,z\}$ 和 $\{r,\theta,\varphi\}$ 分别为 3 维欧氏空间的笛卡儿坐标系和球坐标系，写出 $\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ 用 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的表达式.

~9. 连通流形 M 配以洛伦兹号差的度规场 g_{ab} 叫**时空**(spacetime). 设 F_{ab} 是任意 4 维时空的 2 形式场(第 6 章将看到电磁场张量 F_{ab} 就是一个 2 形式场)，试证

$$\frac{1}{2}(F_{ac}F_b{}^c+{}^*F_{ac}{}^*F_b{}^c)=F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\ ,$$

其中 ${}^*F_{ac}\equiv({}^*F)_{ac}$ ， ${}^*F_b{}^c=g^{ac}\ {}^*F_{ba}$ (此式对研究电磁场有帮助).

*10. 试证 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}\equiv\pm n^b\hat{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 是 ∂N 上与诱导度规场 h_{ab} 相适配的体元.

11. 试证定理 5-6-1 和 5-6-2.

~12. 设 x，y，z 是 3 维欧氏空间的笛卡儿坐标，试证

(a) ${}^*\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$;

(b) ${}^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=1$.

13. 设 $\{r,\theta,\varphi\}$ 是 3 维欧氏空间的球坐标系，试证 ${}^*\mathrm{d}r=(r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$.

14. 设 $\vec{A}$，$\vec{B}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的矢量场，$\vec{\nabla}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上与欧氏度规相适配的导数算符，试证

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B}\,.$$

15. 用微分形式证明 3 维欧氏空间场论中并不易证的下列熟知命题：

(1) 无旋矢量场必可表为梯度；

(2) 无散矢量场必可表为旋度(见§5.6 末).

16. 设 ∇_a 是广义黎曼空间(M, g_{ab})上的适配导数算符(即 $\nabla_a g_{bc}=0$)，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是适配体元(即 $\nabla_a\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=0$)，$v^a$ 是 M 上的矢量场，$v_a\equiv g_{ab}v^b$ 是 v^a 相应的 1 形式场，${}^*\boldsymbol{v}$ 是 v_a 的对偶形式场，试证 $(\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{v}$. 注：这个结论可做如下推广：设 $F_{a_1\cdots a_k}$ 是 k 形式场 $(k\leqslant n)$，简记作 $\boldsymbol{F}$，把 k–1 形式场 $\nabla^{a_k}F_{a_1\cdots a_k}$ 记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ ，则 ${}^*(\mathrm{div}\boldsymbol{F})=\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F}$. 电磁场的麦氏方程[式(12-6-2)]就是一例.

17. 试证由式(5-7-2)定义的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 正是 §3.1 定义的克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ 在式(5-7-2)涉及的坐标基底的分量.

*18. 用正交归一标架分别求第 3 章习题 14~16 所给度规的曲率张量的全部标架分量，并验证所得结果与用坐标基底法求得的曲率张量相同. 为与 $R_{abc}{}^d$ 的坐标分量 $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$ 区别，在求得 $R_{abc}{}^d$ 的全部标架分量后宜改用符号 $R_{(\mu)(\nu)(\sigma)}{}^{(\rho)}$ 代表标架分量.

第 6 章 狭义相对论

§6.1 4 维表述基础

假定读者已学过狭义相对论. 本章的任务是用 4 维几何语言对狭义相对论的基本内容重新表述，以求得一个更清晰、深入和更能抓住本质的认识. 此外，学会使用 4 维语言也可为学习以后各章(广义相对论)打下必要基础.

6.1.1 预备知识

物理学研究物理客体(对象)的演化规律. 为便于研究，往往使用模型. 模型是理想化了的客体. 质点、点电荷、带电面等都是模型.

下面介绍今后常用的若干最基础的概念，使用的都是模型语言.

“事件”本是个非常直观的概念. 炸弹爆炸、两车相撞和一声咳嗽都是事件. 任何事件总要占据一定的空间范围并持续一段时间间隔. 物理学中的事件概念则是实际事件的模型化，即认为每一事件发生在空间的一点和时间的一瞬. 不论是否发生了什么，空间的一点和时间的一瞬的结合就叫一个**事件**(event). 全部事件的集合叫**时空**(spacetime)，故每个事件也叫一个时空点. 根据物理直觉，时空应是个“4 维连续体”，但这一提法的准确含义起初并不明朗. 后来发现，能把这一提法准确化的数学概念是 4 维流形. 把时空看成 4 维流形(并配以适当的附加结构，例如一个洛伦兹度规)是物理学默认的一个基本出发点(基本假设). 非相对论物理学和狭义相对论物理学假定时空流形是$\mathbb{R}^4$(两者的区别在于$\mathbb{R}^4$ 上的附加结构，见稍后)；广义相对论物理学则允许时空流形为任意 4 维连通流形.

牛顿力学中的质点是一个模型化概念，是指空间中带有质量的点. 由于要讨论相对论，我们把质点概念推广为**粒子**(particle)概念. 这里的粒子是模型语言的粒子，与粒子物理学的具体粒子如质子、中子等虽有联系但不相同，是完全没有大小的点. 我们把粒子分为两类[见 Synge(1956)]：第一类是有(静)质量的粒子，与质点同义；第二类是无(静)质量的粒子，为方便也常称为光子(photon). 一个粒子的全部历史由一系列事件组成，因此对应于时空中的一条曲线，称为该粒子的**世界线**(world line). 设某人(看作质点)静止于地面，苍蝇绕他做匀速圆周运动[见图 6-1(a)，则两者的世界线示于图 6-1(b) [称为**时空图**(spacetime diagram)]. 在时空图中，竖直向上代表时间的流逝，水平方向代表空间. 每个水平面代表某一时刻的全空间. 从时空图底部开始向上看，就能看到运动(演化)的全过程.

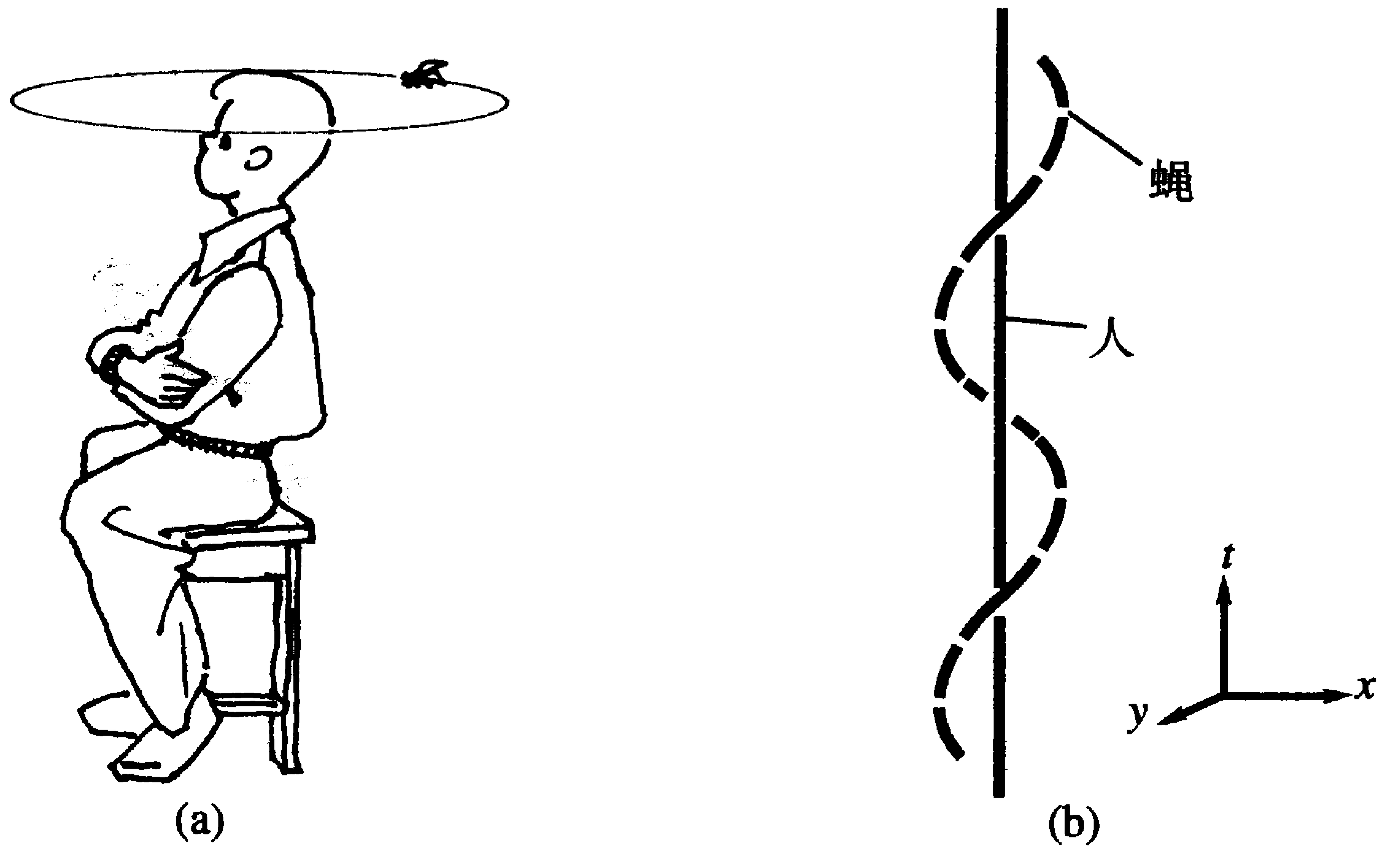


图 6-1　人静止于地面，蝇绕人做匀速圆周运动

(a) 空间图；(b) 时空图

进行物理观测的人叫观察者. 通常把观察者模型化，即看成质点，简称**观者**(observer). 为了观测，观者手中应有一个走时准确的钟，叫**标准钟**(standard clock)，该钟的读数称为该观者的**固有时**(proper time)(详见 6.1.4 小节). 推而广之，可认为任一质点都携带一个标准钟，每个质点有自己的固有时. 从数学上看，固有时 τ 无非是质点世界线的一个特殊参数. 一个观者只能对发生在自己世界线上的事件做直接观测. 为了对全时空(或其中一个开子集)的任何事件进行观测，需要处处设置观者(“流动哨”)，这种无处不在的观者们就构成一个参考系. 准确地说，无数观者的集合 $\mathscr{R}$ 叫一个**参考系**(reference frame)，若它满足如下条件：时空(或其中一个开子集)中的任一点有且仅有 $\mathscr{R}$ 内的一个观者的世界线经过. 这一抽象定义其实是读者常用的参考系概念的准确化和广义化. 以大家熟悉的“火车系”为例. 想像车内充满乘客(观者)，每人携带一个标准钟并且身上标有 3 个实数(他的空间坐标). 发生在车内的任一事件必定发生在某个观者身上，他便可记录下该事件的时空坐标 t, x, y, z (t 就是他的标准钟的读数，x, y, z 就是他自己的空间坐标.). 虽然火车只有有限大小(长宽高)，但作为模型语言中的概念，“火车系”一词已假定它的观者们充斥于全空间(任一空间点都有一个火车系观者，他们随车而动，即与车内观者相对静止.). 另一方面，“地面系”的观者们当然也充斥于全空间，但他们与火车系的观者们有相对速度. 以许多竖直线代表地面系观者们的世界线，则火车系观者们的世界线便是许多互相平行的斜直线(请读者自己画图). 把这一认识准确化和广义化(允许系内的世界线不互相平行，即允许系内两个观者的距离随时间而变.)，便得到前面关于参考系的一般定义.

6.1.2 狭义相对论的背景时空

所谓狭义相对论的几何表述，其实就是建立一个 4 维模型，使由它得出的各种结论与狭义相对论的原有表述(简称 3 维或 3 + 1 维表述)一致. 第一个问题就是用什么流形、配以什么附加结构作为背景时空. 从物理上看，狭义相对论的每个事件都可用某惯性系的坐标刻画，任一惯性系的坐标 t, x, y, z 的取值范围都从 $-\infty$ 到 ∞. 设 p, q 是 $\mathbb{R}^4$ 中一条曲线上的两邻点(如图 6-2)，它们在物理上就代表两个相邻事件. 根据狭义相对论，描述 p, q 的联系的重要物理量是元间隔，可借用任一惯性坐标系$\{t, x, y, z\}$定义为

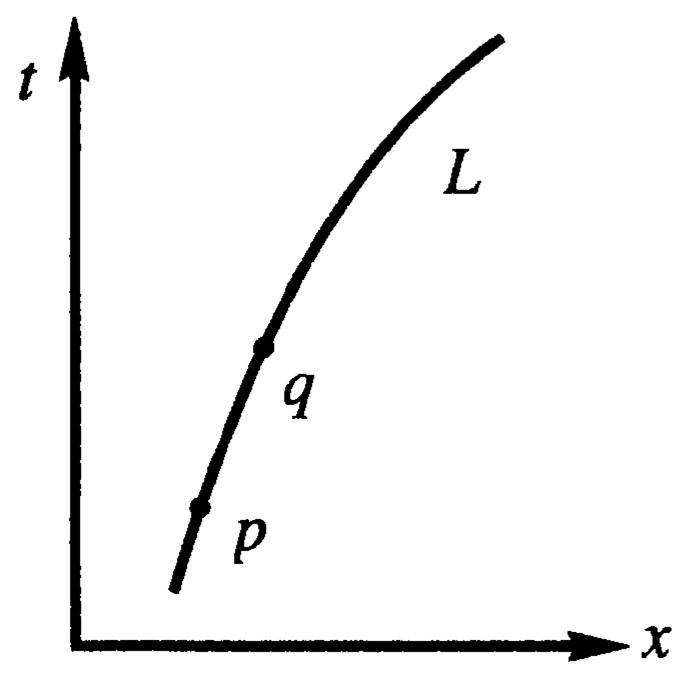


图 6-2 粒子世界线及其元段

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{6-1-1}$$

[本书用几何单位制，其中光速 $c = 1$(详见附录 A).] 元间隔的一个重要性质是它在从一个惯性系变到另一惯性系时形式不变，即

$$-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

(此即“间隔不变性”，可由洛伦兹变换验证.) 这使我们想到了数学上的 4 维闵氏空间：闵氏空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的线元可用洛伦兹坐标系 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ 表示为

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \tag{6-1-1'}$$

上式与式(6-1-1)形式相同，而且在从一个洛伦兹系变到另一洛伦兹系时形式不变. 于是可认为物理上的元间隔对应于数学上的闵氏线元，物理上的惯性坐标系对应于数学上的洛伦兹坐标系，狭义相对论的背景时空对应于闵氏空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ [所以闵氏空间又称**闵氏时空**. 不妨认为闵氏空间是侧重数学的提法，而闵氏时空是侧重物理的提法.]. 进一步把“对应于”改为“就是”(即认同)，便可以说狭义相对论的背景时空是闵氏时空. 就是说，狭义相对论物理学是研究物理客体在闵氏时空中的演化规律的学问，发生在闵氏时空的任何物理现象都属于狭义相对论物理学范畴.

用惯性坐标系可定义任何粒子的速率. 设 L 为粒子的世界线，p, q 为 L 上两邻点(见图 6-2)，(t_1, x_1, y_1, z_1) 和 (t_2, x_2, y_2, z_2) 分别为 p 和 q 在某惯性系 $\mathscr{R}$ 中的坐标. 令

$$dt \equiv t_2 - t_1, \quad dx \equiv x_2 - x_1, \quad dy \equiv y_2 - y_1, \quad dz \equiv z_2 - z_1,$$

则粒子在 p 时相对于 $\mathscr{R}$ 系的速率定义为

$$u := \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}, \tag{6-1-2}$$

于是由式(6-1-1)可知世界线 L 介于 p，q 之间的线元为

$$ds^2 = -(1-u^2)dt^2 . \tag{6-1-3}$$

上式表明 $u=1$ 同 $ds^2=0$ (线元为类光)等价；$u<1$ 同 $ds^2<0$ (线元为类时)等价. 因此，狭义相对论的两个重要基本信条——①光子相对于任何惯性系的速率 $u=1$；②质点相对于任何惯性系的速率 $u<1$——便可改用 4 维语言表述如下：

(1) 光子世界线是(闵氏时空的)类光曲线；

(2) 质点世界线是(闵氏时空的)类时曲线.

3 维(亦称 3 + 1 维)表述总要借用参考系，上述基本信条的 3 维表述还涉及速率 u 的定义(这些都是人为因素)，不但不如 4 维表述简练自足，而且有时还会被误解. 例如，如果给速率下不同定义(其中有些也颇合理，颇有资格被称为速率.)，"超光速"就可以与上面用黑体字表述的基本信条不相矛盾("超光速"质点的世界线可以仍是类时曲线)，然而，如果只知道"相对论不许超光速"而不知道按什么定义的速率才不许超光速，就会误以为连这种"超光速"也与相对论相悖(10.2.1 小节将给出一个既"超光速"又不违背相对论的重要例子). 反之，如果竟然发现世界线为类空曲线的质点，就会构成对相对论的重大挑战(曾有报道称天文观测已在这一方面发现某些迹象，尚待探讨.).

6.1.3 惯性观者和惯性系

狭义相对论的基本假设是光速不变原理和狭义相对性原理，后者又包含两个层次的内容：①在所有观者(质点)中存在一类特殊观者，称为**惯性观者**(inertial observer)，他们与其他观者(非惯性观者)有绝对的区别，就是说，在所有观者组成的集合中可以选出一个特殊的子集，其中每个元素都是惯性观者；②各惯性观者平权，不存在特殊的惯性观者，就是说，在由惯性观者组成的子集中不能选出一个(或几个)与众不同的元素，例如不能说哪个惯性观者处于绝对静止状态. 现在讨论惯性观者在数学上的对应对象. 根据 3 维语言的狭义相对论，惯性观者相对于所在惯性坐标系$\{t, x, y, z\}$的速率 $u=0$，因而其世界线重合于该系的一条 t 坐标线. 设∂_a 是该系的普通导数算符，则$\partial_a(\partial/\partial t)^b=0$，故

$$(\partial/\partial t)^a\partial_a(\partial/\partial t)^b=0 . \tag{6-1-4}$$

注意到惯性坐标系就是洛伦兹坐标系，可知∂_a 是与闵氏度规 η_{ab} 相适配的导数算符(满足 $\partial_a\eta_{bc}=0$)，所以式(6-1-4)是闵氏时空的测地线方程，可见任一惯性观者的世界线都是类时测地线. 反之也可证明，给定任一类时测地线 G，总可找到一个洛伦兹坐标系使 G 是该系的一条 t 坐标线，因而代表一个惯性观者. 于是物理上的惯性观者对应于数学上的类时测地线，或说惯性观者的世界线就是类时测地线. 从数学角度看，类时测地线是最特殊而又最简单的一类类时线；从物理角度

看，惯性观者是最特殊而又最简单的一类观者，把惯性观者与类时测地线相对应是很自然的.

既然洛伦兹坐标系的每一 t 坐标线都对应于一个惯性观者，该系的全体 t 坐标线组成的参考系便称为**惯性参考系**，而该坐标系则称为该惯性参考系内的一个**惯性坐标系**. 在不必认真区分参考系和坐标系时，惯性参考系和惯性坐标系又统称**惯性系**. 惯性系的定义域是全时空(整个$\mathbb{R}^4$)，因此亦称整体惯性系. 属于同一惯性参考系的所有惯性观者的世界线是平行测地线；反之，若二惯性观者分属不同惯性参考系(例如前面谈到的火车系和地面系)，则他们的世界线为不平行测地线. 一个质点叫做“自由的”或“做惯性运动的”，若其世界线为测地线.

根据定理 4-3-6，4 维闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中洛伦兹系之间的坐标变换对应于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的等度规映射. 任一等度规映射可由若干基本的等度规映射复合而成，后者又分为“连续”和“分立”两大类，“分立”是指反射和反演，“连续”则又有三种类型[见§4.3 例 1(4)]：(a) 平移，由 4 个独立 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$，$(\partial/\partial x)^a$，$(\partial/\partial y)^a$，$(\partial/\partial z)^a$ 表征；(b) 空间转动，由 3 个独立 Killing 矢量场 $-y(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial y)^a$，$-z(\partial/\partial y)^a + y(\partial/\partial z)^a$，$-x(\partial/\partial z)^a + z(\partial/\partial x)^a$ 表征；(c) 伪转动，由 3 个独立 Killing 矢量场 $t(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial t)^a$，$t(\partial/\partial y)^a + y(\partial/\partial t)^a$，$t(\partial/\partial z)^a + z(\partial/\partial t)^a$ 表征. 今各举一例说明物理意义. (a) 以时间平移为例，由 Killing 场 $(\partial/\partial t)^a$ 对应的单参等度规群诱导而得的坐标变换为 $t' = t + a$，$x' = x$，$y' = y$，$z' = z$ (常数 a 充当单参群的参数)，物理上对应于把惯性系 $\mathscr{R}$ 内所有观者的标准钟的初始设定值增加数值 a，例如夏时制与普通制的关系就是如此，其中 $a = 1$(小时). (b) 以 x~y 面内的转动为例. 由 Killing 场 $-y(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial y)^a$ 对应的单参等度规群诱导而得的坐标变换为

$$t' = t, \qquad x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha, \qquad z' = z,$$

(α 为常数，充当参数.)

物理上对应于惯性参考系内部的一个空间坐标转动. (c)以 $t \sim x$ 面内的伪转动为例. 由 Killing 场 $t(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial t)^a$ 对应的单参等度规群诱导而得的坐标变换为(见定理 4-3-5)

$$t' = \gamma(t - vx), \qquad x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \tag{6-1-5}$$

其中 v 为常数(充当参数)，$\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$. 这在物理上对应于两个惯性系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 之间的坐标变换(洛伦兹变换)，该两系空间坐标轴对应同向，$\mathscr{R}'$ 系相对于 $\mathscr{R}$ 系以速率 $|v|$ 沿 x 轴正(或负)向匀速平动，两系空间坐标原点在 $t = t' = 0$ 时重合.

平移和空间转动对应的都是同一惯性参考系内的坐标变换. 例如，时间平移变换只是同一惯性参考系内所有观者把自己的标准钟的零点重新设定一下，观者

及参考系没有改变. 又如，从$\{t, x, y, z\}$出发作一空间旋转后所得新坐标系$\{t'=t, x', y', z'\}$仍是该参考系内的一个惯性坐标系. 可见同一惯性参考系内存在许多不同惯性坐标系，然而由一个伪转动相联系的两个惯性坐标系却必然分属两个不同惯性参考系，因为它们的 t 坐标线不同.

6.1.4 固有时与坐标时

观者(质点)的固有时就是他的标准钟的读数. 但若问什么叫标准钟，则还须追加如下定义：

定义1 一个钟称为**标准钟或理想钟**(ideal clock)，若它在自己世界线上任二点 p_1，p_2 的读数 τ_1，τ_2 之差等于该线在 p_1，p_2 之间的线长，即

$$\tau_2-\tau_1\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-\mathrm{d}s^2}\ . \tag{6-1-6}$$

注 1 若光速 c 不取为 1，则上式右边应乘以 $1/c$.

注 2 应注意分清与钟有关的两个概念——**走时率**(rate)和**初始设定**(setting). 标准钟只对走时率提出要求(世界线上任意两点的读数差等于线长)，而参考系内的钟同步问题则只涉及初始(零点)设定. 我国曾一度推行夏时制，规定从某月某日开始"把钟拨快一小时". 这"快"字有可能使人误以为要把走时率提高，其实只是改变初始设定.

注 3 根据定义 1，观者的固有时间等于它的世界线长. 至于线上哪一点选作 τ 的零点，则只涉及初始设定，在只有一个(或某些)观者的情况下是任意的. 但若考虑一个参考系，则其中各观者固有时的零点选择就要满足一定要求. 例如，设 $\mathscr{R}$ 为惯性参考系，G 是其中的一个观者，任选 $p_0\in G$ 作为 G 的固有时的零点之后，以 Σ_0 代表过 p_0 并与所有观者世界线正交的超曲面，则 $\mathscr{R}$ 系内任一观者 G' 必须选 Σ_0 与自己世界线的交点作为固有时的零点. 这种要求叫做惯性系内的**钟同步**(clock synchronization). 乍看起来可用下法实现同步：观者 G 在把自己的钟调到指零(事件 p_0)的同时告知 G'"你现在就把钟调到指零". 但是，由于信号传播需要时间，若以 q 代表 G' 接到通知的事件，则 q 必定不在超曲面 Σ_0 上. 如果 G' 执行指令，即在事件 q 把自己的钟调零，必然达不到钟同步的要求. 可见钟同步在相对论中是个非平凡过程. 下面介绍一种同步方法. 观者 G 事先告知 G'："你在身上装一面反射镜，当镜子接收到我发的光时把你的钟调零."然后 G 在某时刻向 G' 发光(事件 p_1)，它到达 G' 时被反射(事件 p')，以 p_2 代表 G 收到反射光的事件(见图 6-3). 设 p_0 是 G 世界线上 p_1p_2 段的中点(以线长衡量)，则 G 只须在该点

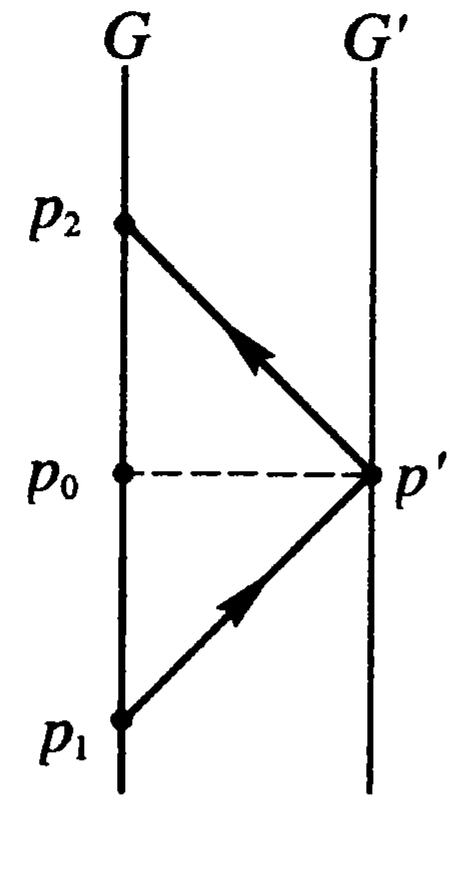


图6-3 钟同步方法

把自己的钟调零便可使 G' 钟与自己的钟同步．请注意这一做法用到光速与方向无关(光子走类光测地线)的性质．

注 4 标准钟也是一种模型．什么样的实际钟可看成标准钟？实验表明，原子钟在多数情况下可相当精确地看作标准钟，生活中的钟通常也可近似看作标准钟．然而，任何实际钟都会在某些特殊情况下与标准钟有明显偏离[参见 Misner et al.(1973)P.393, 395; Rindler(1982)P.31.]．例如，密切依赖于地球重力加速度的摆钟一旦被带到远离地球的飞船中便将一无是处．不过这只涉及实验中如何选钟而不妨碍理论上的讨论．在理论上需要的只是标准钟的概念．

注 5 今后谈到世界线时默认以固有时 τ 为参数，而固有时间等于线长，因此其切矢 $(\partial/\partial\tau)^a$ 的长度为 1(见§2.5 定义 7 前一段)．于是应把观者理解为一条有单位切矢的类时曲线．

注 6 光子没有固有时概念(类光曲线线长恒为零)，因此不能充当观者．

设 x^0 是坐标系的类时坐标[即 $\eta_{ab}(\partial/\partial x^0)^a(\partial/\partial x^0)^b<0$]，$x^1$，$x^2$，$x^3$ 是类空坐标[即 $\eta_{ab}(\partial/\partial x^i)^a(\partial/\partial x^i)^b>0$，$i=1,\ 2,\ 3$]，则坐标域中任一点 p 的 x^0 值称为事件 p 在该系的**坐标时**(coordinate time)．惯性系的坐标时叫**惯性坐标时**，其定义域为全 $\mathbb{R}^4$．要特别注意坐标时与固有时的以下两点区别：①固有时只对世界线上的点而言，脱离世界线就没有固有时概念．若两条世界线 L_1 和 L_2 交于 p 点，则 p 点作为 L_1 的一点的固有时可以不同于它作为 L_2 的一点的固有时．反之，坐标时与世界线无关，只要 p 是坐标域中的一点，就可谈及它在该系的坐标时．②同一时空点 p 在不同坐标系中可有不同坐标时，而固有时则与坐标系无关．下面的命题给出类时曲线上的固有时与惯性坐标时的联系．

命题 6-1-1 设 $L(\tau)$是某质点的世界线，τ 为固有时，t 为惯性系 $\mathscr{R}$ 的坐标时，则

$$\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau=\gamma_u\,. \tag{6-1-7}$$

其中 $\gamma_u\equiv(1-u^2)^{-1/2}$，$u$ 是质点相对于 $\mathscr{R}$ 的速率．

证明 仍用图 6-2．由 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ 和式(6-1-3)得 $\mathrm{d}\tau^2=(1-u^2)\mathrm{d}t^2$，故有式(6-1-7)．

□

若 $L(\tau)$就是惯性系 $\mathscr{R}$ 中的一条 t 坐标线，则由式(6-1-2)知 $u=0$，故由式(6-1-7)知 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau$．可见惯性观者在本惯性系内的坐标时等于自己的固有时．

6.1.5 时空图

研究运动常要画图．通常的图是空间图，例如平抛物体的空间轨迹是抛物线．这种图不含时间因素，不能反映物体在哪一时刻位于轨迹的哪一点．时空图可以克服这一缺点，它用纸面上的点代表事件，纸面上的线代表粒子在时空中的

运动(过程)，等等. 如果只涉及 1 维运动，可以只画 2 维时空图. 画图时，先任选一惯性系 $\mathscr{R}$ 作基准，并用竖直向上的轴为其 t 轴(代表时间的流逝)，水平轴为其 x 轴(见图 6-4). 各种沿 x 轴运动的粒子的世界线都可用图中的曲线表示. 例如，t 轴代表 $\mathscr{R}$ 系中 $x=0$ 的那个惯性观者 G_0 的世界线，图中的另一竖直线代表 $\mathscr{R}$ 系中 $x=x_1$ 的那个惯性观者 G_1 的世界线(竖直表明相对于 $\mathscr{R}$ 系静止)，而图中的点画线则代表光子的世界线. 给定任一时刻 $\hat{t}$，线上便得一点 $(\hat{t},\hat{x})$，其空间坐标 $\hat{x}$ 就反映光子在 $\hat{t}$ 时刻的位置. 图 6-4 中的斜直线 G_0' 代表什么？由于是斜直线，其 x 坐标随 t 坐标线性变化，由式(6-1-2)知它相对于 $\mathscr{R}$ 系的速率为小于 1 的常数，可见它是做惯性运动的质点. 其实，从它是类时直线(测地线)这一事实便知它也是惯性观者，从它过原点的事实可知它是式(6-1-5)涉及的惯性系 $\mathscr{R}'$ 中的 $x'=0$ 的那个惯性观者，亦即 $\mathscr{R}'$ 系的 t' 轴. 从另一侧面也可验证：把 $x'=0$ 代入洛伦兹变换式(6-1-5)得 $t=x/v$，可见 t' 轴是过原点、斜率为 $1/v$ 的直线. $\mathscr{R}'$ 系的 x' 轴该怎么画？x' 轴满足 $t'=0$，代入式(6-1-5)得 $t=vx$，可见 x' 轴是过原点、斜率为 v 的直线，和 t' 轴分居点画线的两侧且与该线夹角相等(见图 6-5). 这岂非表明 x' 轴与 t' 轴互不正交，从而导致 $\mathscr{R}'$ 与 $\mathscr{R}$ 系不平权？其实这是“时空图的欺骗”，是人们习惯于用欧氏度规想问题的结果. 事实上，注意到 $\{t', x', y', z'\}$ 也是洛伦兹系，自然有 $\eta_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial x')^b=0$，即 $(\partial/\partial t')^a$ 与 $(\partial/\partial x')^b$ 用闵氏度规衡量是正交的. $\mathscr{R}'$ 与 $\mathscr{R}$ 系的平权性没有被破坏. 当然，画图时一般要先选一个惯性系作基准并把它们的 t 轴和 x 轴分别画成竖直和水平，但选哪个系作基准则完全任意. 例如，假定选 $\mathscr{R}'$ 系为基准，所得时空图就如图 6-6，它虽与图 6-5 貌似不同，但实质一样.

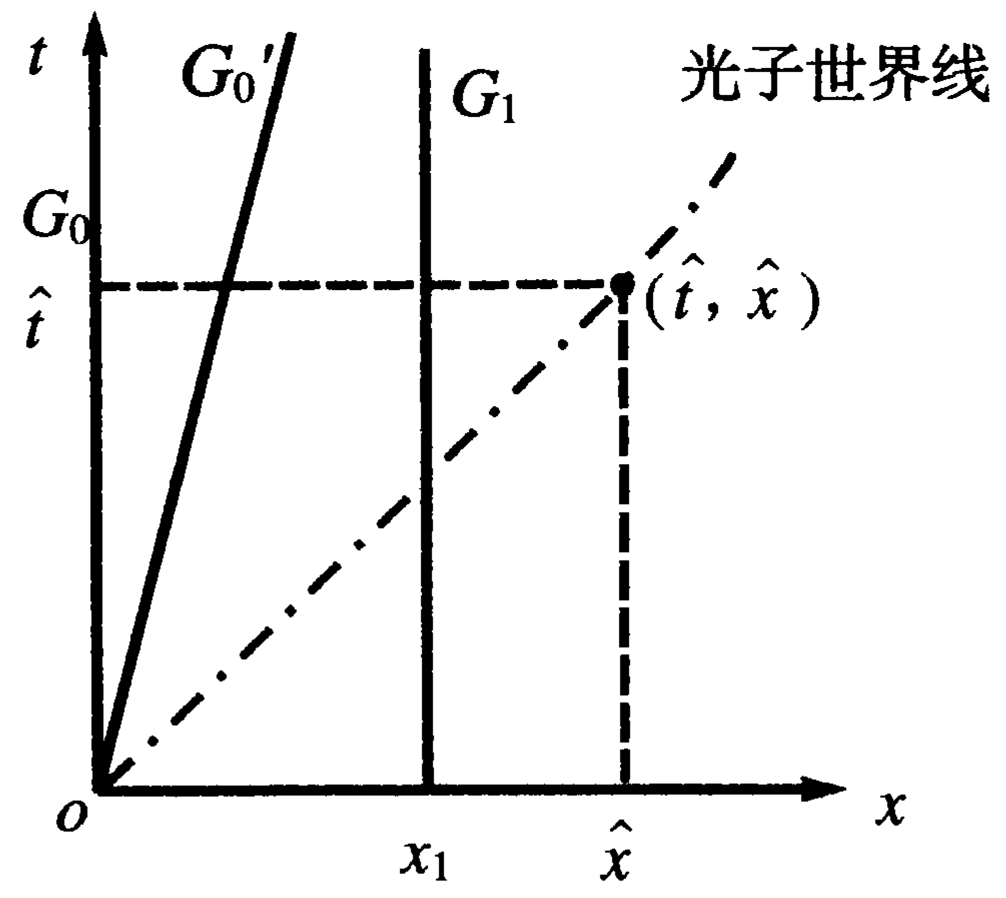


图 6-4　以惯性系 $\mathscr{R}$ 为基准的 2 维时空图

时空图的“欺骗性”不但体现在正交性上，还体现在曲线长度的判断中. 设 $p=(t,x)$ 为任一时空点，op 是联结 o 与 p 的直线段(见图 6-7)，其线长按闵氏度规为 $l_{op}=\sqrt{|-t^2+x^2|}$，可见双曲线 $-t^2+x^2=K$(常数)上各点与 o 所联直线段等长，例如 op 与 oq 等长，尽管直观看来(即按欧氏度规)不等. 图 6-7 中的双曲线称为**校准曲线**.

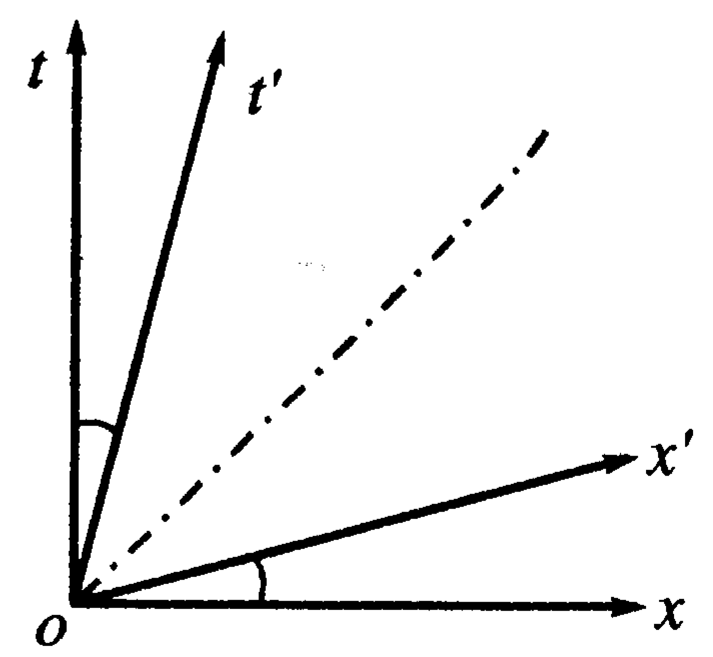


图6-5　x'与t' 轴对称地分居 45° 直线两侧

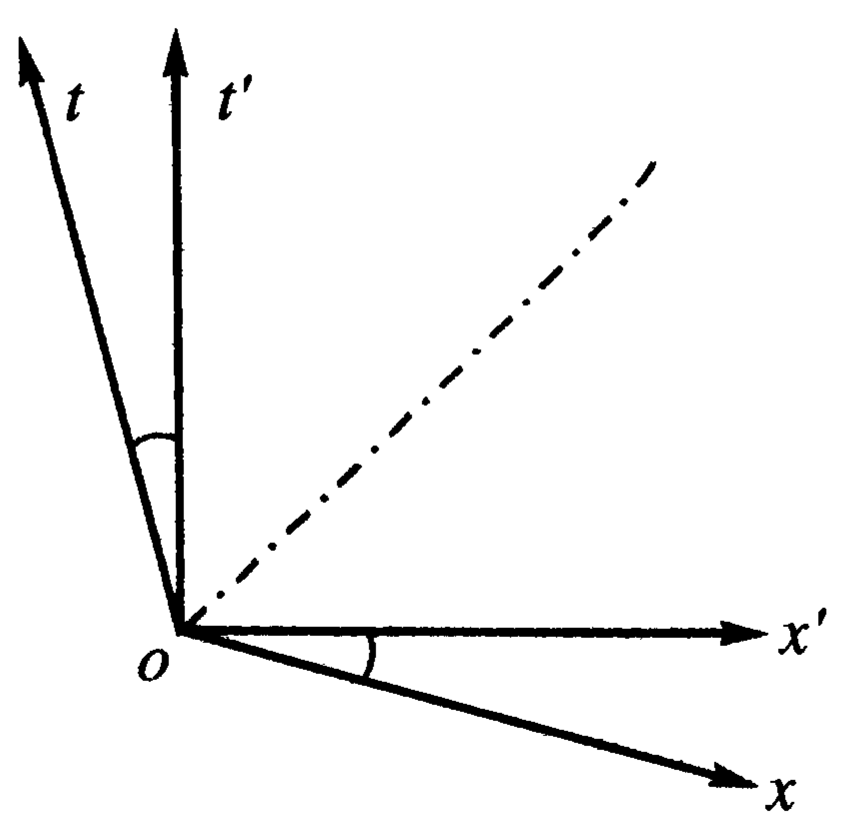


图 6-6　以$\mathscr{R}'$为基准的时空图，与图 6-5 等价

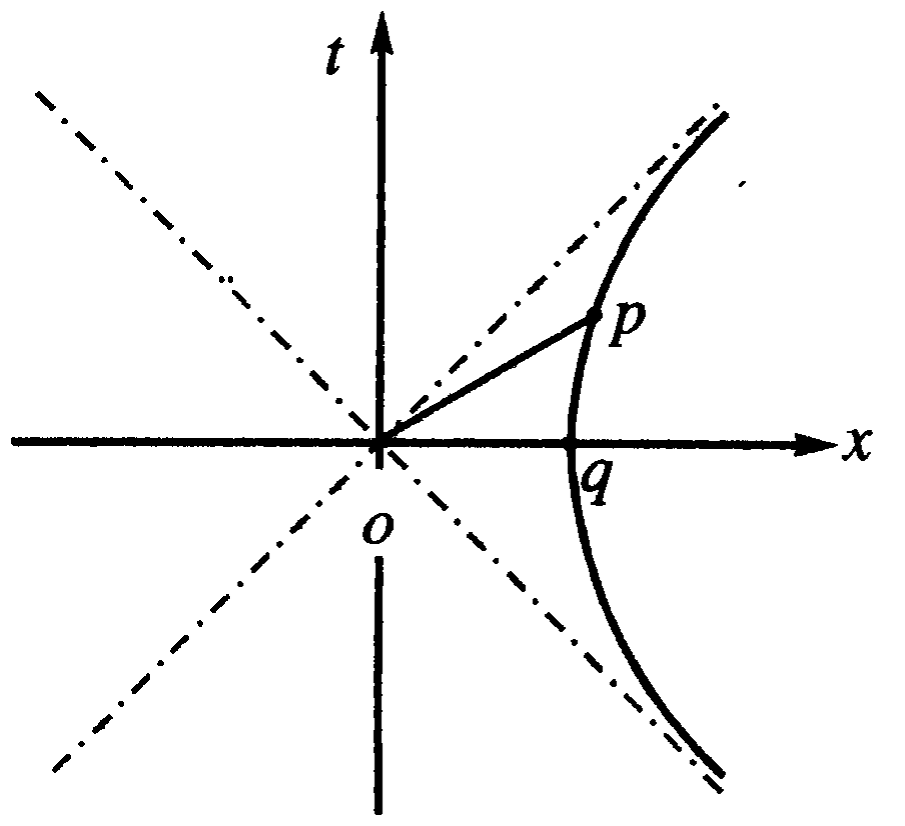


图 6-7　双曲线的点与 o 所联直线长度为常数

如果物理现象还涉及空间的第 2、3 维，以上的 2 维时空图就不够用．但是，即使采用立体画法，纸面上最多也只能表现 3 维，既然必须用一维代表时间，就只剩两维代表空间，因此 3 维空间势必有一维反映不出来(在图上被“压缩掉”)．幸好许多问题中有一维(甚至两维)不重要，或者问题有一定的对称性，压缩掉一维后仍不丢失实质内容．以人造卫星绕地球转动为例(见图 6-8)．地球表面本是个 2 维球面，但画图时有一维被压缩掉，所以每个时刻的地球表面由一个圆周(图中的 C)代表．近似认为地球做惯性运动并以它为画图基准，地面上每点的世界线便都是竖直线，它们构成一个圆柱面，叫做地球表面的**世界面**．图中的螺旋线则代表卫星的世界线，其倾斜程度反映卫星转动的快慢．

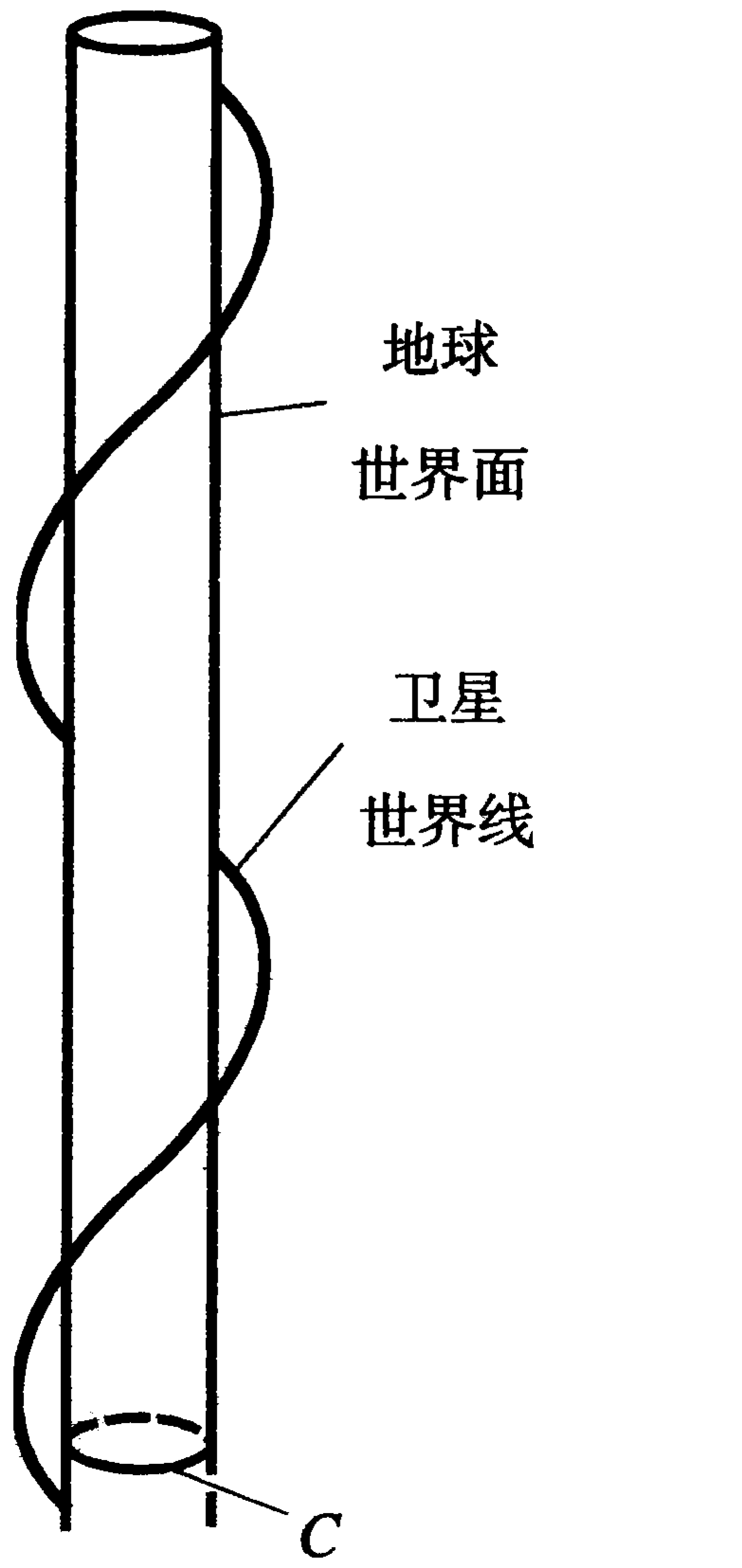


图 6-8　地球世界面(压缩掉一维)和卫星世界线

设$\mathscr{R}$ 是闵氏时空的惯性参考系，则与$\mathscr{R}$ 中所有观者世界线正交的 3 维平面(超平面) Σ_t 上各点有相同 t 坐标，所以称为$\mathscr{R}$ 系的一个同时面(见图 6-9)，代表$\mathscr{R}$ 系在 t 时刻的“全空间”．设 C 是Σ_t 上的曲线，则其上任一元段的 $\mathrm{d}t$ 为零，故闵氏线元

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

诱导出的线元为 $\mathrm{d}\hat{s}^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ ，即欧氏线元．可见惯性系$\mathscr{R}$ 在任一时刻的空间是 3 维欧氏空间，这正是狭义相对论 3 维表述所默认的．如果讨论另一惯性系$\mathscr{R}'$，由于它的观者世界线与$\mathscr{R}$ 系的观者世界线互不平行，$\mathscr{R}'$系的同时面与$\mathscr{R}$ 系的同时面自然不同．这可以看作同时性的相对性的缘由．

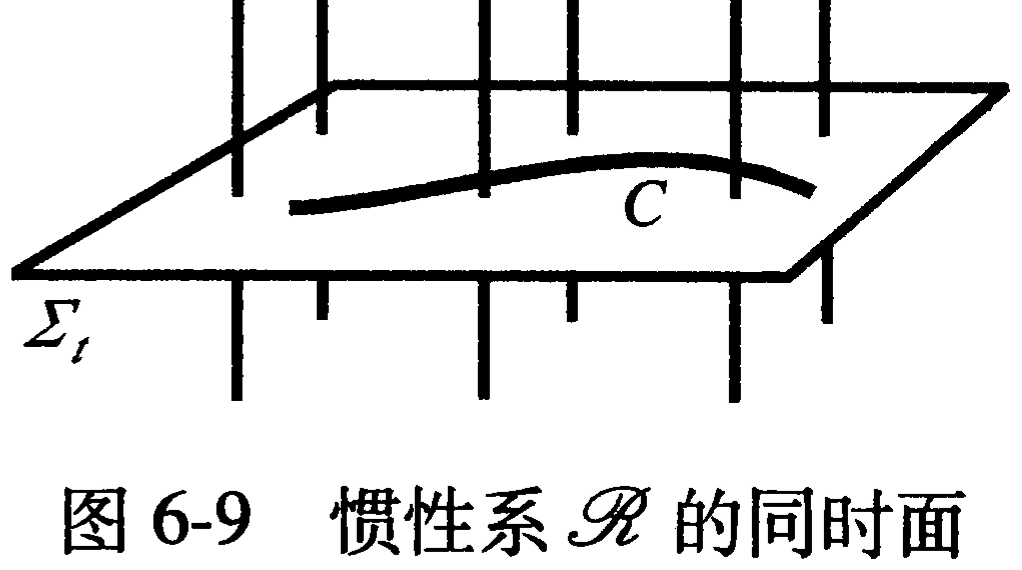


图 6-9　惯性系$\mathscr{R}$ 的同时面

6.1.6　狭义相对论与非相对论时空结构的对比

在非相对论物理学中时间和空间是第一手概念，人人都知道什么是时间和空间. 从历史的角度看，人们先有时间和空间概念，直至相对论创立后才逐渐建立时空概念. 许多人觉得时空不难理解，因为它“无非是时间加空间”. 然而，在相对论中时空是第一手概念，时间和空间则反而是派生的相对概念. “派生”是指只有借助于参考系把时空作“3 + 1”分解才得到时间和空间概念，“相对”是指同一时空存在着许多不同的 3 + 1 分解方案(图 6-5 就代表用参考系$\mathscr{R}$和$\mathscr{R}'$对闵氏时空所做的两种分解). 从 4 维几何的观点看来，相对论与非相对论物理学在时间、空间概念上的差别源于两者时空结构的不同. 非相对论物理学默认时空流形为$\mathbb{R}^4$,并具有某些内禀的附加结构. 其一就是存在一个称为**绝对时间**(absolute time)的光滑函数 $t:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$，使$\mathbb{R}^4$被分成无限多层，每层是一个等 t 面 Σ_t ($\mathbb{R}^4$ 中的一张超曲面，见图 6-10.)，称为**绝对同时面**(absolute simultaneity surface)，它有 3 维欧氏度规，代表 t 时刻的“整个 3 维空间”(详见选读 6-1-1). 同一 Σ_t 上的所有点代表同时发生于不同地点的事件，不同 Σ_t 上的点代表不同时的事件. 所谓绝对同时，是指不论哪个参考系看来都同时，这与相对论显然不同. 在狭义相对论中，某参考系认为同时的两事件，另一参考系就可能认为不同时. 狭义相对论只有相对同时面. 如果把同时面比喻为扑克牌，就可以说非相对论只有一副扑克牌(与参考系无关，所以说是绝对的)而狭义相对论有无数副扑克牌(取决于参考系，所以说是相对的). 这是两种理论的时空结构的重要区别.

下面再从事件因果联系的角度讨论两种时空结构的区别. 给定事件 $p\in\mathbb{R}^4$ 后，总可把 $\mathbb{R}^4-\{p\}$ 写成 3 个互相无交的子集 M_1, M_2, M_3 之并，即 $\mathbb{R}^4-\{p\}=M_1\cup M_2\cup M_3$，其中

$$M_1\equiv\{q\in\mathbb{R}^4-\{p\}\mid \text{存在先经历事件 } q \text{ 后经历事件 } p \text{ 的观者}\},$$

$$M_2\equiv\{q\in\mathbb{R}^4-\{p\}\mid \text{存在先经历事件 } p \text{ 后经历事件 } q \text{ 的观者}\},$$

$$M_3\equiv\{q\in\mathbb{R}^4-\{p\}\mid \text{不存在既经历事件 } q \text{ 又经历事件 } p \text{ 的观者}\}.$$

非相对论物理学默认子集 M_3 就是过 p 点的绝对同时面 Σ_t (去掉点 p)，而 M_2 和 M_1 则分别是 Σ_t 两侧的“上半个$\mathbb{R}^4$”和“下半个$\mathbb{R}^4$”(见图 6-11)，其物理意义是：若 $q\in M_2$，则说事件 q 发生于 p 的未来；若 $q\in M_1$，则说 q 发生于 p 的过去. 然而在狭义相对论中，由于观者世界线为类时线，M_2 和 M_1 分别是 p 点的未来光锥面(类光超曲面)和过去光锥面所围的子集(但不含光锥面上的点)，M_3 则比图 6-11 的 3 维子流形 Σ_t “大”得多，它包括 M_1 和 M_2 之外的所有点(含光锥面上的点)，见图 6-12.

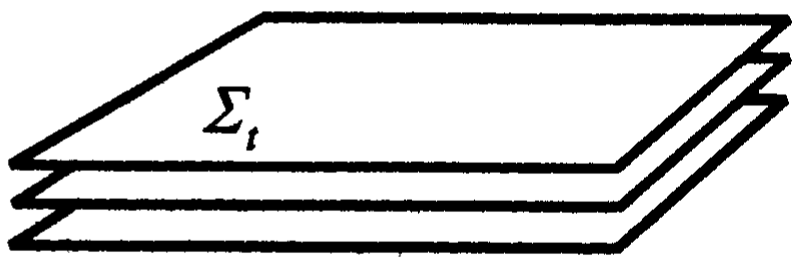


图 6-10　非相对论物理学的绝对同时面

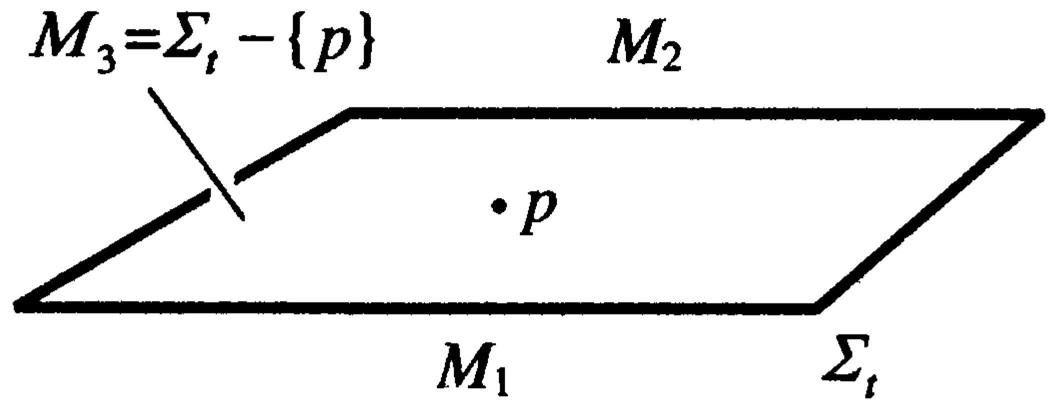


图 6-11　非相对论物理学的时空结构. 过 p 点的绝对同时面是 3 维面，其上、下代表 p 的未来和过去

设 $q\in M_2$，则从 p 到 q 的测地线在 p 点的切矢 T^a 必为类时. 同理，若 $q'\in M_1$，则从 p 到 q' 的测地线在 p 点的切矢 T'^a 也类时. 但 T^a 和 T'^a 在物理上毕竟很不相同：T^a 指向未来而 T'^a 指向过去(见图 6-13). 在相对论中就把 T^a 和 T'^a 分别称为**指向未来**(future directed)**类时矢量**和**指向过去**(past directed)**类时矢量**. p 点的类时矢量要么是指向未来的，要么是指向过去的. 类似地可定义指向未来和指向过去的(非零)类光矢量.

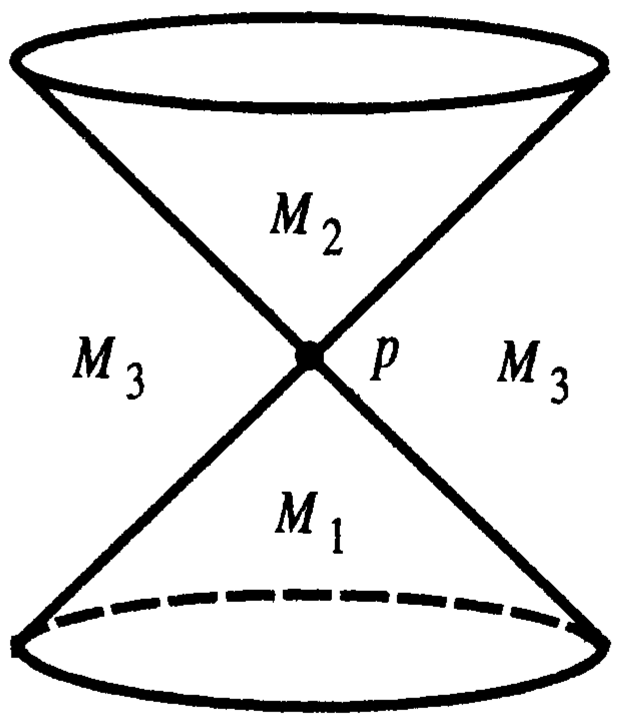


图 6-12　狭义相对论的时空结构. 没有绝对同时面. p 的未来和过去比图 6-11 的对应子集小得多，与 p 无因果联系的子集 M_3 则比图 6-11 的 M_3 大得多

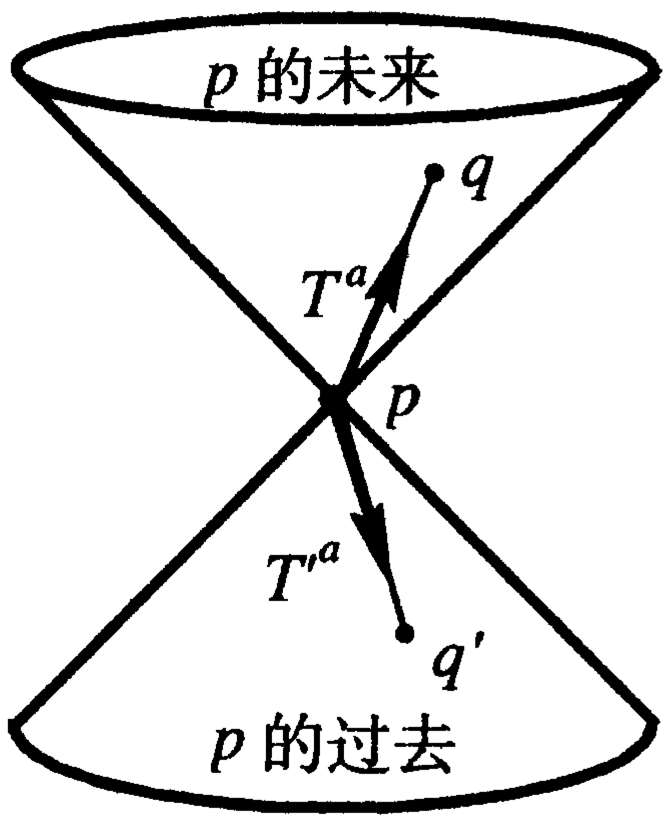


图 6-13　类时矢量 T^a 指向未来而 T'^a 指向过去

[选读 6-1-1]

把狭义相对论和广义相对论物理学与非相对论物理学的时空结构做一对比是很有教益的. 根据广义相对论，引力的实质是 4 维时空的弯曲(详见§7.1). 狭义相对论研究引力不存在(可忽略)时的物理学，因此背景时空是 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. 广义相对论研究有引力时的物理学，其背景时空是任意(连通) 4 维流形 M 配以弯曲的度规场 g_{ab}，即 (M, g_{ab}). 非相对论物理学背景时空可通过用 4 维语言对牛顿引力论重新表述而得以认识. 按照牛顿引力论，空间的引力场由引力势 ϕ 描述，它同质量密度 μ 的关系满足泊松方程

$$\nabla^2\phi = 4\pi\mu . \tag{6-1-8}$$

除引力外不受力的质点叫**自由质点**. 单位质量的自由质点遵从如下的运动方程：

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=-\frac{\partial\phi}{\partial x^i},\qquad i=1,\ 2,\ 3\ ,\tag{6-1-9}$$

其中 t 是牛顿绝对时间，x^i 是质点的空间伽利略坐标(即数学上的笛卡儿坐标). 给定初始条件后，式(6-1-9)的解 $x^i(t)$ 可看作空间中以 t 为参数的曲线的参数表达式，该曲线代表该质点的空间运动轨迹. 例如，地面附近斜抛质点的轨迹为抛物线. 嘉当(Cartan)等人把以上事实用几何语言重新表述，要点如下[参见 Misner et al.(1973)第 12 章].

牛顿引力论的背景时空叫**牛顿时空**，由流形$\mathbb{R}^4$及其上的如下附加内禀结构组成：(a)存在一个称为**绝对时间**的、满足适当条件的光滑函数 $t:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$；(b)在$\mathbb{R}^4$上存在导数算符 ∇_a ，它在某特定坐标系 $\{x^\mu\}$ (其中 $x^0\equiv t$)的克氏符满足

$$\Gamma^i{}_{00}=\partial f/\partial x^i,\qquad i=1,\ 2,\ 3\,(f\ 为\mathbb{R}^4\ 上某函数),\qquad 其他\ \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}=0\ .\tag{6-1-10}$$

由这两点出发可做下面的讨论：

(1)绝对时间的存在使时空流形$\mathbb{R}^4$具有一种绝对的"分层(stratification)结构"：$\forall p\in\mathbb{R}^4$，存在一个等 t 面 Σ_t ($\mathbb{R}^4$ 中的超曲面)使 $p\in\Sigma_t$ (见图 6-10)，代表 t 时刻的"整个 3 维空间"，称为一个**绝对同时面**. 事件 p，q 称为同时的，若 $t(p)=t(q)$.

(2)设 $\gamma(\lambda)$ 是牛顿时空中的任一测地线(λ 为仿射参数)，则其在满足式(6-1-10)的坐标系的参数表达式 $x^\mu(\lambda)$ 服从方程组

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0\ ,\qquad \mu=0,1,2,3\tag{6-1-11}$$

令 $\mu=0$ ，由 $\Gamma^0{}_{\nu\sigma}=0\ (\nu,\sigma=0,1,2,3)$ 便得 $0=d^2x^0/d\lambda^2=d^2t/d\lambda^2$ ，因而

$$t=\alpha\lambda+\beta\ ,\qquad \alpha,\beta\ 为常数.\tag{6-1-12}$$

上式表明绝对时间 t 可充当任一 $\alpha\neq0$ 的测地线的仿射参数. 再令式(6-1-11)的 $\mu=i$ ，由式(6-1-12)及 $\Gamma^i{}_{00}=\partial f/\partial x^i$ 、$\Gamma^i{}_{jk}=0\ (i,j,k=1,\ 2,\ 3)$ 得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\frac{\partial f}{\partial x^i}=0,\qquad i=1,2,3.\tag{6-1-9'}$$

与式(6-1-9)对比可知，只要把 f 解释为引力势 ϕ，把 x^i 解释为伽利略坐标，则牛顿时空中以绝对时间 t 为仿射参数的测地线对应于自由质点的世界线.

(3)用式(6-1-10)代入(3-4-20′)和(3-4-21)不难求得 ∇_a 的黎曼张量和里奇张量的坐标分量如下(f 已改为 ϕ)：

$$R_{0i0}{}^j=-R_{i00}{}^j=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}\ ,\qquad 其他\ R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma=0\ ,\tag{6-1-13}$$

$$R_{00}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\nabla^2\phi=4\pi\mu\,,\qquad 其他\ R_{\mu\nu}=0\,. \tag{6-1-14}$$

式(6-1-13)表明牛顿时空并不平直(对比：根据爱因斯坦理论，有引力的时空也不平直.). 然而，∇_a 在每一绝对同时面 Σ_t 上诱导出的导数算符 $\hat{\nabla}_a$ 却是平直的[式(6-1-10)表明 $\Gamma^i{}_{jk}=0,\quad i,j,k=1,\ 2,\ 3$，其相应的 3 维黎曼张量为零.]. 这也可从另一角度印证：当式(6-1-12)的 α 为零时，测地线 $\gamma(\lambda)$ 躺在 $t=\beta$ 的绝对同时面 Σ_β 上，由 $\Gamma^i{}_{jk}=0$ 、式(6-1-11)及 $t=\beta$ 得 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2=0$，从而

$$x^i(\lambda)=\alpha^i\lambda+\beta^i\,,\qquad \alpha^i,\beta^i\ 为常数. \tag{6-1-15}$$

这是线性方程组，只要把 x^i 解释为 Σ_β 的笛卡儿坐标，则式(6-1-15)表明 Σ_β 上的测地线为直线. 实际上，只要用 x^i 依下式定义 Σ_β 上的欧氏度规

$$\delta_{ab}=\delta_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b\,,$$

则 $\{x^i\}$ 系的普通导数算符 ∂_a 自然满足 $\partial_a\delta_{bc}=0$，其在 $\{x^i\}$ 系的克氏符当然为零，即

$$\Gamma^i{}_{jk}=0,\qquad i,j,k=1,\ 2,\ 3\,.$$

所以 ∂_a 正是前面提到的由 ∇_a 在 Σ_β 上诱导的 $\hat{\nabla}_a$. 可见每一绝对同时面 Σ_t 是一个 3 维欧氏空间，物理上常用的伽利略坐标 x^i 就是该空间的笛卡儿坐标. $\{t,x^i\}$ 亦称 4 维伽利略坐标系.

一个自然的问题是：可否给 $\mathbb{R}^4$ 定义一个与 ∇_a 适配的度规？答案是否定的：只要存在引力，能够找到的“度规”必定退化[上指标“度规”的号差为(0, +, +, +)]. 本选读为没有度规却有导数算符(因而有曲率概念)的流形的物理应用提供了一个实例.

[选读 6-1-1 完]

§6.2　典型效应分析

6.2.1　“尺缩”效应

一个质点在 3 维语言中是空间的一点，在 4 维语言中是时空的一条类时线(世界线). 同理，一把尺子在 3 维语言中是空间的一段直线，在 4 维语言中是一个由尺上各点世界线组成的 2 维面(世界面，见图 6-14). 于是，在 3 维语言中非常明确的尺长概念在 4 维语言中变得含糊：哪条线的线长才是尺长？对熟悉 4 维语言的人来说，尺子本来就不是 1 维的，它是个 2 维对象. 这是一个绝对的对象，与参考系、坐标系以及观者无关. 为什么尺子在普通语言(3 维语言)中是 1 维对象？因为人们站在自己所在参考系的立场上看问题，这种看法一开头就是相对的. 惯

性系$\mathscr{R}$的每一同时面Σ_t既然代表t时刻的全空间，它与尺子世界面的交线自然代表"$\mathscr{R}$系测得(认为)的、t时刻的尺子"，例如$t=0$的同时面与尺子世界面的交线段oa便是$\mathscr{R}$系在$t=0$时测得的尺子. 设o，a点之间的空间坐标差为Δx，Δy，Δz，则$\mathscr{R}$系测得的尺长为$(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$，即直线段$oa$的线长. [既可说是欧氏线长，这时是把$oa$看作 3 维欧氏空间(同时面)上的直线；也可说是闵氏线长，这时是把oa看作 4 维闵氏时空中的直线. 同时面上t为常数保证了两种看法的一致性.]. 然而同时是相对的，$\mathscr{R}'$系的同时面$t'=0$与同一尺子世界面的交线(直线段ob)代表"$\mathscr{R}'$系测得的、$t'=0$时刻的尺子"，故尺长应为直线段ob的线长. 既然oa与ob是时空中两个不同的直线段，它们不等长就毫不奇怪. 因此，"尺缩"效应显然不是什么"弹性"之类的物理机制在起作用(根本没有任何"收缩"发生)，其本质原因无非是：虽然尺子只有一把(尺子世界面只有一个)，但不同惯性系有不同的同时面导致不同惯性系测到不同的 1 维尺子(1 维尺是相对的)，而不同的 1 维尺有不同尺长当然不足为怪. "尺缩"效应不过类似于"盲人摸象"而已.

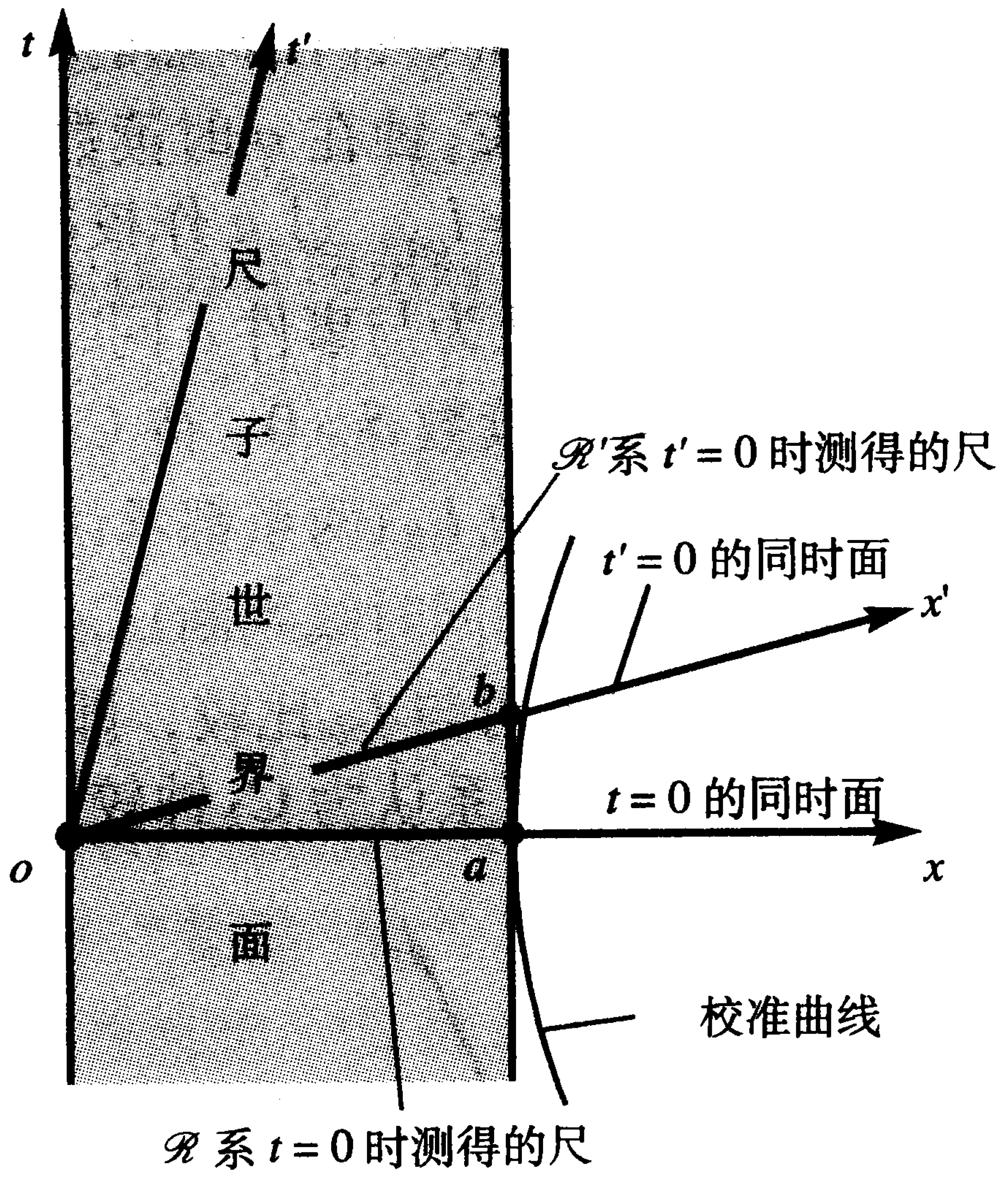


图 6-14　尺子世界面是绝对的，直线段oa和ob分别是惯性系$\mathscr{R}$和$\mathscr{R}'$在$t=0$和$t'=0$时测得的 1 维尺

因$\mathscr{R}$系认为尺子静止而$\mathscr{R}'$系认为尺子运动，直线段oa和ob的线长l_{oa}和l_{ob}分别是静、动尺长. 所余问题无非是比较l_{oa}和l_{ob}. 直观看来有$l_{ob}>l_{oa}$，似乎动尺较长！然而这也是时空图的"欺骗". 过a作校准曲线便知$l_{ob}<l_{oa}$，可见动尺较短. 欲求两者之间的定量关系，只须计算两段线长. 线长是绝对量，计算结果同所选坐标系无关. 为便于比较，我们用同一坐标系(与$\mathscr{R}$相应的惯性系$\{t, x, y, z\}$)计算. 注意到o点在该系的坐标为(0, 0, 0, 0)，由闵氏线元在该系的表达式得$l_{oa}=\sqrt{x_a{}^2-0}=x_a$，$l_{ob}=\sqrt{x_b{}^2-t_b{}^2}$. 由式(6-1-5)又知$x'$轴的方程为$t=vx$，故$t_b=vx_b$，由图 6-14 可以看出$x_b=x_a$，代入上式便得$l_{ob}=\gamma^{-1}x_b=\gamma^{-1}x_a=\gamma^{-1}l_{oa}$. 这正是"尺缩"效应中熟知的定量关系.

6.2.2 "钟慢"效应

考虑惯性系$\mathscr{R}$的两个标准钟C_1，C_2和惯性系$\mathscr{R}'$的一个标准钟C'. 三钟的世

界线示于图 6-15. 从$\mathscr{R}$系看来，C_1，C_2钟静止而 C′钟运动. 开始时 C′钟与C_1钟重合(事件 o)，两钟调成指零. 一段时间后，C′钟与C_2钟重合(事件 b). 由“固有时间等于线长”可知 C′钟在 b 点的读数等于 l_{ob}. C_2钟与C_1钟同属$\mathscr{R}$系，x 轴是$\mathscr{R}$系的同时线，既然C_1钟在 o 时读数为零，C_2钟在 c 时读数也应为零. 故C_2钟在 b 时的读数等于$l_{cb}=l_{oa}$. 过 a 作校准曲线可知$l_{ob}<l_{oa}=l_{cb}$，故$\mathscr{R}$系认为 C′钟(动钟)较慢. 但$\mathscr{R}'$系认为与事件 o 同时的是事件 d (见图 6-16)而非 c. 既然C_2钟在 c 指零，在 d 就必有读数$\delta>0$. 待C_2钟运动到与 C′钟重合时(事件 b)，虽然 C′的读数 l_{ob} 小于C_2的读数 l_{cb} (两系都承认这一事实)，但不说明 C′钟较慢，因在 C′读数为零的同时(按$\mathscr{R}'$的同时线判断) C_2读数已是δ(C_2做了“偷跑”)，故应先从C_2在 b 的读数 l_{cb} 减去δ再与 l_{ob} 比较，即$\mathscr{R}'$认为应比较 l_{db} 与 l_{ob}. 由过 b 的校准曲线知$l_{ob}>l_{oe}=l_{db}$，故$\mathscr{R}'$系认为C_2钟较慢，仍是动钟较慢. 图 6-17 是以上讨论的 3 维

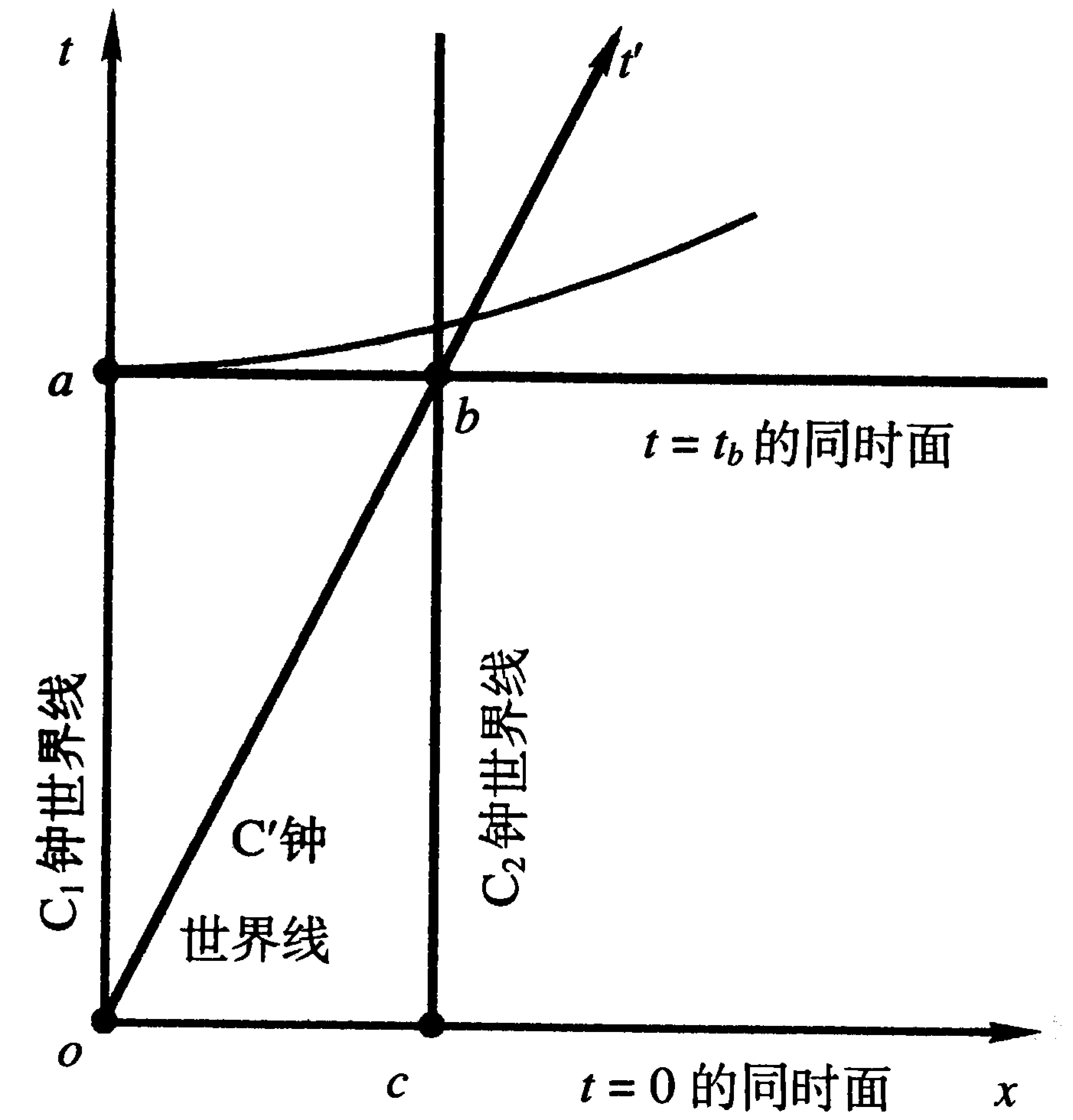


图 6-15　$\mathscr{R}$系的钟根据同时面 $t=t_b$ 和 $t=0$ 认为 C′钟较慢

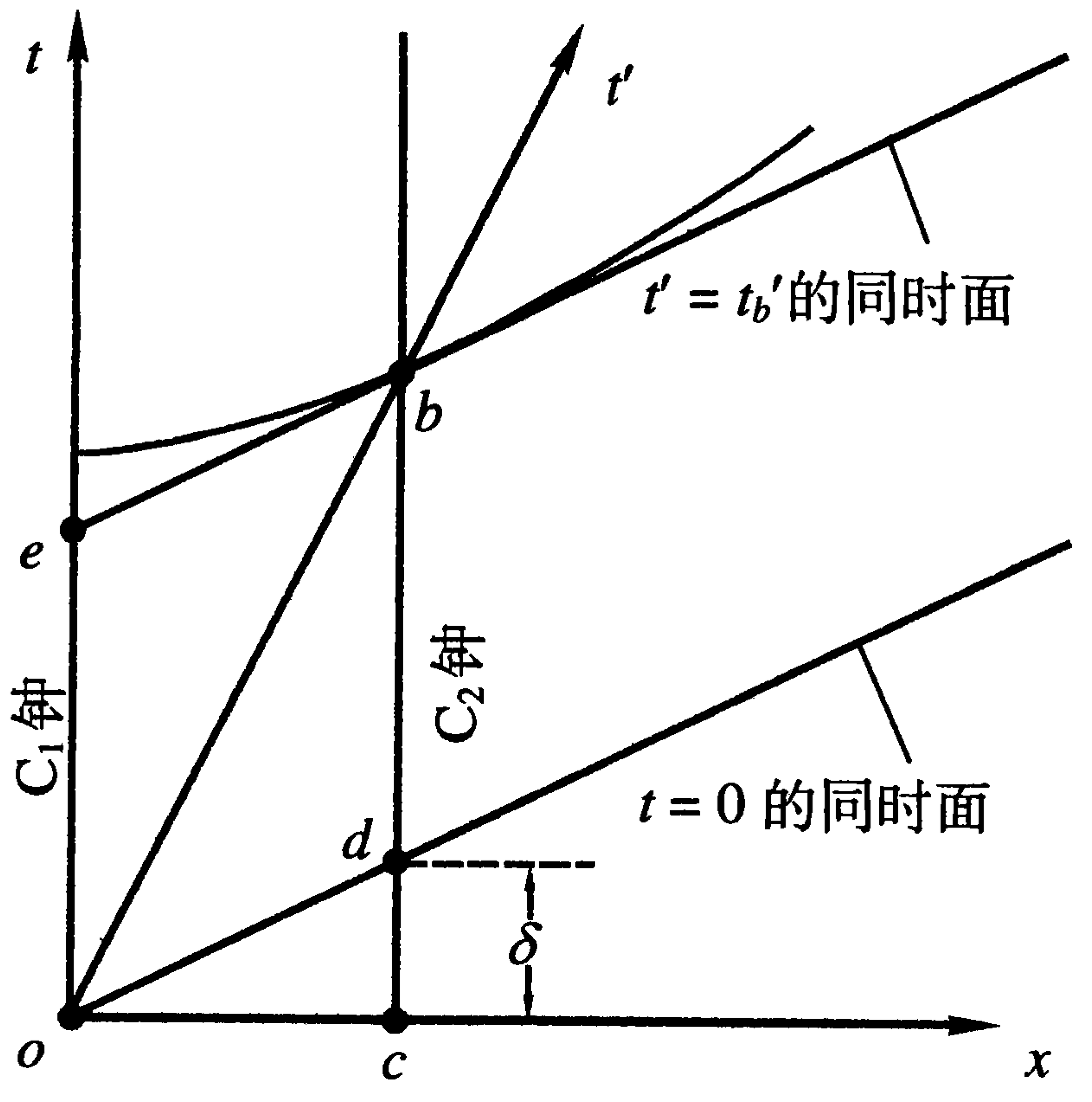
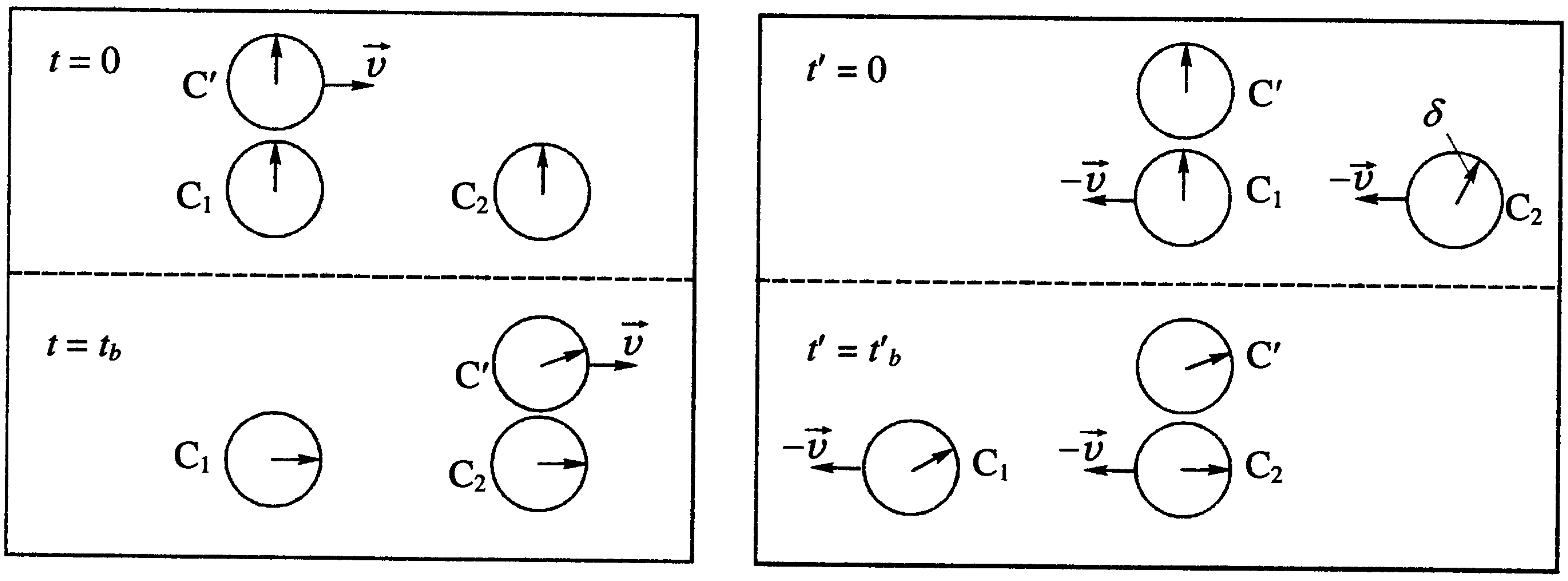


图 6-16　$\mathscr{R}'$系的钟根据同时面 $t'=t'_b$ 和 $t'=0$ 认为C_2钟较慢



(a) $\mathscr{R}$系看法　　　　(b) $\mathscr{R}'$系看法

图 6-17　惯性系$\mathscr{R}$和$\mathscr{R}'$的 3 维看法

图示，其中(a)和(b)分别为$\mathscr{R}$ 和$\mathscr{R}'$系的 3 维看法. 由此可再次看出 3 维看法依赖于参考系，只有时空图以及用 4 维语言的表述才与参考系无关.

仿照动、静尺长定量关系的推导方法，注意到$x_b = v t_b$，不难由图 6-15 求得$\mathscr{R}$ 系测得的动、静钟所走时间的定量关系为$l_{ob} = \gamma^{-1} l_{oa}$.

以上讨论清楚地表明，同“尺缩”效应中没有任何东西真正收缩一样，“钟慢”效应中也没有任何钟的走时率真正变小(都坚持标准钟的走时率，即读数差等于线长．)．应该强调的是，不同惯性系的标准钟读数的比较(简称“比钟”)方式是多种多样的，不同方式导致不同结果，因此在讨论比钟问题时必须事先明确约定比钟方式的每一细节. 上述“钟慢”效应的比钟方式虽为人们所熟知，却只是众多比钟方式的一种，其特点在于涉及三个钟 C_1，C_2 和 C′，其中两个是同一惯性系内事先经过同步的钟. 如果没有 C_2，虽然同样可从图 6-15 知道$l_{ob} < l_{oa}$，却无从得出“C_1 钟觉得 C′钟慢”的结论，关键在于“觉得”两字无从谈起. 事件 b 不在 C_1 钟的世界线上，C_1 钟不能对它有任何直接感觉. C_1 钟对 b 进行测量的唯一办法是接收从 b 发来的光信号(或其他信号)，而这就涉及光的传播时间所带来的问题(不是不能这样做，而是这样做时必须考虑这一问题.)．其实，借用 C_2 钟得出“C′钟变慢”的结论时就已巧妙地发挥了光信号的“使者”作用，因为在把 C_2 钟与 C_1 钟调整同步时已经用到了光信号(见 6.1.4 小节). 总之，如果不用 C_2 钟，C_1 和 C′就无法用上述方式比钟，或说上述比钟方式没有物理意义. 在只有两钟 C 和 C′时倒是存在很有物理意义的比钟方式. 例如，图 6-18 表示携带 C 钟的观者 G 采取如下办法比钟：他在时刻 a 用左右两眼分别看钟 C 和 C′. 所谓在时刻 a“用右眼看 C′”是指右眼在时刻 a 收到 C′钟在某时刻 e 发来的光(光子从 e 经指向未来类光测地线到 a). 设两钟在 o 时都指零，则 C 钟在 a 点的读数等于l_{oa}，C′钟在 e 点的读数等于l_{oe}. 由于$l_{oe} < l_{oa}$，观者 G 将同样得出“动钟较慢”的结果，区别在于慢的程度比用图 6-15 的方式更甚. 为定量计算慢的程度，可过 e 作水平线交 C 钟世界线于 f(见图 6-19). 令$\tau \equiv l_{oa}$，$\tau' \equiv l_{oe}$，$p \equiv l_{of}$，$q \equiv l_{fa}$，则$l_{ef} = q$. 由 $p = \gamma \tau'$ (普通钟慢效应的定量关系)以及两钟相对速率 u 的几何表达式 $u = q/p$ (C 钟认为 C′钟在时间 p 内的运动距离为 q)易得

$$\tau' = \sqrt{(1-u)/(1+u)}\,\tau . \tag{6-2-1}$$

甚至可以举出这样的比钟方式(见图 6-20)，它导致“动钟较快”！设 C 和 C′钟在 o 点都指零，则观者 G 在时刻 a 用两眼分别看 C 和 C′钟都得负的读数. 由图易见$l_{oa} < l_{oe}$，故 C′钟的读数比 C 钟的读数负得更甚. 于是 G 将认为“动钟较快”. 这个乍听似乎荒谬的结论其实无可非议，它不过是图 6-20 的特定比钟方式的结果. 因此，讨论比钟问题时必须事先说明比钟方式的每一细节，而为此最好先画时空图.

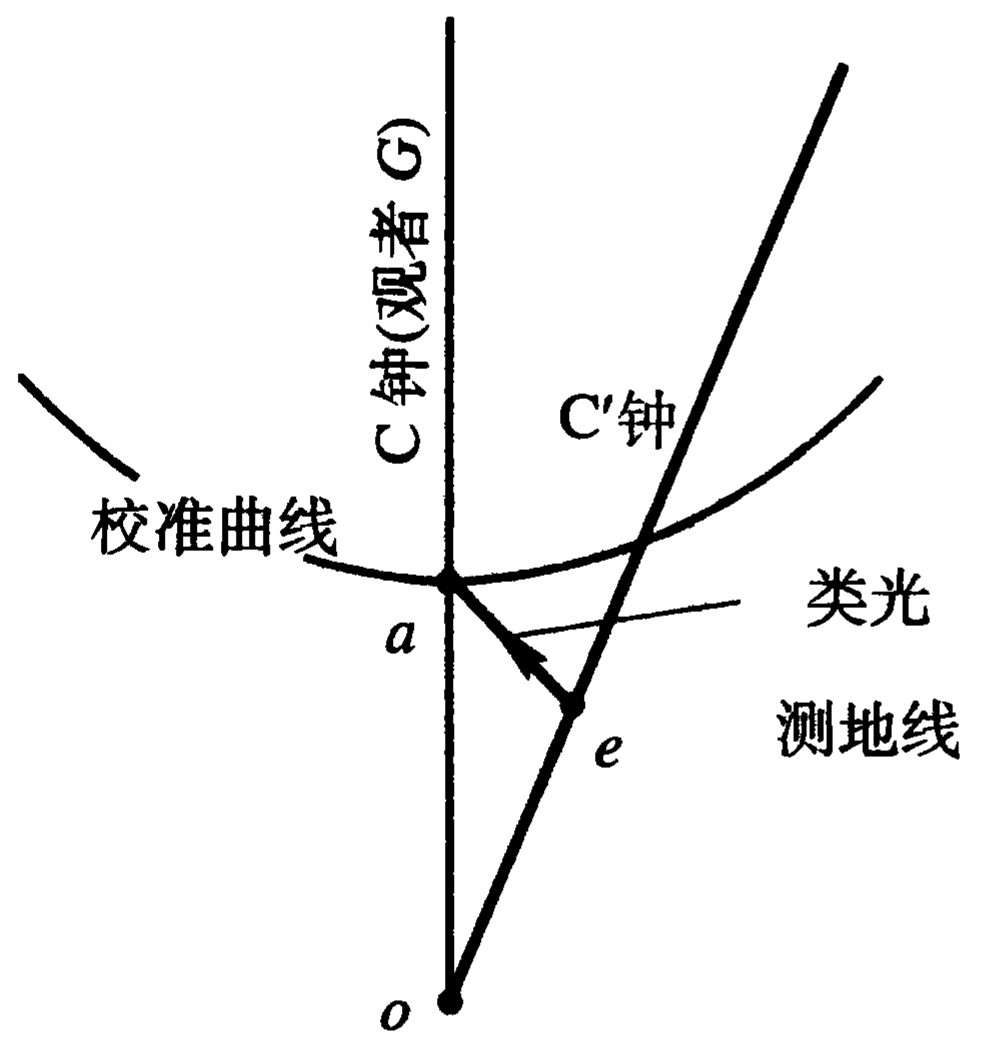


图6-18　G在a时左眼看自己的钟C，右眼看动钟C′，发现动钟更慢

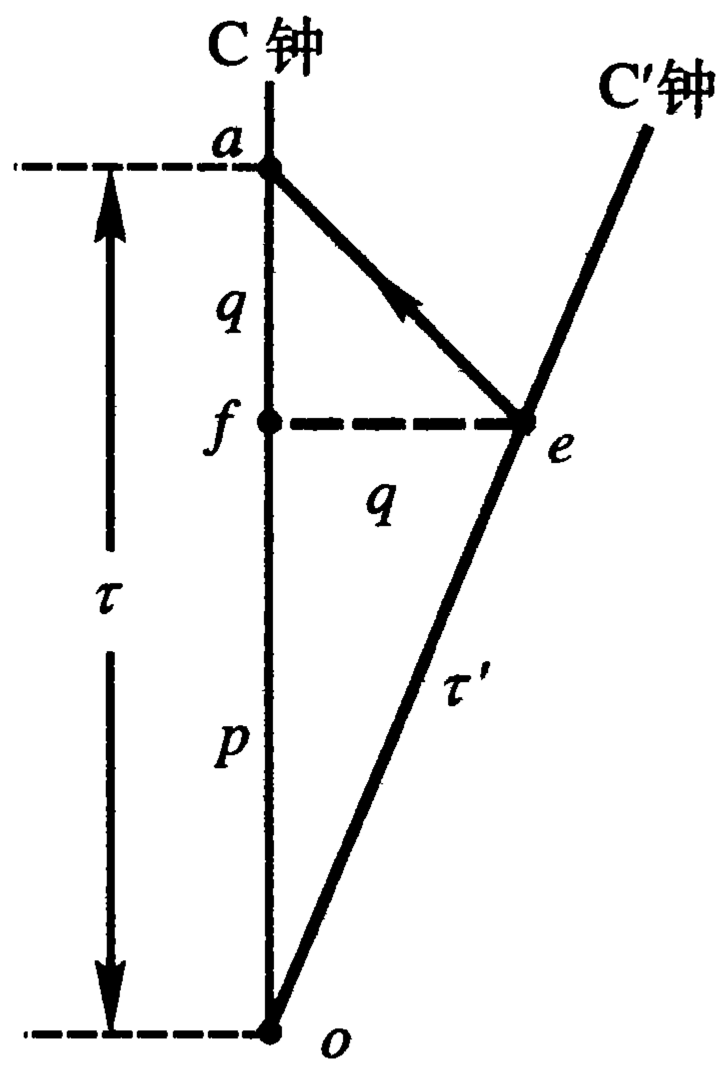


图6-19　求τ′与τ关系的简捷几何方法

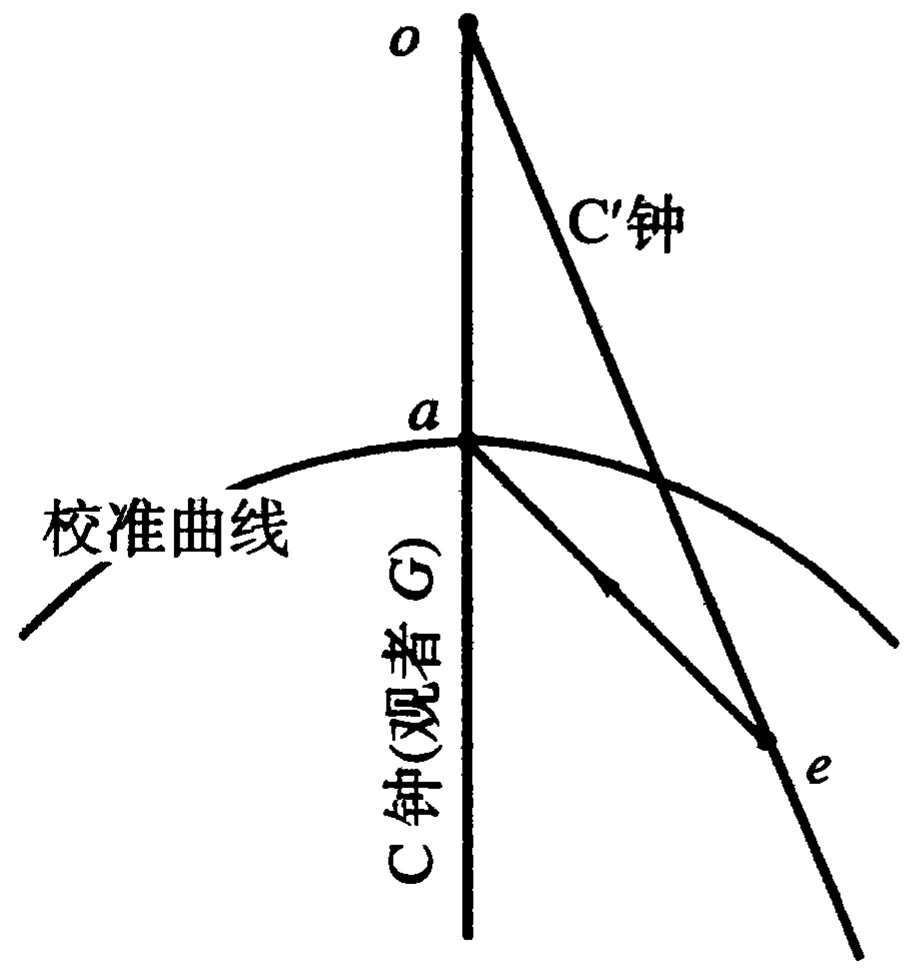


图6-20　G在a时左眼看自己的钟，右眼看C′钟，发现动钟较快

以上各例只涉及 1 维空间．下面是涉及 2 维空间的一例[郭硕鸿(1995)P.290 题 5]．

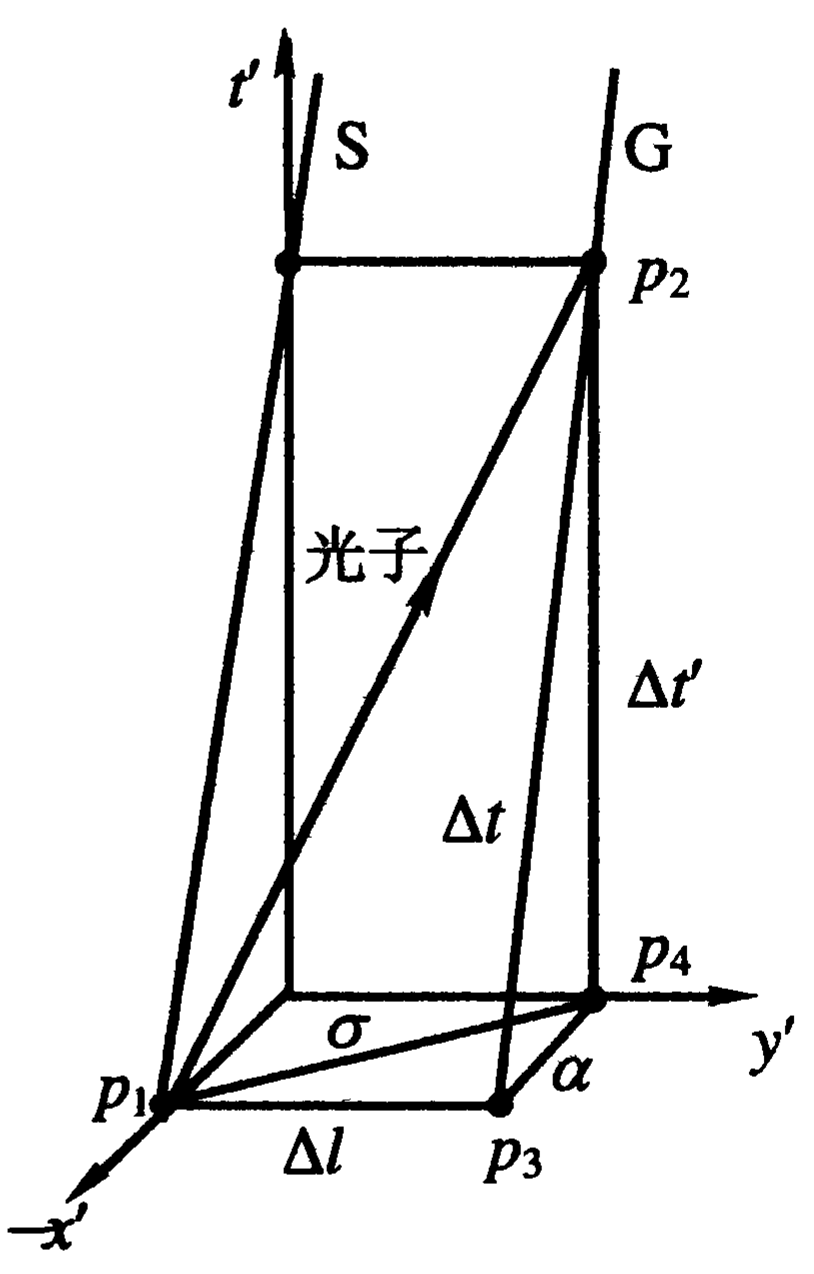


图6-21　例 1 用时空图

例 1　光源 S 与接收器 G 静止于惯性系$\mathscr{R}$中，两者静止距离为 Δl. S-G 装置浸在均匀无限的液体介质(静止折射率为 n)中．设液体沿垂直于 S-G 连线的方向相对于$\mathscr{R}$以常速率 u 流动，求光讯号从 S 到达 G 所经历的时间 Δt ($\mathscr{R}$系测得)．

解　把与液体相对静止的惯性系记作$\mathscr{R}'$．以$\mathscr{R}'$为基准画 3 维时空图(见图 6-21)，其中 p_1 和 p_2 代表光子从 S 发出和到达 G 的事件，直线段 p_1p_2 便代表光子的运动过程，$\mathscr{R}$和$\mathscr{R}'$系认为此过程所经历的时间 Δt 和 $\Delta t'$ 分别等于直线段 p_3p_2 和 p_4p_2 的闵氏线长(世界线 S 可被选作$\mathscr{R}$系的 t 轴)．直线段 p_1p_3 的线长显然就是 Δl. 再以σ和α分别代表直线段 p_1p_4 和 p_3p_4 的线长，则易见

$\Delta t=\gamma^{-1}\Delta t'$，其中 $\gamma\equiv(1-u^2)^{-1/2}$（“钟慢”效应），

$u=\alpha/\Delta t'$ ($\mathscr{R}'$认为 G 以速率 u 在 $\Delta t'$ 内走了距离α)，

$\sigma^2=(\Delta l)^2+\alpha^2$ (3 维欧氏空间中的勾股定理)，

$1/n=\sigma/\Delta t'$ (静止介质中光速各向同性，其值为 $1/n$)．

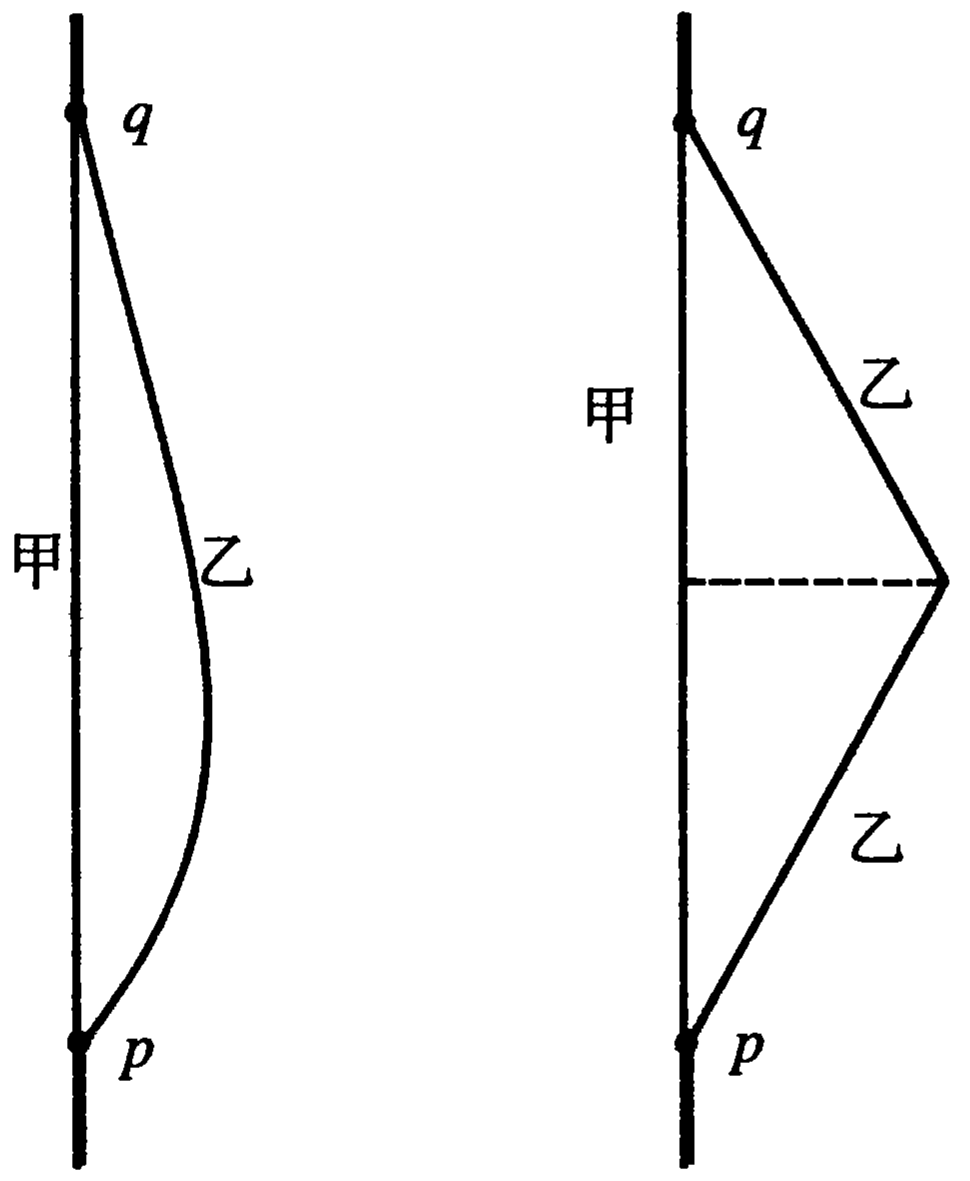
联立解得

$$\Delta t=\sqrt{\frac{1-u^2}{n^{-2}-u^2}}\,\Delta l\,.$$

[解毕]

6.2.3　孪子效应(孪子佯谬)

图 6-22(a)是孪子效应的时空图，两曲线分别是孪生子甲、乙的世界线. 甲线为竖直线表明甲守在家中(惯性观者)，乙线为非测地线表明乙外出做太空遨游并返回. p，q 两点分别代表分手和重逢事件. 已知分手时两人年龄相等，重逢时年龄是否还等？如果不等，孰大孰小？这无非是甲乙两人介于 p，q 之间的固有时间的比较问题，也就是甲乙两线介于 p，q 之间的线长 $l_{甲}$ 和 $l_{乙}$ 的比较问题. 因为闵氏时空中两点间的类时测地线是该两点间类时线的最长者(见选读 3-3-1 前的一段)，所以 $l_{甲} > l_{乙}$，可见重逢时乙比甲年轻. 图 6-22(b)是孪子效应的最简单的例子(乙的世界线是两条类时测地线组成的折线)，借助“钟慢”效应的定量计算易见 $l_{甲} = \gamma\, l_{乙} > l_{乙}$.



(a) 时空图　　(b) 最简单的一例

图 6-22 孪子效应

以上就是孪子效应的实质性内容. 问题本来就是如此简单. 然而，人们在相对论发展的早期对有关问题尚欠深刻认识，孪子效应在一段时间内曾被视为悖论(paradox). 对此的争论竟然迟至 1957~1958 年还曾再掀高潮(虽然若干有识之士早已有清晰理解)，而且文章竟发表在《Nature》、《Discovery》和《Science》等重要刊物上. 争论双方以物理学家 McCrea 和物理学家兼哲学家 Dingle 为代表人物. Dingle 认为，根据相对论，一切都是相对的，因此孪子重逢时应有相同年龄. McCrea 则针锋相对地指出，相对论并不认为一切都是相对的，孪子乙有加速而甲没有，正是这一区别导致重逢时年龄不同. 随着研究的深入，特别是几何语言的引进，国际相对论界对孪子问题的实质早已取得如本小节开始时所述的共识[例如，可参阅 Sachs and Wu(1977)P.42,43；Wald(1977)P.25,26；Misner et al.(1973)P.167.]. 应该特别强调的是，许多人顾名思义地以为“在相对论中一切都是相对的”，这是一种极其有害的误解.

孪子效应已于 1971 年被实验所证实，当然不是对人而是对铯原子钟，有兴趣的读者可参阅 Hafele and Keating(1972)，并完成本章习题 10.

下面再回答几个与孪子佯谬有关的常见问题.

问　“钟慢”效应的结论是对双方平等的：甲钟认为乙钟慢，乙钟认为甲钟慢. 为什么孪子效应的结论对双方不平等(谁都认为乙比甲年轻)？

答　因为两种效应的前提不同. 在“钟慢”效应中，两个观者都做惯性运动，

由于惯性系平权，结论自然对双方平等. 但在孪子效应中有一方不做惯性运动(世界线不是测地线)，否则分手后不会重逢. 这个前提本身就确立了双方的不平等地位，因而结论是一边倒的.

问 孪子效应的结论是做加速运动的兄弟较年轻. 但加速度是相对的，甲认为乙有加速度，乙也认为甲有加速度. 据此，岂非乙会觉得甲较年轻?

答 加速度有 3 维(3 加速)与 4 维(4 加速)之分(详见§6.3). 前者是相对的，后者却是绝对的(与观者、参考系及坐标系等人为因素的选择无关). 而惯性运动和非惯性运动的概念都是绝对的：质点做惯性运动当且仅当其世界线为测地线(与参考系无关！). 当把“加速运动”作为“非惯性运动”的同义语时，“加速”应理解为 4 加速. 故若要用“加速”一词表述孪子效应，则应说“有 4 加速的兄弟较年轻”. 无论谁看都不会说甲有 4 加速，因此不再出现问题. 物理学家已形成习惯：在 3 维语言中，凡提到加速度而又不说明所相对的参考系时，都默认相对于惯性系. 在这种默契下，“做加速运动的兄弟较年轻”及“电荷只当做加速运动时才有辐射”就都是正确的.

问 常听说孪子效应属于广义相对论范畴，只用狭义相对论讲不清楚. 对吗?

答 不对. 本小节第一段不是只用狭义相对论就讲清楚了吗? 认为孪子现象涉及广义相对论的一个原因是：他们为计算乙所经历的时间而选了与乙相应的坐标系. 这是个非惯性系，而他们以为只要涉及非惯性系就属于广义相对论范畴. 我们对此的回答是：①乙所经历的时间就是其世界线长，线长是与坐标系无关的几何量，根本没有必要自找麻烦地用非惯性系计算. ②退一万步说，就算你愿意用非惯性系计算，这也与广义相对论无关. 应该明确广义相对论与狭义相对论的划界标准. 起初人们爱用坐标系划界，只要涉及非惯性系就算涉及广义相对论. 后来认识到用绝对的(与人为选择无关的)时空几何划界会自然(而且优雅)得多. 现在国际相对论界的统一标准是：凡以闵氏时空为背景的物理学都属于狭义相对论物理学，而广义相对论则必涉及弯曲时空(见第 7 章). 讨论任何问题时，一个非常重要而又常遭忽视的步骤是事先明确时空背景，即约定所讨论的物理现象在什么时空中发生. 孪子现象的前提约定是：整个现象发生在闵氏时空中，因此属于狭义相对论范畴(除非事先约定背景时空不是闵氏时空，这意味着引力场不可忽略，见第 7 章.). 不幸的是有人甚至走得更远，误以为加速运动会造成时空弯曲(根据非惯性坐标系的克氏符 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}$ 不全为零就错误地断言时空弯曲，其实闵氏度规在非惯性系的 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}$ 不全为零很正常.)，于是非用广义相对论不可. 另一个类似的热门话题是爱因斯坦转盘问题，也常被误以为涉及广义相对论，其实讨论的前提约定也是整个现象(转盘及其上观者的运动)发生在闵氏时空，因此也属于狭义相对论范畴. 分析这问题的最清楚的语言也是几何语言，只是它比孪子问题复杂，详见

下册.

6.2.4　车库佯谬

设汽车与车库静长相等. 汽车匀速进库时, 司机想: “动库变短, 车放不下. ” 司库想: “动车收缩, 放下有余.” 司机的想法对吗? 司库的想法对吗? 使用 4 维几何语言便可获得清晰的认识. 为明确并简化问题, 设车库并无后墙(其 “后墙” 只是一条画在地上的直线). 图 6-23 是汽车匀速进库的时空图(画图时可借用校准曲线以保证车和库有相等静长). 由图易见, 以司库所在惯性系的同时面衡量, 车短于库, 放下有余; 以司机所在惯性系的同时面衡量, 车长于库, 不能放下. 两人看法都对, 关键是同时性的相对性导致结论的相对性. 不许提出这样的问题: “到底放下还是放不下? ” 结论的相对性使这种绝对式的问题没有意义, 正如在尺缩问题中不许问 “到底哪一把尺子较长” 一样. 车库有坚硬后墙的情况则要复杂些, 基本原则是: 车头撞墙(因而停止前进)的信息传到车尾需要时间, 只当车尾 “获悉” 后车尾才停止前进, 因而汽车将被压缩到的确在库中装下有余的程度(谁看都装得下). 有兴趣的读者不妨粗略画出整个过程的时空图, 并完成习题 11.

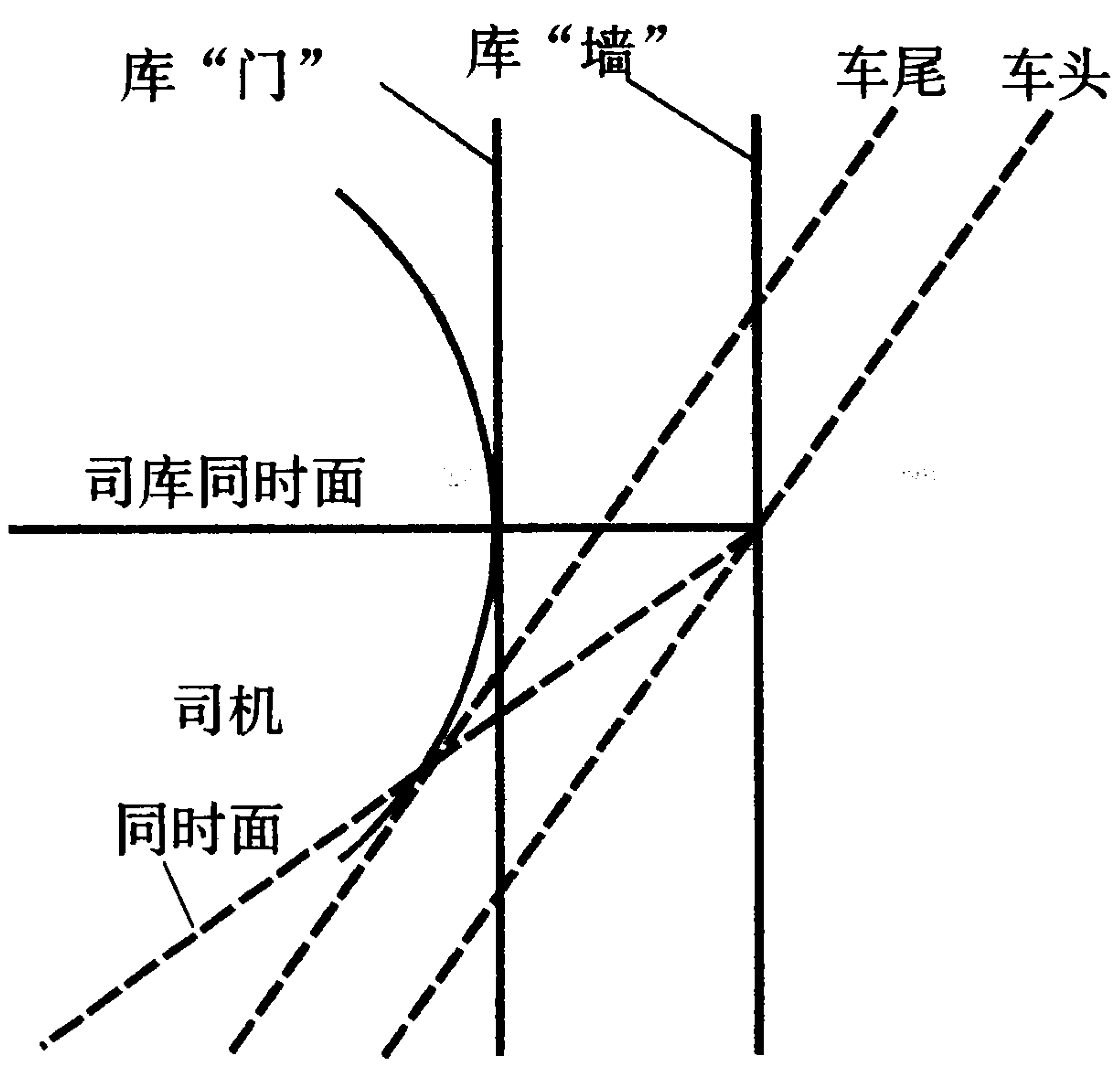


图 6-23　车库佯谬时空图

(无真后墙的情况)

§6.3　质点运动学和动力学

鉴于狭义相对论中动量、能量和质量概念的重要性和微妙性, 有必要先对有关问题做一复习.

相对性原理要求物理定律在所有惯性系中有相同形式. 惯性系之间的坐标变换在牛顿力学中是伽利略变换, 在狭义相对论中是洛伦兹变换. 因此, 相对性原理在牛顿力学中要求物理定律的数学表达式在伽利略变换下不变(称为**伽利略协变性**), 在狭义相对论中则要求物理定律的数学表达式在洛伦兹变换下不变(称为**洛伦兹协变性**). 这是一个很强的 “管定律的定律”, 凡不具备洛伦兹协变性的定律在被纳入狭义相对论之前都必须修改. 动量守恒律就是突出的一例. 在牛顿力学中, 质点的动量 $\vec{p}$ 定义为质量 m 与速度 $\vec{u}$ 的乘积, 即 $\vec{p} := m\vec{u}$, 所受的力则定义为质点的动量的时间变化率, 即 $\vec{f} := \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$, 两者结合得 $\vec{f} = m\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t = m\vec{a}$. 可

见，$\vec{f}=m\vec{a}$ 虽然被称为牛顿第二定律，其实只是力的定义，只有同每一具体物理场合下的力的表达式相结合才给出真正的物理定律(例如，在弹簧的情况下同 $\vec{f}=-K\vec{x}$ 结合得 $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t=-K\vec{x}$，这才是本质上的胡克定律.). 现在从相对性原理的角度考察两个小球的碰撞. 以 $\vec{p}_1$ 及 $\vec{f}_1$ 分别代表球 1 的动量及所受的力(来自球 2)，则 $\vec{f}_1=\mathrm{d}\vec{p}_1/\mathrm{d}t$，类似地有 $\vec{f}_2=\mathrm{d}\vec{p}_2/\mathrm{d}t$. 牛顿第三定律保证 $\vec{f}_1=-\vec{f}_2$，于是 $\mathrm{d}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)/\mathrm{d}t=0$，即碰撞时动量守恒. 可见动量守恒是力的定义同牛顿第三定律相结合的产物. 如果从另一惯性系观测同一碰撞过程，则根据由伽利略变换导出的速度变换公式不难看出动量仍然守恒，所以动量守恒有伽利略协变性，满足相对性原理. 然而，在狭义相对论中如果仍然采用动量的牛顿定义，即 $\vec{p}:=m\vec{u}$ ($m=$常数)，则下面的简单例子足以说明动量守恒不具备洛伦兹协变性. 考虑两个全同小球的完全非弹性碰撞. 设在 $\mathscr{R}'$系中两球碰前速度等值反向(因而总动量为零)，则由对称性可知碰后速度皆为零(见图 6-24)，表明碰撞过程在$\mathscr{R}'$系中动量守恒. 再从$\mathscr{R}$ 系考察这一过程. 设球 2 相对于$\mathscr{R}$ 系静止，则$\mathscr{R}'$系相对于$\mathscr{R}$ 系的速度等于球 1 碰前相对于$\mathscr{R}'$系的速度 $\vec{v}$，由相对论速度变换公式(见狭义相对论教材)可知球 1 在$\mathscr{R}$ 系的速率为(暂时保留光速 c，即不取 $c=1$)

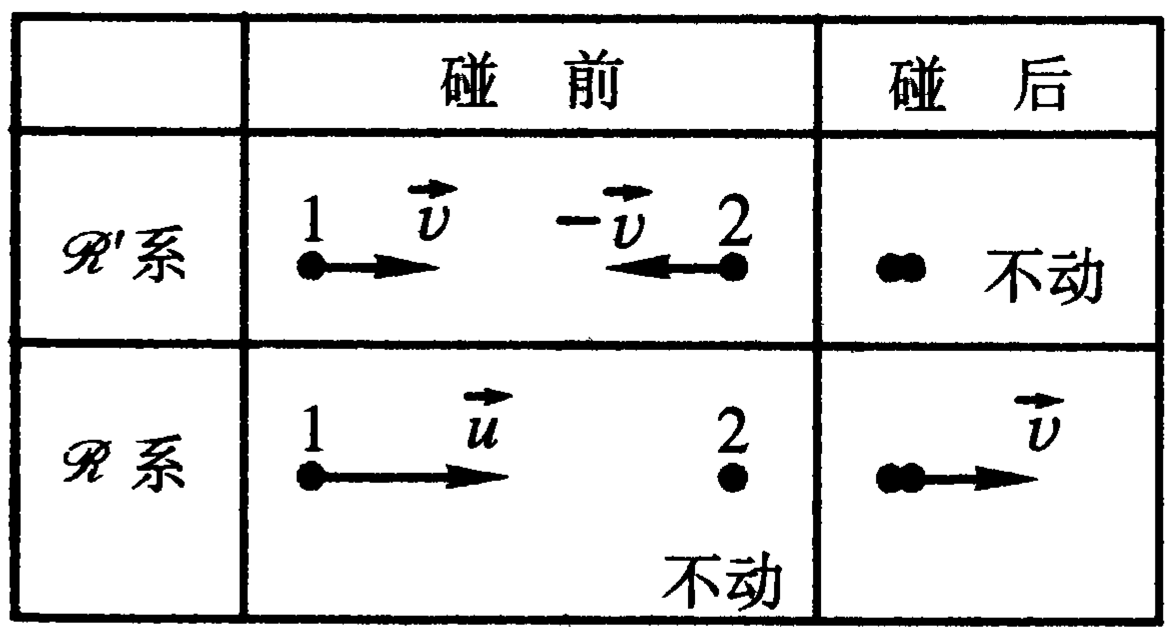


图 6-24　全同小球的完全非弹性碰撞

$$u=\frac{v+v}{1+v^2/c^2}=\frac{2v}{1+v^2/c^2}. \tag{6-3-1}$$

设两球的牛顿质量皆为 m，则$\mathscr{R}$ 系测得的两球总动量在碰撞前后各为

$$\text{碰前总动量(大小)}=mu+0=\frac{2mv}{1+v^2/c^2},$$

$$\text{碰后总动量(大小)}=2mv\ \text{(用到牛顿质量守恒律)}.$$

碰撞前后总动量不等，可见动量守恒对$\mathscr{R}$ 系不成立. 这说明动量守恒不具备洛伦兹协变性，因而不是定律. 这时有两种选择，或者放弃动量守恒，或者通过修改质量和动量定义给动量守恒以洛伦兹协变性. 鉴于守恒律对物理学的重要性，当然选择后者. 为了找到修改思路，先做如下考虑：设质点被恒力加速. 按照牛顿第二定律，只要时间足够长，其速率必将超过光速，与狭义相对论相悖. 为摆脱矛盾，不妨猜测质点的质量在相对论中随速率增大而增大(因为如果这样，质点在恒力下的加速度将越来越小，速率就有望永远达不到光速.). 于是想到这样的修改方案：动量仍定义为质量乘速度，但质量不再是常数而与速率 u 有关，记作 m_u(称为**运动质量**). 现在沿这一思路重新审查图 6-24 中$\mathscr{R}$ 系的动量守恒问题. 既然碰前球 2 静止而球 1 以速率 u 运动，两者的运动质量应分别为 m_0(称为**静质量**)和 m_u，故

$$\text{碰前总动量(大小)} = m_u u + 0 = \frac{2m_u v}{1+v^2/c^2}, \tag{6-3-2}$$

$$\text{碰后总动量(大小)} = M_v v. \tag{6-3-3}$$

其中 M_v 代表碰后两球复合体的质量. 默认碰撞前后总质量不变，即 $m_u + m_0 = M_v$ (这是很自然的默认，其含义将在稍后阐明.)，则式(6-3-3)成为

$$\text{碰后总动量(大小)} = (m_u + m_0)\,v. \tag{6-3-4}$$

对比式(6-3-2)和(6-3-4)可知，为使动量守恒对$\mathscr{R}$ 系成立，必须且只须

$$m_u = m_0 \frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}, \tag{6-3-5}$$

而由式(6-3-1)出发的简单计算表明

$$\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}, \tag{6-3-6}$$

与式(6-3-5)对比便得

$$m_u \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6-3-7}$$

可见只有承认 m_u 随速率 u 按上式变化才能保证图 6-24 的碰撞过程对$\mathscr{R}$ 系有动量守恒. 所以狭义相对论中质点的动量应定义为

$$\vec{p} := m_u \vec{u} \quad [\text{其中 } m_u \text{ 由式(6-3-7)定义}]. \tag{6-3-8}$$

通常记 $\gamma_u \equiv (1-u^2/c^2)^{-1/2}$，故动量亦可表为

$$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u}, \qquad \text{简记为 } \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u} = m_u \vec{u}. \tag{6-3-9}$$

有了动量定义就可对力下定义. 在狭义相对论中仍把质点所受的力 $\vec{f}$ 定义为质点动量的时间变化率：

$$\vec{f} := \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t. \tag{6-3-10}$$

相对性原理要求上式有洛伦兹协变性，这就决定了力在惯性系之间的变换关系(详见狭义相对论教材).

现在介绍质点的能量定义. 先仿照牛顿力学用以下两个要求定义质点的动能 E_k：①质点静止($u=0$)时 $E_\mathrm{k}=0$，②动能的时间变率等于力的功率 $\vec{f}\cdot\vec{u}$，由此得

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}(m_u\vec{u})}{\mathrm{d}t} = m_u\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} + \vec{u}\cdot\vec{u}\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t} = m_u u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}. \tag{6-3-11}$$

其中 $\mathrm{d}m_u/\mathrm{d}t$ 可借式(6-3-1)表示为

$$\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c\,m_0}{\sqrt{c^2-u^2}}\right) = \frac{m_u u}{c^2-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \tag{6-3-12}$$

代入式(6-3-11)得

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=(c^2-u^2)\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}+u^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}=c^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}. \tag{6-3-13}$$

注意到 $u=0$ 时 $m_u=m_0$ 及 $E_{\mathrm{k}}=0$，对上式积分便得到速率为 u 时的动能

$$E_{\mathrm{k}}(u)=c^2\int_{m_0}^{m_u}\mathrm{d}m=m_uc^2-m_0c^2. \tag{6-3-14}$$

爱因斯坦大胆地把上式右边的 m_uc^2 解释为质点在速率为 u 时的(总)能量(记作 $E=mc^2$，其中 m 是 m_u 的简写.)，于是 m_0c^2 就是质点静止时的能量(记作 $E_0=m_0c^2$，称为质点的**静能**.)，而动能则是总能与静能之差. $E=mc^2$ 表明能量 E 与质量 m(指运动质量 m_u)成正比(称为质能相当性). 在几何单位制中 $c=1$，故 $E=m$，即能量等于质量，而 $E_0=m_0$ 则表明物体即使在静止时也有等于静质量的能量. 这是一份不可思议的巨大能量，一个 $m_0=1\mathrm{g}$ 的物体(约只有一袋方便面质量的 1%)的静能竟达

$$m_0c^2=10^{-3}\times(3\times10^8)^2=9\times10^{13}\ \mathrm{J},$$

大约相当于一个广岛原子弹所释放的能量！

牛顿力学既有质量守恒律，又有能量守恒律. 狭义相对论的情况如何?首先，按 $E=mc^2$ (注意，m 是 m_u 的简写)定义的能量满足能量守恒律. 这应看作理论假设，已取得迄今所有实验的支持. 至于质量是否守恒，则要看你谈的是运动质量 m 还是静质量 m_0. 因为 $E=mc^2$，所以能量 E 守恒也就是运动质量 m 守恒，两者互不独立.① 至于静质量 m_0，则应强调它不服从守恒律. 例如，设静止原子核裂变为两块(都在运动)，以 M，m_1 和 m_2 分别代表原子核以及两个分块的运动质量，则由能量守恒得

$$Mc^2=m_1c^2+m_2c^2. \tag{6-3-15}$$

核在裂变前静止，其运动质量 M 等于静质量 M_0. 以 m_{01}，m_{02}，u_1 和 u_2 分别代表两个分块的静质量和速率，令 $\gamma_1\equiv(1-u_1^2/c^2)^{-1/2}$，$\gamma_2\equiv(1-u_2^2/c^2)^{-1/2}$，则 $m_1=\gamma_1m_{01}$，$m_2=\gamma_2m_{02}$，故式(6-3-15)导致

$$M_0=\gamma_1m_{01}+\gamma_2m_{02}>m_{01}+m_{02}, \tag{6-3-16}$$

可见静质量并不守恒！差额 $\Delta m_0\equiv M_0-(m_{01}+m_{02})$ 称为**质量亏损**(mass defect). 小结：在狭义相对论中，关于动量、能量、静质量和运动质量总共只有两个独立的守恒律，此即动量守恒和能量守恒. 前面在把式(6-3-3)改写为式(6-3-4)时曾默认 $m_u+m_0=M_v$，现在看到此式代表能量守恒. 可见在证明动量 $\vec{p}=\gamma m_0\vec{u}$ 的洛伦兹协变性时需要默认能量守恒.

① 但切莫以为这一“质量守恒律”类似于牛顿力学的质量守恒律. 前者是关于一个物理量(运动质量)的守恒律，后者则反映牛顿的如下信念：物质(matter)是永恒(不灭)的. 今天看来这一信念并不正确，物质(实物)可被“毁灭”——可被转化为辐射，虽然能量不变. 可见能量守恒而物质(实物)并不守恒.

狭义相对论的原始表述存在静质量 m_0、静能 E_0、运动质量 m(即 m_u)和总能 E 四个概念. 然而，关系式 $E=mc^2$ 和 $E_0=m_0c^2$ 表明这 4 个概念中只有两个独立. 事实上，近代文献(科普文献除外)中通常只保留质量和能量两个概念，“质量” m 是指静质量(因只保留一个质量，故无须再冠以“静”字，也不必对 m 再加下标“0”.)，而能量则是指总能 E，与 m 的关系现在是 $E=\gamma mc^2$ [其中 $\gamma\equiv(1-u^2/c^2)^{-1/2}$]. 在这种处理中只有能量守恒律而没有质量守恒律(注意质量亏损). 本书从现在起谈到质量而无特别声明时一律指静质量，并以 m 代表(虽然前面曾用 m 代表运动质量). 因为我们用几何制，所以有 $E=\gamma m$. 经历了狭义相对论发展初期的一些曲折后，爱因斯坦在 1948 年的一次私人通信中写道：“为运动物体引入质量 $M=m(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ 的概念并无益处，……除了‘静质量’ m 外最好不引入其他质量概念.”

以上是复习. 从现在起再次回到几何单位制，其中 $c=1$. 在介绍质点运动学和动力学的 4 维表述之前，有必要把 3 维表述中的主要定义和规律罗列于下(式中各量除质量 m 与观者无关外，都是相对于某惯性系$\{t,\ x,\ y,\ z\}$而言的.)：

质点的 3 速(3 维速度的简称)　$\vec{u}:=\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$，其中位矢 $\vec{r}\equiv\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z$.　(6-3-17)

质点的 3 加速　$\vec{a}:=\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t$.　(6-3-18)

质点的 3 动量　$\vec{p}:=\gamma m\vec{u}$，$\gamma\equiv(1-u^2)^{-1/2}$，　$u\equiv|\vec{u}|$.　(6-3-19)

质点的能量　$E:=\gamma m$.　(6-3-20)

质点所受的 3 力　$\vec{f}:=\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$.　(6-3-21)

3 力 $\vec{f}$ 的功率与受力质点能量的关系　$\vec{f}\cdot\vec{u}=\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$.　(6-3-22)

带电质点在电磁场中所受 3 力(洛伦兹力)　$\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})$，　(6-3-23)

其中 q 为质点电量，$\vec{u}$ 为质点 3 速，$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 分别为电场和磁场.

注 1　①此处的 γ 是 $\gamma_u\equiv(1-u^2)^{-1/2}$ 的简写，而洛伦兹变换式(6-1-5)中的 γ 则代表 $(1-v^2)^{-1/2}$，其中 v 是两个惯性系之间的相对速率，u 则是所论粒子相对于所选惯性系的速率. ②相对论中经常涉及坐标系的变换，因此经常用到“不变量”一词. “不变量”与“守恒量”是不同概念. **守恒量**(conserved quantity)是在物理过程中保持常值(不随时间而变)的量，强调物理过程；**不变量**(invariant)是指不随坐标系、参考系和观者等人为因素而变的量，强调坐标系等的变换. 能量是守恒量而非不变量，(静)质量是不变量而非守恒量，带电粒子的电量则既是不变量又是守恒量.

以上是建筑在某一惯性系基础上的 3 维表述. 下面介绍 4 维表述，同时介绍 4 维语言与 3 维语言的联系.

定义 1　质点的 **4 维速度(4 速**，4-velocity)U^a 是质点世界线(以固有时 τ 为参数)的切矢，即

$$U^a := (\partial/\partial\tau)^a\,. \qquad (6\text{-}3\text{-}24)$$

命题 6-3-1　令$U_a \equiv \eta_{ab}U^b$，则$U^aU_a = -1$.

证明　固有时是类时曲线的线长参数，而以线长为参数的切矢有单位长(见§2.5). □

注 2　4 速 U^a在世界线外无定义.

为观测质点的运动，可选择任一参考系$\mathscr{R}$. 设$L(\tau)$是质点的世界线，则对$L(\tau)$上任一点p，总有$\mathscr{R}$中的一个观者G的世界线经过(见图 6-25)，G便可对事件p进行测量. 以Z^a和U^a分别代表G和$L(\tau)$在p的 4 速. 从物理上不难理解，如果$Z^a = U^a$，观者G会认为质点L在p时刻静止. 反之，G会认为质点在p时刻有某速度(3 维速度). 为给质点在时刻p相对于观者G的 3 速下定义，先做如下铺垫.

设想你自己就是观者G. ①你能直接观测发生在你身上的事件. 如果事件发生在你身外，你当然也可能听见或看见(间接观测)，但这涉及从该事件到你的信号传递(如用声或光)，要花费一定时间，讨论起来较复杂. (在理论方面，狭义相对论中高速物体形象问题就属这一范畴；在实用方面，天文观测都属间接观测.) 理论上最简单、明确、基本的观测是直接观测，即对发生在观者身上(世界线上)的事件的观测，亦称**当时当地观测**(local measurement). 好在参考系由无处不在的观者组成，发生在别处的事件由别处的观者观测便是. ②你在观测发生在你世界线上p点的事件时，在某些情况下重要的不是你的整条世界线而只是你在p点的 4 速. 这时没有必要强调观者的世界线如何如何，只须给定该世界线在p点的切矢Z^a. 于是可提炼一个更为抽象的概念，称为**瞬时观者**[instantaneous observer，见 Sachs and Wu(1977).]，它由两个要素——p点及p点的一个(指向未来的)类时单位矢Z^a构成，记作(p, Z^a). ③你，作为观者，除有时间感(用你的标准钟)外还有空间方向感. 假定你手拿一支短箭，它的任一指向就代表你能感到的一个空间方向. 你在时刻p(你的世界线G的一点)能感到的所有空间矢量的集合W_p当然是 3 维的，而p作为$\mathbb{R}^4$的一点，其切空间V_p是 4 维的. W_p与V_p有什么关系？先考虑最简单的情况. 设你是惯性系$\mathscr{R}$内的惯性观者. $\mathscr{R}$的同时面就是$\mathscr{R}$在某时刻的 3 维空间，而同时面与该系的所有惯性观者世界线正交，所以你在交点p的全部空间矢量都与你在p点的 4 速Z^a正交，故W_p对应于V_p中与Z^a正交的 3 维子空间. 即

$$W_p = \{w^a \in V_p \mid \eta_{ab}w^aZ^b = 0\}\,.$$

这一对应也可用于非惯性观者，因为我们关心的只是观者世界线上一点p的情况. 图 6-26 用一个小平面代表W_p，其实这是“无限小”平面. 对W_p最准确的理解还是p点切空间的子空间，但在图上只能画成小平面. 设$w^a \in V_p$，当$w^a \in W_p$时，就说w^a对观者G而言是**空间矢量**(spatial vector). (非零)空间矢量一定是类空矢量，反之不然. 由定义知类空矢量是绝对的(不依赖于观者、参考系或坐标系等人为因

素)，空间矢量则是相对的(取决于观者 4 速 Z^a)．由式(4-4-2)可知 p 点的 η_{ab} 在 W_p 上的诱导度规是 $h_{ab} \equiv \eta_{ab} + Z_a Z_b$，再由式(4-4-4)后的小段可知 $h^a{}_b = \delta^a{}_b + Z^a Z_b$ 是从 V_p 到 W_p 的投影映射，即 $h^a{}_b v^b \in W_p$ 是 $v^a \in V_p$ 在 W_p 上的投影．

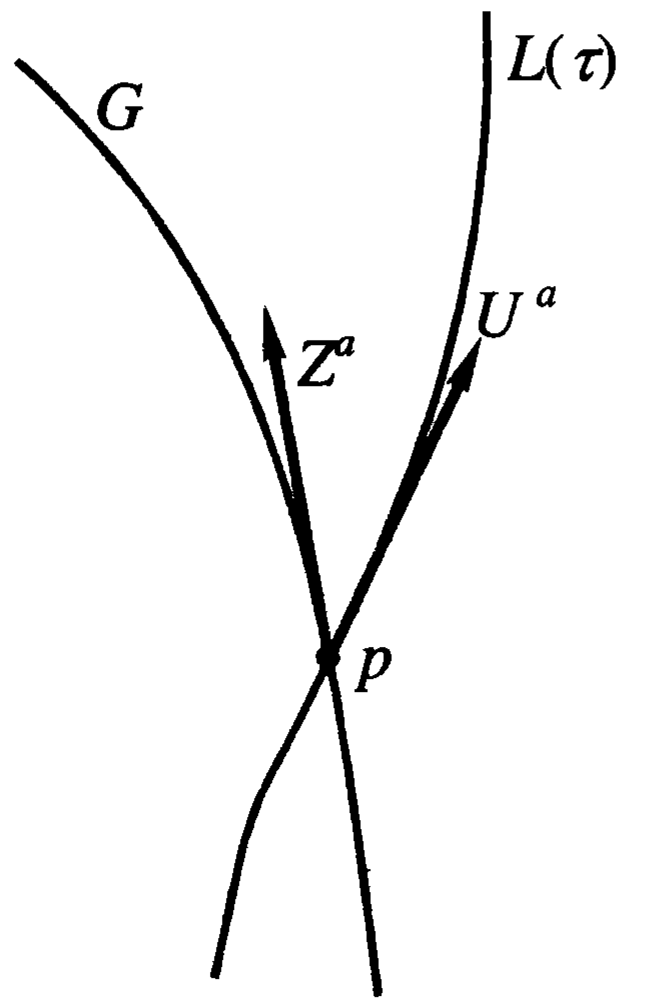


图 6-25　观者 G 与质点 L 交于 p，便可对事件 p 作测量

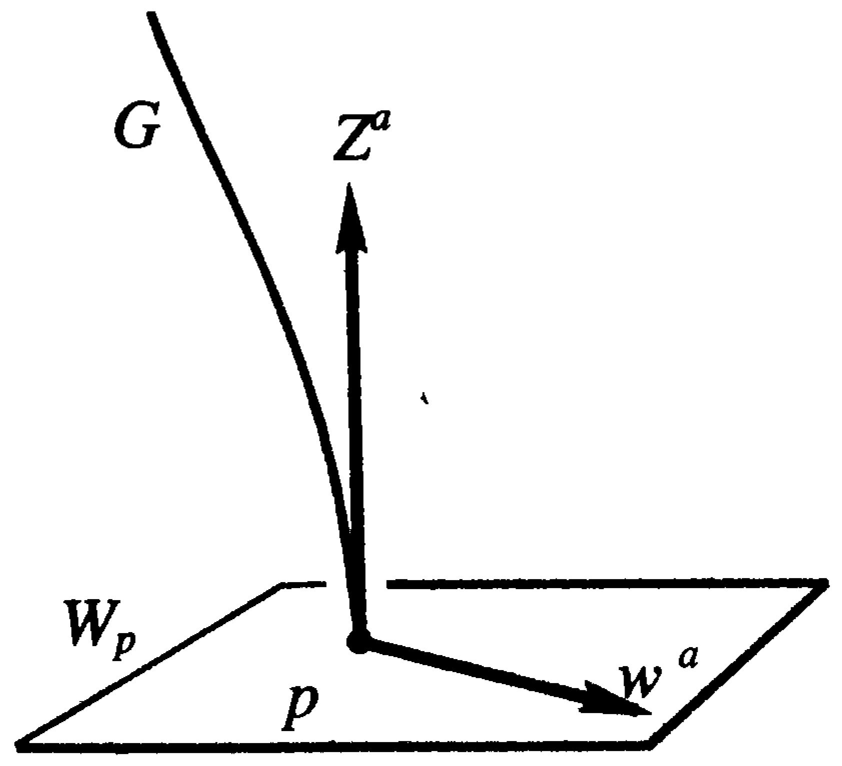


图 6-26　W_p 是 V_p 与 Z^a 正交的 3 维子空间，任一 $w^a \in W_p$ 可看作 G 在 p 时刻的一个空间矢量

设质点世界线 $L(\tau)$ 与某观者世界线 G 交于 p，我们来讨论 L 在 p 时刻相对于 G 的 3 速．先讨论 $L(\tau)$ 和 G 都是测地线的情况．令 U^a 和 Z^a 分别为 $L(\tau)$ 和 G 在 p 点的 4 速(见图 6-27)，$\{t, x^i\}$ 为惯性观者 G 所在惯性系的坐标，则

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6-3-25}$$

也可表为

$$U^a \mathrm{d}\tau = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \mathrm{d}x^i = Z^a \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \mathrm{d}x^i, \tag{6-3-26}$$

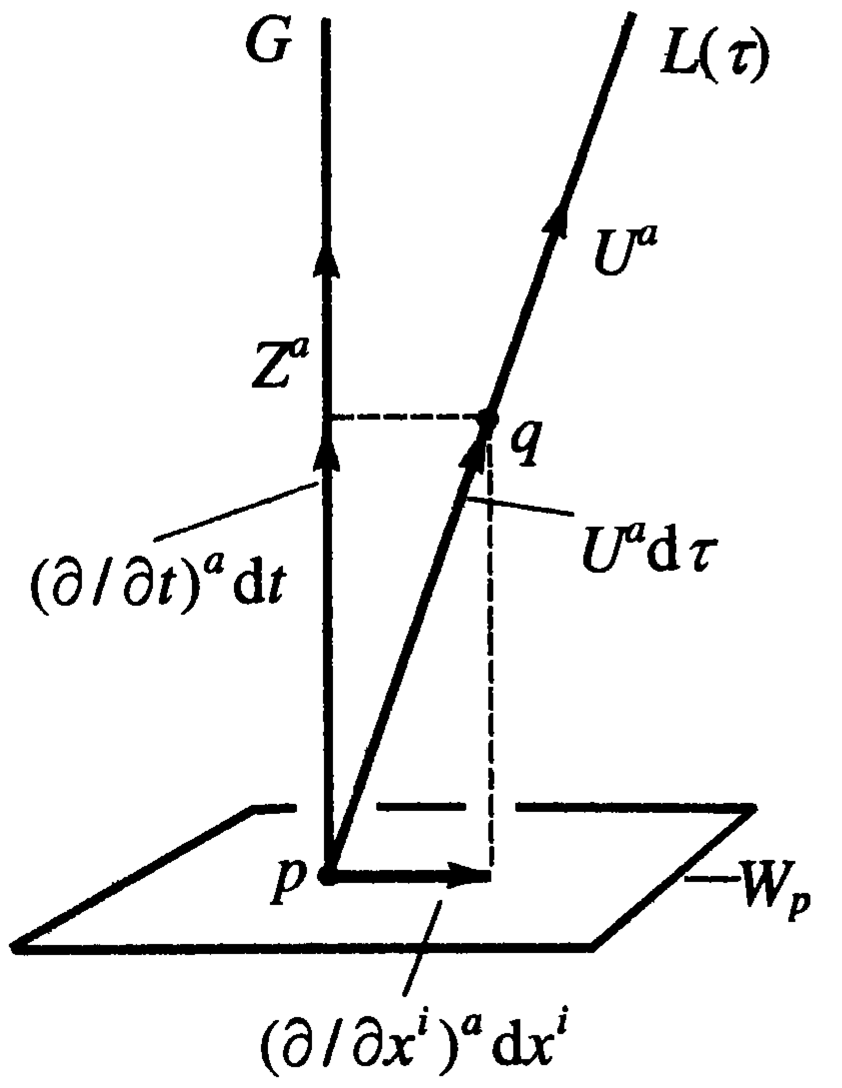


图 6-27　观者 G 测得质点 L 在时间 $\mathrm{d}t$ 内有空间位移 $(\partial/\partial x^i)^a \mathrm{d}x^i$，故 3 速应由式(6-3-27)定义

设 $p = L(\tau)$．令 $q \equiv L(\tau_1 + \mathrm{d}\tau)$，则测地线段 pq 代表质点从固有时刻 τ_1 到 $\tau_1 + \mathrm{d}\tau$ 的(“无限小”)过程．对观者 G 而言，这一过程经历的时间为式(6-3-26)的 $\mathrm{d}t$，空间位移则为 $(\partial/\partial x^i)^a \mathrm{d}x^i$，故**质点 L 相对于 G 的 3 速**(亦称 G 测得的 L 的 3 速)应定义为

$$u^a := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau}. \tag{6-3-27}$$

由式(6-3-25)知$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}$是 U^a 的空间投影，即$h^a{}_b U^b$，再令$\gamma \equiv \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，则式(6-3-27)可改写为

$$u^a := h^a{}_b U^b / \gamma . \tag{6-3-28}$$

上面引入的γ(即$\gamma \equiv \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$)也可表为

$$\gamma = -U^a Z_a . \tag{6-3-29}$$

因为$-U^a Z_a = -\eta_{ab} U^a Z^b = -\eta_{\mu\nu} U^\mu (\partial/\partial t)^\nu = -\eta_{00} U^0 (\partial/\partial t)^0 = U^0 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau = \gamma$.

注3 ①易见 3 速 u^a是观者 G 在 p 点的空间矢量(因而也可记作$\vec{u}$). 这是u^a应满足的起码要求：3 速既然是 3 维语言的矢量(简称 3 矢)，当然应为空间矢量. ②虽然讨论中借用过坐标系，但 u^a 的定义式(6-3-28)同坐标系无关. ③设$\mathscr{R}$是惯性观者 G 所在惯性参考系，则式(6-3-28)的 u^a亦称质点 L 在p时相对于$\mathscr{R}$系的 3 速. 设$\{t, x^i\}$是$\mathscr{R}$中任一惯性坐标系，则由式(6-3-27)知 3 速在该系的分量为$u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$，注意到式(6-3-17)定义的$\vec{u}$的分量亦为$u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$，可见它同式(6-3-28)定义的 u^a一致. ④ 4 维时空中任一点 p 的 3 矢(例如 u^a)也是 V_p的元素，因而也是 4 矢，只不过它的时间分量 u^0为零.

由于式(6-3-28)只涉及 p 点的切空间(只涉及 p 点的“无限小”邻域)，当 $L(\tau)$和 G 不是测地线时也适用，于是有如下定义：

定义2 设 $L(\tau)$为任意质点，$p\in L$，则质点相对于任一瞬时观者(p, Z^a)的 **3 速** u^a由式(6-3-28)定义，其中$h_{ab} \equiv \eta_{ab} + Z_a Z_b$，$\gamma \equiv -U^a Z_a$.

定义3 质点对瞬时观者的 3 速度矢量u^a的长度$u = \sqrt{u^a u_a}$ 叫质点对该瞬时观者的 **3 速率**，其中$u_a := \eta_{ab} u^b = h_{ab} u^b$.

注4 设$p\in L$，G 为由(p, Z^a)决定的测地线，则质点 L 相对于瞬时观者(p, Z^a)的 3 速率与 L 相对于 G 所在惯性系$\mathscr{R}$的 3 速率[按式(6-1-2)定义]一致. 暂时把$L(\tau)$放宽为类时、类光和类空曲线，对类时和类空情况，τ代表线长，对类光情况，τ代表任一参数，令$U^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$，仍用式(6-3-28)定义 u^a，则

$$u^2 = h_{ab} u^a u^b = h_{ab} (h^a{}_c U^c)(h^b{}_d U^d)/\gamma^2 = h_{cd} U^c U^d / \gamma^2$$
$$= (\eta_{cd} U^c U^d + Z_c Z_d U^c U^d)/\gamma^2 = (\eta_{cd} U^c U^d + \gamma^2)/\gamma^2 ,$$

上式表明$u<1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d < 0$，$u=1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d = 0$，$u>1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d > 0$. 可见，只要用式(6-3-28)定义 3 速，则相对论基本信条“质点世界线为类时线”可用 3 维语言表述为“质点的 3 速率为亚光速”.

如果瞬时观者(p, Z^a)恰好与被观测粒子的世界线 L 相切，则(p, Z^a)称为该粒子的**瞬时静止观者**(在他看来粒子 L 在 p 时刻静止)，这时由 p 和 Z^a 决定的测地线 G 称为粒子 L 在 p 时刻的**瞬时静止惯性观者**，G 所属的惯性参考系(由图 6-28 中所

有斜直线代表)称为 L 在 p 时刻的**瞬时静止惯性参考系**，该参考系内的任一惯性坐标系称为 L 在 p 时刻的**瞬时静止惯性坐标系**. 瞬时静止惯性系是很有用的概念.

命题 6-3-2　质点的 4 速可借瞬时观者(p, Z^a)做 3+1 分解：

$$U^a = \gamma\,(Z^a + u^a)\,, \tag{6-3-30}$$

其中 u^a 为质点相对于瞬时观者的 3 速，$\gamma \equiv -Z^a U_a$.

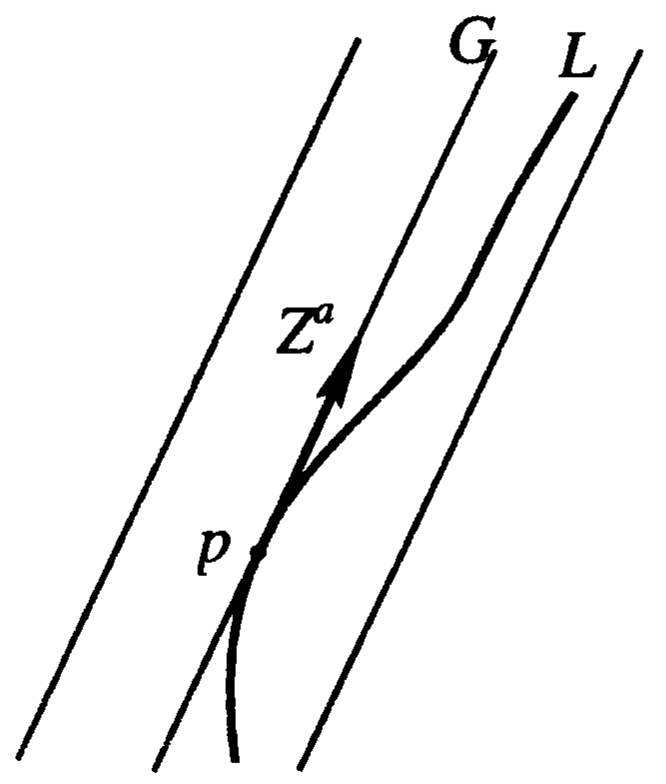


图 6-28　质点 L 在 p 时刻的瞬时静止惯性参考系

证明　由式(6-3-28)得

$$\gamma u^a = h^a{}_b U^b = (\delta^a{}_b + Z^a Z_b) U^b = U^a - \gamma Z^a\,,$$

故有式(6-3-30).. □

注 5　由式(6-3-30)可知 γu^a 是 U^a 的空间分量. 取惯性系$\{t, x, y, z\}$使$(\partial/\partial t)^a = Z^a$，由式(6-3-30)可知 γZ^a 是 U^a 的时间分量. 故式(6-3-30)又可表为 $U^a = \gamma\,(1, u^a)$，与狭义相对论书上的$U^\mu = \gamma(c, \vec{u})$一致.

注 6　U^a 是绝对的(不依赖于观者或坐标系)，但 U^a 的 3+1 分解却与观者(或坐标系)有关(分解是相对的). 对另一瞬时观者(p, Z'^a)，同一 U^a 可表为 $U^a = \gamma' Z'^a + \gamma' u'^a$，即 U^a 的时间分量$\gamma' Z'^a$ 和空间分量$\gamma' u'^a$ 都不同于γZ^a 和γu^a.

定义4　设质点的(静)质量为 m，4 速为 U^a，则其 4 **动量**(4-momentum)P^a定义为

$$P^a := mU^a\,. \tag{6-3-31}$$

命题 6-3-3　质点的 4 动量可借瞬时观者(p, Z^a)做 3+1 分解：

$$P^a = EZ^a + p^a\,, \tag{6-3-32}$$

其中能量 E 和 3 动量 p^a 由式(6-3-20)和(6-3-19)定义.

证明　由定义 4 及式(6-3-19)、(6-3-20)得

$$P^a = mU^a = m(\gamma Z^a + \gamma u^a) = EZ^a + p^a\,.$$ □

注 7　式(6-3-32)说明 3 动量 p^a和能量 E 分别是 4 动量 P^a 的空间分量和时间分量，后者亦可表为[用 Z_a缩并式(6-3-32)易得]

$$E = -P^a Z_a\,. \tag{6-3-33}$$

质点的4动量P^a把两个不同概念——质点的能量和动量——有机地统一为一个物理量，它与观者无关(P^a 是绝对的)，但如何分解为时间分量和空间分量却与观者有关(P^a 的分解是相对的). 如果没有观者在实地观测，则 4 动量仍客观存在，但能量和 3 动量就没有意义. 现在可进一步理解近代文献只保留(静)质量 m 和能量 E 两个概念的原因——它们是不同类型的量. 质点(如电子)的质量 m (正如它的电荷 q)是不变量，从一个侧面反映质点的内禀性质. 质点的能量 E 则还依赖于观者

(不是不变量). 瞬时静止观者测得的能量就是静能，虽与质量等值，但不是同类型量[质量为不变量而静能是观者依赖量(能量)的特殊情形].

注 8　由式(6-3-32)很易推出质量、能量与 3 动量的关系式

$$P^aP_a=(EZ^a+p^a)(EZ_a+p_a)=-E^2+p^2,$$

其中 p 代表 3 动量的大小. 另一方面，$P^aP_a=mU^amU_a=-m^2$，于是

$$E^2=m^2+p^2, \tag{6-3-34}$$

这正是熟知公式 $E^2=m^2c^4+p^2c^2$ 在 $c=1$ 时的表现.

[选读 6-3-1]

碰撞过程的能量和 3 动量守恒律是经过无数实验验证的理论假设，可用 4 维语言简洁地表述为：碰撞前后总 4 动量不变(4 动量守恒律). 这里的“碰撞”是广义的，包括所有发生在同一时空点的相互作用，参与碰撞的粒子既可以是质点也可以是光子(光子的能量和 3 动量的定义见选读 6-6-3 前)，而且允许碰撞前后的粒子数不同(见图 6-29). 以 P^a，$\bar{P}^a$ 分别代表碰撞前后所有粒子的 4 动量矢量和(对图 6-29 就是 $P^a=P_1{}^a+P_2{}^a$，$\bar{P}^a=P_3{}^a+P_4{}^a+P_5{}^a$.)，则 4 动量守恒律就可表为 $P^a=\bar{P}^a$. 请注意这种矢量等式本身就有洛伦兹协变性，不必再顾忌能量和 3 动量在一个系守恒而在另一系不守恒的问题. 能量和 3 动量分别是 4 动量的“时间分量”和“空间分量”的事实有多方面的重要性. 作为一个例子，我们来证明单从 3 动量守恒律就能推出 4 动量守恒律，从而推出能量守恒律. 先取瞬时观者(p, Z^a)使 Z^a 与 P^a 平行，则 P^a 相对于 Z^a 无空间分量，即 3 动量 $p^a=0$. 由 3 动量守恒律知 $\bar{p}^a=0$，即 $\bar{P}^a$ 相对于 Z^a 也无空间分量，故 $\bar{P}^a$ 与 P^a 至多只差一个乘子(记作 σ)：$\bar{P}^a=\sigma P^a$. 取另一瞬时观者 (p, Z'^a) (Z'^a 不再与 P^a 平行)，以 $h'^a{}_b$ 代表 Z'^a 决定的投影映射，则 $\bar{P}^a$ 相对于 Z'^a 的 3 动量 $\bar{p}'^a=h'^a{}_b\bar{P}^b=\sigma h'^a{}_bP^b=\sigma p'^a$，而 3 动量在任意惯性系中守恒(这是关键)保证 $\bar{p}'^a=p'^a$，故 $\sigma=1$，从而 $P^a=\bar{P}^a$，即 4 动量守恒.

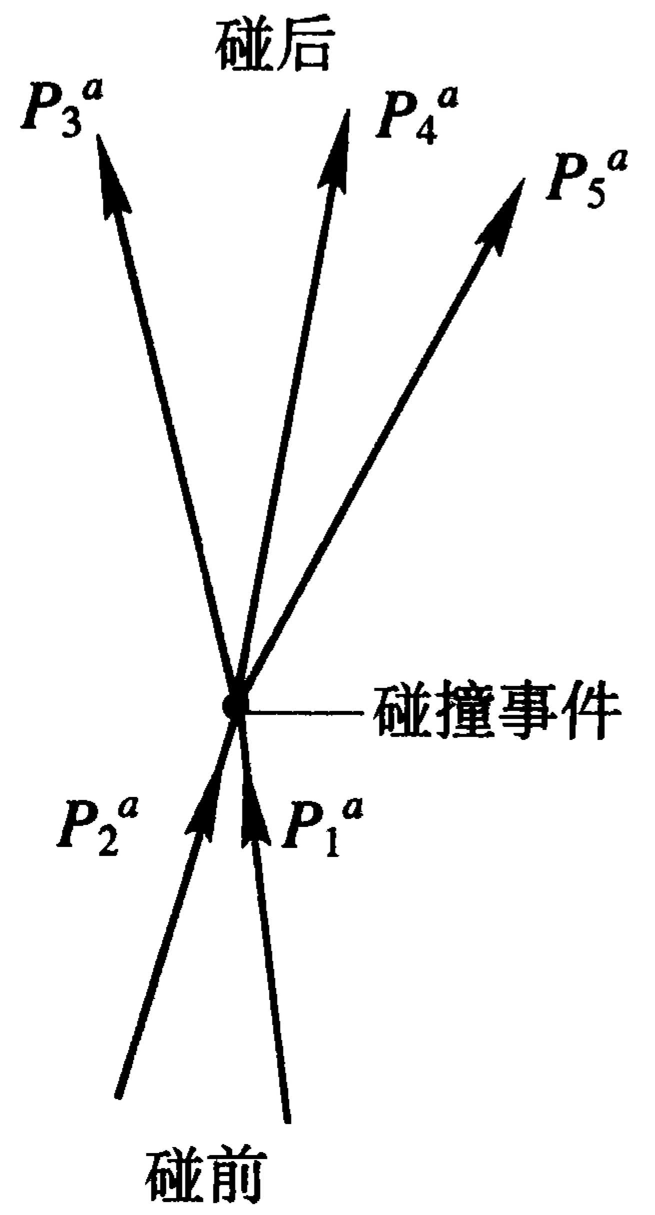


图 6-29　两个粒子碰撞后变成三个粒子

[选读 6-3-1 完]

定义5　质点的 **4 加速**(4-acceleration)定义为

$$A^a:=U^b\partial_bU^a, \tag{6-3-35}$$

其中 U^a 为质点的 4 速，∂_b 是与 η_{ab} 适配的导数算符($\partial_a\eta_{bc}=0$).

注 9　由定义可知 ①4 加速是绝对的；②$A^a=0$ 等价于$U^b\partial_b U^a=0$(世界线为测地线)，即质点做惯性运动. 可见质点做惯性运动(自由质点)的充要条件是其 4 加速为零.

命题 6-3-4　质点世界线上各点的 4 加速 A^a 与 4 速 U^a 正交，即 $A^aU_a=\eta_{ab}A^aU^b=0$.

证明　习题. 提示：利用$U^b\partial_b(U^aU_a)=2\,U_aU^b\partial_bU^a$. □

与 3 速 u^a 不同，只用一个观者 G 不足以决定质点 L 的 3 加速，因为要决定 L 在 p 点(G 与 L 线交点)的 3 加速就要比较 L 在 p 点以及 L 线上与 p 紧邻的一点 p' 的 3 速，而后者一般并非 G 与 L 的交点. 这一困难可借坐标系克服：可定义 L 在其任一点 p 相对于任一坐标系的 3 加速("坐标 3 加速"). 最常用的当推 L 相对于惯性坐标系的 3 加速.

定义 6　设质点世界线 $L(\tau)$ 在惯性坐标系$\{t,x^i\}$的参数表达式为 $t=t(\tau)$，$x^i=x^i(\tau)$，则它相对于该系的 **3 加速**定义为

$$a^a:=\frac{\mathrm{d}^2x^i(t)}{\mathrm{d}\,t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a,\tag{6-3-36}$$

其中 $x^i(t)$是$x^i=x^i(\tau)$同 $t=t(\tau)$结合而得的函数 $x^i=x^i(\tau)$ (即 L 以 t 为参数的参数式).

注 10　易见本定义同式(6-3-16)一致.

下面讨论质点的 4 加速 A^a 同它相对于惯性系$\mathscr{R}$ 的 3 加速 a^a 的关系.

命题 6-3-5　质点的 4 加速 A^a 在惯性系$\mathscr{R}$ 的分量为

$$A^0=\gamma^4\vec{u}\cdot\vec{a},\qquad A^i=\gamma^2a^i+\gamma^4(\vec{u}\cdot\vec{a})\,u^i,\tag{6-3-37}$$

其中 $\vec{u}$ 和 $\vec{a}$ 分别为质点相对于$\mathscr{R}$ 系的 3 速和 3 加速，$\gamma\equiv(1-u^2)^{-1/2}$，$u\equiv(\vec{u}\cdot\vec{u})^{1/2}$.

证明　设$\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$为$\mathscr{R}$ 系的对偶坐标基，则由 A^a 的定义得

$$\begin{aligned}A^\mu&=A^a(\mathrm{d}x^\mu)_a=(\mathrm{d}x^\mu)_aU^b\partial_bU^a=U^b\partial_b[(\mathrm{d}x^\mu)_aU^a]\\&=U^b\partial_bU^\mu=\mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}\tau=\gamma\,\mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(其中第三步是因为满足$\partial_a\eta_{bc}=0$ 的∂_a 就是洛伦兹系的普通导数算符.) 由式(6-3-30)可知$U^0=\gamma$，$U^i=\gamma u^i$，因而

$$A^0=\gamma\mathrm{d}U^0/\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t,$$

$$A^i=\gamma\,\mathrm{d}U^i/\mathrm{d}t=\gamma\,\mathrm{d}(\gamma u^i)/\mathrm{d}t=\gamma^2\mathrm{d}u^i/\mathrm{d}t+u^i\gamma\,\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t=\gamma^2a^i+u^i\gamma\,\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t.$$

再由 $\gamma\equiv(1-u^2)^{-1/2}$ 得 $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t=\gamma^3u\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=\gamma^3\vec{u}\cdot\vec{a}$，代入上两式便得式(6-3-37). □

注 11　自由质点的 $A^a=0$，由式(6-3-37)可知它相对于任一惯性系的 3 加速 $a^a=0$.

命题 6-3-6　质点的 4 加速等于它相对于瞬时静止惯性坐标系的 3 加速.

证明　以 $\vec{u}=0$ 代入式(6-3-37)得证. □

定义7　质点所受的**4力**(4-force)定义为

$$F^a := U^b \partial_b P^a \,, \tag{6-3-38}$$

其中 U^a 和 P^a 分别是质点的4速和4动量.

式(6-3-38)也叫质点的相对论运动方程(的4维形式)，其实它只是4力的定义，真正的物理定律还须把式(6-3-38)与4力在每一具体情况的表示式结合而得.

注12　我们在本节中只关心质点的(静)质量 m 在运动中保持常数($\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau=0$)的情况，这时把 $P^a=mU^a$ 代入式(6-3-38)得 $F^a=mA^a$. 然而，如果 m 在运动时变化($\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau\neq 0$)，这一结论就不成立，见选读6-3-2.

命题6-3-7　质点所受4力在惯性坐标系 $\{x^\mu\}$ 的空间分量 $F^i(i=1,2,3)$ 等于它所受3力对应分量 f^i 的 γ 倍，4力的时间分量 F^0 等于3力的功率 $\vec{f}\cdot\vec{u}$ 的 γ 倍. 即

$$F^i=\gamma f^i, \qquad F^0=\gamma\vec{f}\cdot\vec{u}\,, \tag{6-3-39}$$

其中 $\gamma\equiv(1-u^2)^{-1/2}$，$u$ 是质点对该系的3速 $\vec{u}$ 的大小.

证明　$F^\mu=F^a(\mathrm{d}x^\mu)_a=(\mathrm{d}x^\mu)_a U^b\partial_b P^a=U^b\partial_b[(\mathrm{d}x^\mu)_a P^a]=U^b\partial_b P^\mu$.

取 μ 为 i，注意到式(6-3-32)和(6-3-19)，得

$$F^i=U^b\partial_b P^i=\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\gamma f^i\,.$$

再取 μ 为0，注意到式(6-3-32)和(6-3-20)，得

$$F^0=U^b\partial_b P^0=U^b\partial_b E=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\gamma\vec{f}\cdot\vec{u}\,. \qquad \square$$

[选读6-3-2]

我们至今只限于讨论(静)质量为常数($\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau=0$)的情况，更一般地说，$m$ 在运动中也可能改变，即 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau\neq 0$. 例如，考虑静止于惯性系 $\mathscr{R}$ 的一个直流电路中的电阻元件. 电流的焦耳热(也是能量的一种形式)使电阻的静能 mc^2 不断增大，故 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau>0$. 在 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau\neq 0$ 的情况下，前面的某些结论需要修改. 例如，

(1) 虽然仍可把 $\vec{f}\cdot\vec{u}$ 称为3力的功率(也有作者认为不应这样称呼)，但它不再等于总能的变化率，两者关系现在为

$$\vec{f}\cdot\vec{u}=(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)-\gamma^{-1}c^2(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\,. \tag{6-3-40}$$

(2) 动能应直接定义为总能 γmc^2 与静能 mc^2 之差，即 $E_\mathrm{k}=(\gamma-1)mc^2$，它不再满足 $\vec{f}\cdot\vec{u}=\mathrm{d}E_\mathrm{k}/\mathrm{d}t$. 事实上，$\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau\neq 0$ 时 $\vec{f}\cdot\vec{u}$ 既不等于 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 也不等于 $\mathrm{d}E_\mathrm{k}/\mathrm{d}t$.

(3) 4力 F^a 仍定义为 $U^b\partial_b P^a$，但 $F^a\neq mA^a$.

(4) 命题6-3-7现在应陈述为

$$F^i=\gamma f^i, \qquad F^0=\gamma\,\mathrm{d}E/\mathrm{d}t\ (\neq\gamma\vec{f}\cdot\vec{u})\,. \tag{6-3-41}$$

[选读6-3-2完]

为了观测，每个观者除需要标准钟外，往往还要配备一个 **3 维标架**. 直观地说，3 标架是由三根单位长的短直杆焊成的、两两互相正交的架子(见图 6-30)，每根直杆代表一个观测方向，它们在每一时刻的指向由该观者选定. 3 标架在数学上被抽象为观者世界线上的三个正交归一空间矢量场$\{(e_i)^a,\ i=1,2,3\}$，“空间”是指它们都与观者的 4 速 Z^a 正交. 于是，连同$(e_0)^a=Z^a$在内，观者世界线上就有四个正交归一矢量场，称为观者的 **4 维标架**(tetrad)**场**，见图 6-31. 今后谈及观者的 4 标架场时如无声明都指右手标架场. 因为参考系由充斥于时空(或其中一个开子集)的无数观者组成，过每一时空点有且仅有一条观者世界线，所以，给定一个参考系后，全时空(或其开子集)就有一个 4 标架场. 任何时空点的任何张量都可用该点的 4 标架作为基底表出. 前面谈到观者时指的是一条类时线，但在某些情况下这还不够，还要补充关于 4 标架的要求，即一个观者是一条定义了 4 标架场的类时线. 对惯性观者的准确定义则是：惯性观者是做惯性运动的无自转观者. “做惯性运动”即世界线为测地线(前面对惯性观者只提过这一要求)，而“无自转”则是对线上的 4 标架场的要求. 直观地说，设甲、乙两人坐在地面的两把椅子上，甲坐普通椅子，乙坐转椅(底座固定于地面)且不停转动，则甲可视为惯性观者而乙不能(他有自转). 请注意，虽然观者概念本身已要求把此二人看成没有大小(于是每人由一世界线代表，而且都是测地线.)，但转与不转涉及的仅是线上各点每一空间基矢的方向沿线是否改变，故仍有明确意义(§7.3 还有更详细的讨论). 例如，设$\mathscr{R}$为惯性坐标系，把其中每一 t 坐标线看作一个观者的世界线，并选惯性坐标基矢为线上的 4 标架场，则直观看来(或按§7.3 的严格定义)他就是无自转的. 平常谈及惯性系中的惯性观者时，一般默认他们都以惯性坐标基矢为 4 标架. 相应地，决定一个瞬时观者的要素除 p 和 Z^a 外，有时还要辅以 3 标架，它们与 Z^a 组成 p 点的正交归一 4 标架$\{(e_\mu)^a\}$，在此情况下一个瞬时观者应表为$(p,\ (e_\mu)^a)$，其中$(e_0)^a=Z^a$. 在不必强调标架时，瞬时观者仍可表为(p, Z^a).

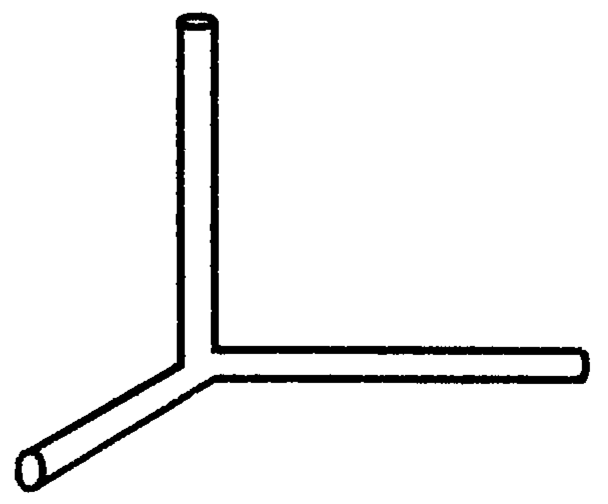


图 6-30　观者的 3 标架(空间图)

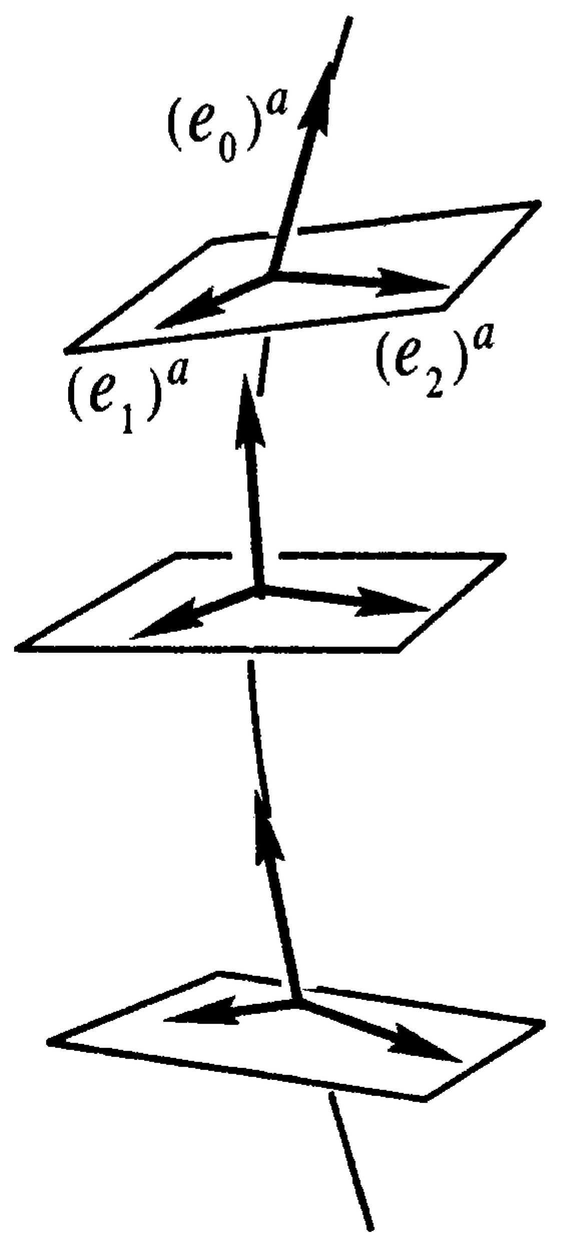


图 6-31 世界线上的 4 标架场

§6.4　连续介质的能动张量

在讨论连续分布的介质(气体、液体、固体、等离子体等)时，我们注意的不是个别粒子的行为而是宏观的统计平均效应，关心的不是个别粒子的质量和动量而是空间每点的能量密度、动量密度、能流密度、动量流密度等. 可见连续介质在许多方面类似于电磁场，可与电磁场统称为**物质场**. 设宏观小体积 V 内的静质量为 m，它相对于某惯性系的 3 速为 $\vec{u}$，则其 3 动量为 $\vec{p}=\gamma m\vec{u}=(E/c^2)\vec{u}$，其中 γ 的意义自明，E 是它的能量. 以 V 除全式便得

$$3\text{动量密度}=\frac{1}{c^2}\text{能量密度}\times\vec{u}=\frac{1}{c^2}\text{能流密度}. \tag{6-4-1}$$

(其中第二步可借如下例子帮助理解：在电磁学中，设ρ为电荷密度，$\vec{u}$ 为载流子速度，则电流密度 $\vec{j}=\rho\vec{u}$.) 当取 $c=1$ 时 3 动量密度便等于能流密度.

电磁场的能量密度、动量密度、能流密度(坡印廷矢量)、动量流密度的表达式可在电动力学教科书中找到，其中能流密度等于动量密度的 c^2 倍. 正如质点的能量和 3 动量统一组成 4 动量矢量 P^a 那样，电磁场的这些密度量统一组成一个(0, 2)型张量 T_{ab}，称为**能动张量**(energy-momentum tensor)，是 4 维闵氏时空的张量场，各种 3 维密度无非是 T_{ab} 的不同分量. 事实上，所有物质场都有自己的能动张量 T_{ab}，它们有以下重要性质和物理意义：

1. $T_{ab}=T_{ba}$.

2. 任何封闭(与外界无相互作用)物质场有 $\partial^a T_{ab}=0$. 下面将看到这正是能量、3 动量和角动量守恒律的体现(角动量守恒律还要求 $T_{ab}=T_{ba}$).

3. 对任意瞬时观者 $(p,(e_\mu)^a)$，$(e_0)^a=Z^a$ 有

(a) $\mu\equiv T_{ab}Z^aZ^b=T_{00}$ 是该观者测得的能量密度；

(b) $w_i\equiv -T_{ab}Z^a(e_i)^b=-T_{0i}$ 是该观者测得的 3 动量密度(能流密度)的 i 分量；

(c) $T_{ab}(e_i)^a(e_j)^b=T_{ij}$ 是该观者测得的 3 应力张量(stress tensor)的 ij 分量. 例如，取一个与 $(e_1)^a$ 垂直的空间单位面元(图 6-32 为空间图)，则 T_{12} 等于面元下侧物质对上侧物质的作用力的第 2 分量(见弹性力学教材).

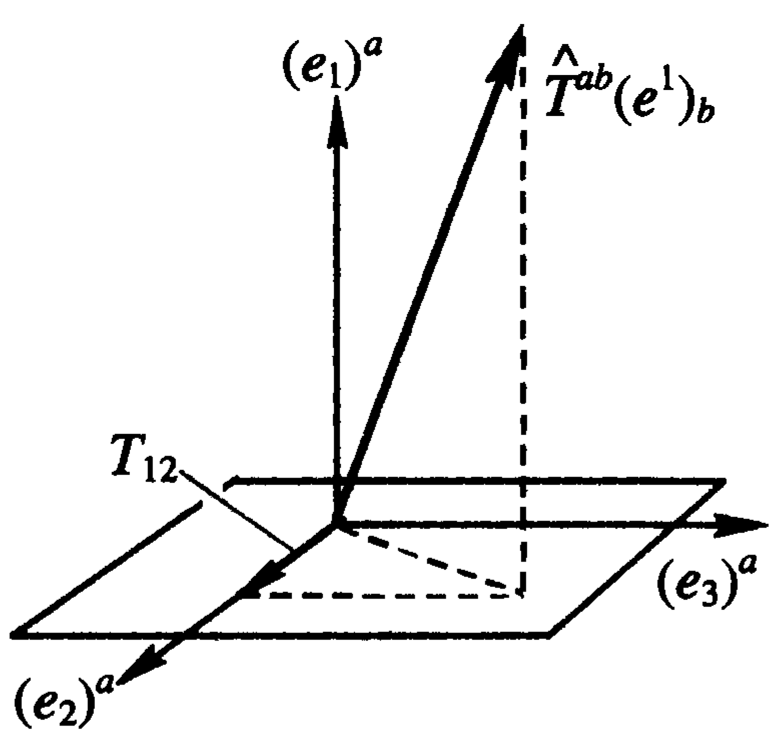


图 6-32　T_{12}是面元下侧物质对上侧物质的力的第二分量，$\hat{T}^{ab}(e^1)_b$ 是沿$(e_1)^a$方向的 3 动量流密度(见选读).

可见能动张量 T_{ab} 是绝对的，而能量密度、3 动量密度……则是相对的.

[选读 6-4-1]

因$\{(e_i)^a\}$正交归一，不难证明$T^{ij}=T_{ij}$. 设$\{(e^\mu)_a\}$为$\{(e_\mu)^a\}$的对偶基底，我们来讨论空间张量$\hat{T}^{ab}\equiv T^{ij}(e_i)^a(e_j)^b$ [或$\hat{T}_{ab}\equiv T_{ij}(e^i)_a(e^j)_b$]的物理意义. 以$\Delta S$代表与$(e_i)^a$ (i为 1，2，3 中之任一)垂直的空间单位面元，由正文可知

$$T^{ij}=T_{ij}=\Delta S \text{ 一侧物质对他侧物质的力的 } j \text{ 分量}, \tag{6-4-2}$$

因此$\hat{T}^{ab}$应解释为 3 应力张量. 另一方面，

$$T^{ij}=\hat{T}^{ab}(e^i)_a(e^j)_b=[\hat{T}^{ab}(e^i)_b](e^j)_a=\hat{T}^{ab}(e^i)_b \text{ 的 } j \text{ 分量}. \tag{6-4-3}$$

式(6-4-2)和(6-4-3)结合给出

$\hat{T}^{ab}(e^i)_b$的j分量$=\Delta S$一侧物质对他侧物质的力的j分量，

故

$$\hat{T}^{ab}(e^i)_b=\Delta S \text{ 一侧物质对他侧物质的作用力}.$$

而作用力无非是被作用者的 3 动量的变化率，相互作用无非是相互交换 3 动量，所以

$$\begin{aligned}\hat{T}^{ab}(e^i)_b &= \text{单位时间内沿}(e_i)^a\text{方向穿过与}(e_i)^a\text{垂直的单位面积的 3 动量}\\ &= \text{沿}(e_i)^a\text{方向的 3 动量流密度}.\end{aligned}$$

上式中的$(e_i)^a$可以是任意空间方向的单位矢量，所以上式表明沿任一空间方向的 3 动量流密度都可由$\hat{T}^{ab}$与该方向的单位矢量缩并而得，于是可把$\hat{T}^{ab}\equiv T^{ij}(e_i)^a(e_j)^b$解释为(称为)**3 动量流密度张量**. **[选读 6-4-1 完]**

定义 1　$W^a := -T^a{}_bZ^b$ 叫瞬时观者(p, Z^a)测得的 **4 动量密度**.

命题 6-4-1　瞬时观者$(p,(e_\mu)^a)$，$(e_0)^a=Z^a$测得的 4 动量密度W^a可做如下分解：

$$W^a=\mu Z^a+w^a, \tag{6-4-4}$$

其中μ和$w^a\equiv w^i(e_i)^a$分别是该观者测得的能量密度和 3 动量密度，后者是该观者的空间矢量.

证明　W^a在标架$\{(e_\mu)^a\}$上的分量为

$$W^0=W^a(e^0)_a=-T^a{}_bZ^b(-Z_a)=T_{ab}Z^bZ^a=\mu,$$

$$W^i=W^a(e^i)_a=-T^a{}_bZ^b(e^i)_a=-T_{ab}Z^b(e^i)^a=w^i;$$

故　$W^a=\mu(e_0)^a+w^i(e_i)^a=\mu Z^a+w^a$. □

注 1　式(6-4-4)与(6-3-32)很像：后者左边为 4 动量P^a，前者左边为 4 动量密度W^a，两式都是把 4 矢量做 3＋1 分解. 但应注意一个区别：4 动量P^a与观者无关，而 4 动量密度W^a却依赖于观者(由定义 1 知W^a是观者依赖的 4 矢).

命题 6-4-2　$\partial^a T_{ab}=0 \Rightarrow$ 能量守恒.

证明　设 t, x, y, z 为惯性系$\mathscr{R}$的坐标，令 $Z^a \equiv (\partial/\partial t)^a$，则对 $W^a \equiv -T^a{}_b Z^b$ 求导得

$$\partial_a W^a = \partial_a(-T^a{}_b Z^b) = -Z^b \partial^a T_{ab} - T^a{}_b \partial_a Z^b,$$

上式右边第一项为零(因 $\partial^a T_{ab}=0$)，第二项也为零[因 $\partial_a Z^b = \partial_a(\partial/\partial t)^b = 0$]，故

$$\partial_a W^a = 0 . \tag{6-4-5}$$

因而

$$0 = \partial_\mu W^\mu = \partial_0 W^0 + \partial_i W^i = \partial_0 \mu + \partial_i w^i = (\partial \mu/\partial t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} . \tag{6-4-6}$$

因为μ和 w^a 分别为$\mathscr{R}$系测得的能量密度和能流密度，上式很像电动力学的连续性方程 $(\partial \rho/\partial t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. 仿照由后者得出电荷守恒的推理便知式(6-4-6)导致能量守恒. □

注 2　还可由 $\partial^a T_{ab}=0$ 推出 3 维动量和角动量守恒，因此 $\partial^a T_{ab}=0$ 亦称**守恒方程**.

[选读 6-4-2]

也可用 4 维 Gauss 定理直接由式(6-4-5)导出能量守恒，简述如下：令Ω为$\mathbb{R}^4$中由若干超平面(3 维!)围成的 4 维“长方体”(见图 6-33，图中压缩一维)，即 3 维长方盒子ω(如图 6-34)的世界管(的一段). 由 Gauss 定理及式(6-4-5)得

$$0 = \int_{\partial\Omega} W^a n_a = \int_{\sigma_1} W^a n_a + \int_{\sigma_2} W^a n_a + \int_{\Delta} W^a n_a . \tag{6-4-7}$$

σ_1，σ_2为Ω的“上、下底”，$\varDelta$ 代表Ω的所有“侧面”. 注意到式(5-5-7′)关于$\partial\Omega$的法矢方向的要求，可知σ_1，σ_2及$\varDelta_1$(某一侧面)的法矢 n^a 方向如图 6-33，于是

$$\int_{\sigma_1} W^a n_a = \int_{\sigma_1} (\mu Z^a + w^a) n_a = \int_{\sigma_1} \mu Z^a Z_a = -\int_{\sigma_1} \mu$$
$$= -E_1 = -(3 \text{ 维盒子}\omega\text{在 } t_1 \text{ 时的能量}),$$

其中第一步用到式(6-4-4). 类似地有

$$\int_{\sigma_2} W^a n_a = E_2 = (\omega \text{ 在 } t_2 \text{ 时的能量}).$$

另一方面，

$$\int_{\varDelta_1} W^a n_a = -\int_{\varDelta_1} T_{ab} Z^b (\partial/\partial x)^a = \int_{\varDelta_1} w_1 = \int_{\varDelta_1} w_1 \hat{\varepsilon} ,$$

其中 $\hat{\varepsilon}$ 是由 4 维体元 $\varepsilon = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 在$\varDelta_1$上诱导的 3 维体元，即

$$\hat{\varepsilon}_{abc} = (\partial/\partial x)^d (\mathrm{d}t)_d \wedge (\mathrm{d}x)_a \wedge (\mathrm{d}y)_b \wedge (\mathrm{d}z)_c = -(\mathrm{d}t)_a \wedge (\mathrm{d}y)_b \wedge (\mathrm{d}z)_c .$$

故　$$\int_{\varDelta_1} W^a n_a = -\int_{\varDelta_1} w_1\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \int_{\varDelta_1} w_1 \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} (w_1 \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z)\, \mathrm{d}t , \tag{6-4-8}$$

第二个等号后去掉负号是因为$\{t, y, z\}$以$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=-\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$衡量是左手坐标系. 注意到$w_1$是沿$(\partial/\partial x)^a$方向的能流密度，可知$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}(w_1\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$是$\mathrm{d}t$时间内沿$\omega$侧壁$S_1$流出的能量,故式(6-4-8)右边是在$t_2-t_1$时间中由侧壁$S_1$(见图6-34)向外流出的能量，$-\int_\Delta W^a n_a$是在$t_2-t_1$中通过各侧壁向$\omega$流进的能量，即$\omega$的能量在这段时间内的增量，于是式(6-4-7)表明：

盒子ω的能量在t_2-t_1中的增量 = 通过各侧壁流进ω的能量.

可见能量守恒.

最后还应说明$\int_{\sigma_1}W^a n_a=-E_1$推证过程中的一个微妙之处. $\int_{\sigma_1}W^a n_a$是$\int_{\sigma_1}(W^a n_a)\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$的简写,其中$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$是$\sigma_1$上的诱导体元,似应按式(5-5-6)表为$\hat{\varepsilon}_{abc}=n^d\varepsilon_{dabc}$. 但式(5-5-6)的$n^a$是外向单位法矢，与现在(见图6-33)的$n^a$差一负号，因此$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$用现在的$n^a$应表为

$$\hat{\varepsilon}_{abc}=-n^d\varepsilon_{dabc}=-(\partial/\partial t)^d(\mathrm{d}t)_d\wedge(\mathrm{d}x)_a\wedge(\mathrm{d}y)_b\wedge(\mathrm{d}z)_c$$
$$=-(\mathrm{d}x)_a\wedge(\mathrm{d}y)_b\wedge(\mathrm{d}z)_c,$$

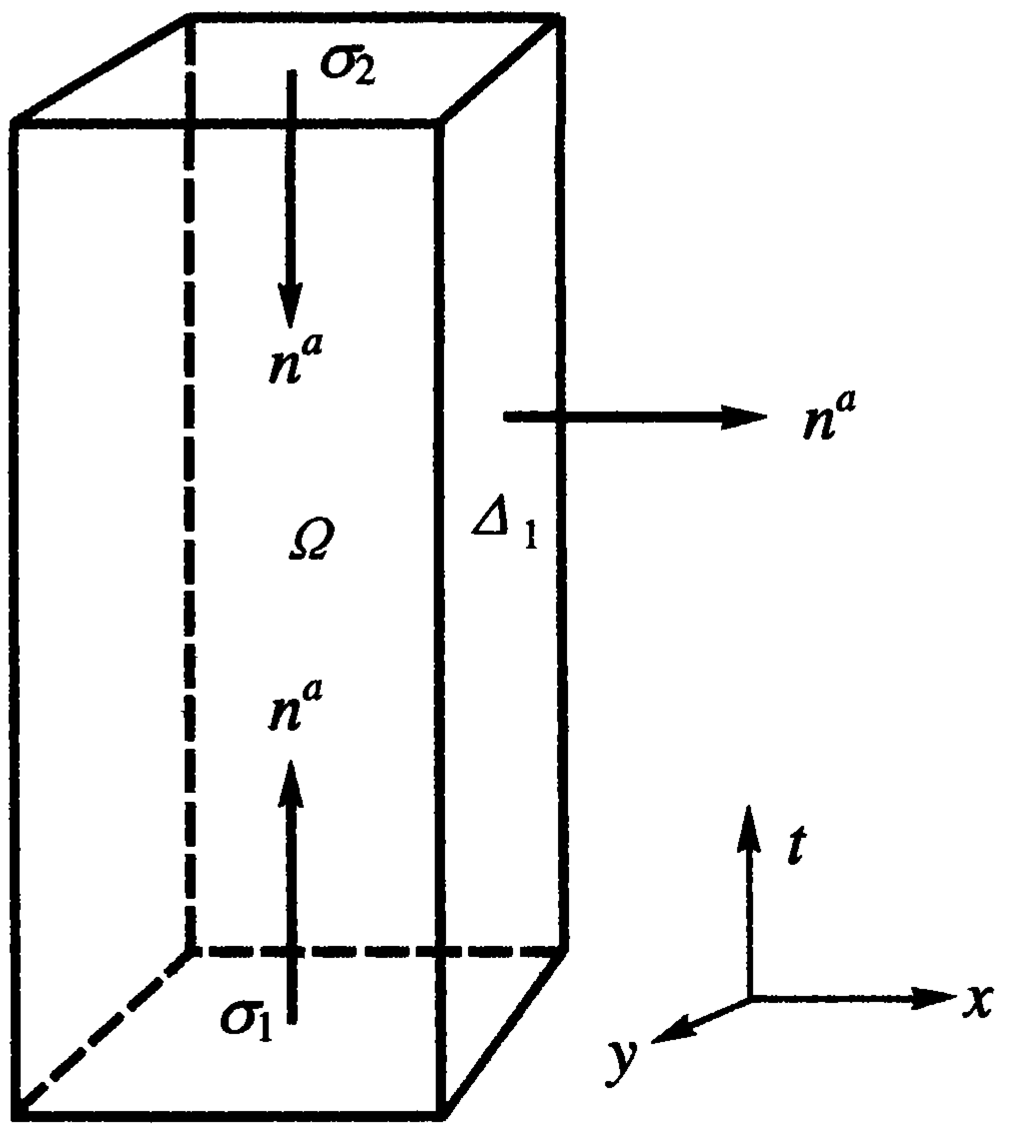


图6-33 Ω是图6-34的3维盒子ω的世界管(压缩掉一维)

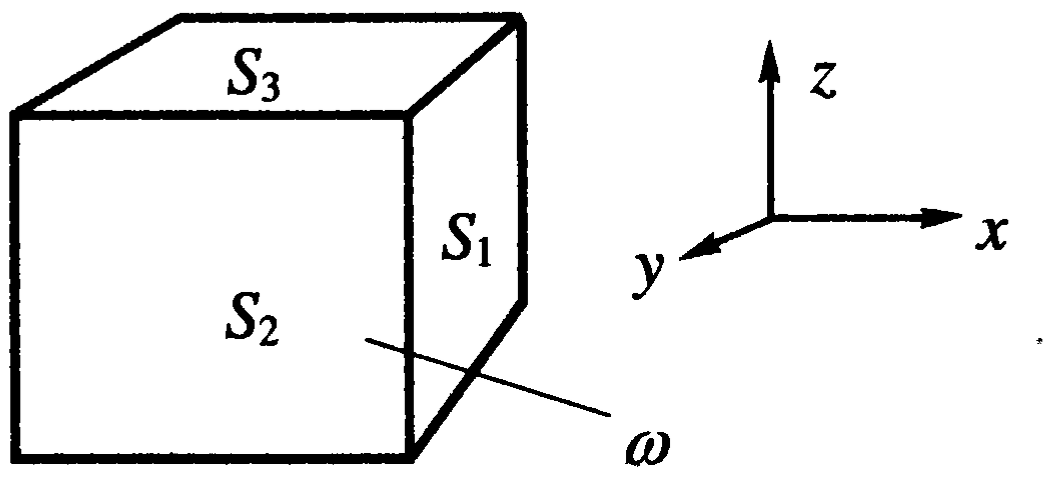


图6-34 3维盒子ω(空间图)

说明σ_1上的坐标系$\{x, y, z\}$用$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$衡量为左手系，因而

$$\int_{\sigma_1}(W^a n_a)\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=-\int_{\sigma_1}\mu\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\int_{\sigma_1}\mu(\mathrm{d}x)_a\wedge(\mathrm{d}y)_b\wedge(\mathrm{d}z)_c$$
$$=\int_{\sigma_1}\mu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-E_1.$$

[其中第三步是因为$\{x, y, z\}$是左手系，故要用式(5-2-6).]虽然结论仍是$\int_{\sigma_1}W^a n_a=-E_1$，但应注意中间两次出现负号，是“负负得正”保证了结论不变.

[选读6-4-2完]

§6.5 理想流体动力学

定义1 **理想流体**(perfect fluid)是这样一种物质场，其能动张量可表为

$$T_{ab}=\mu U_a U_b+p(\eta_{ab}+U_a U_b)=(\mu+p)U_a U_b+p\eta_{ab}\,, \tag{6-5-1}$$

其中μ，p 是函数(标量场)，U^a 是矢量场，满足$U^a U_a=-1$，叫理想流体的 **4 速场**.

流体本身可看作一个参考系. 设瞬时观者$(p,\ (e_\mu)^a)$的 4 速$(e_0)^a$满足$(e_0)^a=U^a|_p$，则他相对于流体参考系静止，故称瞬时**静止观者**(rest observer)，但其他参考系认为他随流体一起运动，故$(p,U^a|_p)$也称瞬时**随动观者**或**共动观者**(comoving observer). 对共动观者，

$$T_{ab}(e_0)^a(e_0)^b=T_{ab}U^a U^b=(\mu+p)U_a U_b U^a U^b+p\eta_{ab}U^a U^b=(\mu+p)-p=\mu\,.$$

可见式(6-5-1)中的μ是共动观者测得的能量密度，也叫**固有能量密度**. 以$\{(e_i)^a\}$代表共动观者的 3 标架，由式(6-5-1)得

$$T_{ab}(e_i)^a(e_j)^b=p\eta_{ab}(e_i)^a(e_j)^b=p\delta_{ij}\,,$$

可见共动观者测得的 3 维应力张量的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix},$$

即只有压强而无切向应力(这正是普通定义的理想流体的一个重要特征)，而且由$T_{11}=T_{22}=T_{33}=p$和共动观者 3 标架的任意性可知压强是各向同性的. $T_{ab}(e_0)^a(e_i)^b=0$则表明共动观者测得的能流密度为零，因而没有热传导. 这些都是理想流体的重要特征.

对 4 速场 U^a 的物理意义有必要做一解释. 理想流体是连续介质，而连续介质本身是对粒子的微观离散结构做统计平均处理后所得的模型. 通常把微观足够大而宏观足够小的流体体元称为**流体质点**[见周光炯等(1992) P.15~18]. 式(6-5-1)中的 U^a 就是所有流体质点的 4 速构成的矢量场. 共动观者就是与某一流体质点相对静止的观者，**共动参考系(静止参考系)**就是以 U^a 为观者 4 速场的参考系. 应注意流体质点与组成流体的微观粒子在概念上的差别. 这一差别对理想气体(ideal gas，是理想流体的一例)表现得尤为突出. 由于频繁碰撞，各气体分子的世界线多处相交，而且分子的 4 速在碰撞时突变，所以各分子的世界线与图 6-35 的曲线显著不同，不要误以为式(6-5-1)中的 U^a 是某一分子的 4 速. 实际上，把理想气体看作理想流体时已对分子的微观运动做了统计平均处理，U^a 是平均后的 4 速场. 考虑一

个在惯性系$\{t, x, y, z\}$中静止的箱子，其中有处于热平衡的理想气体. 由于不存在特殊方向，气体分子的平均 3 速为零，因此$U^a = (\partial/\partial t)^a$，其积分曲线就是 t 坐标线，如图 6-36 所示. 可见共动观者并非随气体分子而动的观者，而是与箱子相对静止的惯性观者.

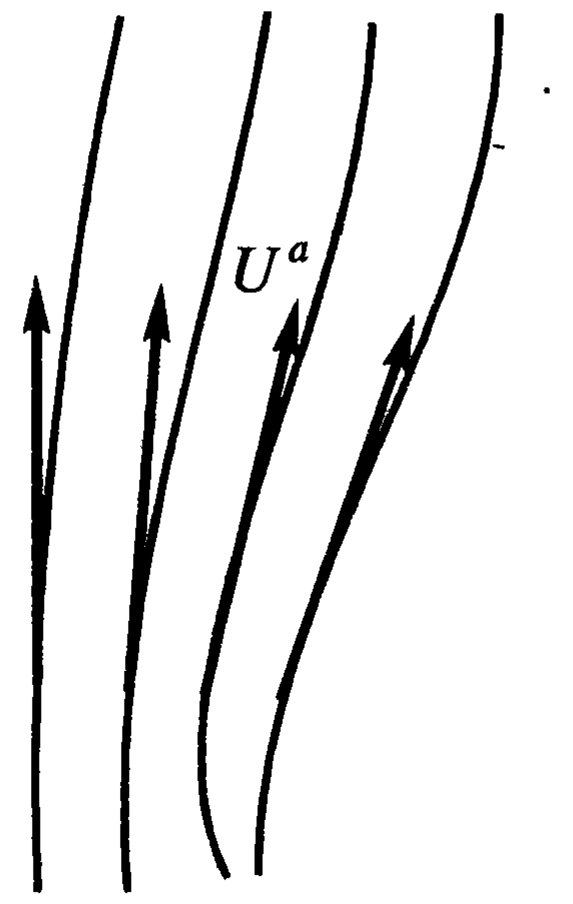


图 6-35　流体质点世界线切矢构成流体 4 速场 U^a

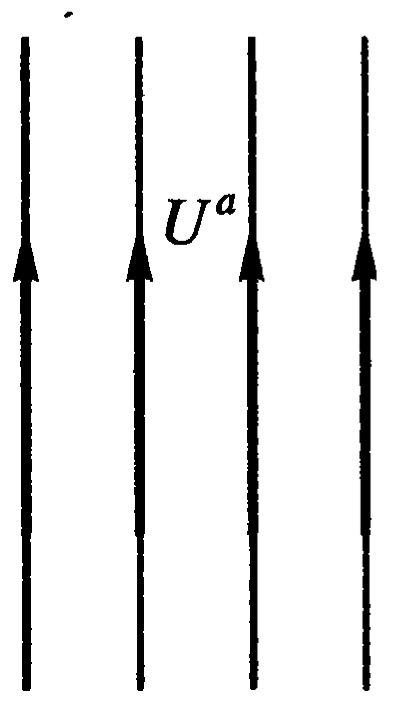


图 6-36　理想气体(作为理想流体)的 4 速场

理想气体的压强 p 与质量密度μ有如下的熟知关系：

$$p = \mu \overline{u^2}/3, \tag{6-5-2}$$

其中 $\overline{u^2}$ 是分子随机运动速率平方的平均. 因 $\overline{u^2} \ll c^2$，故$(p/c^2) << \mu$，在 $c=1$ 的单位制中就是 $p << \mu$，即压强很小于密度. 这一结论对任何非相对论流体都成立，例如在飓风中 $p/\mu \sim 10^{-12}$，在地心处 $p/\mu \sim 10^{-10}$. 然而相对论流体就不同. 恒温箱内达到热平衡的电磁辐射(叫**黑体辐射**)可看作极端相对论理想流体的例子，与箱子相对静止的参考系就是流体的静止系(共动系). 箱内辐射相对于此系是各向同性的，因而此系亦称黑体辐射的各向同性参考系. 箱内电磁辐射与理想气体有颇多类似之处，可称为**光子气**(photon gas)，其压强 p 与能量密度μ的关系也服从式(6-5-2)(当然推导方法不同)，而且 $\overline{u^2}=1$，故

$$p = \mu/3. \tag{6-5-3}$$

黑体辐射之所以可看作理想流体，关键在于其光子相对于各向同性参考系有沿各个方向、充分杂乱的随机运动(详见附录 D). 探照灯中射出的光束却不能看作理想流体，因为不存在一个参考系，在它看来这光束是各向同性的.

牛顿力学的理想流体服从两个重要规律，即描述质量密度μ时间变率的连续性方程

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\mu \vec{u}) = 0 \text{ (反映质量守恒)} \tag{6-5-4}$$

和描述 3 速$\vec{u}$ 的时间变率的欧拉方程(推导见选读 6-5-1)

$$-\vec{\nabla} p = \mu \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}\right]. \tag{6-5-5}$$

下面介绍这两个规律在相对论理想流体力学的推广. 设理想流体同外界无相互作用，则其能动张量满足 $\partial^a T_{ab}=0$. 由式(6-5-1)得

$$0=\partial^a T_{ab}=U_a U_b \partial^a(\mu+p)+(\mu+p)(U^a\partial_a U_b+U_b\partial_a U^a)+\partial_b p\,. \tag{6-5-6}$$

这是一个 4 矢方程，可分别在共动观者的时间和空间方向投影. 用 U^b 与上式缩并得

$$0=U^b\partial^a T_{ab}=-U_a\partial^a(\mu+p)+(\mu+p)(U^b U^a\partial_a U_b-\partial_a U^a)+U^b\partial_b p\,,$$

注意到

$$U^b U^a\partial_a U_b=\frac{1}{2}U^a\partial_a(U^b U_b)=0\quad(\text{因}\,U^b U_b=-1=\text{常数}),$$

便得

$$U^a\partial_a\mu+(\mu+p)\,\partial_a U^a=0\,. \tag{6-5-7}$$

此即式(6-5-6)在共动观者时间方向的投影. 为求空间投影，以投影映射 $h_c{}^b\equiv\delta_c{}^b+U_c U^b$ 与式(6-5-6)缩并得

$$(\mu+p)\,U^a\partial_a U_c+\partial_c p+U_c U^b\partial_b p=0\,. \tag{6-5-8}$$

式(6-5-7)、(6-5-8)就是理想流体的相对论运动方程. 压强为零的理想流体叫尘埃(dust). 对尘埃，式(6-5-8)简化为 $U^a\partial_a U_c=0$，可见尘埃粒子的世界线为测地线. 这是自然的，因为 $p=0$ 表明粒子不受力. 为得出式(6-5-7)、(6-5-8)的非相对论近似，选任一惯性系$\{t,x^i\}$并对 U^a 做 3 + 1 分解[见式(6-3-21)]：

$$U^a=\gamma\,[(\partial/\partial t)^a+u^a]\cong(\partial/\partial t)^a+u^a\,, \tag{6-5-9}$$

其中 u^a 是流体在该系中的3速，$\gamma=-(\partial/\partial t)^a U_a$ 在非相对论近似下为1. 把式(6-5-9)代入式(6-5-7)，注意到 $p<<\mu$，得(从现在起略去近似号)

$$0=\ (\partial/\partial t)^a\partial_a\mu+u^a\partial_a\mu+\mu\,\partial_a u^a=\frac{\partial\mu}{\partial t}+\partial_a(\mu\,u^a)\,.$$

因 u^a 是所论惯性系的空间矢量，$\partial_a(\mu\,u^a)=\partial_i(\mu\,u^i)=\vec\nabla\cdot(\mu\,\vec u)$，故上式即连续性方程(6-5-4). 用 $(\partial/\partial x^i)^c$ 与式(6-5-8)缩并，注意到式(6-5-9)及 $p<<\mu$，得

$$\begin{aligned}0&=\mu\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\partial_a u_i+u^a\partial_a u_i\right]+\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c\partial_c p+u_i\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b+u^b\right]\partial_b p\\&=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u^a\partial_a u_i\right)+\frac{\partial p}{\partial x^i}+u_i\frac{\partial p}{\partial t}+u_i u^j\frac{\partial p}{\partial x^j}\,.\end{aligned}$$

在非相对论情况($u<<1$)下还有 $u_i\partial p/\partial t<<\partial p/\partial x^i$ 和 $u_i u^j\partial p/\partial x^j<<\partial p/\partial x^i$，故上式右边最后两项与 $\partial p/\partial x^i$ 相较可忽略，写成 3 矢等式即为欧拉方程(6-5-5).

[选读 6-5-1]

学过牛顿流体力学的读者都知道对流体的描述存在拉格朗日和欧拉两种方法[见周光炯等(1992)]，前者着眼于流体质点(质点的空间轨迹称为迹线)；后者着眼于空间点(每一空间点有一流速矢量 $\vec{u}$ ，因而在 3 维空间中有流速矢量场 $\vec{u}$ ，其积分曲线称为流线.). 欧拉描述的一大优点是可在空间上定义流速场. 用 4 维语言可对这两种描述的区别和联系获得更深刻的理解. 在 4 维语言中，流体质点的世界线充满时空的一个开集 O($\forall p\in O$ 有唯一的质点世界线过 p). 拉格朗日描述既然着眼于质点，在 4 维语言中就是着眼于世界线，其切矢 U^a 构成 4 维矢量场. 就是说，拉格朗日描述可自然过渡到 4 维描述. 反之，欧拉描述则是天生的 3 + 1 维描述，因为“空间点”的概念只在 3 + 1 维语言中有意义，一个空间点其实就是所选惯性系 $\mathscr{R}$ 内的一个惯性观者的世界线，例如图 6-37 的 P. $\forall p\in O$ ，令 $u^a|_p$ 为 $U^a|_p$ 在过 p 的同时面 Σ_t 上的投影，便得到 O 上的空间流速场 u^a. u^a 对时空点的依赖关系可用 $\mathscr{R}$ 系的惯性坐标 t, x^i 表为 $u^a(t, x^i)$ ，它在每一同时面 Σ_t 上的值就是时刻 t 的欧拉流速矢量场 $\vec{u}$. 下面以欧拉方程的推导为例加深理解. 把流体质点想像为一个小立方体，体积为 V. 不难证明质点所受力 $\vec{f}$ 满足 $\vec{f}/V=-\vec{\nabla}p$ ，其中 p 是质点所在处的压强. 设 m 为质点质量，则

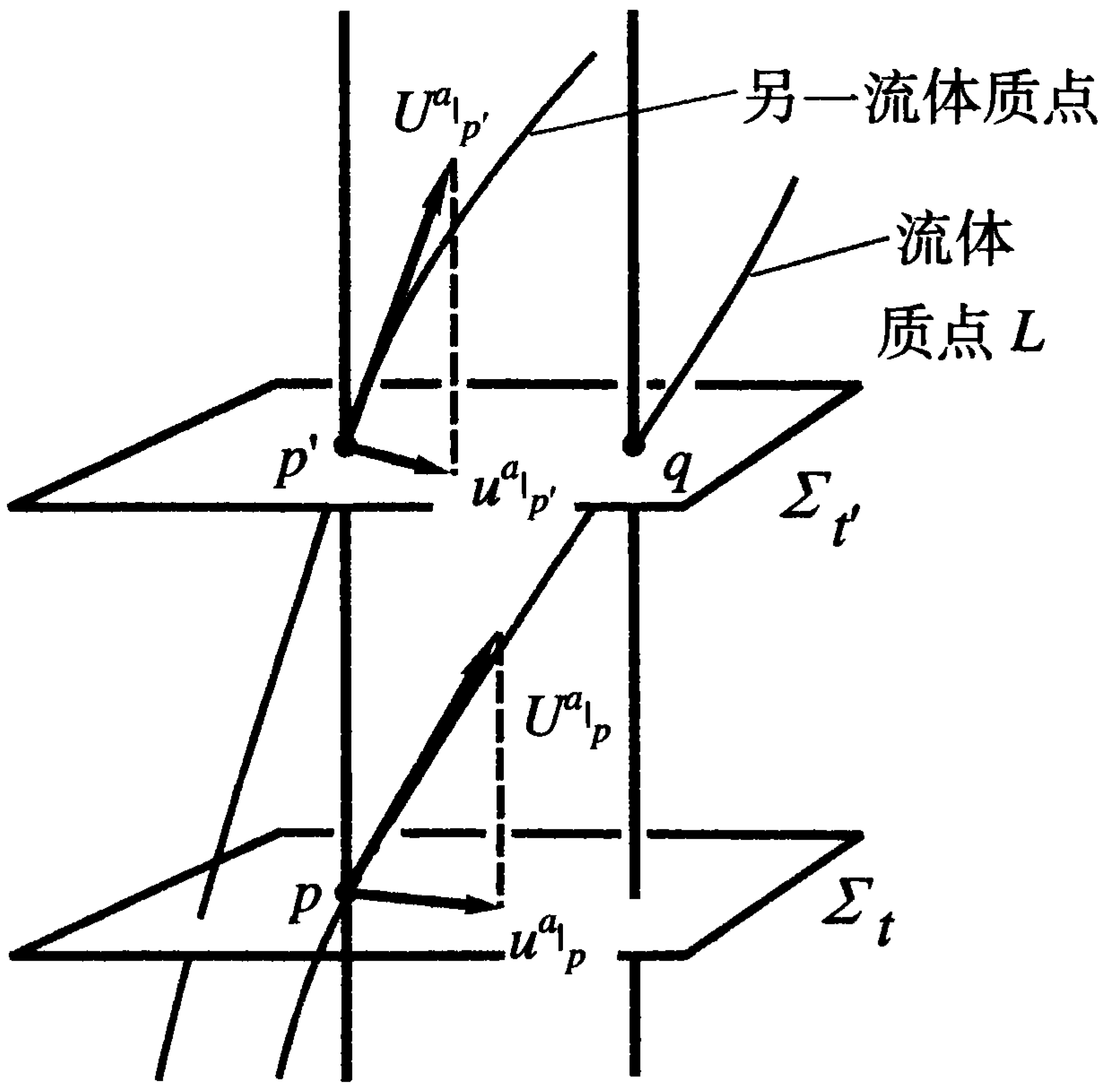


图 6-37　欧拉空间流速场 u^a 的定义

$$-\vec{\nabla}p=\vec{f}/V=\frac{m\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t}{V}=\mu\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}, \tag{6-5-10}$$

其中 $\vec{u}$ 是质点的 3 速，有两个原因使它随 t 而变：①每一空间点的 3 速 $\vec{u}$ 可随 t 而变(图 6-37 中 p' 和 p 点的 u^a 可不同)；②流体质点在运动中可从一个空间点移到另一空间点(图 6-37 的质点 L 从空间点 P 移到 Q)，移动方式由其轨迹的参数表达式 $x^i=x^i(t)$ 刻画. 以 $\vec{u}\,(t, x^i(t))$ 代表由这两个原因导致的 $\vec{u}$ 对 t 的依赖，则式(6-5-10)可表为

$$-\vec{\nabla}p=\mu\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\mu\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\mu\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}\right].$$

此即欧拉方程(6-5-5).　**[选读 6-5-1 完]**

§6.6 电 动 力 学

6.6.1 电磁场和 4 电流密度

众所周知，Maxwell 的电磁理论具有“先天的”洛伦兹协变性．因此，与经典力学和量子力学不同，“非相对论电动力学”并不存在．本节的任务在于用 4 维语言重新表述电动力学的主要内容．

电动力学涉及的物质场有二：①电磁场；②全体带电质点组成的连续流体．它们既是电磁场的源，又受电磁场的作用．

在 4 维语言中，电磁场由闵氏时空的 2 形式场 F_{ab}(叫**电磁场张量**)描述．读者熟悉的电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 则是观者测量 F_{ab} 得到的两个空间矢量．

定义1　瞬时观者 (p, Z^a) 测得的**电场** E^a 和**磁场** B^a 由下式定义

$$E_a := F_{ab}Z^b\,,\quad B_a := -{}^*F_{ab}Z^b\,,\ (E^a := \eta^{ab}E_b, B^a := \eta^{ab}B_b\,.) \tag{6-6-1}$$

其中 ${}^*F_{ab}$ 是 F_{ab} 的对偶微分形式(见§5.6)，也是 2 形式场．

命题 6-6-1　E^a 和 B^a 是瞬时观者 $(p,\ (e_\mu)^a)$，$(e_0)^a = Z^a$ 的空间矢量，且

$$E_1 = F_{10}\,,\quad E_2 = F_{20}\,,\quad E_3 = F_{30}\,;\quad B_1 = F_{23}\,,\quad B_2 = F_{31}\,,\quad B_3 = F_{12}\,. \tag{6-6-2}$$

证明　因 $F_{ab} = F_{[ab]}$，$Z^aZ^b = Z^{(a}Z^{b)}$，${}^*F_{ab} = {}^*F_{[ab]}$，故

$$E_aZ^a = F_{ab}Z^aZ^b = 0\,,\qquad B_aZ^a = -{}^*F_{ab}Z^aZ^b = 0\,,$$

可见 E^a 和 B^a 是瞬时观者 (p, Z^a) 的空间矢量．因

$$E_i = E_a(e_i)^a = F_{ab}Z^b(e_i)^a = F_{ab}(e_0)^b(e_i)^a = F_{i0}\,,$$

故 $E_1 = F_{10}$，$E_2 = F_{20}$，$E_3 = F_{30}$．又因

$$B_i = B_a(e_i)^a = -{}^*F_{ab}Z^b(e_i)^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}(e_0)^b(e_i)^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{0icd}F^{cd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk}F^{jk}\,,$$

所以 $B_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{0123}F^{23} + \varepsilon_{0132}F^{32}) = F^{23} = F_{23}$，同理有 $B_2 = F_{31}$，$B_3 = F_{12}$．　□

由命题 6-6-1 可知 F_{ab} 在观者的 4 标架 $(e_\mu)^a$ 的分量排成的矩阵为

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-6-3}$$

命题 6-6-2　设惯性系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 由洛伦兹变换

$$t = \gamma(t' + v\,x')\,,\qquad x = \gamma(x' + v\,t'),\qquad y = y',\qquad z = z' \tag{6-6-4}$$

相联系，则两者测同一电磁场 F_{ab} 所得值 $(\vec{E}, \vec{B})$ 和 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 有如下关系：

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2)\ ;$$
$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \gamma(B_2 + vE_3), \quad B'_3 = \gamma(B_3 - vE_2)\ . \qquad (6\text{-}6\text{-}5)$$

证明 习题. □

命题 6-6-3 设 p 点的两个瞬时观者 $(p,(e_\mu)^a)$ 和 $(p,(e'_\mu)^a)$ 的正交归一 4 标架有如下联系：$(e'_2)^a = (e_2)^a$，$(e'_3)^a = (e_3)^a$，则他们测同一电磁场所得值 $(\vec{E}, \vec{B})$ 和 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 也有式(6-6-5)的关系，其中 $\gamma \equiv -(e_0)^a(e'_0)_a$.

证明 本命题只涉及 p 点的当地测量，不涉及求导. 选惯性系 $\mathscr{R}$ 使其过 p 点的观者世界线以 $(e_0)^a$ 为 4 速，再选惯性系 $\mathscr{R}'$ 使其过 p 点的世界线以 $(e'_0)^a$ 为 4 速，则 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 系的关系便为式(6-6-4). 故有式(6-6-5). □

命题 6-6-3 表明式(6-6-5)对任一时空点 p 的任何满足 $(e'_2)^a = (e_2)^a$，$(e'_3)^a = (e_3)^a$ 的两个瞬时观者成立，从而澄清了“式(6-6-5)只对惯性系成立”的误解.

[选读 6-6-1]

命题 6-6-2 和 6-6-3 也可用正交归一标架变换(见图 6-38)来证明. 按式(6-3-21)把瞬时观者 $(p,(e'_0)^a)$ 的 4 速 $U^a \equiv (e'_0)^a$ 相对于瞬时观者 $(p,(e_0)^a)$ 做 3 + 1 分解，得

$$(e'_0)^a = \gamma(e_0)^a + \gamma u^a .$$

因 3 速 u^a 与 $(e_1)^a$ 同向，且 $(e_1)^a$ 归一，故 $u^a = u(e_1)^a$，于是上式成为

$$(e'_0)^a = \gamma(e_0)^a + \gamma u(e_1)^a . \qquad (6\text{-}6\text{-}6)$$

这就是 $(e'_0)^a$ 用正交归一标架 $\{(e_\mu)^a\}$ 的展开式. 再设 $(e'_1)^a$ 的展开式为

$$(e'_1)^a = \alpha(e_0)^a + \beta(e_1)^a \quad (\alpha, \beta \text{ 待定}),$$

由 $\eta_{ab}(e'_1)^a(e'_0)^b = 0$ 及 $\eta_{ab}(e'_1)^a(e'_1)^b = 1$ 得 $\beta = \gamma$，$\alpha = \gamma u$，故

$$(e'_1)^a = \gamma u(e_0)^a + \gamma(e_1)^a . \qquad (6\text{-}6\text{-}7)$$

式(6-6-6)和(6-6-7)配以 $(e'_2)^a = (e_2)^a$，$(e'_3)^a = (e_3)^a$ 便是两个正交归一标架 $\{(e'_\mu)^a\}$ 与 $\{(e_\mu)^a\}$ 之间的变换关系. 由此易证式(6-6-5). 以 E'_2 为例：

$$E'_2 = F'_{20} = F_{ab}(e'_2)^a(e'_0)^b = F_{ab}(e_2)^a[\gamma(e_0)^b + \gamma u(e_1)^b] = \gamma(F_{20} + uF_{21}) = \gamma(E_2 - uB_3) .$$

[选读 6-6-1 完]

电磁场的源是电荷和电流. 在 4 维语言中，连续分布的电荷和电流可看作由大量带电质点组成的尘埃[见 Synge(1956)第 VIII 章§10，第 X 章§7.]. 为简化问题，只讨论所有带电质点同属一类(例如都是电子)的情况，其电荷为 e.① 以 U^a 代表这一带电尘埃的 4 速场，则 (p,U^a) 便是 p 点的瞬时共动观者. 设其局部同时面(与 U^a 正交)的小体积 V_0 中有 N 个带电质点，则 $\eta_0 = N/V_0$ 就是共动观者测得的

① 这一简化并不影响实质. 重要的是它们组成一个粒子流，其 4 速场 U^a 在每一时空点的值就是世界线经过该点的尘埃质点的 4 速，而不像气体分子那样以杂乱无章的方式向四面八方运动.

质点数密度(称为**固有数密度**). 以(p, Z^a)代表 p 点的任一瞬时观者，只要不是共动观者(只要 $Z^a \neq U^a$)，他就觉得质点在运动，即觉得有电流. 设上述 N 个质点在(p, Z^a)的局部同时面(与 Z^a 正交)上所占体积为 V(见图 6-39)，则由"尺缩"效应知 $V_0 = \gamma V$，其中 $\gamma \equiv -Z^a U_a$，所以观者(p, Z^a)测得的质点数密度为 $\eta = N/V = \gamma N/V_0 = \gamma\eta_0$，因而 $\rho_0 \equiv e\eta_0$ 及 $\rho \equiv e\eta$ 分别是共动观者(p, U^a)和任意观者(p, Z^a)测得的**电荷密度**，两者关系为 $\rho = \gamma\rho_0$. 设 u^a 为质点相对于(p, Z^a)的 3 速，则 $j^a := \rho u^a$ 为观者(p, Z^a)测得的 **3 电流密度**. 共动观者测得的 3 电流密度为零.

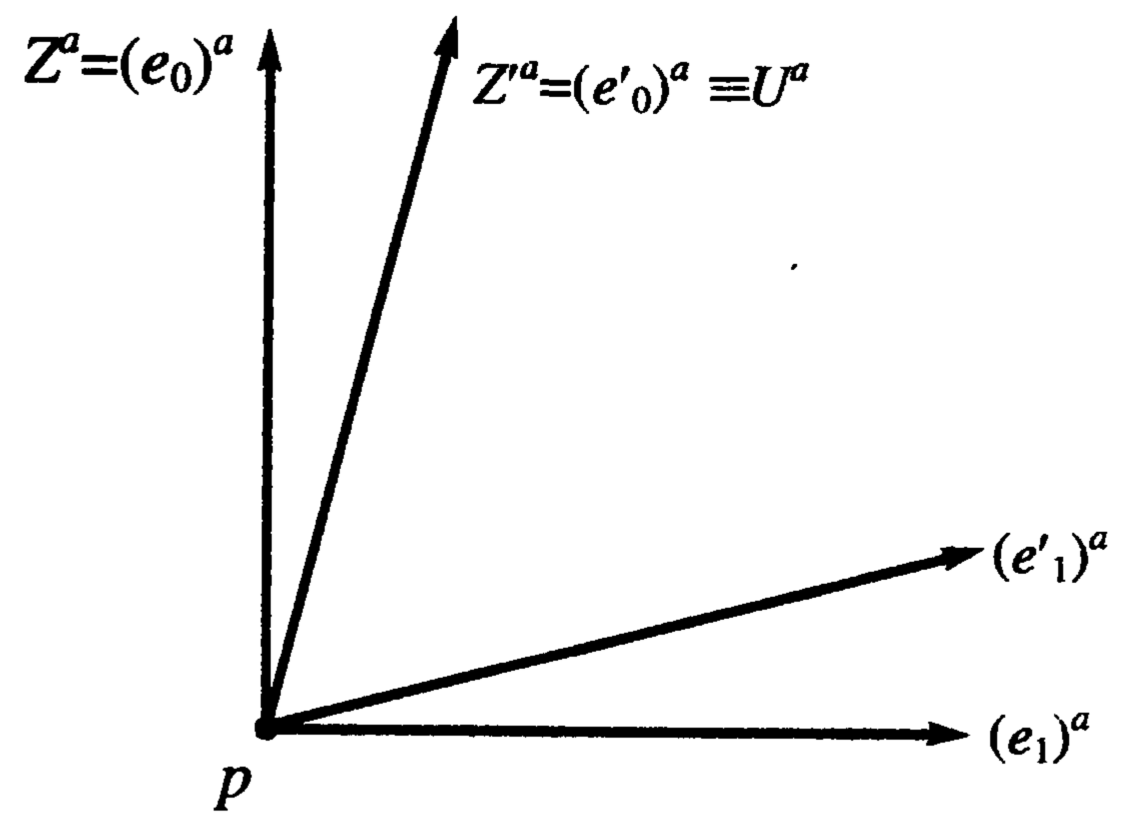


图 6-38　两个正交归一标架的关系

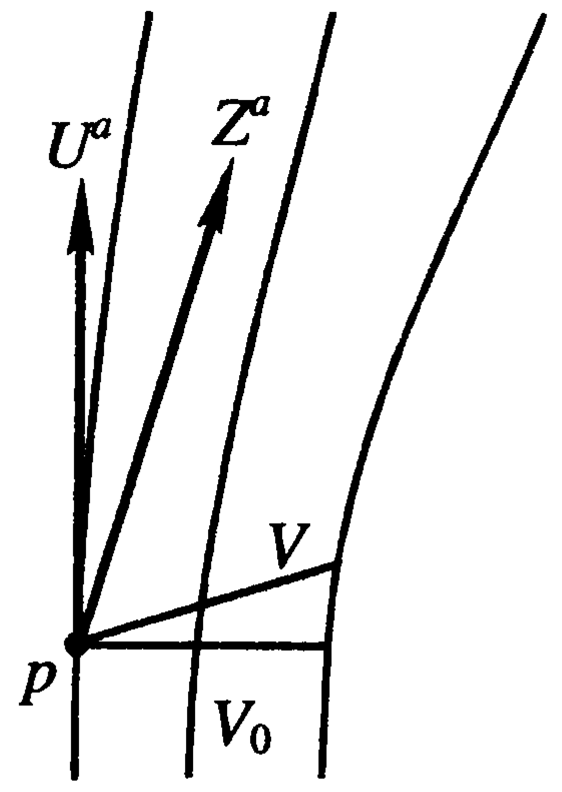


图 6-39　共动观者 U^a 和非共动观者 Z^a 测得体积 V_0 和 V 不同

定义 2　带电粒子流的 **4 电流密度**(4-current density)定义为

$$J^a := \rho_0 U^a. \tag{6-6-8}$$

命题 6-6-4　J^a 可借瞬时观者(p, Z^a)做如下 3 + 1 分解：

$$J^a = \rho Z^a + j^a. \tag{6-6-9}$$

证明　$J^a = \rho_0 U^a = \rho_0\gamma(Z^a + u^a) = \rho Z^a + \rho u^a = \rho Z^a + j^a$.　□

可见瞬时观者测得的电荷密度ρ和 3 电流密度 j^a 分别是 4 电流密度 J^a 的时间分量 J^0 和空间投影 $h^a{}_b J^b$，上式也可表为

$$\rho = -Z_a J^a, \qquad j^i = J^i.$$

电荷与质量一样是描写带电粒子内禀性质的物理量. 不参与相互作用的带电粒子的电荷保持不变. 当与其他粒子相互作用时，作用前后的总电荷必定相等，这是迄今的所有实验都证实的结果，即众所周知的电荷守恒律. 在 3 维语言电动力学中这一定律被表述为连续性方程：$(\partial\rho/\partial t) + \nabla\cdot\vec{j} = 0$(对任一惯性系). 不难看出其相应的 4 维表述为 $\partial_a J^a = 0$.

6.6.2　麦氏方程

在电动力学教科书中，$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的运动方程就是熟知的麦氏方程. 由它们可推出麦氏方程的 4 维形式

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b\,, \tag{6-6-10}$$

$$\partial_{[a}F_{bc]} = 0\,. \tag{6-6-11}$$

在现在的框架中，我们把上两式作为理论的出发点，即假设电磁场张量服从方程(6-6-10)和(6-6-11). 请注意式(6-6-10)已把电荷守恒律包含在内，因为由它可得

$$\partial^b J_b = -(4\pi)^{-1}\partial^b\partial^a F_{ab} = -(4\pi)^{-1}\partial^{(b}\partial^{a)}F_{[ab]} = 0\,,$$

因而 $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$，此即电荷守恒.

命题 6-6-5 对任一惯性系$\{t,\ x,\ y,\ z\}$，由式(6-6-10)、(6-6-11)可导出 3 维麦氏方程

$$\text{(a)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{(b)}\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{(c)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \text{(d)}\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{6-6-12}$$

其中第一、四式对应于式(6-6-10)，第二、三式对应于式(6-6-11).

注 1 此处采用几何高斯制(见附录 A)，3 维麦氏方程在系数上与常见形式略有区别.

证明 以 δ_{ab} 代表所选惯性系的等 t 面上的(诱导)欧氏度规，$\hat{\partial}_a$ 和 ∂_a 分别代表与 δ_{ab} 和 η_{ab} 适配的导数算符，令 $Z^a \equiv (\partial/\partial t)^a$，注意到空间矢量 E^a 满足 $E_0 = 0$，便有

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \hat{\partial}^a E_a = \partial E^i/\partial x^i = \partial^a E_a = \partial^a(F_{ab}Z^b) = Z^b(-4\pi J_b) = 4\pi\rho\,.$$

此即式(6-6-12a). 再证明式(6-6-12b). 设 $\hat{\varepsilon}_{abc}$ 是等 t 面上与 δ_{ab} 适配的体元，则由式(5-6-5c)知

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_c = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\,\hat{\partial}_a E_b\,, \tag{6-6-13}$$

其中的 $\hat{\partial}_a E_b$ 可表为[据式(3-1-9)]

$$\hat{\partial}_a E_b = (\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b\hat{\partial}_i E_j = (\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b\partial_i E_j\,, \tag{6-6-14}$$

而 $E_0 = 0$ 导致

$$\partial_a E_b = (\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^j)_b\partial_\mu E_j = (\mathrm{d}x^0)_a(\mathrm{d}x^j)_b\partial_0 E_j + (\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b\partial_i E_j\,,$$

将上式投影到等 t 面，注意到 $(\mathrm{d}x^0)_a$ 的投影为零，$(\mathrm{d}x^i)_a$ 的投影等于自身，与式(6-6-14)比较得

$$\hat{\partial}_a E_b = h_a{}^d h_b{}^e\partial_d E_e\,. \tag{6-6-15}$$

代入式(6-6-13)，注意到 $\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c$ 是空间张量，其投影等于自身，便得

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_c = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c h_a^d h_b^e\partial_d E_e = \hat{\varepsilon}^{de}{}_c\partial_d E_e\,,$$

故

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_c=\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_a E_b=\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_a(F_{be}Z^e)=Z^e\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_a F_{be}=-Z^e\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_e F_{ab}-Z^e\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_b F_{ea},$$

其中最后一步用到式(6-6-11)及 F_{ab} 的反称性. 而上式右边第二项又等于 $-\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_a(F_{be}Z^e)$，即等于$-(\vec{\nabla}\times\vec{E})_c$，故

$$2\ (\vec{\nabla}\times\vec{E})_c=-Z^e\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_e F_{ab}=-Z^e\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c\partial_e F_{ab}. \tag{6-6-16}$$

设 ε_{abcd} 是与度规 η_{ab} 适配的体元，则由式(5-5-6)知

$$\hat{\varepsilon}_{cab}=Z^d\varepsilon_{dcab}, \tag{6-6-17}$$

故式(6-6-16)成为

$$2\ (\vec{\nabla}\times\vec{E})_c=-Z^eZ^d\varepsilon_{dc}{}^{ab}\partial_e F_{ab}=-Z^e\partial_e(\varepsilon_{dc}{}^{ab}F_{ab}Z^d)=-Z^e\partial_e(2\,{}^*F_{dc}Z^d)=-\ 2\,Z^e\partial_e B_c.$$

于是

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c(\vec{\nabla}\times\vec{E})_c=-\ Z^e\partial_e B_i=-\frac{\partial B_i}{\partial t},$$

因而

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t.$$

其他两个麦氏方程的推导留作习题. □

注 2 对非惯性坐标系，由式(6-6-10)、(6-6-11)推出的方程将有别于通常的 3 维麦氏方程.

[选读 6-6-2]

作为等 t 面上与诱导度规 $h_{ab}=\eta_{ab}+Z_aZ_b$ 相适配的体元，$\hat{\varepsilon}_{cab}$ 只能被确定到差一个负号的程度(见选读 5-5-1 末)，即 $-Z^d\varepsilon_{dcab}$ 同样可被取作 $\hat{\varepsilon}_{cab}$. 只有考虑等 t 面的定向之后才能把 $\hat{\varepsilon}_{cab}$ 唯一确定为 $Z^d\varepsilon_{dcab}$. 与讨论 Gauss 定理时的情况有所不同，现在不存在一个自然的带边流形 N 使等 t 面可看作 N 的边界 ∂N，因而其法矢 Z^a 无所谓外向或内向，等价地，现在的等 t 面不存在什么诱导定向. 我们把 $\hat{\varepsilon}_{cab}$ 写成 $Z^d\varepsilon_{dcab}$ 而非 $-Z^d\varepsilon_{dcab}$ 是出于如下考虑：3 维形式的麦氏方程 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$ 涉及旋度，其成立条件是所选笛卡儿坐标系 $\{x,y,z\}$ 为右手系(否则有 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=\partial\vec{B}/\partial t$)，即空间定向要与 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 相容. 注意到 $\varepsilon_{dcab}=(\mathrm{d}t)_d\wedge(\mathrm{d}x)_a\wedge(\mathrm{d}y)_b\wedge(\mathrm{d}z)_c$ 以及 $Z^d=(\partial/\partial t)^d$，便知体元 $\hat{\varepsilon}_{cab}=(\mathrm{d}x)_a\wedge(\mathrm{d}y)_b\wedge(\mathrm{d}z)_c$，正好与所需定向相容.

[选读 6-6-2 完]

6.6.3 4 维洛伦兹力

前已指出，带电质点是电磁场的场源(以 J^a 体现)，它对电磁场 F_{ab} 的影响由式(6-6-10)反映. 反之，带电质点也受到电磁场的作用力，即洛伦兹力

$$\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}), \tag{6-6-18}$$

其中 q 及 $\vec{u}$ 分别代表质点的电荷及 3 速. 上式与 3 力定义 $\vec{f}=\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 结合便给出带电质点在电磁场中的运动方程(设无其他力)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}). \tag{6-6-19}$$

应该指出，上式自身具有洛伦兹协变性(但不易直接看出)，这也是“麦氏电磁理论天生就有洛伦兹协变性”这一结论的一个表现. 就是说，对另一惯性系 $\mathscr{R}'$，同一质点的运动方程将与式(6-6-19)形式相同，只是与参考系有关的量都要加′，即

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{\mathrm{d}t'}=q(\vec{E}'+\vec{u}'\times\vec{B}'). \tag{6-6-19$'$}$$

应注意，q 无须加 ′，因为质点的电荷是不变量.

命题 6-6-6　设质点的电荷为 q，4 速为 U^a，4 动量为 P^a，则电磁场 F_{ab} 对它的 4 力(叫 **4 维洛伦兹力**)为

$$F^a=qF^a{}_bU^b \quad (\text{其中 } F^a{}_b\equiv\eta^{ac}F_{cb}), \tag{6-6-20}$$

因而只受电磁力的质点的 4 维运动方程为

$$qF^a{}_bU^b=U^b\partial_bP^a. \tag{6-6-21}$$

证明　设 p 为带电质点世界线 L 上的任一点，(p,Z^a)是任一瞬时观者，其正交归一 4 标架为$\{(e_\mu)^a\}$，其中$(e_0)^a=Z^a$. 只须证明式(6-6-20)的 F^a 对该瞬时观者而言的分量 F^i 和 F^0 满足

$$F^i=\gamma f^i, \tag{6-6-22}$$

$$F^0=\gamma\vec{f}\cdot\vec{u}, \tag{6-6-23}$$

其中 $\gamma=-Z^aU_a$，f^i 是 3 维洛伦兹力 $\vec{f}$ 的第 i 分量，$\vec{u}\equiv u^a$ 是质点相对于(p,Z^a)的 3 速.

由式(6-6-20)得

$$F^a=\gamma qF^a{}_b(Z^b+u^b)=\gamma q(E^a+F^a{}_bu^b), \tag{6-6-24}$$

或

$$F_a=\gamma q(E_a+F_{ab}u^b).$$

故

$$F_i=(e_i)^aF_a=\gamma q(E_i+F_{ij}u^j), \tag{6-6-25}$$

如能证明

$$F_{ij}u^j=(\vec{u}\times\vec{B})_i, \tag{6-6-26}$$

则由式(6-6-25)及(6-6-18)立即可得 $F_i=\gamma f_i$，即式(6-6-22). 下面证明式(6-6-26).

$$(\vec{u}\times\vec{B})_c=\hat{\varepsilon}_c{}^{ab}u_aB_b=\hat{\varepsilon}_c{}^{ab}u_a(-{}^*F_{bd}Z^d)=\hat{\varepsilon}_c{}^{ab}u_a(-\frac{1}{2}\varepsilon_{bd}{}^{ef}F_{ef}Z^d)=-\frac{1}{2}u^a\hat{\varepsilon}_{cab}\varepsilon^{bdef}F_{ef}Z_d$$

$$=\frac{1}{2}u^aZ^g\varepsilon_{gcab}\varepsilon^{defb}F_{ef}Z_d=\frac{1}{2}(-3!)\,u^aZ^g\delta^{[d}{}_g\delta^e{}_c\delta^{f]}{}_aZ_dF_{ef}=-3u^aZ^gZ_{[g}F_{ca]}$$

$$=-u^aZ^g(Z_gF_{ca}+Z_aF_{gc}+Z_cF_{ag})=F_{ca}u^a-Z_cu^aE_a\,, \tag{6-6-27}$$

其中倒数第二步用到 $F_{ca}=-F_{ac}$，最后一步用到 $Z^gZ_g=-1$，$F_{ag}Z^g=E_a$ 以及 $u^aZ_a=0$. 由式(6-6-27)得

$$(\vec{u}\times\vec{B})_i=(e_i)^c(\vec{u}\times\vec{B})_c=F_{ij}u^j\,,$$

这就是式(6-6-26). 式(6-6-27)右边第二项的存在是必要的，否则右边的时间分量非零，与左边 $(\vec{u}\times\vec{B})_c$ 的空间性相悖. 下面证明式(6-6-23).

$$F^0=(e^0)_aF^a=\gamma q\,(e^0)_a(E^a+F^a{}_bu^b)=-\gamma q\,(e_0)^aF_{ab}u^b=-\gamma qF_{0i}u^i$$

$$=\gamma qE_iu^i=\gamma q\,[E_i+(\vec{u}\times\vec{B})_i]\,u^i=\gamma f_iu^i=\gamma\vec{f}\cdot\vec{u}\,,$$

此即式(6-6-23). 证明中第二步用到式(6-6-24)，第三步用到 $(e^0)_aE^a=0$ 及 $(e^0)^a=-(e_0)^a$，第六步用到 $\vec{u}\times\vec{B}$ 与 $\vec{u}$ 的正交性，第七步用到式(6-6-18). □

6.6.4 电磁场的能动张量

在 3 维形式的电动力学中，电磁场的能量密度、能流密度、动量密度、动量流密度(即应力张量)已有明确定义[见郭硕鸿(1995)第 5 章§7]. 这些 3 维量可由一个 4 维张量(电磁场的能动张量 T_{ab})统一表为

$$T_{ab}=\frac{1}{4\pi}(F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd})\,, \tag{6-6-28}$$

其中 F_{ac} 是电磁场张量. 利用第 5 章习题 9 的结果还可把上式改写成更为对称的形式：

$$T_{ab}=\frac{1}{8\pi}(F_{ac}F_b{}^c+{}^*F_{ac}{}^*F_b{}^c)\,, \tag{6-6-28'}$$

其中 ${}^*F_{ac}$ 是 F_{ac} 的对偶形式，${}^*F_b{}^c=\eta^{ac}\,{}^*F_{ba}$. 不难验证它具有§6.4 所述能动张量的性质 1 和 3，特别是，选定任一惯性系后，由式(6-6-28')易得(习题)

$$T_{00}=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)\,,$$

由式(6-6-28)易得(习题)

$$w_i=-T_{i0}=\frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})_i,\qquad i=1,2,3\,,$$

这正是该系惯性观者测电磁场所得的能量密度和能流密度(也等于动量密度). 但对§6.4 中关于能动张量的性质 2 (即 $\partial^aT_{ab}=0$)要做一说明. 当 $J^a=0$ 时(无源电磁场)，由麦氏方程的 4 维形式可证 $\partial^aT_{ab}=0$，即无源电磁场服从能量守恒、动量守恒和角动量守恒律. 但若 $J^a\neq0$，则由式(6-6-28)表示的 T_{ab} 不满足 $\partial^aT_{ab}=0$ [本章

习题 18(a)]. 这是自然的，因为电磁场与带电质点之间有相互作用，从而要交换能量、动量和角动量[本章习题 18(b)]. 然而，电磁场与带电粒子的总能动张量则仍是守恒的.

6.6.5 电磁 4 势及其运动方程，电磁波

由于 F_{ab} 是 2 形式，用外微分概念可把麦氏方程(6-6-11)改写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=0$，即 $\boldsymbol{F}$ 是闭的. 因背景流形为 $\mathbb{R}^4$，由§5.1 注 1 可知 $\boldsymbol{F}$ 是恰当的，即在 $\mathbb{R}^4$ 上存在 1 形式场 A_a 使 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}$，或

$$F_{ab}=\partial_a A_b-\partial_b A_a\,.$$

定义 3　满足 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的 A_a 叫电磁场 F_{ab} 的 **4 势**(4-potential).

给定 $\boldsymbol{F}$ 后，4 势并不唯一. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的 4 势，χ 是 $\mathbb{R}^4$ 上任意 C^2 函数，则 $\tilde{\boldsymbol{A}}\equiv\boldsymbol{A}+\mathrm{d}\chi$ 也是 $\boldsymbol{F}$ 的 4 势，因 $\mathrm{dd}\chi=0$. 这就是熟知的规范自由性. 附加条件 $\partial^a A_a=0$ 叫**洛伦兹规范条件**，满足这条件的 A_a 一定存在，因为设 $\partial^a A_a\neq 0$，总可选函数 χ 使 $\tilde{\boldsymbol{A}}\equiv\boldsymbol{A}+\mathrm{d}\chi$ 满足 $\partial^a\tilde{A}_a=0$，为此只须要求 χ 满足 $\partial^a\partial_a\chi=-\partial^a A_a$，注意到

$$\partial^a\partial_a\chi=\eta^{ab}\partial_b\partial_a\chi=-\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\,,$$

可知 $\partial^a\partial_a\chi=-\partial^a A_a$ 的非零解不但存在，而且甚多.

把 A_a 在任一惯性系 $\{t,x^i\}$ 分解为时间分量和空间分量：

$$A_a=-\phi(\mathrm{d}t)_a+a_a\,,\tag{6-6-29}$$

则不难证明 ϕ 和 a_a 分别是电磁场 $\boldsymbol{F}$ 的标势和 3 矢势(习题 19).

用 4 势可重新表述麦氏方程. 式(6-6-11)已被 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 自动满足，式(6-6-10)则可表为

$$-4\pi J_b=\partial^a(\partial_a A_b-\partial_b A_a)=\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial^a A_a\,.\tag{6-6-30}$$

其中第二步用到 $\partial^a\partial_b A_a=\eta^{ac}\partial_c\partial_b A_a=\partial_c\partial_b(\eta^{ac}A_a)=\partial_c\partial_b A^c=\partial_b\partial_c A^c=\partial_b\partial^a A_a$. 于是洛伦兹规范下的 A_b 便满足如下的简单方程

$$\partial^a\partial_a A_b=-4\pi J_b\,.\tag{6-6-31}$$

上式相当于 3 维语言电动力学中关于标势 ϕ 和矢势 $\vec{a}$ 的达朗伯方程(d'Alembert equation)，对无源电磁场则成为波动方程

$$\partial^a\partial_a A_b=0\,.\tag{6-6-32}$$

我们关心方程(6-6-32)的、形如 $A_b=C_b\cos\theta$ 的波动解，其中 θ 是实标量场，称为**相位**(phase)；C^b 是非零的常矢量场("常"字是指 $\partial_a C^b=0$)，称为**偏振矢量**(polarization vector). 代入式(6-6-32)得

$$\cos\theta\,(\partial^a\theta)\,\partial_a\theta+\sin\theta\,\partial^a\partial_a\theta=0\,,\tag{6-6-33}$$

可见，满足

$$(\partial^a\theta)\,\partial_a\theta=0 \tag{6-6-34}$$

和

$$\partial^a\partial_a\theta=0 \tag{6-6-35}$$

的 $A_b=C_b\cos\theta$ 是波动方程(6-6-32)的解. 此解有重要理论意义，下面详加讨论. 令 $K^a\equiv\partial^a\theta$ ，则 K^a 是超曲面 $\mathscr{S}=\{p\in\mathbb{R}^4\,|\,\theta_p=C\}$ ($C=$ 常数)上的法矢场(定理 4-4-2). 另一方面，式(6-6-34)表明 $K^aK_a=0$，故 K^a 是类光矢量场，可见 $\mathscr{S}$ 是类光超曲面. 再者， $K^aK_a=0$ 还导致

$$0=\partial_b(K^aK_a)=2K^a\partial_bK_a=2K^a\partial_b\partial_a\theta=2K^a\partial_a\partial_b\theta=2K^a\partial_aK_b\,, \tag{6-6-36}$$

可见 K^a 的积分曲线是躺在 $\mathscr{S}$ 上的类光测地线. 由式(6-6-35)还知 $\partial^aK_a=0$.

设 $\{t,x^i\}$ 为任一惯性坐标系，则 K_a 可用其对偶坐标基矢展开：

$$(\mathrm{d}\theta)_a=\partial_a\theta=K_a=K_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a\,.$$

我们只讨论 K^a 为常矢量场($\partial_bK^a=0$)这一最简单(也最重要)的情况. 这时 K_μ 为常数，上式可被积分而得

$$\theta=K_\mu x^\mu+\theta_0\ (\text{常数}). \tag{6-6-37}$$

借用惯性系 $\{t,x^i\}$ 把 K^a 做 3 + 1 分解：

$$K^a=\omega(\partial/\partial t)^a+k^a\,, \tag{6-6-38}$$

其中 k^a 和 $\omega\equiv K^0$ 分别代表 K^a 的空间和时间分量. 再令

$$k_a\equiv\eta_{ab}k^b\,,\qquad k_i\equiv k_a(\partial/\partial x^i)^a\,,$$

则式(6-6-37)在取 $\theta_0=0$ 时成为

$$\theta=-\,\omega t+k_ix^i\,, \tag{6-6-39}$$

故 $A_b=C_b\cos\theta$ 现在可表为

$$A_b=C_b\cos(\omega t-k_ix^i)\,. \tag{6-6-40}$$

这同单色平面波的熟知表达式一致，因而可称为**单色平面电磁波**(monochromatic plane wave)，ω 和 k^a 则可分别解释为角频率和 3 维波矢量，于是 K^a 称为 **4 维波矢量**. 设 Σ_0 为惯性系 $\{t,x^i\}$ 在 t_0 时刻的同时面，$S_0\equiv\mathscr{S}\cap\Sigma_0$ (见图 6-40)，则 S_0 上 $\theta=$ 常数，故 S_0 是同时面 Σ_0 上相位相同的点的集合，即 3 维语言中 t_0 时刻的一个波阵面. K_μ 为常数时 $\mathscr{S}$ 是 3 维平面(类光超平面)，S_0 是 2 维平面，故式(6-6-40)的确代表单色平面波. $\mathscr{S}$ 可解释为波阵面 S_0 的世界面，它描述波阵面随时间的演化(波的传播). 设 Σ_1 是 $t_1(>t_0)$ 时刻的同时面，则 $S_1\equiv\mathscr{S}\cap\Sigma_1$ 就是 t_0 时刻的波阵面 S_0 沿波的传播方向(3 维空间 Σ_0 中与 S_0 正交的方向)在 t_1-t_0 时间后到达的新平面，且传播速率恰为光速(这是 $\mathscr{S}$ 为类光超曲面的必然结果). $\mathscr{S}$ 的类光法矢 K^a 的积分曲线在 Σ_0 上的投影与 S_0 正交，故可解释为 3 维语言中的光线，于是 K^a 的积分曲线

可看作 4 维语言的光线.

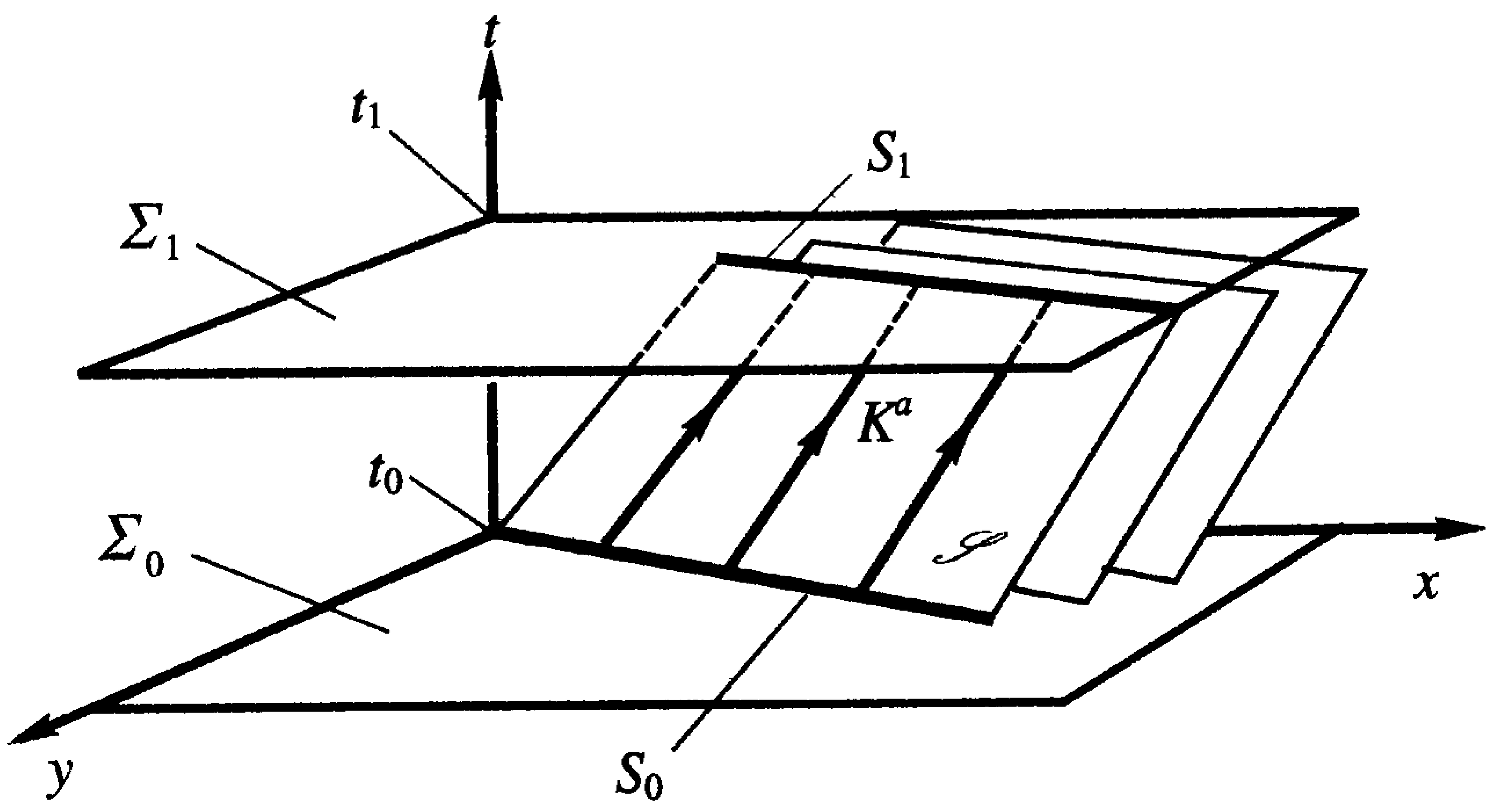


图 6-40　单色平面电磁波. 3 维波阵面 S_0 的世界面是类光超曲面 $\mathscr{S}$，其类光法矢 K_a 的积分曲线代表光子世界线

给定单色平面波后，其 4 波矢 K^a 自然给定(是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个常的类光矢量场)，但由式(6-6-38)可知其角频率 ω 和 3 波矢 k^a 还取决于所选惯性系. 就是说，K^a 是绝对的，而 ω 及 k^a 则是相对的. 类似地，任一时空点 p 的 K^a 也可借该点的任一瞬时观者 (p, Z^a) 分解为

$$K^a = \omega Z^a + k^a , \tag{6-6-41}$$

其中

$$\omega = -K^a Z_a \tag{6-6-42}$$

和 k^a 可分别解释为该观者测得的角频率和 3 波矢. 由 4 波矢 K^a 的类光性 $K^a K_a = 0$ 易知 ω 和 k^a 有如下关系：

$$\omega^2 = k^a k_a = k^2 . \tag{6-6-43}$$

用光线(无论 3 维还是 4 维)代替波动概念描述单色平面电磁波的做法称为**几何光学**(geometric optics)**方法**. 然而，单色平面电磁波的条件是 $A_b = C_b \cos\theta$ 中的 C_b 及 $K^a \equiv \partial^a \theta$ 在全时空为常矢量场，这是无法达到的要求，只能是模型语言中的概念. 好在许多有实用意义的电磁波都可在一定的时空范围内近似看作这样的波，因而也可近似地用几何光学方法处理. 考虑这样一类电磁波，其 4 势可表为 $A_b = C_b \cos\theta$，其中 C_b 及 $K^a \equiv \partial^a \theta$ 虽不满足 $\partial_a C_b = 0$ 及 $\partial_a K^b = 0$，但其随时空点的变化与相位 $\cos\theta$ 的变化相比要“慢”得多，不妨说 A_b 是“慢变”振幅 C_b 与“快变”相因子 $\cos\theta$ 之积. 以 $\tilde{L}$ 代表这样一个特征长度，只当时空尺度达到 $\tilde{L}$ 的量级时 C_b 或 K^a 的变化方可被觉察，那么，在一个尺度小于 $\tilde{L}$ 但 $\cos\theta$ 已在其中变了许多周期的时空区域 U 内就可用几何光学方法对这类电磁波做近似处理[用 3 维语言说，就是 U 的空间尺度很大于波长 $\lambda \equiv 2\pi/\omega$ (其中 $\omega \equiv -Z^a K_a$).]. 满足这一条件的电磁波称为**局域单色平面波**. 几何光学的特点是用光线描述电磁波的传播，这一特点突出了光的粒子性的一面，使得用光子描述光的传播成为可能. 这一描述

成为量子电动力学的理论基础，而经典电动力学则可看作量子电动力学在普朗克常数 $h\to 0$ 时的极限情形. 按照这一描述，局域单色平面电磁波可看作由一大群光子组成的光子流，它们有近似相同的 K^a 和 C^a. 光子被想像为类似于普通粒子的粒子，其特别之处在于质量 $m=0$. 这时关于质点的 4 动量的定义式(6-3-32)不再适用，可改用相应电磁波的 4 波矢 K^a 按下式定义光子的 4 动量 P^a：

$$P^a := \hbar K^a \quad (其中\ \hbar \equiv h/2\pi), \tag{6-6-44}$$

并规定光子世界线是这样的类光测地线，其仿射参数β满足

$$P^a = (\partial/\partial\beta)^a. \tag{6-6-45}$$

于是光子世界线重合于相应电磁波的 4 波矢 K^a 的积分曲线. 在 3 + 1 分解方面，仿照普通粒子，我们把光子 4 动量的时间分量和空间分量分别定义为光子的能量 E 和 3 动量 p^a，即

$$P^a = EZ^a + p^a. \tag{6-6-46}$$

注意到式(6-6-44)，上式与式(6-6-41)对比便得

$$E = \hbar\omega, \qquad p^a = \hbar k^a, \tag{6-6-47}$$

即光子的能量 E 和 3 动量 p^a 分别是相应电磁波的角频率 ω 和 3 波矢 k^a 的 $\hbar$ 倍. 由 $P^aP_a=0$ 易知光子的能量 E 和 3 动量 p^a 的长度 p 有如下简单关系：

$$E^2 = p^a p_a = p^2. \tag{6-6-48}$$

[选读 6-6-3]

式(6-6-40)说明 4 势 A_b 以单色平面波的方式传播，由此不难证明其相应于某惯性系$\mathscr{R}$ 的电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 也以单色平面波的方式传播，并导出 $\vec{E}$ 波和 $\vec{B}$ 波的一些重要性质. 为此，把 $A_b = C_b\cos\theta$ 代入 $F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a$，注意到 $K_a\equiv\partial_a\theta$，得

$$F_{ab} = (C_aK_b - C_bK_a)\sin\theta = 2\,C_{[a}K_{b]}\sin\theta. \tag{6-6-49}$$

利用 A_b 的规范自由性可简化从 F_{ab} 求 E_a 和 B_a 的计算. 选洛伦兹规范 $\partial^bA_b=0$，与 $A_b=C_b\cos\theta$ 及 $K^a\equiv\partial^a\theta$ 结合得 $K^aC_a\sin\theta=0$，从而

$$K^aC_a = 0. \tag{6-6-50}$$

这其实是 A_a 满足洛伦兹规范的等价表述. 再令

$$C'_a = C_a + \alpha K_a\,(\alpha = 常数), \tag{6-6-51}$$

则由 $K^aK_a=0$ 及式(6-6-49)易见 C'_a 对应的电磁场 $F'_{ab}=F_{ab}$，可见式(6-6-51)只是规范变换[由 $K^aC_a=0$ 可知式(6-6-51)保证 $K^aC'_a=0$，所以它其实还是洛伦兹规范内的规范变换.]. 利用 K^a 的时间分量 K^0 的非零性选 $\alpha=-C_0/K_0$ 便有 $C'_0=0$，可见总可选择适当规范使偏振矢量 C^a 成为空间矢量. 今后将默认 C^a 是空间矢量这一事实.

以 $Z^a=(\partial/\partial t)^a$ 代表惯性系的第零坐标基矢，则由 $E_a=F_{ab}Z^b$ 和 $B_a=-{}^*F_{ab}Z^b$

可从式(6-6-49)求得

$$E_a = Z^b(C_aK_b - C_bK_a)\sin\theta = -\omega C_a \sin\theta$$

[其中第二步用到 C^a 的空间性($Z^bC_b = 0$)及 $\omega = -Z^bK_b$]和

$$B_a = -{}^*F_{ab}Z^b = -\tfrac{1}{2}Z^b\varepsilon_{abcd}F^{cd} = \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{acd}2C^{[c}K^{d]}\sin\theta = \hat{\varepsilon}_{acd}C^ck^d\sin\theta\,,$$

其中 $\hat{\varepsilon}_{acd}$ 是与空间的欧氏度规适配的体元. 上二式可用箭头表为

$$\vec{E} = -\omega\vec{C}\sin\theta = \omega\vec{C}\sin(\omega t - k_ix^i)\,, \tag{6-6-52}$$

$$\vec{B} = \vec{C}\times\vec{k}\sin\theta = \vec{k}\times\vec{C}\sin(\omega t - k_ix^i)\,. \tag{6-6-53}$$

因而

$$\vec{B} = \hat{\vec{k}}\times\vec{E} \quad (\hat{\vec{k}}\text{ 代表 }\vec{k}\text{ 方向的单位矢}). \tag{6-6-54}$$

这正是单色平面电磁波的电矢量 $\vec{E}$ 、磁矢量 $\vec{B}$ 和传播方向 $\hat{\vec{k}}$ 的常见关系式.

由于 $C_0 = 0$ ，条件 $K^aC_a = 0$ 现在可改写为 $k^aC_a = 0$ ，可见 3 矢量 $\vec{C}$ 与 $\vec{k}$ 垂直. 而由式(6-6-52)又知 $\vec{E}$ 与 $\vec{C}$ 平行，故电场 $\vec{E}$ 与传播方向 $\hat{\vec{k}}$ 垂直，即 $\vec{E}$ 波是横波. 由式(6-6-54)则可看出 $\vec{B}$ 既与 $\hat{\vec{k}}$ 又与 $\vec{E}$ 垂直，故 $\vec{B}$ 波也是横波. 结论：在单色平面电磁波中 $\vec{E}$ 波和 $\vec{B}$ 波是同频同相的横波，且矢量 $\vec{E}$ ， $\vec{B}$ 与 $\hat{\vec{k}}$ 有式(6-6-54)的简单关系.

因为 $\vec{C}$ 和 $\vec{k}$ 是常矢量场，式(6-6-52)和(6-6-53)代表线偏振光. 若要讨论其他偏振方式，则采用复场的方法较为简便. 先把 $A_b = C_b\cos\theta$ 改写为

$$A_b = \text{Re}(C_b e^{i\theta}) \quad (\text{Re 代表“取其实部”}), \tag{6-6-55}$$

再把 C^a 推广至常复矢量场，就会给出更丰富的物理内容. 前面关于 $K^aC_a = 0$ 的证明以及可选 C^a 为空间矢量场的论辩在 C^a 为复时依然有效，因而其后的讨论和结论(包括 $\vec{E}$ ， $\vec{B}$ 的横波性)仍成立. C^a 为复矢量的关键后果是从线偏振光推广至椭圆偏振光. 仅以电场 $\vec{E}$ 为例讨论. 这时式(6-6-52)应表为

$$\vec{E} = \text{Re}\,[i\omega\,\vec{C}\,e^{-i(\omega t - k_ix^i)}]\,, \tag{6-6-52$'$}$$

但现在 $\vec{C}$ 为复矢量. 令

$$\vec{\varepsilon} \equiv i\omega\vec{C}\,e^{ik_ix^i}\,, \tag{6-6-56}$$

则式(6-6-52′)成为

$$\vec{E} = \text{Re}\,(\vec{\varepsilon}\,e^{-i\omega t})\,. \tag{6-6-57}$$

对 $\mathscr{R}$ 系的任一惯性观者 G_0 ， $\vec{\varepsilon}$ 是固定矢量， $\vec{E}$ 则随时间 t 按式(6-6-57)变化，因而矢量(箭头) $\vec{E}$ 的端点画出一条平面闭合曲线，欲证它为椭圆. 将复矢量场 $\vec{\varepsilon}$ 表为实、虚部之和：

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\mu} + i\,\vec{\nu} \quad (\text{其中 }\vec{\mu}, \vec{\nu}\text{ 为实矢量场}), \tag{6-6-58}$$

令 β 为任一实标量场，定义实矢量场

$$\vec{m} \equiv \vec{\mu}\cos\beta + \vec{\nu}\sin\beta \quad \text{和} \quad \vec{n} \equiv -\vec{\mu}\sin\beta + \vec{\nu}\cos\beta\,, \tag{6-6-59}$$

则

$$\vec{\varepsilon}=\vec{\mu}+\mathrm{i}\,\vec{v}=(\vec{m}+\mathrm{i}\,\vec{n})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\,. \tag{6-6-60}$$

引入β的好处在于可选择β使$\vec{m}$，$\vec{n}$互相正交，为此只须令β满足

$$\tan 2\beta=\frac{2\vec{\mu}\cdot\vec{v}}{\mu^2-v^2}\,, \tag{6-6-61}$$

其中$\mu^2\equiv\vec{\mu}\cdot\vec{\mu}$，$v^2\equiv\vec{v}\cdot\vec{v}$，而且设$\mu^2\geqslant v^2$(不失一般性). 式(6-6-60)代入式(6-6-57)给出

$$\vec{E}=\vec{m}\cos(\omega t-\beta)+\vec{n}\sin(\omega t-\beta)\,. \tag{6-6-62}$$

利用$\vec{m}$，$\vec{n}$的正交性可按下列两要求选择惯性参考系$\mathscr{R}$内的惯性坐标系$\{t, x^i\}$：①以G_0为空间坐标原点；②x，y轴分别沿$\vec{m}$和$\vec{n}$方向，则$\vec{E}$的三个坐标分量依次为

$$E_1=m\cos(\omega t-\beta)\,,\qquad E_2=n\sin(\omega t-\beta)\,,\qquad E_3=0\,, \tag{6-6-63}$$

其中$m\equiv(\vec{m}\cdot\vec{m})^{1/2}$，$n\equiv(\vec{n}\cdot\vec{n})^{1/2}$. 由此易得

$$\frac{E_1^{\ 2}}{m^2}+\frac{E_2^{\ 2}}{n^2}=1\,. \tag{6-6-64}$$

可见$\vec{E}$的端点随时间在$x\sim y$面内画出一个椭圆，因此代表椭圆偏振光. 当$m=n$时退化为圆偏振光，当m或n为零时退化为线偏振光.

[选读 6-6-3 完]

6.6.6 光波的多普勒效应

与声波不同，光波的多普勒效应必须用相对论处理. 在上述知识的基础上，这一讨论变得十分简单.

设观者和光源有任意运动状态(其世界线为任意类时线)，4 速各为U^a和V^a(见图 6-41). 光源在p时所发的光被观者在q时收到，默认此光是局域单色平面波(用几何光学近似). 设光子的 4 波矢为K^a，由式(6-6-46)可知发光时V^a测得的角频率为$\omega=(-K^aV_a)|_p$，接收光时U^a测得的角频率为$\omega'=(-K^aU_a)|_q$. 今欲求ω'与ω的关系. 因平直时空有绝对平移概念，将$U^a|_q$和$K^a|_q$平移至p点，则$\omega'=(-K^aU_a)|_p$. 以下省略下标p，但记住计算在p点进行. 由式(6-6-45)有

$$K^a=\omega V^a+k^a\,,$$

令

$$\gamma\equiv -V^aU_a\,,$$

则

$$U_a = \gamma V_a + \gamma u_a,$$

其中 γu^a 为 U^a 在 (p, V^a) 的"空间小平面"上的投影，故

$$\omega' = -(\omega V^a + k^a)(\gamma V_a + \gamma u_a) = \gamma(\omega - k^a u_a).$$

设空间矢量 k^a 与 u^a 夹角为 θ，注意到式(6-6-47)，得

$$\omega' = \gamma\omega(1 - u\cos\theta), \qquad (6\text{-}6\text{-}65)$$

这就是多普勒效应的定量关系. 若 $\theta = 0$(观者与光源相背而行)，由式(6-6-65)得

$$\omega' = \gamma\omega(1-u) = [(1-u)/(1+u)]^{1/2}\omega < \omega, \qquad (6\text{-}6\text{-}66a)$$

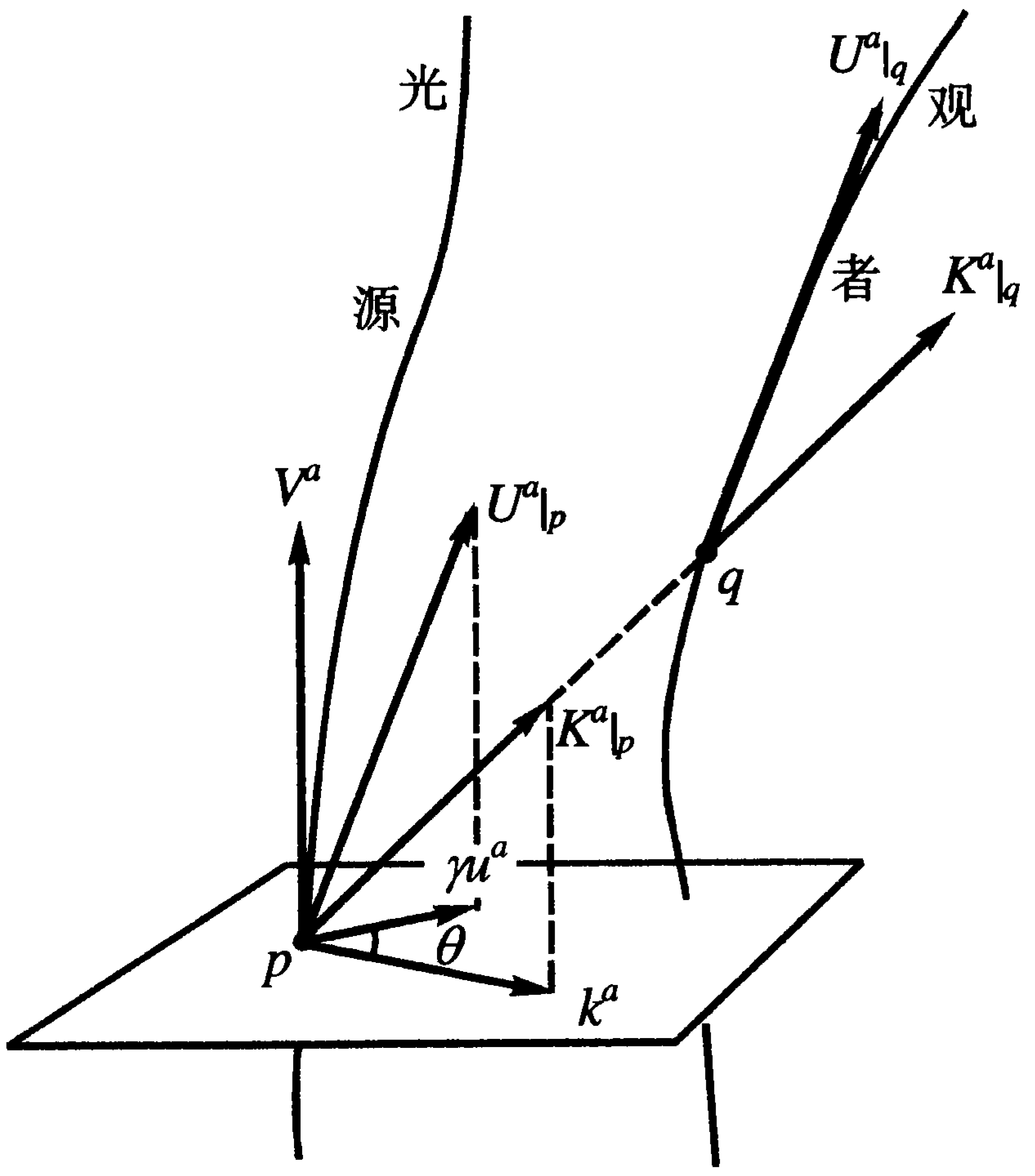


图 6-41　光波多普勒效应讨论用图

即红移；若 $\theta = \pi$(观者正对光源相向而行)，则

$$\omega' = \gamma\omega(1+u) = [(1+u)/(1-u)]^{1/2}\omega > \omega, \qquad (6\text{-}6\text{-}66b)$$

即蓝移；若 $\theta = \pi/2$(横向运动)，则

$$\omega' = \gamma\omega, \qquad (6\text{-}6\text{-}66c)$$

即横向多普勒效应.

习　题

~1. 惯性观者 G 和 G' 相对速率为 $u = 0.6c$，相遇时把钟读数都调为零. 用时空图讨论：(a) 在 G 所属的惯性参考系看来(以其同时观判断)，当 G 钟读数为 5μs 时，G' 钟的读数是多少? (b) 当 G 钟读数为 5μs 时，他实际看见 G' 钟的读数是多少?

~2. 远方星体以 $0.8c$ 的速率(匀速直线地)离开我们，我们测得它辐射来的闪光按 5 昼夜的周期变化. 用时空图求星上观者测得的闪光周期.

~3. 把图 6-20 的 oa 段和 oe 段线长分别记作 τ 和 τ'. (a)用两钟的相对速率 u 表出 τ'/τ；(b) 在 $u = 0.6c$ 和 $u = 0.8c$ 两种情况下求出 τ'/τ 的数值.

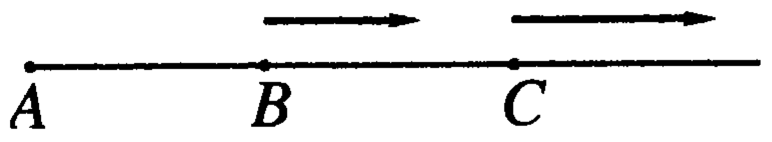


图 6-42　习题 4 用图

4. 惯性质点 A，B，C 排成一直线并沿此线相对运动(见图 6-42)，相对速率 $u_{BA} = 0.6c$，$u_{CA} = 0.8c$，A, B 所在惯性系各为 $\mathscr{R}_A$ 和 $\mathscr{R}_B$. 设 $\mathscr{R}_B$ 系认为(测得)C 走了 60m，画出时空图并求 $\mathscr{R}_A$ 认为(测得)这一过程的时间.

~5. A, B 是同一惯性系的两个惯性观者，他们互相发射中子，每一中子以相对速率 $0.6c$ 离开中子枪. 设 B 测得 B 枪的中子发射率为 10^4s^{-1}(即每秒发 10^4 个)，求 A 所发中子(根据中子自己的标准钟)测得的 B 枪的中子发射率(要求画时空图求解).

~6. 静止 μ子的平均寿命为 $\tau_0 = 2\times10^{-6}$s . 宇宙线产生的 μ子相对于地球以 0.995c 的速率匀速直线下落，用时空图求地球观者测得的 (a) μ子的平均寿命；(b) μ子在其平均寿命内所走过的距离.

7. 从惯性系$\mathscr{R}$看来(认为，测得)，位于某地 A 的两标准钟甲、乙指零时开始以速率 $v = 0.6c$ 一同做匀速直线运动，两钟指 1s 时到达某地 B. 甲钟在到达 B 时立即以速率 v 向 A 地匀速返回，乙钟在 B 地停留 1s(按他的钟)后以速率 v 向 A 地匀速返回. 另有丙钟一直呆在 A 地，且当甲、乙离 A 地时也指零，(a)画出甲、乙、丙的世界线；(b)求乙钟返回 A 地时三钟的读数 $\tau_{甲}$，$\tau_{乙}$ 和 $\tau_{丙}$.

~8. (单选题) 双子 A, B 静止于某惯性系$\mathscr{R}$中的同一空间点上. A 从某时刻(此时 A, B 年龄相等)开始向东以速率 u 相对于$\mathscr{R}$系做惯性运动，一段时间后 B 以速率 $v > u$ 向东追上 A，则相遇时 A 的年龄

(1) 比 B 大，　　(2) 比 B 小，　　(3) 与 B 等.

~9. 标准钟 A, B 静止于某惯性系中的同一空间点上. A 钟从某时刻开始以速率 $u = 0.6c$ 匀速直线飞出，2s (根据 A 钟)后以 $u = 0.6c$ 匀速直线返航. 已知分手时两钟皆指零. (1)求重逢时两钟的读数；(2)当 A 钟指 3s 时 A 看见 B 钟指多少?

~10. 地球自转线速率在赤道之值约为每小时 1600km. 甲、乙为赤道上的一对孪生子. 甲乘飞机以每小时 1600km 的速率向西绕赤道飞行一圈后回家与乙重逢(忽略地球和太阳引力场的影响. 由第 7 章可知引力的存在对应于时空的弯曲.). (a)画出地球表面的世界面和甲、乙的世界线(甲相对于地面的运动抵消了地球自转的效应，所以甲是惯性观者.)；(b)甲与乙中谁更年轻? (c)两者年龄差多少? (答：约为 10^{-7}s.) 注：本实验已于 1971 年完成，当然不是对人而是对铯原子钟. 见 Hafele and Keating(1972).

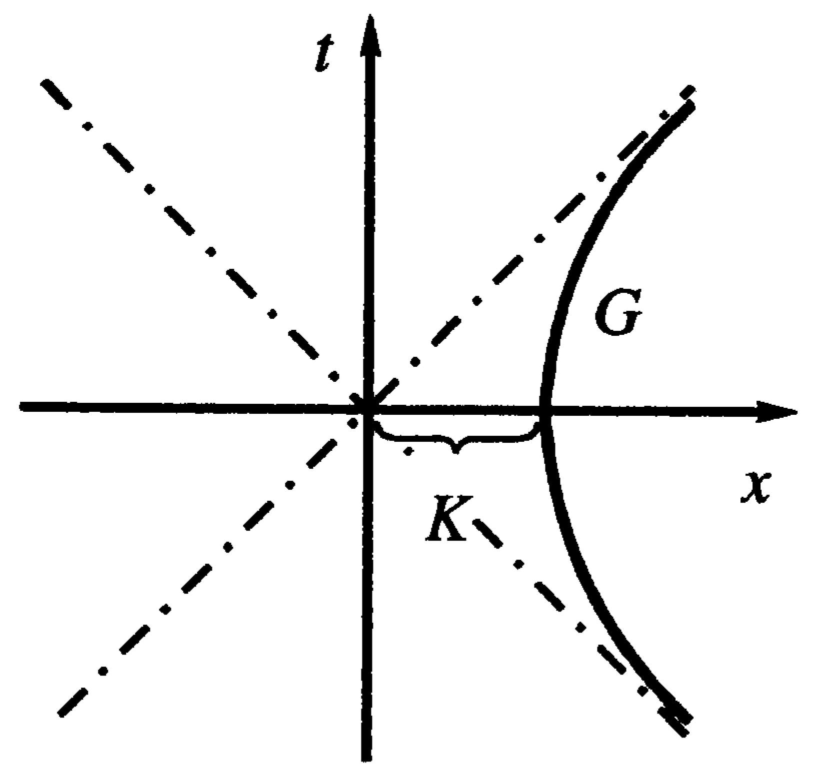


图 6-43　习题 13 用图

~11. 静长 $l = 5$m 的汽车以 $u = 0.6c$ 的速率匀速进库，库有坚硬后墙. 为简化问题，假定车头撞墙的信息以光速传播，车身任一点接到信息立即停下. (a)设司库测得在车头撞墙的同时车尾的钟 C_W 指零，求车尾“获悉”车头撞墙这一信息时 C_W 的读数；(b)求车完全停下后的静长 $\hat{l}$；(c)用 u 表出新旧静长比 $\hat{l}/l$.

12. 试证命题 6-3-4.

~13. 设观者世界线为 $t \sim x$ 面内的双曲线 G (见图 6-43)，图中 K 值为已知，A^a 为观者的 4 加速，求 A^aA_a(结论是 A^aA_a 为常数，因此 G 称为匀加速运动观者. 请注意这指的是 4 加速.)

~14. 试证命题 6-6-2.

*15. 设瞬时观者测 F_{ab} 所得电场和磁场分别为 E^a 和 B^a (也记作 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$)，试证：

(a) $F_{ab}F^{ab} = 2(B^2 - E^2)$,

(b) $F_{ab}{}^*F^{ab} = 4\vec{E}\cdot\vec{B}$. 提示：可用惯性坐标基底把 $F_{ab}{}^*F^{ab}$ 写成分量表达式.

注：本题表明，虽然 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都是观者依赖的，$B^2 - E^2$ 和 $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 却同观者无关. 事实上，由

F_{ab} 能构造的独立的不变量只有这两个.

~16. 试证命题 6-6-5 (只须证后两个麦氏方程).

~17. 试证瞬时观者测得的电磁场能量密度和 3 动量密度分别为 $T_{00}=(E^2+B^2)/8\pi$ 和 $w_i=-T_{i0}=(\vec{E}\times\vec{B})_i/4\pi$, $i=1,2,3$. 提示：用 F_{ab} 的对称表达式(6-6-28′)可简化 T_{00} 的计算.

18. (a)试证 4 电流密度为 J^a 的电磁场 F_{ab} 的能动张量 F_{ab} 满足 $\partial^a T_{ab}=-F_{bc}J^c$ (由此可知当 $J^a=0$ 时有 $\partial^a T_{ab}=0$)；*(b)试证上式在惯性坐标系中的时间分量反映能量守恒，即郭硕鸿(1995) 40 页式(6.2)；空间分量反映 3 动量守恒，即郭书 220 页式(7.6). 提示：用 4 洛伦兹力表达式(6-6-20)把 $F_{bc}J^c$ 改写为洛伦兹力密度.

19. 试证式(6-6-29)中的 a^a 和 ϕ 满足 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{a}$ 和 $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\partial\vec{a}/\partial t$，因而的确是电动力学中的 3 矢势和标势.

20. 在选读 6-6-1 中，(a)试证 $\nabla_a(\mathrm{d}t)_b=0$，其中 t 为绝对时间，∇_a 为牛顿时空的导数算符[提示：从式(5-7-2)出发.]；(b)设 w^a 为空间矢量(即切于绝对同时面的矢量)，v^a 为任一 4 维矢量，试证 $v^a\nabla_a w^b$ 仍为空间矢量[提示：注意 $\nabla_a t$ 是绝对同时面的法余矢.].

第 7 章　广义相对论基础

§7.1　引力与时空几何

相对性原理要求物理规律在所有惯性坐标系中有相同数学表达式，用于狭义相对论就要求物理规律的数学表达式具有洛伦兹协变性. 这是一个管定律的定律. 因此，在建立狭义相对论物理学时，应该重新审查已有的物理定律，凡符合这个要求的就仍被视为定律，凡不符合这个要求的就要改造，直至符合要求才作为物理定律纳入狭义相对论物理学框架中. 首先审查麦氏电磁理论. 麦氏方程天生就有洛伦兹协变性(改写为 4 维形式可更清晰地看出，见§6.6)，因而可以不经改造地纳入狭义相对论物理学中. 这其实并不奇怪，因为狭义相对论出现的重要原因之一就是麦氏理论与非相对论时空观有矛盾. 再来审查牛顿运动定律，以动量守恒律为例. 正如§6.6 开头时指出的，牛顿的动量定义 $\vec{p}=m\vec{u}$ 使动量守恒不具备洛伦兹协变性，因而必须修改. 只要把动量定义改为 $\vec{p}=m\vec{u}(1-u^2)^{-1/2}$ ，问题便迎刃而解，因此动量守恒可以作为定律被纳入狭义相对论物理学. 第三，我们来审查牛顿的万有引力理论. 牛顿引力论的基本方程是反映引力势 ϕ 和质量密度 ρ ① 的关系的泊松方程 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ ，它有伽利略协变性而没有洛伦兹协变性，因而应该修改. 从另一角度来看，方程 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ 有如下形式的解

$$\phi(\vec{r},t)=\iiint\frac{\rho(\vec{r}',\ t)}{|\vec{r}'-\vec{r}|}\mathrm{d}V',$$

表明场点 $\vec{r}$ 处 t 时刻的引力势 ϕ 由空间各点在 t 时刻的质量密度 ρ 决定，这意味着引力场以无限速度传播，显然与狭义相对论相悖. 可见牛顿引力论必须修改. 牛顿万有引力定律形式上与静电库仑定律很相似，既然麦克斯韦能把库仑静电学推广改造为如此漂亮的麦氏电磁理论，看来不难把牛顿引力论改造为狭义相对论框架内的引力理论. 然而情况却远非如此简单. 关键在于，万有引力定律与库仑定律虽很相似，却存在“符号差别”：电荷有正负两种，同性相斥，异性相吸；质量则只正不负，虽然同性，却只吸不斥. 仿照电磁理论，可以构造一个在狭义相对论框架内的引力理论，根据这个理论，在引力场有变化时将出现类似于电磁波的引力波，而且也以光速传播. 不幸的是，由于上述符号差别，由引力波带走的能量竟是负的. 这意味着系统在辐射引力波时自身能量增加，从而辐射强度变大，

---

① 第 6 章曾分别以 ρ 和 μ 代表电荷密度和质量密度. 从本章起电荷密度很少出现，我们按多数文献的习惯改用 ρ 代表质量密度.

由此又会获得更多能量. 如此循环，必然导致物理上不可接受的后果. 虽然可以通过修改理论克服这一困难，但又出现新的困难. 事实上，狭义相对论框架内的引力理论远非一个，但每个理论都有其自身问题. 虽然无法绝对否定在狭义相对论框架内建立满意的引力理论的可能性，爱因斯坦却独辟蹊径，于 1915 年成功地创建了革命化的、独立于狭义相对论的崭新引力理论——广义相对论. 有趣的是，后人在克服狭义相对论框架内的某种引力理论的困难的努力中，几经修改后得到的竟然也是与爱因斯坦广义相对论完全一样的理论!

有两个重要因素促使爱因斯坦创立广义相对论，它们是引力的“普适性(universality)”和马赫原理. 我们只介绍前者. 牛顿引力的“普适性”包括两层含义：①任何物体在引力场中都受引力(电中性的物体在静电场中却不受电力，故电力无普适性.)；②引力场中任何两个物体，不论其质量和组分如何，只要初始状态(位置、速度)相同，而且除引力外不受力，以后每一时刻的位置和速度就必然一样. 这一结论已被许多越来越精确的实验所证实，它可以表述为：任意两个质点在引力场中的同一点有相同的引力加速度. 这虽是司空见惯的结论，但为什么会这样？静电场中的两个点电荷就不这样. 设点电荷 q 的质量为 m，所在点场强为 $\vec{E}$，则它所受电场力为 $\vec{f}=q\vec{E}$，它获得的加速度为

$$\vec{a}=\vec{f}/m=(q/m)\vec{E}. \tag{7-1-1}$$

若在同一点放入质量为 m' 的另一点电荷 q'，则其加速度为 $\vec{a}'=(q'/m')\vec{E}$. $\vec{a}'$ 与 $\vec{a}$ 不等，除非两者的荷质比相同. 在对引力做类似讨论时，不妨也把“荷”与“质”加以区别. 质点的“荷”是其物质含量的量度，决定它在引力场中怎样受力，可称为**引力质量**，记作 m_G；质点的“质”则是其惯性的量度，决定它在力的作用下出现怎样的加速度，可称为**惯性质量**，记作 m_I [即式(7-1-1)中的 m]，[①] 仿照上述讨论不难导出质点在引力场中的引力加速度为 $\vec{a}=(m_G/m_I)\vec{g}$，其中 $\vec{g}$ 是该点的引力场强. 如果不同质点有不同的引力荷质比 m_G/m_I，它们在引力场中同一点就不能有相同的引力加速度. 然而无数的、一个比一个精确的实验表明比值 m_G/m_I 对任何质点都相同，通过调整引力常量 G 还可使比值为 1 而简写为 $m_G=m_I$. 通常把这一事实称为等效原理(详见§7.5). 这是一个极其非同寻常的实验事实，应该引起深思. 引力的“荷”与“质”本是两个完全不同的概念，它们为什么相等？牛顿引力论不能回答这个问题. 在牛顿引力论中，这是作为实验事实(牛顿理论体系的一个公理)被承认的. 难道 $m_G=m_I$ 仅是一种巧合吗？难道就没有更深刻的原因藏在这个事实的背后吗？难道一定不存在一个更优美的理论，其中 $m_G=m_I$ 是可用推

① 至今一直在用牛顿引力论讨论问题. 在牛顿引力论中，引力质量又分为主动(active)和被动(passive)两种，前者指物体作为引力场源时的质量，决定它产生引力场的强弱；后者指物体作为外引力场中的试探质点的引力质量，决定它在给定引力场中所受引力的强弱. 正文的引力质量指被动引力质量.

理证明的吗？对等效原理的思考，加上马赫原理的启发，促使爱因斯坦创立了他的广义相对论.

$m_G = m_I$ 的事实等价于初始位置和速度相同的、除引力外不受力的任何物体在引力场中都“齐步走”. 这种毫无个性的集体行为强烈地暗示着引力是整个时空背景的内禀性质，与其他力有实质性的差别. 物理学是研究物理客体运动(演化)规律的学问. 物理客体好比演员. 正如演员的表演不能没有舞台一样，物理客体的演化也总是在某种舞台(或背景)上进行的，这个舞台(背景)就是时空. 在广义相对论创立前，人们默认相对论的背景时空是闵氏时空. 闵氏时空是如此简单，以至人们往往不注意(忘记)它的存在. 引力场中的“齐步走”现象引起了爱因斯坦对时空背景的注意. 假如你看演出时发现某个演员的头顶突然下降了 20cm，你会认为他蹲下了. 然而，假如台上所有演员的头顶以及桌面、椅面都同时下降 20cm，那么最大的可能是舞台台面下降所致. 类似地，在引力作用下的“齐步走”现象分明强烈地暗示着引力本身是一种纯时空效应. 不妨这样猜测：引力可忽略时，时空是平直的；引力不可忽略时(例如在必须考虑地球或太阳的引力场时)，时空变得弯曲，弯曲情况取决于产生引力场的物质分布. 根据这一猜测，引力非常不同于其他力，它特殊到这样一个程度，以至在 4 维语言中它不再是力而是时空的弯曲！于是，除引力外不受力的质点就应称为自由质点(已经自由到不能再自由的程度). 注意到闵氏时空中自由质点的世界线必为测地线的结论，自然进一步假定弯曲时空中自由质点的世界线也是(该时空的)测地线[①]（自由质点是最简单的质点，测地线是最简单的世界线，自由质点的世界线是测地线的这一假定非常符合美学原则.). 引力的存在不表现为质点受到一个称为“引力”的 4 维力，而表现为时空的弯曲，它通过改变测地线来改变自由质点的运动方式. 以上就是广义相对论最基本的假定. 根据这一假定，可以把 $m_G = m_I$ 作为逻辑结论来推出.（现在到了关键的、也可以说是水到渠成的一步.）设两个自由质点有相同的初始位置和速度，即它们的世界线相交且在交点处切矢相等. 由于自由质点的世界线为测地线，而测地线由初始条件(测地线的出发点及在该点的切矢)唯一决定(定理 3-3-4)，这两条世界线必然重合. 翻译为物理语言，就是引力场中两个初始状态相同的自由质点在以后各时刻的状态必然相同，而这正是 $m_G = m_I$ 的等价表述. 可见，一旦认识到引力的实质是时空的弯曲，$m_G = m_I$ 这一长期以来无法解释的实验事实就是十分自然的结论. 广义相对论就这样以其特有的优雅方式首次把引力解释为 4 维时空的几何效应(首次统一了引力与几何)，这一成功的关键在于补上时间这一维. 单凭 3 维空间是无法把引力解释为几何效应的.

注 1　选读 8-3-1 对“引力就是时空弯曲”的提法还将给出一个更为具体细致

① 忽略该质点的质量对引力场的影响(类似于电学中对试探电荷的处理).

的阐述.

上述讨论表明，广义相对论是独立于狭义相对论框架的物理理论，狭义相对论框架中容不下广义相对论，容不下引力.

用现代语言来表述，广义相对论最基本的假设可以归纳为以下三点(广义相对论的基本假设在不同文献中有不同归纳方式. 此处只是出于教学法考虑的一种讲法.).

(a) 3 维空间中的引力本质上是 4 维时空的弯曲. 就是说，当引力存在时，时空背景不再是闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$，而是某种弯曲时空$(M, g_{ab})$，其中 M 是某个 4 维流形，g_{ab} 是 M 上某个非平直的洛伦兹度规场. 这一假设大胆地把物理上的引力认定为纯粹的时空几何效应. 据此，除引力外不受力的质点自然叫做自由质点.

(b) 自由质点的世界线是它所在的弯曲时空(M, g_{ab})的测地线. 在假设(a)的基础上，假设(b)的提出是相当自然的. 当引力不存在时，时空背景是闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$，按照§6.3，质点的运动方程为

$$F^a = U^b \partial_b P^a , \tag{7-1-2}$$

其中 ∂_b 是与闵氏度规 η_{ab} 相适配的导数算符. 当引力存在时，一个自然的假设是把上式的 ∂_b 改为与弯曲度规 g_{ab} 相适配的导数算符 ∇_b，并认为自由质点所受 4 力为零，于是其运动方程为

$$0 = U^b \nabla_b (mU^a) = mU^b \nabla_b U^a , \tag{7-1-3}$$

可见自由质点沿测地线运动. 这一命题与引力不存在时的对应命题很类似，区别只在于：引力不存在时，自由质点的世界线是闵氏时空的测地线；引力存在时，自由质点的世界线是弯曲时空的测地线. 这正是广义相对论独立于狭义相对论的一个体现. 在广义相对论中，引力不表现为一种 4 维力出现于运动方程(7-1-2)的左边，它对质点运动的影响体现在把时空变得弯曲并要求自由质点沿弯曲了的时空的测地线运动. 或者说，引力的影响在于把方程(7-1-2)右边的 ∂_b 换成 ∇_b.

(c) 时空的弯曲情况受物质分布的影响，其间的关系由爱因斯坦方程描述[详见§7.7，该节还说明在承认爱因斯坦方程后假设(b)不再是独立假设.].

可以证明，当引力场足够弱、质点速度足够低时，广义相对论力学的计算结果与牛顿力学近似一致，可见牛顿力学可以看作广义相对论力学的弱场低速近似(见 7.8.2 小节). 然而应该说明，尽管计算结果近似一致，两者看问题的观点却有明显区别. 以树上苹果落地为例. 按照牛顿力学，这是由于苹果受地球引力而获得加速度，属于非惯性运动. 但是按照广义相对论，苹果不受 4 维力，所以是自由质点. 地球的效应在于使时空变得弯曲，苹果的世界线是这个弯曲时空中的一条测地线，其 4 加速(定义为 $A^a \equiv U^b \nabla_b U^a$，其中 U^a 为 4 速，∇_b 为与弯曲时空度规适配的导数算符)为零. 就是说，同是苹果落地的运动，牛顿理论认为它有(3 维)

加速度(相对于惯性系)，而广义相对论认为它没有(4 维)加速度. 反之，设苹果静止于地面，牛顿理论认为苹果所受地球引力被地面支撑力所抵消，因此保持静止，其(3 维)加速度为零，处于惯性运动状态；而广义相对论认为苹果只受一个 4 维力(地面的支撑力)，因此其世界线不是测地线，其(4 维)加速度不为零. 读者是否已意识到，当你舒适地坐着阅读本书时，你在因地球的存在而弯曲了的时空中的 4 维加速度并不为零?

把引力的实质归结为时空弯曲的认识是人类智慧的一个伟大胜利. 黎曼在 28 岁时(1854 年)就提出了内禀曲率的概念和计算方法，并在逝世(年仅 40 岁)前的一段时间内致力于寻求把电力和引力统一起来的某种理论. 这一努力未获成功的最重要原因就是他专注于空间及其曲率而没有注意时空及其曲率. 直至 1905 年狭义相对论问世之后，时间和空间才被同等看待(实际上，直到 1908 年 Minkowski 才明确提出时空这一绝对概念，见第14章.)；再过几年后，“引力的实质是时空的曲率”这一划时代认识才伴随着爱因斯坦对广义相对论的构思而逐渐建立起来.

§7.2　弯曲时空中的物理定律

广义相对论认为一切物理现象不过是物理客体在某种弯曲时空背景(M, g_{ab})上的演化. 因此，用广义相对论的观点研究物理，首先就要找出各种物理客体在给定的弯曲时空背景上的演化方程. 由于实际生活和实验室中的引力场太弱，广义相对论同牛顿引力论的区别一般难以察觉，想通过观察或实验来归纳出弯曲时空中的物理定律是没有希望的. 因此，只能根据某些基本原则用假设的方法“猜出”这些定律，其正确性则有待于由它们推出的各种结论的自洽性及其与实验(如果可能的话)结果的一致性来验证. 当然，这种“猜测”是有相当根据的，一个重要根据就是广义协变性原理(principle of general covariance). 爱因斯坦在创立广义相对论时曾提出如下广义协变性原理：物理定律的数学表达式在任意坐标变换下形式不变. 然而，E.Kretschmann 于 1917 年发表文章，认为广义协变性原理的这一表述对物理定律并无约束力，就连牛顿方程也可通过非实质性的改写而具有广义协变性[可参阅 Ohanian(1976)]. 这一质疑引起有关学者(包括爱因斯坦)的热烈讨论，从而出现关于广义协变性原理的各种表述方式. 此处介绍一种既能抓住实质又便于应用的如下表述[见 Wald(1984)P.57, 68]：

广义协变性原理　只有时空度规及其派生量才允许以背景几何量的身份出现在物理定律的表达式中.

注 1　物理客体好比演员，时空几何好比舞台(背景)，给定了某一时空(M, g_{ab})就给定了舞台. 物理定律中当然要出现代表物理客体的物理量(动力学量)，如质点的 4 动量 P^a 和电磁场张量 F_{ab} 等，但定律中也应允许出现反映舞台(背景)的时

空几何量，这就是时空度规 g_{ab} 及其派生量(例如与 g_{ab} 适配的导数算符 ∇_a 以及 ∇_a 的 $R_{abc}{}^d$, R_{ab}, R 等). 广义协变性原理的实质是要在物理定律表达式中排除一切(与时空内禀几何无关的)人为因素，例如某坐标系的普通导数算符 ∂_a 或某种人为指定的矢量场 v^a ，因为它们既不是要研究的物理客体，又不是时空背景(M, g_{ab})的内禀因素. 允许某个 ∂_a 出现在物理定律中意味着与 ∂_a 相应的坐标系在所有坐标系中处于与众不同的特殊地位，这正是广义协变性的精神所不允许的.

注 2 广义协变性原理的上述表述特别适合于用抽象指标的教材. 许多不用抽象指标的教材有如下结论：只要物理规律能表为张量等式，就必定具有广义协变性. 例如，设 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都是(1, 1)型张量，则等式 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$ 必广义协变，因为它在任意两个坐标系 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 的分量式显然为 $T^\mu{}_\nu = S^\mu{}_\nu$ 和 $T'^\mu{}_\nu = S'^\mu{}_\nu$ ，即分量式在任意坐标变换下形式不变(符合爱因斯坦关于广义协变性的提法). 反之，克氏符 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 不服从张量变换律，含克氏符的等式不是张量等式，所以不具备广义协变性. 然而，在用抽象指标的教材中，连克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ (以及坐标系的 ∂_a 作用于矢量场 v^a 的结果 $\partial_a v^b$)也被视为张量(坐标系依赖的张量)，含 $\Gamma^c{}_{ab}$ 或 $\partial_a v^b$ 的等式仍被视为张量等式，它们之所以没有广义协变性是因为它们不满足本书关于广义协变性的上述表述，因为它们包含了不是 g_{ab} 的派生量的量 $\Gamma^c{}_{ab}$ 或 $\partial_a v^b$ ，从而把 $\Gamma^c{}_{ab}$ 或 $\partial_a v^b$ 所涉及的那个坐标系摆在了与众不同的地位. 总之，两类教材都说含克氏符的等式没有广义协变性，但理由不同(因为广义协变性的表述不同).

在以上讨论的基础上便可提出弯曲时空物理定律必须服从的两个原则：(a)广义协变性原理；(b)在时空度规 g_{ab} 等于闵氏度规 η_{ab} 时，应能回到狭义相对论的相应定律.① 这两个必要性判据虽然不能唯一决定弯曲时空的物理定律，但以它们为指导，加上物理和美学的考虑，在很多情况下能够自然地得出物理定律. 由于广义相对论和狭义相对论的差别无非是背景时空的差别[即(M, g_{ab})与$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$的差别]，狭义相对论中用4维语言描述物理客体的做法可以自然推广至广义相对论. 例如，质点和光子的世界线仍分别是类时和类光曲线(当然，这实际上已把“光速不变原理”和“质点必亚光速”的实质内涵推广到广义相对论.)；质点的固有时间仍等于它的世界线长度，质点的 4 速 U^a 仍定义为其世界线的单位切矢，4 动量仍定义为 $P^a := mU^a$ (m 为静质量)；质点相对于瞬时观者(p, Z^a)的能量仍定义为 $E := -P^a Z_a$ ，电磁场仍由 2 形式场 F_{ab} 描述，等等. 为了得出这些物理量服从的定律，在多数情况下只须把狭义相对论相应定律表达式中的所有 η_{ab} 和 ∂_a 分别换

① 各种教材对原则(a)的提法一样(虽然对广义协变性原理的表述有所不同)，对原则(b)的提法则至少有两种. 另一种提法是：(b)等效原理. 就导出物理定律的效果而言，两种提法一样. 详见§ 7.5.

为 g_{ab} 和 ∇_a. 不妨把这种做法称为“**最小替换法则**”. 易见这样得出的表达式必然服从上述两个原则. 以下是使用这个法则的一些例子：弯曲时空中质点的 4 加速应定义为

$$A^a := U^b \nabla_b U^a \,, \tag{7-2-1}$$

质点所受 4 力应定义为

$$F^a := U^b \nabla_b P^a \,. \tag{7-2-2}$$

对于自由质点，$F^a = 0$ (引力不是 4 维力!)，上式成为 $U^b \nabla_b U^a = 0$，即测地线方程，与广义相对论基本假设(b) (见§7.1)一致. 对于电磁场中的质点，其运动方程则为

$$qF^a{}_b U^b = U^b \nabla_b P^a \,. \tag{7-2-3}$$

请注意，电磁场 F_{ab} 对质点的影响体现在方程的左边(体现为 4 力 $qF^a{}_b U^b$)，而引力场对质点的影响则体现在方程的右边(体现在用 ∇_a 而非 ∂_a 求导). 电磁场 F_{ab} 的运动方程(弯曲时空的麦氏方程)应为

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b \,, \tag{7-2-4}$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \,. \tag{7-2-5}$$

电磁场的能动张量应表为

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}) \,. \tag{7-2-6}$$

此式在弯曲时空中仍成立的另一重要依据是它满足 $\nabla^a T_{ab} = -F_{bc} J^c$ [参见第 6 章习题 18(a)]，表明电磁场与带电粒子场的总能量、动量和角动量守恒(见 6.6.4 小节末). 读者应能验证这一等式.

由于式(7-2-5)可表为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$，至少可局域地引入电磁 4 势 $\boldsymbol{A}$ 使 $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}$，故式(7-2-4)可用 $\boldsymbol{A}$ 表为

$$-4\pi J_b = \nabla^a (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \nabla^a \nabla_a A_b - \nabla^a \nabla_b A_a \,. \tag{7-2-7}$$

在狭义相对论中，上式右边第二项为 $-\partial^a \partial_b A_a$，可简单地改写为 $-\partial_b \partial^a A_a$，再由洛伦兹规范条件 $\partial^a A_a = 0$ 便可使式(7-2-7)在狭义相对论中表为

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \qquad \text{[此即式(6-6-31)]}.$$

然而现在 ∇_a 与 ∇_b 有非对易性，要想利用洛伦兹条件 $\nabla^a A_a = 0$ 就要先用式(3-4-4)将式(7-2-7)右边第二项改写为 $-\nabla^a \nabla_b A_a = -\nabla_b \nabla^a A_a - R_b{}^d A_d = -R_b{}^d A_d$，从而使式(7-2-7)成为

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R_b{}^d A_d = -4\pi J_b \,. \tag{7-2-8}$$

有趣的是，如果直接从狭义相对论方程(6-6-31)出发使用最小替换法则，便有

$$\nabla^a \nabla_a A_b = -4\pi J_b \,, \tag{7-2-9}$$

与式(7-2-8)显然不同. 这个例子表明最小替换法则并非在任何情况下都能导致唯

一的物理定律. 遇到类似情况就要再加其他考虑. 以本例而言, 可以证明, 式(7-2-8)能够导致电荷守恒律 $\nabla_a J^a = 0$(习题 1)而式(7-2-9)不能. 从这一物理考虑出发, 我们选择式(7-2-8)作为电磁 4 势 A 的运动方程. 本例所具有的含糊性来自导数算符的非对易性, 凡含 2 阶或高阶导数(两个或多个 ∇_a 相继作用)的公式在从狭义相对论到广义相对论的过渡中都会遇到这一问题. 读者不妨与以下事实类比: 物理公式在从经典力学向量子力学的过渡中, 算符的非对易性也是含糊性的根源.

[选读 7-2-1]

对无源电磁场, 式(7-2-8)成为

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R_b{}^d A_d = 0 . \tag{7-2-8'}$$

受 6.6.5 小节末(选读 6-6-3 前)的启发, 我们讨论上式的、可表为"慢变"振幅 C_b 和"快变"相因子 $\cos\theta$ 之积的电磁波解 $A_b = C_b \cos\theta$, 并关心使用几何光学近似的可能性. 方程(7-2-8′)与闵氏时空中相应方程 $\partial^a \partial_a A_b = 0$ 的区别在于含有曲率项 $R_b{}^d A_d$, 要使几何光学近似成立还需此项可被忽略. 考虑如下三个长度量:

(1) C_b 或 $K^a \equiv \nabla^a \theta$ 刚能显出变化的特征长度 $\tilde{L}$;

(2) 描述时空曲率的"大小"的长度量

$\tilde{R} \equiv [R_{abcd}$ 在某典型局部惯性系(详见§7.5)的典型分量 $R_{\mu\nu\sigma\rho}]^{-1/2}$;

(3) A_b 相对于上述局部惯性系的波长 λ ($\lambda \equiv 2\pi/\omega,\ \omega \equiv -Z^a K_a$).

如果三者满足 $\lambda \ll \tilde{L}$ 和 $\lambda \ll \tilde{R}$, 则 C_b 的导数项 $\nabla^a \nabla_a C_b$ 和曲率项 $R_b{}^d A_d$ 都可忽略, 从而近似有

$$(\nabla^a \theta)\nabla_a \theta = 0 , \tag{7-2-10}$$

于是 $K^a \equiv \nabla^a \theta$ 仍为类光超曲面 $\mathscr{S} = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \theta_p = C\}$ ($C =$ 常数)的类光法矢, K^a 的积分曲线仍为类光测地线(证明与 6.6.5 小节同, 注意 ∇_a 的无挠性保证 $\nabla_a \nabla_b \theta = \nabla_b \nabla_a \theta$.), 光信号仍沿类光测地线传播, 电磁波(光子)相对于 4 速为 Z^a 的观者的角频率仍为

$$\omega = -K_a Z^a , \tag{7-2-11}$$

等等. 可见, 当 $\lambda \ll \tilde{L}$ 和 $\lambda \ll \tilde{R}$ 成立时几何光学近似适用. 本书多处(如 9.2.1 小节和 10.2.2 小节)用到这一近似.

弯曲时空中几何光学近似的参考文献为: Wald(1984)P.71; Misner et al.(1973) §22.5; Straumann(1984)P.100~103. **[选读 7-2-1 完]**

[选读 7-2-2]

弯曲时空的麦氏方程(7-2-4)和(7-2-5)还可用外微分算符做如下等价表述:

$$\mathrm{d}\,{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J} , \tag{7-2-4'}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0 , \tag{7-2-5'}$$

其中 $^*\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{F}\equiv F_{ab}$ 的对偶微分形式(见§5.6)，仍是 2 形式，$^*\boldsymbol{J}$ 是 1 形式 J_a 的对偶 3 形式. 式(7-2-5′)与(7-2-5)的等价性由外微分定义一望而知，但式(7-2-4′)与(7-2-4)的等价性的证明则略需技巧. 由定义知 $(\mathrm{d}^*F)_{fab}=\mathrm{d}_f(\varepsilon_{abcd}F^{cd}/2)=3\nabla_{[f}(\varepsilon_{ab]cd}F^{cd})/2$. 因为右边同 ε^{efab} 缩并得 $3\varepsilon^{efab}\varepsilon_{cdab}(\nabla_f F^{cd})/2=-3\times 4\delta_c{}^e\delta_d{}^f(\nabla_f F^{cd})/2=-6\nabla_f F^{ef}$，所以 $\varepsilon^{efab}(\mathrm{d}^*F)_{fab}=6\nabla_f F^{fe}$. 此式再同 ε_{egcd} 缩并得 $-(\mathrm{d}^*F)_{gcd}=\varepsilon_{egcd}\nabla_f F^{fe}$. 由定义式 $^*J_{gcd}\equiv J^e\varepsilon_{egcd}$ 不难看出上式可表为式(7-2-4′)当且仅当式(7-2-4)成立. 可见式(7-2-4′)等价于(7-2-4).

[选读 7-2-2 完]

§7.3　费米移动与无自转观者

读完§7.1 后，不少读者想进一步了解等效原理、爱因斯坦电梯、局部惯性系以及引力同惯性力的关系等问题. 准确理解这些问题需要一些基本概念. 本节介绍其中之一，即无自转观者的概念(爱因斯坦电梯内的观者不但是自由下落的，而且应是无自转的.).

设想你坐飞机漫游世界. 你胸前绑着一根与胸部垂直的短箭，箭头指向体外. 你从固有时刻 τ_1 开始闭目养神，至 τ_2 时睁眼，短箭当然仍与胸部垂直，但它在空间的指向却可能与 τ_1 时不同，因为飞机的运动非常任意. 如果前后两个指向不同，自然说短箭在时间 $\Delta\tau\equiv\tau_2-\tau_1$ 内"转了方向"，或说它在 $\Delta\tau$ 内发生了转动. 但是，什么叫做"指向不同"？怎样判断指向是否相同？这其实是在问：什么叫做转动？怎样判断是否发生了转动？在牛顿力学中这个问题有明确答案：回转仪飞轮的自转轴(简称"回转仪轴")代表不变的方向[见 Sachs and Wu (1977)P.50, 52]. 如果你手里有一个回转仪，短箭在 τ_1 时与回转仪轴平行而在 τ_2 时与回转仪轴不平行，便可肯定短箭在 $\Delta\tau$ 内发生了转动. 这一无转动判据可推广至广义相对论. 下面翻译为 4 维语言，以 $G(\tau)$ 代表你的世界线，则短箭在 τ_1 时刻表现为点 $p_1\equiv G(\tau_1)$ 的一个空间矢量 w^a("空间"一词是指与你在 τ_1 时刻的 4 速 $Z^a|_{p_1}$ 垂直)，为方便起见，设其长度为 1. 随着你的固有时 τ 的流逝，短箭就对应于 $G(\tau)$ 线上的一个单位长的空间矢量场. 类似地，以长度为 1 的矢量代表回转

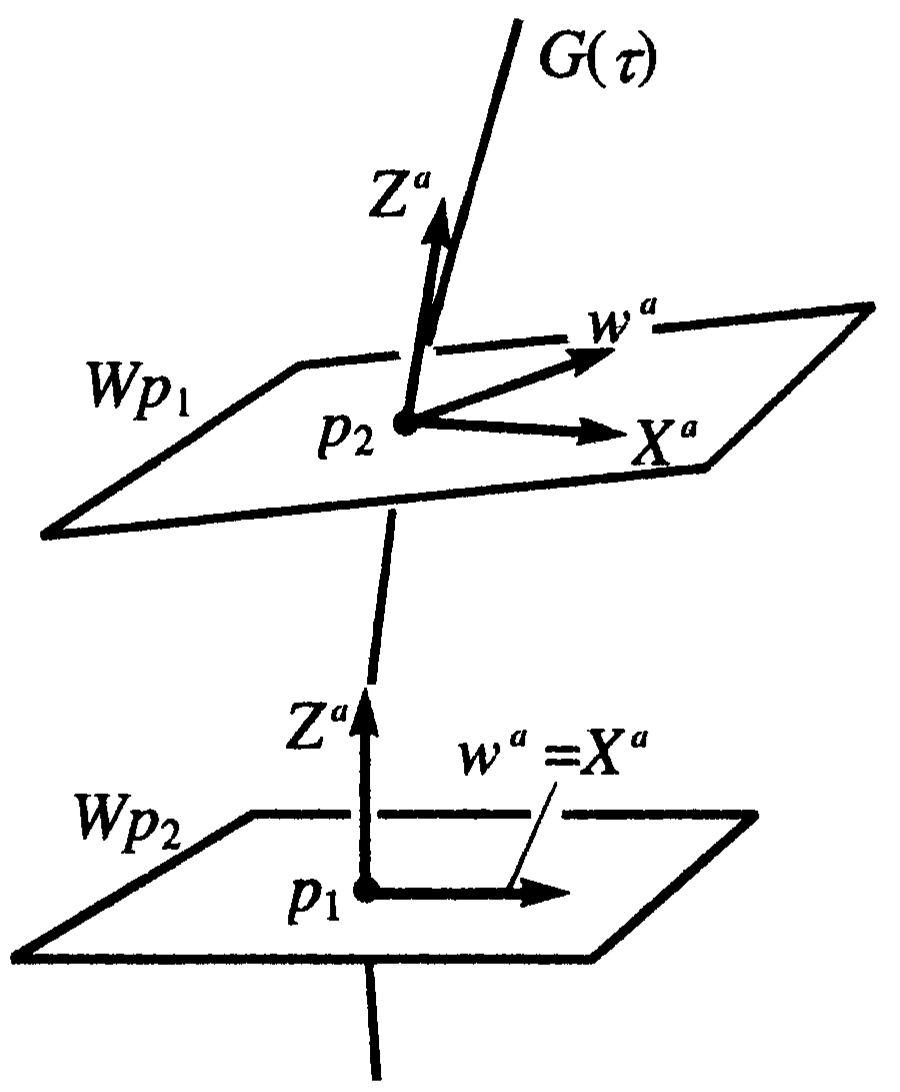


图 7-1　X^a 和 w^a 都是 $G(\tau)$ 的空间矢量场. X^a 代表回转仪轴. 与 X^a 对比可知 w^a 有空间转动

仪轴的方向，则你手中的回转仪轴对应于 $G(\tau)$上的另一个单位长的空间矢量场 X^a. 刚才的3维描述表明w^a与X^a在点 $p_1 \equiv G(\tau_1)$ 重合而在 $p_2 \equiv G(\tau_2)$ 不重合(见图7-1). 由于认定 X^a 代表无转动方向，故说 w^a 在 $\Delta\tau \equiv \tau_2 - \tau_1$ 内发生了转动. 为了在数学上描述世界线 $G(\tau)$上的转动矢量场 w^a，应先描述无转动矢量场 X^a，因为它是衡量 w^a 转动情况的标准. 作为世界线 $G(\tau)$上的一个无转动空间矢量场，X^a 在数学上有什么特点？一个自然的猜想是：X^a 是 $G(\tau)$上的平移矢量场，然而除特殊情况外这个猜想不正确. 关键在于由点 $p_1 \equiv G(\tau_1)$ 的一个空间矢量 $X^a|_{p_1}$ 决定的平移矢量场一般不是 $G(\tau)$上的空间矢量场[证明：设 X^a 沿 $G(\tau)$平移，则 $Z^b\nabla_b(X^aZ_a) = X^aZ^b\nabla_bZ_a = X^aA_a$，其中 ∇_a 是与时空度规 g_{ab} 适配的导数算符，A^a 是 $G(\tau)$的 4 加速. 只要 $G(\tau)$不是测地线，而且 X^a 同 A^a 不正交，则上式右边非零，故 X^aZ_a 沿 $G(\tau)$不是常数，X^aZ_a 不可能在 $G(\tau)$上处处为零.]. 为了描述无转动空间矢量场 X^a 沿 $G(\tau)$的移动性质，费米(Fermi，于 1922 年)和沃克(Walker，于 1923 年)提出物理上很重要的、与协变导数有密切联系而又不同的沿曲线的求导概念，后来称为费米-沃克导数，定义如下：

定义1 设 $G(\tau)$是时空(M, g_{ab})中的类时线①(τ 为固有时)，$\mathscr{T}_G(k,l)$ 代表沿 $G(\tau)$ 的光滑(k,l)型张量场的集合. 映射 $\mathrm{D_F}/\mathrm{d}\tau : \mathscr{T}_G(k,l) \to \mathscr{T}_G(k,l)$ 称为 $G(\tau)$上的**费米-沃克导数算符**(简称费米导数算符)，若它满足如下条件：

(a) 具有线性性；

(b) 满足莱布尼茨律；

(c) 与缩并可交换顺序；

(d)
$$\frac{\mathrm{D_F} f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} \qquad \forall f \in \mathscr{T}_G(0,0)\,; \tag{7-3-1}$$

(e)
$$\frac{\mathrm{D_F} v^a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{D} v^a}{\mathrm{d}\tau} + (A^aZ^b - Z^aA^b)\, v_b \qquad \forall v^a \in \mathscr{T}_G(1,0)\,, \tag{7-3-2}$$

其中 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$ 代表 $G(\tau)$的 4 速，$A^a \equiv Z^b\nabla_bZ^a$ 代表 $G(\tau)$的 4 加速，$\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}\tau$ 是沿曲线 $G(\tau)$的协变导数 $Z^b\nabla_bv^a$ 的另一记号(其中 ∇_b 满足 $\nabla_b g_{ac} = 0$).

注 1 条件(e)明确规定了矢量场的费米导数表达式，与其他条件结合便得 $\mathrm{D_F}/\mathrm{d}\tau$ 对任意张量场的作用结果.

命题 7-3-1 费米导数有以下性质：

(1) 若 $G(\tau)$是测地线，则 $\mathrm{D_F}v^a/\mathrm{d}\tau = \mathrm{D}v^a/\mathrm{d}\tau$；

(2) $\mathrm{D_F}Z^a/\mathrm{d}\tau = 0$；

(3) 若 w^a 是 $G(\tau)$上的空间矢量场(对线上各点 $w^aZ_a = 0$)，则

---

① 我们只讨论 $G(\tau)$为非自相交类时线的情况，否则会遇到因果疑难(见下册第 11 章). 事实上，本书中代表观者的类时线通常都默认为非自相交的.

$$D_F w^a / d\tau = h^a{}_b (D w^b / d\tau) , \tag{7-3-3}$$

其中 $h_{ab} = g_{ab} + Z_a Z_b$，$h^a{}_b = g^{ac} h_{cb}$ 是 $G(\tau)$ 上各点的投影映射. 性质 3 保证空间矢量场的费米导数仍为空间矢量场.

(4) $D_F g_{ab} / d\tau = 0$，等价地有

$$D_F (g_{ab} v^a u^b) / d\tau = g_{ab} v^a D_F u^b / d\tau + g_{ab} u^b D_F v^a / d\tau \qquad \forall v^a, u^b \in \mathscr{F}_G(1,0) . \tag{7-3-4}$$

证明 性质(1)由式(7-3-2)显见. 性质(2)由式(7-3-2)和 A^a 的定义易证(利用 $A^a Z_a = 0$). 性质(3)的证明留作习题，性质(4)的证明如下：

$$g_{ab} v^a D_F u^b / d\tau + g_{ab} u^b D_F v^a / d\tau = v_a D_F u^a / d\tau + u_a D_F v^a / d\tau$$
$$= v_a (D u^a / d\tau + 2A^{[a} Z^{b]} u_b) + u_a (D v^a / d\tau + 2A^{[a} Z^{b]} v_b)$$
$$= v_a D u^a / d\tau + u_a D v^a / d\tau + 4A^{[a} Z^{b]} v_{(a} u_{b)} = D(v_a u^a) / d\tau = D_F (g_{ab} v^a u^b) / d\tau ,$$

其中最末一步用到式(7-3-1). □

定义 2 矢量场 v^a 称为沿 $G(\tau)$ **费米-沃克移动的**(Fermi-Walker transported)，若

$$D_F v^a / d\tau = 0 .$$

费米-沃克移动简称**费移**.

注 2 费米导数的性质(1)表明沿测地线的费移就是平移；性质(2)表明 $G(\tau)$ 的 4 速 Z^a 总是沿 $G(\tau)$ 费移的；由性质(4)可知 $D_F v^a / d\tau = 0 = D_F u^a / d\tau \Rightarrow d(g_{ab} v^a u^b) / d\tau = 0$，这可简述为"费移保内积"，与"平移保内积"类似.

命题 7-3-2 $p \in G$ 及 $v^a \in V_p$ 决定唯一的沿 $G(\tau)$ 费移的矢量场.

证明 略[可参阅 Sachs and Wu(1977)P.51 及其所引文献]. □

注 3 ①由 Z^a 沿 $G(\tau)$ 费移及费移保内积可知由空间矢量 $v^a \in V_p$ 决定的沿 $G(\tau)$ 费移的矢量场 v^a 处处与 Z^a 垂直，因而是空间矢量场. ②点 $p \in G$ 的一个正交归一 4 标架(其第零基矢等于 $Z^a |_p$)的每一基矢依命题 7-3-2 决定一个沿 $G(\tau)$ 费移的矢量场，且由费移保内积可知这 4 个矢量场在线上每点正交归一. 可见 p 点的一个正交归一 4 标架决定了 $G(\tau)$ 上唯一的正交归一费移 4 标架场，其中第零个基矢场就是 $G(\tau)$ 的切矢场 Z^a.

费移有重要物理意义：世界线 $G(\tau)$ 上的空间矢量场 w^a 无空间转动的充要条件是 w^a 沿线费移，即 $D_F w^a / d\tau = 0$(理由详见命题 7-3-6). 因此，回转仪轴(看作单位矢量)是沿回转仪世界线费移的空间矢量场. 例如，设 $\{t, x, y, z\}$ 是闵氏时空的一个洛伦兹系，$G(\tau)$ 是该系的一条 t 坐标线，则该系的坐标基矢 $(\partial/\partial t)^a$，$(\partial/\partial x)^a$，$(\partial/\partial y)^a$，$(\partial/\partial z)^a$ 都沿 $G(\tau)$ 费移，可见后三个是 $G(\tau)$ 上的无转动空间矢量场，物理上代表三个回转仪的轴(两两正交). 反之，若(长度不变的)空间矢量场 w^a 沿世

界线 $G(\tau)$做非费移，它就是有空间转动的.

为了讲述命题 7-3-6，先介绍空间转动的定义. 在牛顿力学中，刚体的任意运动可分解为平动和转动. 图 7-2 表示刚体从位形 C_1 变为位形 C_2' 的运动，它可通过两步完成：先平动至位形 C_2，再做一个保持某点 o(称为"基点")不动的转动便到达位形 C_2'. 为描述这一转动，可任取刚体的另一点，其位置在转动中从 a 变为 a'. 正如基点的运动代表刚体的平动那样，a 点的运动(从 a 到 a')代表了刚体的转动. 以 $\vec{w}(t)$ 代表 a 点相对于 o 点的位矢，则刚体的转动体现为 $\mathrm{d}\vec{w}(t)/\mathrm{d}t \neq 0$，从而可用矢量的转动描述. 准确地说，起点 o 不变的矢量 $\vec{w}(t)$ 称为**转动的**，若存在矢量 $\vec{\omega}(t)$ 使

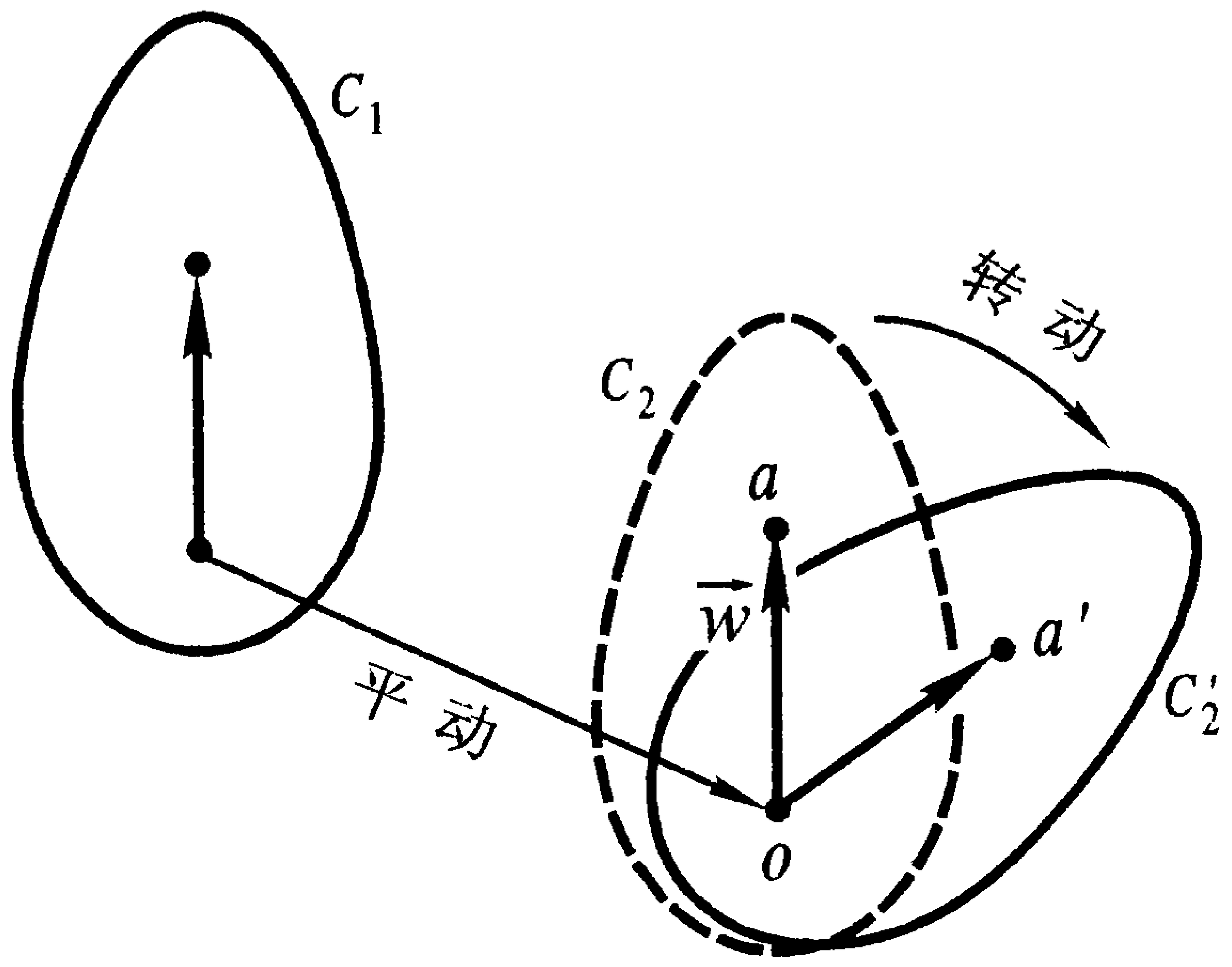


图 7-2　刚体运动可分解为平动和转动

$$\mathrm{d}\vec{w}(t)/\mathrm{d}t = \vec{\omega}(t) \times \vec{w}(t) , \tag{7-3-5}$$

其中 $\vec{\omega}(t)$ 称为 $\vec{w}(t)$ 的(**瞬时**)转动**角速度**. 注意到 $\mathrm{d}(\vec{w}\cdot\vec{w})/\mathrm{d}t = 2\vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{w}/\mathrm{d}t = 2\vec{w}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{w}) = 0$，可知转动保矢量长度. 从矢量转动的上述定义出发，利用牛顿力学可以证明回转仪轴(看作单位长的矢量)不转动，即其 $\vec{\omega} = 0$，故回转仪轴代表无转动方向.

为把矢量转动的上述牛顿定义推广到狭义相对论(并进而推广到广义相对论)，先把式(7-3-5)改写为笛卡儿系(物理上称为伽利略系)的分量形式

$$\mathrm{d}w^i(t)/\mathrm{d}t = \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j w^k , \tag{7-3-5'}$$

并想像基点 o 处(矢量 $\vec{w}$ 的箭尾)有一观者 G. 既然 o 点相对于惯性系静止，推广到狭义相对论时 G 的世界线 $G(\tau)$就应是测地线，$\vec{w}$ 则应是线上的空间矢量场 w^a. 以 $\{t, x^i\}$ 代表他所在的惯性系的坐标，则在 $G(\tau)$上有 $t = \tau$，于是就有转动定义的狭义相对论推广：闵氏时空中类时测地线 $G(\tau)$上的空间矢量场 $w^a(\tau)$称为**转动的**，若 $G(\tau)$上存在空间矢量场 $\omega^a(\tau)$ 使

$$\mathrm{d}w^i(\tau)/\mathrm{d}\tau = \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j w^k , \tag{7-3-6}$$

其中 w^i，w^j 分别是 w^a 和 ω^a 在 $\{t, x^i\}$ 系的 i，j 分量. 对 $G(\tau)$上任一点 p，用 W_p 的诱导度规 h_{ab} 把角速度矢量 ω^a 降指标为角速度 1 形式 ω_a，以 Ω_{ab} 代表 ω_a 在 W_p 中的对偶微分形式，即 $\Omega_{ab} \equiv ({}^*\omega)_{ab} = \omega^c\varepsilon_{cab}$ (ε_{cab} 是与 h_{ab} 适配的体元)，则 Ω_{ab} 称为**角速度 2 形式**，用它可把式(7-3-6)改写为

$$\mathrm{d}w^i/\mathrm{d}\tau = -\Omega^{ij}w_j . \tag{7-3-7}$$

取线上一个正交归一空间 3 标架场 $\{(e_i)^a\}$ 使 $(e_3)^a$ 平行于 ω^a，则 $\omega^1 = \omega^2 = 0$，

$\omega^3 \neq 0$，所以可以说 w^a 绕 $(e_3)^a$ 轴转动．另一方面，由 $\Omega_{ab}=\omega^c\varepsilon_{cab}$ 可知 $\{\omega^1=\omega^2=0, \omega^3\neq 0\}$ 对应于 $\{\Omega_{23}=\Omega_{31}=0$，$\Omega_{12}\neq 0\}$，故也可说 w^a 在 1~2 面内转动(一般地说，在 i~j 面内转动是指 Ω_{ab} 的非零分量为 Ω_{ij} 和 Ω_{ji}.)．两种说法对 3 维空间 W_p 等价，但后一说法便于推广到 4 维．现在没有必要再限制在闵氏时空测地线上空间矢量场的空间转动，下面给出任意时空任意类时线上任意矢量场的"时空转动"的定义．

定义3　设 $G(\tau)$ 是时空 (M, g_{ab}) 中任一观者的世界线(不一定是测地线)，v^a 是线上的矢量场(不一定是空间矢量场)．若 $G(\tau)$ 上存在 2 形式场 Ω_{ab} 使

$$Dv^a/d\tau=-\Omega^{ab}v_b, \tag{7-3-8}$$

就说 v^a 经受以 Ω_{ab} 为角速度的**时空转动**．或者说，v^a 的时空转动角速度 2 形式是 Ω_{ab}．若 $Dv^a/d\tau=0$，就说 v^a 无时空转动．

命题 7-3-3　设 $G(\tau)$ 上矢量场 v^a，u^a 经受相同的时空转动 Ω_{ab}，则 $v^a u_a$ 在 $G(\tau)$ 上为常数．

证明

$$\frac{D}{d\tau}(v^a u_a)=u_a\frac{Dv^a}{d\tau}+v_a\frac{Du^a}{d\tau}=u_a(-\Omega^{ab}v_b)+v_a(-\Omega^{ab}u_b)=-2\Omega^{ab}v_{(a}u_{b)}=0,$$

其中最后一步用到 Ω_{ab} 的反称性．　□

命题 7-3-3 表明时空转动保持矢量长度(取 $v^a=u_a$ 便可看出)，可见只有长度沿 $G(\tau)$ 不变的矢量场 v^a 才可能是经受时空转动的矢量场．反之，可以证明(习题) $G(\tau)$ 上长度不变(且非零)的矢量场 v^a 必经受时空转动．

注 4　设 $\vec{\omega}$ 满足式(7-3-5)，3 维矢量 $\vec{\lambda}$ 满足 $\vec{\lambda}\times\vec{w}=0$ (即存在系数 β 使 $\vec{\lambda}=\beta\vec{w}$)，则 $\vec{\omega}'\equiv\vec{\omega}+\vec{\lambda}$ 也满足式(7-3-5)．这无非反映如下事实：无论 $\vec{w}$ 如何转动，总可认为它在该转动之上叠加一个绕自身的任意转动 $\vec{\lambda}=\beta\vec{w}$，因为矢量"绕自身转动"就是不转．类似地，设 Ω_{ab} 满足式(7-3-8)，2 形式 Λ_{ab} 满足 $\Lambda^{ab}v_b=0$，则 $\Omega'_{ab}\equiv\Omega_{ab}+\Lambda_{ab}$ 也满足式(7-3-8)．这个 Λ_{ab} 反映了 Ω_{ab} 的"规范自由性"，即两个 Ω_{ab} 如果只差一个满足 $\Lambda^{ab}v_b=0$ 的 Λ_{ab}，对 v^a 而言就没有实质区别．讨论时可在这些 Ω_{ab} 中选择最方便的一个(详见选读 7-3-1)．例如，根据定义 3，可以说 v^a 无时空转动的充要条件是其 $\Omega_{ab}=0$，虽然也存在非零的 Ω_{ab} 满足 $Dv^a/d\tau=0$ (可见这"充要条件"可差到一个规范变换．本节他处某些"充要条件"也如此．)．

因 Z^a 沿 $G(\tau)$ 费移，故当 $G(\tau)$ 不是测地线时 $DZ^a/d\tau\neq 0$，即 Z^a 经受时空转动．下面找出 Z^a 的时空转动角速度．

命题 7-3-4　$G(\tau)$ 的 4 速 Z^a 的时空转动角速度 2 形式为 $\tilde{\Omega}_{ab}=A_a\wedge Z_b$，其中 A^a 是 $G(\tau)$ 的 4 加速．

证明　$-\tilde{\Omega}^{ab}Z_b = -(A^aZ^b - Z^aA^b)Z_b = A^a = \mathrm{D}Z^a/\mathrm{d}\tau$，对比式(7-3-8)可知 Z^a 的时空转动角速度 2 形式为 $\tilde{\Omega}_{ab}$． □

从 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$ 可知 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 代表的时空转动发生在 $Z^a \sim A^a$ 面内，它在以 Z^a 为$(e_0)^a$ 的正交归一 4 标架的空间分量 $\tilde{\Omega}_{ij} = 0$．这样的时空转动称为**伪转动**[pseudo-rotation，见 Misner et al.(1973) P.170.]．反之，只有空间分量(即 $\Omega_{0i} = 0$, $i = 1, 2, 3$)的时空转动 Ω_{ab} 称为(纯)**空间转动**，在不会混淆时简称**转动**.

由 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$ 可知 4 加速 $A^a \neq 0$ [$G(\tau)$偏离测地线]是 Z^a 经受伪转动的根本原因(充要条件)．对此可借图 7-3 做一直观解释．根据定理 3-2-4，由 $A^a = Z^b\nabla_b Z^a$ 知

$$A^a|_p = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}(\tilde{Z}^a|_p - Z^a|_p)\,,$$

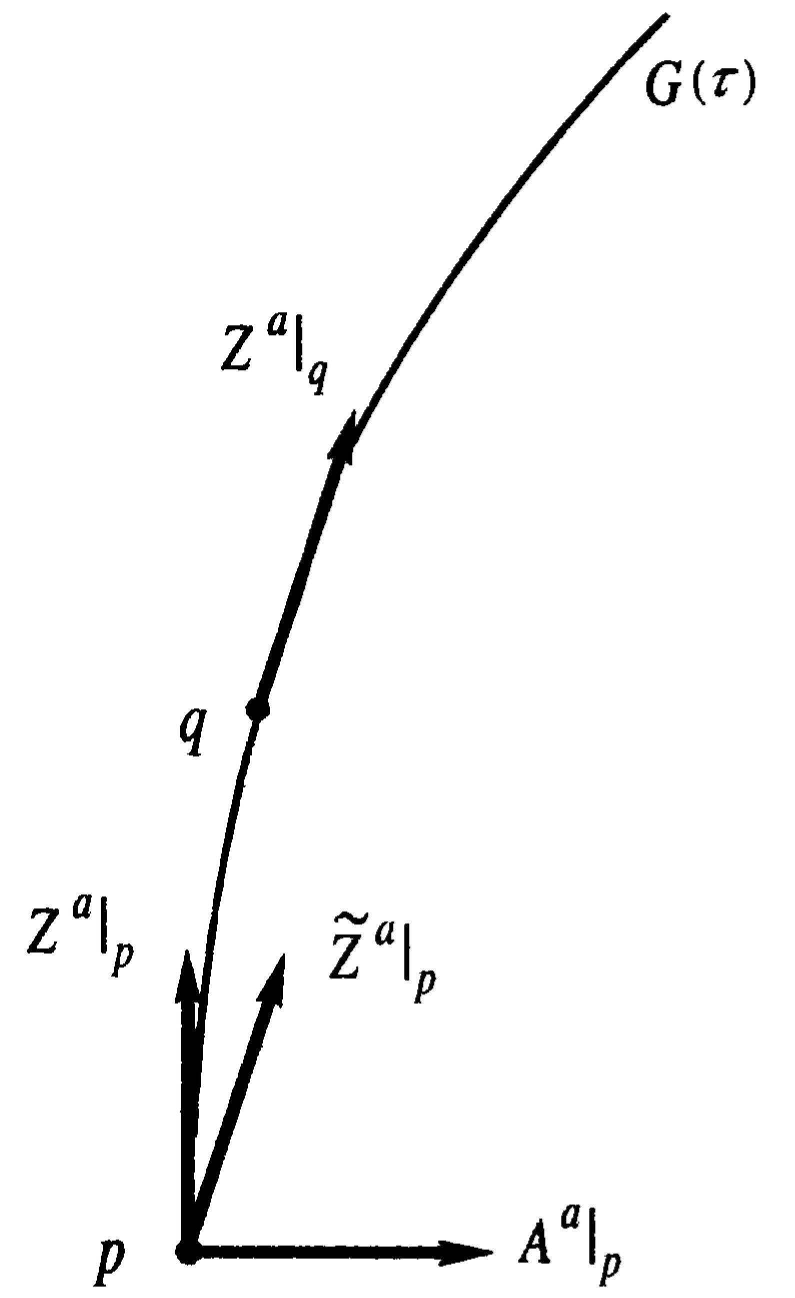


图 7-3　伪转动起因：$G(\tau)$的非测地性使 4 速 Z^a 在从 p 到 q 的过渡中被迫在 Z^a~A^a 面内"转向"

其中 $\tilde{Z}^a|_p$ 是 $Z^a|_q$ 沿 $G(\tau)$平移至 p 点的结果．由图 7-3 可直观地看出：① $G(\tau)$对测地线的偏离使其切矢 Z^a 在从一点 p 到邻点 q 的过渡中被迫"转向"(伪转动)；② 这一伪转动的确发生在 $Z^a \sim A^a$ 面内.

由于 $G(\tau)$上任一空间矢量场 w^a 与 Z^a 正交，Z^a 经受伪转动 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 迫使 w^a 也经受这样一个伪转动．下面证明，w^a 的时空转动扣除这一必不可免的伪转动后必然是纯空间转动.

命题 7-3-5　设 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 是 $G(\tau)$的 4 速 Z^a 所经受的伪转动，Ω_{ab} 是 $G(\tau)$上的空间矢量场 $w^a(\neq 0)$ 所经受的时空转动，则 $\hat{\Omega}_{ab} \equiv \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$ 是纯空间转动(可以差到一个规范变换).

证明　见选读 7-3-1. □

命题 7-3-6　观者世界线 $G(\tau)$上的空间矢量场 w^a 无空间转动的充要条件是它沿 $G(\tau)$费移，即 $\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = 0$.

证明　由 $\hat{\Omega}_{ab} \equiv \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$ 及 $\mathrm{D}w^a/\mathrm{d}\tau = -\Omega^{ab}w_b$ 可得

$$-\hat{\Omega}^{ab}w_b = (\mathrm{D}w^a/\mathrm{d}\tau) + \tilde{\Omega}^{ab}w_b\,. \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

注意到 $\tilde{\Omega}^{ab} = A^aZ^b - Z^aA^b$，上式又可表为

$$\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = -\hat{\Omega}^{ab}w_b\,. \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

因为 $\hat{\Omega}_{ab}$ 代表 w^a 的空间转动，所以 $G(\tau)$上的空间矢量场 w^a 无空间转动的充要条件就是 $\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = 0$. □

反之，设 w^a 有空间转动，以 ω_a 代表 $\hat{\Omega}_{ab}$ 的对偶形式(在 $p\in G$ 的 3 维空间 W_p 内谈对偶)，即

$$\hat{\Omega}_{ab}=\omega^c\varepsilon_{cab}\,,\tag{7-3-11}$$

便可把式(7-3-10)改写为

$$\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau=-\varepsilon^a{}_{bc}w^b\omega^c\,,\tag{7-3-12}$$

或者，令 ε_{abcd} 代表与 g_{ab} 适配的体元，利用 $\varepsilon_{bcd}=Z^a\varepsilon_{abcd}$ 还可改写为

$$g_{ab}\mathrm{D_F}w^b/\mathrm{d}\tau=\varepsilon_{abcd}Z^bw^c\omega^d\,,\tag{7-3-12'}$$

由式(7-3-11)定义的 ω_a 称为空间矢量场 w^a 的**空间转动角速度**(简称**角速度**). 就是说，非费移的空间矢量场 w^a 可用非零的空间转动角速度 ω^a 描述.

设 $\{(e_i)^a\}$ 是 $G(\tau)$上的一个正交归一的空间 3 标架场. 由于任意二基矢正交，它们有“刚性联系”，可以预期这 3 个基矢有共同的时空转动角速度Ω_{ab}，从而有共同的空间转动角速度 $\hat{\Omega}_{ab}$. 请看如下命题：

命题 7-3-7 $G(\tau)$上任一正交归一的空间 3 标架场 $\{(e_i)^a\}$ 中的 3 个基矢场有共同的空间转动角速度 $\hat{\Omega}_{ab}$(不再有规范自由性).

证明 见选读 7-3-1. □

注 5 ①这个共同的 $\hat{\Omega}_{ab}$ 就称为该 3 标架场的空间转动角速度 2 形式，其相应的 ω^a(即满足 $\hat{\Omega}_{ab}=\omega^c\varepsilon_{cab}$ 的 ω^a)称为该 3 标架场的**空间转动角速度矢量**. ②可能会问：设 $(e_1)^a$，$(e_2)^a$ 绕 $(e_3)^a$ 以角速度 ω^a [平行于 $(e_3)^a$]转动，则 $(e_3)^a$ 不转，故角速度为零. 怎能说三者有相同角速度？答案是：利用“规范自由性”(见注 4)，可以说 $(e_3)^a$ 的角速度也是 ω^a (绕自己转就是不转)，所以没有矛盾. 由此也可看出命题 7-3-7 的证明是要利用规范自由性的. 有一点应该强调：当发现空间 3 标架场中的一个基矢[如 $(e_3)^a$]不沿线转动时，不能根据命题 7-3-7 断言其他两个基矢也不转动，因为它们可以绕 $(e_3)^a$ 转.

注 6 以上讨论表明一个观者由两个要素决定：①世界线 $G(\tau)$；②线上的一个正交归一 4 标架场[满足 $(e_0)^a=Z^a$]. 在若干情况下要素②不起作用，谈及观者时只须明确他的世界线 $G(\tau)$. 因此有些文献把观者等同于世界线[例如 Sachs and Wu(1977)P.41 说(实质内容而非原话)：一个观者是一条有单位切矢的指向未来的类时曲线.]. 然而在许多情况下两个要素同时起作用，在这些情况下应把观者理解为带有确定正交归一 4 标架场[其中 $(e_0)^a$ 等于 4 速]的一条世界线 $G(\tau)$，该世界线描写观者(作为质点)的轨道运动，而 3 标架场的空间转动角速度 ω^a 则描写观者自身的转动(简称观者的**自转**). 正如§6.3 之末所讲过的，闵氏时空的惯性观者是指世界线为测地线(4 加速 $A^a=0$)的无自转(3 标架转动角速度 $\omega^a=0$)观者. 这是一类最简单的观者. 类似地，弯曲时空的自由下落($A^a=0$)无自转($\omega^a=0$)观者也是

一类最简单的观者，他们对理解等效原理和局部惯性系有重要作用(详见§7.5). 认清观者的两大要素则对分清惯性力和科氏力大有帮助(详见§7.4).

[选读 7-3-1]

为了证明命题 7-3-5 和 7-3-7，有必要对Ω_{ab}的规范自由性进一步做定量讨论. 设$G(\tau)$上的空间矢量场w^a的时空转动角速度为Ω_{ab}，即

$$\mathrm{D}w^a/\mathrm{d}\tau = -\Omega^{ab}w_b\,, \tag{7-3-13}$$

选$G(\tau)$上的正交归一 4 标架场使$(e_0)^a = Z^a$，$(e_1)^a = \alpha w^a$(其中α为归一化系数)，则$\Omega'_{ab} \equiv \Omega_{ab} + \Lambda_{ab}$满足式(7-3-13)的充要条件是$\Lambda^{ab}(e^1)_b = 0$. 由此得

$$0 = \Lambda^{ab}(e^1)_b = \Lambda^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_\nu)^b(e^1)_b = \Lambda^{\mu 1}(e_\mu)^a = \Lambda^{01}(e_0)^a + \Lambda^{21}(e_2)^a + \Lambda^{31}(e_3)^a\,,$$

故$\Lambda_{01} = \Lambda_{21} = \Lambda_{31} = 0$. 由于$\Lambda^{ab}(e^1)_b = 0$是对$\Lambda_{ab}$的唯一限制，$\Lambda_{ab}$的其他 3 个分量$\Lambda_{02}$，$\Lambda_{03}$，$\Lambda_{23}$不受任何约束，所以$\Omega_{02}$，$\Omega_{03}$，$\Omega_{23}$可任意选择. 这就是$w^a$的时空转动角速度$\Omega_{ab}$的规范自由性.

命题 7-3-5 证明 选正交归一 4 标架场使$(e_0)^a = Z^a$，$(e_1)^a = \alpha w^a$(α为归一化系数)，由

$$\begin{aligned}0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}(Z^a w_a) &= w_a\frac{\mathrm{D}Z^a}{\mathrm{d}\tau} + Z_a\frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau} = -w_a\tilde{\Omega}^{ab}Z_b - Z_a\Omega^{ab}w_b = (\tilde{\Omega}^{ab} - \Omega^{ab})Z_a w_b \\ &= (\Omega^{ab} - \tilde{\Omega}^{ab})(e^0)_a(e^1)_b\alpha^{-1} = (\Omega^{01} - \tilde{\Omega}^{01})\alpha^{-1}\end{aligned}$$

得$\Omega^{01} = \tilde{\Omega}^{01}$. 利用$\Omega^{ab}$的规范自由性可使$\Omega^{02} = \tilde{\Omega}^{02}$及$\Omega^{03} = \tilde{\Omega}^{03}$. 注意到$\tilde{\Omega}^{ij} = 0$，便知$\hat{\Omega}_{ab} \equiv \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab} = \Omega_{ij}(e^i)_a(e^j)_b$是纯空间转动. □

命题 7-3-7 证明 以$(\hat{\Omega}_i)_{ab}$代表$(e_i)^a$的空间转动角速度 2 形式. 由

$$0 = \mathrm{D}[(e_1)^a(e_2)_a]/\mathrm{d}\tau = \mathrm{D}[(e_2)^a(e_3)_a]/\mathrm{d}\tau = \mathrm{D}[(e_3)^a(e_1)_a]/\mathrm{d}\tau$$

可知

$$\text{(a)}\ (\hat{\Omega}_1)^{12} = (\hat{\Omega}_2)^{12}, \qquad \text{(b)}\ (\hat{\Omega}_2)^{23} = (\hat{\Omega}_3)^{23}, \qquad \text{(c)}\ (\hat{\Omega}_3)^{31} = (\hat{\Omega}_1)^{31}, \tag{7-3-14}$$

利用$(\hat{\Omega}_1)^{23}$的自由性可令它等于$(\hat{\Omega}_2)^{23}$，从而使上式(b)发展为$(\hat{\Omega}_1)^{23} = (\hat{\Omega}_2)^{23} = (\hat{\Omega}_3)^{23}$. 类似有$(\hat{\Omega}_1)^{12} = (\hat{\Omega}_2)^{12} = (\hat{\Omega}_3)^{12}$和$(\hat{\Omega}_1)^{31} = (\hat{\Omega}_2)^{31} = (\hat{\Omega}_3)^{31}$，故$(\hat{\Omega}_1)^{ab} = (\hat{\Omega}_2)^{ab} = (\hat{\Omega}_3)^{ab}$. 请读者证明$\hat{\Omega}_{ab}$不再有规范自由性. □

[选读 7-3-1 完]

§7.4 任意观者的固有坐标系

观者的 4 标架只在观者世界线上有定义. 若要记录发生在世界线附近的事件(实验结果), 就要设法把这标架向外延伸并形成一个坐标系. 我们当然希望此系的坐标基底在世界线上与该观者的 4 标架重合. 本节介绍一个满足这一要求的、十分方便的坐标系, 叫做观者的**固有**(proper)**坐标系**, 它由该观者的两个要素——世界线 $G(\tau)$及线上的正交归一 4 标架场决定. 由于我们讨论一般观者, 所以 $G(\tau)$不一定是测地线, 它可以有任意的 4 加速 $\hat{A}^a$(加 ^ 代表观者的 4 加速, 以区别于被观测质点的 4 加速 A^a.); 线上的正交归一空间 3 标架场$\{(e_i)^a\}$也不一定沿 $G(\tau)$费移, 它可以有任意的转动角速度 ω^a. 当然 ω^a 和 $\hat{A}^a$ 都是 $G(\tau)$上的空间矢量场, 即 $\omega^a Z_a=0$ 和 $\hat{A}^a Z_a=0$. 设 $\mu(s)$ 是从 $G(\tau)$上任一点 p 发出、在 p 点与 $G(\tau)$正交的任一类空测地线, 其中 s 是等于线长的那个仿射参数, 即 $T^a\equiv(\partial/\partial s)^a$ 为单位切矢. 令 q 为 $G(\tau)$附近一点, 则总有唯一的上述类空测地线 $\mu(s)$ 经过 q [见图 7-4. 若 q 离 $G(\tau)$很远, 则可能有不止一条上述测地线经过, 也可能没有这样的测地线经过. 好在观者 G 只关心与自己靠近的事件.]. 设经过q的那条类空测地线 $\mu(s)$ 发自 G 上的p点且 $p=\mu(0)$, 我们要用这条测地线给q点定义 4 个坐标(称为**固有坐标**)t, x^1, x^2, x^3. 设 V_p 为 p 点的切空间, W_p 为 V_p 中与 $Z^a|_p$ 正交的 3 维子空间, 则$T^a|_p\in W_p$. 把$T^a|_p$ 简记为 w^a, 其在 $(e_i)^a$ 的分量记作 w^i, 则 q 点的 4 个固有坐标定义为

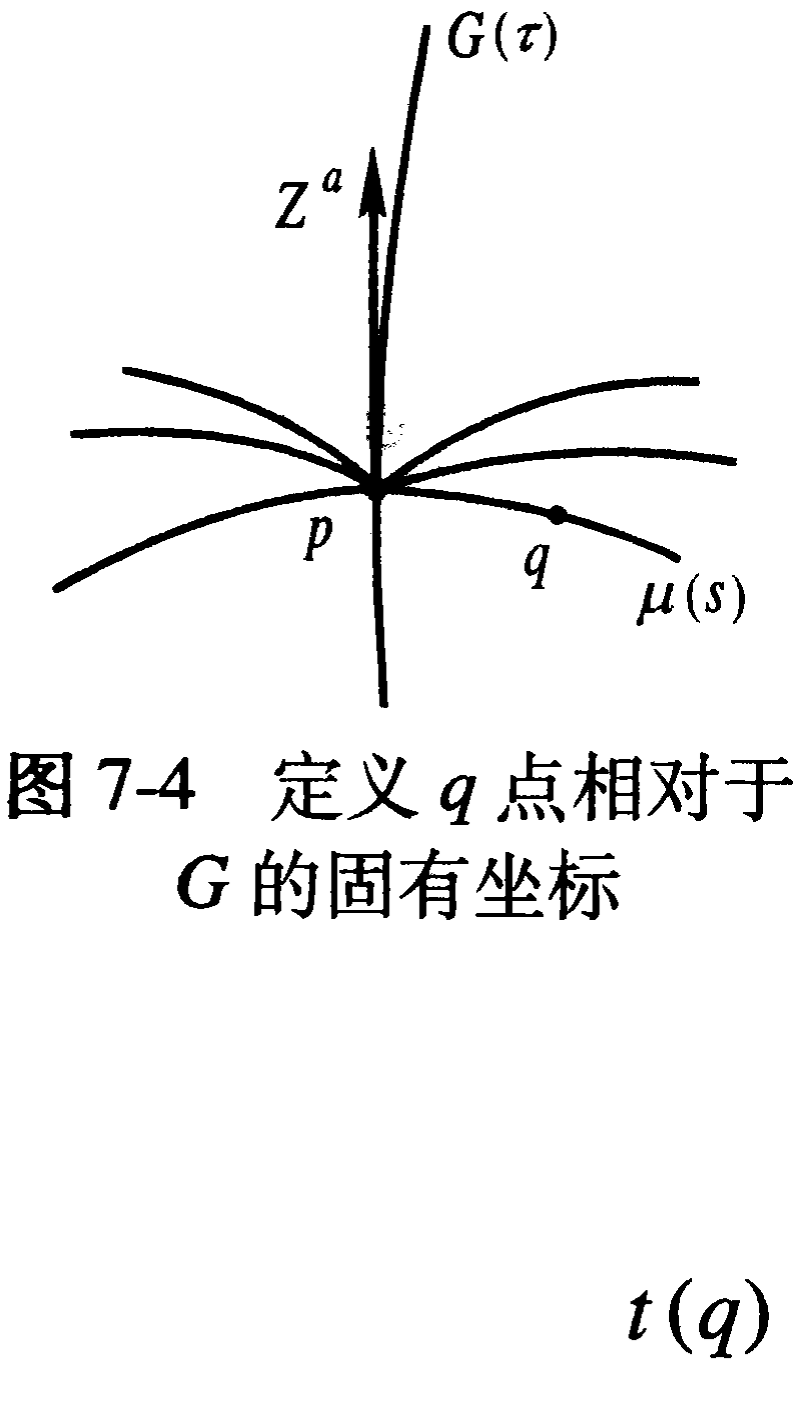


图 7-4　定义 q 点相对于 G 的固有坐标

$$t(q):=\tau_p\,,\qquad x^i(q):=s_q w^i\,,\qquad i=1,2,3\,,\tag{7-4-1}$$

其中 τ_p 是 p(作为 G 上一点)的固有时, s_q 是 $\mu(s)$ 在 q 点的参数值, 亦即 $\mu(s)$ 的 pq 段的线长. 只要 q 点在 $G(\tau)$附近, 就可用式(7-4-1)定义坐标, 于是得到观者 G 的固有坐标系$\{t,x^i\}$, 其坐标域是 $G(\tau)$ (或其一段)的一个开邻域. 作为最简单的例子, 我们指出 4 维闵氏时空中任一洛伦兹坐标系都可看作以该系的 x^0 坐标线为世界线的惯性观者的固有坐标系(请注意, "惯性"一词已要求其 3 标架沿线费移, 此处即平移.).

命题 7-4-1　固有坐标系在任一点 $p\in G(\tau)$ 的坐标基矢与观者 $G(\tau)$的正交归一 4 标架一致, 因而度规 $g_{ab}|_p$ 在固有坐标系的分量 $g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu}$.

证明　以 $(e_1)^a$ 代表 p 点的正交归一 4 标架的第 1 基矢, 把它看作某一 w^a, 由它决定的类空测地线 $\mu_1(s)$ 上各点 q 的固有坐标满足 $x^2=x^3=0$, $t=\tau_p$, 因此是

一条 x^1 坐标线. 对此线而言，$x^1(q)=s_q w^1$ 中的 $w^1=1$，故线上各点有 $x^1=s$，于是坐标基矢 $(\partial/\partial x^1)^a|_p=(\partial/\partial s)^a|_p=w^a=(e_1)^a$. 同理有 $(\partial/\partial x^2)^a|_p=(e_2)^a$, $(\partial/\partial x^3)^a|_p=(e_3)^a$. 此外，不难看出 $G(\tau)$就是固有坐标 t 的坐标线，而且在此线上 $t=\tau$ ，故 $Z^a|_p=(\partial/\partial t)^a|_p$. 这表明 p 点的固有坐标基矢$\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$重合于 p 点的正交归一 4 标架$\{Z^a|_p,\ (e_i)^a|_p\}$，因此 $g_{ab}|_p$ 在固有坐标系的分量 $g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu}$.

□

$g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu}$是固有坐标系的一大优点. 当然，这一简单结果对 $G(\tau)$外的点未必成立.

固有坐标系有很多用处，例如可借它定义质点的 3 速和 3 加速.

定义1　设$\{t,x^i\}$是观者 G 的固有坐标系，质点的世界线(至少一段 L)位于 G 的固有坐标域内，则 L 在点 $p\in L$ 相对于观者 G 的 3 **速** u^a 和 **3 加速** a^a 依次定义为

$$u^a:=[\mathrm{d}x^i(t)/\mathrm{d}t]\ (\partial/\partial x^i)^a\ , \tag{7-4-2}$$

$$a^a:=[\mathrm{d}^2x^i(t)/\mathrm{d}t^2]\ (\partial/\partial x^i)^a\ , \tag{7-4-3}$$

其中 $x^i(t)$ 是 L 在固有坐标系中以 t 为参数的参数式.

注 1　若 p 是 L 与 G 线的交点，则仿照式(6-3-28)，L 在 p 点的 3 速又可定义为

$$u^a:=h^a{}_bU^b/\gamma\ , \tag{7-4-4}$$

其中 U^a 为 L 的 4 速，$\gamma\equiv -Z^aU_a$, $h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_aZ_b$, $h^a{}_b\equiv g^{ac}h_{cb}$. 下面证明式(7-4-4)同式(7-4-2)等价. 设 τ_L 是质点 L 的固有时，则质点在 p 点的 4 速 $U^a=(\partial/\partial\tau_L)^a$ 可用固有坐标基展开为

$$U^a=(\partial/\partial t)^a\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau_L+(\partial/\partial x^i)^a\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau_L\ ,$$

上式中的 $(\partial/\partial t)^a$ 就是 Z^a，其空间投影为零；$(\partial/\partial x^i)^a$ 与 Z^a 正交，其投影等于自身，故

$$h^a{}_bU^b=(\partial/\partial x^i)^a\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau_L\ . \tag{7-4-5}$$

借固有坐标系又可求得 $\gamma\equiv -Z^aU_a$ 的另一表达式：

$$\gamma=-g_{ab}Z^aU^b|_p=-g_{\mu\nu}Z^\mu U^\nu|_p=-\eta_{\mu\nu}(\partial/\partial t)^\mu U^\nu|_p$$
$$=-\eta_{00}(\partial/\partial t)^0U^0|_p=U^0|_p=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau_L|_p\ , \tag{7-4-6}$$

其中第三步用到命题 7-4-1. 由式(7-4-5)、(7-4-6)得 $h^a{}_bU^b/\gamma=(\partial/\partial x^i)^a\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ ，可见式(7-4-4)和(7-4-2)等价.

上面定义的3加速有助于加深对牛顿力学的惯性力和科氏力(及其在闵氏时空和弯曲时空的推广)的理解. 根据牛顿力学，非惯性观者 G 在观测质点运动时，牛

顿第二律并不成立. 为了形式地保持这一定律, 人们引入假想力(fictitious force)的概念. 设 G 相对于某惯性系的 3 加速为 $\hat{\vec{a}}$ (加 ^ 代表观者的 3 加速, 以区别于被观测质点的 3 加速 $\vec{a}$.), 在他观测时, 若认为任一被观测质点 L 都受到一个假想的惯性力 $-m\hat{\vec{a}}$ (其中 m 为该质点的质量), 则考虑惯性力 $-m\hat{\vec{a}}$ 后自由质点的运动方程为 $-m\hat{\vec{a}}=m\vec{a}$, 因而 L 相对于 G 的 3 加速为 $\vec{a}=-\hat{\vec{a}}$. 这可称为 L 相对于 G 的惯性加速度, 乘以 m 就是惯性力(约定观者与被观测质点的世界线有交, 观者在交点处观测.). 当 G 还有转动时, 为使牛顿第二定律形式成立所必须引进的假想力除惯性力外还有科氏力. 但"观者有转动"一词有时会引起混淆, 有必要做细致一些的讨论. 考虑一个绕自身轴转动的刚性大圆盘, 盘边放有转椅, 底座固定在盘上(但椅子可绕固定在底座上的转轴旋转). 转椅中的观者将由于盘的转动而做圆周运动(世界线是螺旋线), 这是轨道运动的特例. 此外, 观者当然还可以利用转椅做自身的转动(与世界线形状无关, 由观者固联的正交归一标架沿世界线的移动情况描述.). 观者既然已被视为质点, 而质点的运动不能像刚体那样分为转动和平动, "转盘观者的轨道运动是圆周运动"其实就是最确切的提法. 然而日常生活中常把质点的圆周运动也称为转动, 这就易与标架的转动混淆. 偏偏分清轨道运动和标架转动又是分清惯性力和科氏力的关键, 因此我们把观者因圆盘转动所造成的圆周运动(轨道运动的特例)同观者利用转椅实现的标架转动分别称为**公转**和**自转**. 这同把地球绕日的圆周运动(这时地球视为质点)称为公转而把地球(这时视为刚体)绕地轴的转动称为自转的做法有些类似. 当然, 在观者的世界线不是螺旋线时, 公转一词就远不如轨道运动一词贴切. 下面将看到, 惯性力和科氏力分别起源于观者的轨道运动和自转. 现在以任意时空为背景做定量讨论, 其中对闵氏时空所得结论在低速近似下同牛顿力学一致. 为简单起见, 只讨论任意观者 G 对自由质点 L 的观测. 虽然 L 为自由质点, 但观者 G 的任意性(包括世界线的非测地性和正交归一空间 3 标架的非费移性)使他测得 L 有惯性加速度和科氏加速度[在牛顿力学中惯性(科氏)力等于惯性(科氏)加速度乘以 L 的质量], 请看如下命题.

命题 7-4-2 设观者 G 的 4 加速为 $\hat{A}^a$, 自转角速度(即其标架转动的角速度)为 ω^a , 被观测的自由质点 L 与 G 的世界线交于 p 点, L 在 p 点相对于 G 的 3 速为 u^a, 则 L 在 p 点相对于 G 的 3 加速为

$$a^a\equiv(\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2)(e_i)^a=-\hat{A}^a-2\varepsilon^a{}_{bc}\omega^b u^c+2(\hat{A}_b u^b)u^a\,, \tag{7-4-7}$$

其中 $(e_i)^a$ 是观者在 p 点的正交归一空间 3 标架, $\hat{\varepsilon}_{abc}\equiv Z^d\varepsilon_{dabc}$, Z^d 是 G 在 p 点的 4 速, ε_{abcd} 是与时空度规 g_{ab} 相适配的体元.

证明 见选读 7-4-1. □

下面对式(7-4-7)右边各项的物理意义做一讨论. 若 G 为自由下落无自转观者

(对闵氏时空就是惯性观者)，即 $\hat{A}^a = 0$ ，$\omega^a = 0$ ，则由式(7-4-7)可知 L 对 G 的 3 加速 $a^a = 0$. 以闵氏时空为例，这无非表明两个惯性运动质点之间只有相对速度而无相对加速度这一简单事实. 反之，若 G 不是自由下落无自转观者，则有以下三种可能：

(a) G 的世界线不是测地线($\hat{A}^a \neq 0$)，但仍是无自转观者($\omega^a = 0$ ，即其标架场沿世界线费移.). 式(7-4-7)此时成为

$$a^a = -\hat{A}^a + 2(\hat{A}_b u^b)u^a . \tag{7-4-8}$$

以 $\hat{A}$ 和 u 分别代表空间矢量 $\hat{A}^a$ 和 u^a 的长度，θ 代表两者的夹角，则上式右边第二项的长度为 $2\hat{A}u^2\cos\theta \leqslant 2\hat{A}u^2$ ，故在非相对论近似 $u \ll 1$ 下第二项可忽略. 对闵氏时空，设 $G_{\rm I}$ 是 G 在 p 点瞬时静止的惯性观者(见图 7-5)，$\hat{a}^a$ 是 G 相对于 $G_{\rm I}$ 的 3 加速，则由命题 6-3-6 可知 $\hat{a}^a = \hat{A}^a$. 因为 $-\hat{a}^a$ 在牛顿力学中正是非惯性观者 G 观测质点运动时所应添补的惯性加速度，所以式(7-4-8)右边第一项 $-\hat{A}^a$ 可解释为惯性加速度，第二项则为对惯性加速度的相对论修正项(在牛顿近似 $u \ll 1$ 下为零). 对弯曲时空，可以证明，(留作习题，要用到引理 7-4-3.) 只要把 $G_{\rm I}$ 理解为 G 在 p 点相对静止的自由下落观者，则仍有 $\hat{a}^a = \hat{A}^a$ ($\hat{a}^a$ 是 G 相对于 $G_{\rm I}$ 的 3 加速)，故式(7-4-8)右边第一、二项仍可分别解释为惯性加速度及对它的修正项. 总之，惯性加速度是由观者 G 的 4 加速 $\hat{A}^a$ (取决于其轨道运动)导致的.

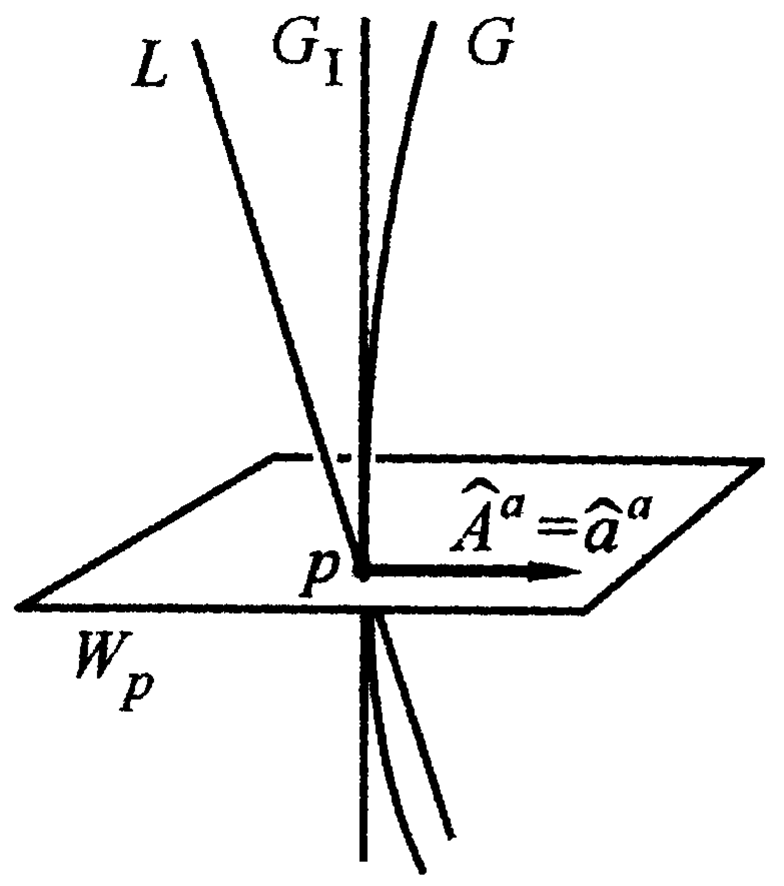


图 7-5　G 相对于瞬时静止惯性观者 $G_{\rm I}$ 的 3 加速 $\hat{a}$ 等于 G 自己的 4 加速 $\hat{A}^a$

(b) G 的世界线是测地线($\hat{A}^a = 0$)，但 G 有自转($\omega^a \neq 0$)，例如固结于自由下落飞船地板上的转椅中转动着的观者. 这时式(7-4-7)成为

$$a^a = -2\varepsilon^a{}_{bc}\omega^b u^c = 2\vec{u} \times \vec{\omega} . \tag{7-4-9}$$

自由质点 L 相对于观者 G 的这一 3 加速完全来自观者的自转($\omega^a \neq 0$)，上式右边与牛顿力学的科氏加速度表达式一样，故在弯曲时空中也称为科氏加速度. 这清楚地表明惯性加速度和科氏加速度的区别：前者源于观者的非测地运动；后者来自观者的自转. 在转盘的情况下，不少力学教材默认转盘观者由于公转而必有相应的自转，并把科氏力归因于观者的公转. 其实转盘观者的自转和公转原则上是独立的. 设观者手执回转仪坐在底座固结于盘边的转椅中，就可适当调节(“转动”)转椅使自己永远面向回转仪轴所指方向，于是在随盘公转的同时是无自转的，他观测质点时将只有惯性加速度而无科氏加速度!

(c) G 的世界线为非测地线($\hat{A}^a \neq 0$)且有自转($\omega^a \neq 0$)，他观测自由质点时将既有惯性加速度又有科氏加速度.

许多作者把科氏力也作为惯性力的一种，这无非是名称问题，并无不可. 不过，为了突出观者轨道运动和自转运动的区别，笔者更偏爱另一些作者[如 Misner et al.(1973)]所用的名称，即把观者因轨道运动和自转引起的假想力分别叫做惯性力和科氏力.

[选读 7-4-1]

为证明命题 7-4-2，先证明以下引理.

引理 7-4-3 时空度规 g_{ab} 在 $G(\tau)$的固有坐标系的克氏符在 $G(\tau)$上取如下简单形式：

$$\Gamma^0{}_{00}=\Gamma^\sigma{}_{ij}=0\,,\qquad \Gamma^0{}_{0i}=\Gamma^0{}_{i0}=\Gamma^i{}_{00}=\hat{A}_i\,,$$
$$\Gamma^i{}_{0j}=\Gamma^i{}_{j0}=-\omega^k\varepsilon_{0kij}\,,\qquad \sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3. \tag{7-4-10}$$

其中 $\hat{A}^a$ 和 ω^a 分别是观者 G 的 4 加速和空间转动角速度，ε_{0kij} 是与 g_{ab} 适配的体元在固有坐标系的分量.

证明 因为观者 G 的正交归一 3 标架$\{(e_i)^a\}$以角速度 ω^a 做空间转动，由§7.3知

$$(e_0)^b\nabla_b(e_\mu)^a=\mathrm{D}(e_\mu)^a/\mathrm{d}\tau=-\Omega^{ab}(e_\mu)_b\,,\qquad \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3\,, \tag{7-4-11}$$

其中

$$\Omega_{ab}=\hat{A}_a\wedge Z_b+\varepsilon_{abc}\omega^c\,. \tag{7-4-12}$$

由式(5-7-2)知克氏符满足下式：

$$(\partial/\partial x^\nu)^b\nabla_b(\partial/\partial x^\mu)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(\partial/\partial x^\sigma)^a\,, \tag{7-4-13}$$

其中$\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$是克氏符 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 所在坐标系的坐标基. 现在涉及的是 $G(\tau)$的固有坐标系，而固有坐标基在 $G(\tau)$上与正交归一标架一致，故式(7-4-13)在 $G(\tau)$上又可表为

$$(e_0)^b\nabla_b(e_\mu)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu0}(e_\sigma)^a\,, \tag{7-4-14}$$

对比式(7-4-11)和(7-4-14)得 $\Gamma^\sigma{}_{\mu0}(e_\sigma)^a=-\Omega^a{}_b(e_\mu)^b=-\Omega^\sigma{}_\mu(e_\sigma)^a$，因此

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu0}=-\Omega^\sigma{}_\mu\,,\qquad \sigma,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

把式(7-4-12)改写为分量形式，则上式成为

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu0}=-\ (\hat{A}^\sigma Z_\mu-Z^\sigma\hat{A}_\mu+Z_\alpha\omega_\rho\varepsilon^{\alpha\rho\sigma}{}_\mu)=-(\hat{A}^\sigma Z_\mu-Z^\sigma\hat{A}_\mu-\omega_\rho\varepsilon^{0\rho\sigma}{}_\mu)\,,$$

其中最末一步用到 $Z_i=0$, $Z_0=-1$. 再用上 $Z^0=1$，$\hat{A}^0=0=\hat{A}_0$，便得

$$\Gamma^0{}_{00}=-(\hat{A}^0Z_0-Z^0\hat{A}_0-\omega_\rho\varepsilon^{0\rho0}{}_0)=0\,,$$
$$\Gamma^0{}_{i0}=-(\hat{A}^0Z_i-Z^0\hat{A}_i-\omega_\rho\varepsilon^{0\rho0}{}_i)=\hat{A}_i\,,$$
$$\Gamma^i{}_{00}=-(\hat{A}^iZ_0-Z^i\hat{A}_0-\omega_\rho\varepsilon^{0\rho i}{}_0)=\hat{A}_i\,,$$

$$\Gamma^i{}_{j0} = -(\hat{A}^i Z_j - Z^i \hat{A}_j - \omega_\rho \varepsilon^{0\rho i}{}_j) = \omega_k \varepsilon^{0ki}{}_j = -\omega^k \varepsilon_{0kij}, \qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3.$$

最后证明 $\Gamma^\sigma{}_{ij}=0$. 设 $\mu(s)$ 是由 $p\in G$ 出发的类空测地线(s 为线长)，其在 p 的切矢 T^a 与 Z^a 正交，则沿 $\mu(s)$ 有

$$x^0 \equiv t = \tau_p = 常数, \qquad x^i = sT^i, \qquad T^i = 常数, \qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

于是 $\mathrm{d}^2x^\sigma/\mathrm{d}s^2=0$，$\sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3$. 故由测地线方程得

$$0=\frac{\mathrm{d}^2x^\sigma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}=\Gamma^\sigma{}_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}, \qquad \sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

即 $0=\Gamma^\sigma{}_{ij}T^iT^j\ (i=1,\ 2,\ 3)\ \forall$ 单位矢量 $T^a\in W_p$，从而 $0=\Gamma^\sigma{}_{ij}w^iw^j$，$\forall\ w^a\in W_p$. 于是在 p 点有 $\Gamma^\sigma{}_{ij}=0$，$i, j=1,\ 2,\ 3$；$\sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3$. 因 $p\in G$ 为任意，故此式对 $G(\tau)$上任一点成立. □

命题 7-4-2 证明　自由质点的世界线为测地线，它在 $G(\tau)$的固有坐标系的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau_L{}^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau_L}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau_L}=0\ , \tag{7-4-15}$$

其中测地线仿射参数 τ_L 是质点 L 的固有时. 选 $t\equiv x^0$ 为 L 的另一参数[$G(\tau)$的固有坐标系的坐标时]，并把 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau_L$ 记作 γ，则 $\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau_L}=\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_L}=\gamma\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau_L{}^2}=\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau_L}\right)=\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)=\gamma\left(\gamma\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right). \tag{7-4-16}$$

令上式中的 $\mu=i\ (=1,\ 2,\ 3)$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau_L{}^2}=\gamma\left(\gamma a^i+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}u^i\right). \tag{7-4-17}$$

令式(7-4-15)中的 $\mu=i$，把式(7-4-17)代入得

$$\gamma\left(\gamma a^i+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}u^i\right)+\Gamma^i{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}\gamma^2=0,$$

故

$$\begin{aligned} a^i &= -\gamma^{-1}u^i\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t-(\Gamma^i{}_{00}+2\Gamma^i{}_{0j}u^j+\Gamma^i{}_{jk}u^ju^k) \\ &= -\gamma^{-1}u^i\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t-(\hat{A}^i-2\omega^k\varepsilon_{0kij}u^j)=-\gamma^{-1}u^i\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t-\hat{A}^i-2\varepsilon^i{}_{jk}\omega^ju^k, \end{aligned} \tag{7-4-18}$$

其中第二步用到引理 7-4-3，第三步用到 $\varepsilon_{0kij}=\varepsilon_{kij}$. 为求得 $\gamma^{-1}\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$，令式(7-4-16)的 $\mu=0$，得 $\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}\tau_L{}^2=\gamma\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$. 再令式(7-4-15)的 $\mu=0$，得

$$0=\frac{d^2t}{d\tau_L{}^2}+\Gamma^0{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau_L}\frac{dx^\sigma}{d\tau_L}=\gamma\frac{d\gamma}{dt}+2\Gamma^0{}_{0i}\frac{dt}{dt}\frac{dx^i}{dt}\gamma^2=\gamma\frac{d\gamma}{dt}+2\hat{A}_iu^i\gamma^2\ ,$$

其中第二、三步都用到引理 7-4-3. 由上式得 $-\gamma^{-1}\dfrac{d\gamma}{dt}=2\hat{A}_bu^b$，代入式(7-4-18)并改写为抽象指标便得 $a^a=-\hat{A}^a-2\varepsilon^a{}_{bc}\omega^bu^c+2(\hat{A}_bu^b)u^a$. □

[选读 7-4-1 完]

§7.5　等效原理与局部惯性系

闵氏时空的任一惯性坐标系都是全局(整体)定义的(坐标域覆盖整个流形)，所以也叫整体惯性坐标系. 设$\{t, x, y, z\}$是整体惯性坐标系，$G(\tau)$是该系中的任一 t 坐标线，则$\{(\partial/\partial t)^a, (\partial/\partial x)^a, (\partial/\partial y)^a, (\partial/\partial z)^a\}$便是 G 上的一个无自转正交归一 4 标架场，这一坐标线连同这个 4 标架场便构成一个惯性观者，而$\{t, x, y, z\}$正是他的固有坐标系. 现在讨论上述概念在多大程度上可推广到弯曲时空. 首先，与闵氏时空惯性观者对应的自然是自由下落(世界线为测地线)的无自转观者. 为考察这种观者的观测结果，讨论著名的爱因斯坦电梯，设地面附近的电梯因缆绳断裂而自由下落，其内部的静止观者(自由下落无自转观者)便有失重感，这是牛顿力学就有的结果. 设他放开手中的苹果，将发现它不像通常那样离手下落，而是处于随遇平衡状态之中. 理由很简单：电梯观者 G 相对于惯性系(地球)有重力加速度 $\vec{g}$，是非惯性观者(这是按牛顿力学的观点，按广义相对论则恰相反.)，故他认为苹果受两个力，一是重力 $m_G\vec{g}$ (m_G 是苹果的引力质量)，二是惯性力 $-m_I\vec{g}$ (m_I 是苹果的惯性质量)，由于 $m_G=m_I$(这是关键)，合力为零，因此随遇平衡，或说处于失重状态. 假如他是个宇航员，将觉得这苹果与远离各星球(因而时空近似平直)的惯性飞船内的苹果有相同表现. 推而广之，由于 $m_G=m_I$，根据牛顿力学，爱因斯坦电梯内的一切(非引力的①)力学实验都与远离各星球的惯性飞船内的相应实验有相同结果. 这正是把 $m_G=m_I$ 叫做等效原理的理由.

在构思广义相对论的过程中，爱因斯坦又假设性地把这一原理从力学实验推广到一切物理实验，即假设自由下落电梯内的一切(非引力的)物理实验都与远离星球(平直时空)的惯性飞船内的相应实验结果一样，并由此推出光的引力红移、光在引力场中走曲线等结论. 后人把同 $m_G=m_I$ 相应的原理称为**弱等效原理**(weak equivalence principle，WEP.)，把爱因斯坦推广后的原理称为**爱因斯坦等效原理**(Einstein equivalence principle，EEP.). 下面从广义相对论的角度讨论这个原理.

---

① 非引力的实验是指实验室内的物体之间的引力相互作用可以忽略，但室内可存在由室外物体(如地球)产生的引力场.

命题 7-5-1　设 $G(\tau)$是弯曲时空的自由下落无自转观者(爱因斯坦电梯观者)，$g_{\mu\nu}$ 是度规 g_{ab} 在 $G(\tau)$的固有坐标系的分量，$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ 是与 g_{ab} 适配的导数算符 ∇_a 在该系的克氏符，则

$$g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu},\qquad \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|_p=0\quad(\sigma,\ \mu,\ \nu=0,1,2,3),\qquad \forall p\in G. \tag{7-5-1}$$

证明　$g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu}$ 是命题 7-4-1 的结论(对任何观者的固有坐标系都成立). 引理 7-4-3 在 $G(\tau)$为测地线且相应的观者无自转时给出 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|_p=0\,(\sigma,\ \mu,\ \nu=0,1,2,3)$.

□

以电磁现象为例讨论上述命题的应用. 按照最小替换法则(见§7.2)，麦氏方程和洛伦兹力公式在弯曲时空中的形式为

$$\nabla^a F_{ab}=-4\pi J_b\,,\qquad \nabla_{[a}F_{bc]}=0\quad 和\quad qF^a{}_bU^b=U^b\nabla_bP^a\,, \tag{7-5-2}$$

它们在任一坐标系[现在涉及的是 $G(\tau)$的固有坐标系]的形式则为

$$F^{\mu}{}_{\nu;\mu}=-4\pi J_\nu\,,\qquad F_{[\nu\sigma;\mu]}=0\quad 和\quad qF^{\mu}{}_{\nu}U^{\nu}=\mathrm{D}P^{\mu}/\mathrm{d}\tau. \tag{7-5-3}$$

由于固有坐标系有 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|_p=0\quad \forall p\in G$，上式在 G 线上可改写为

$$F^{\mu}{}_{\nu,\mu}=-4\pi J_\nu\,,\qquad F_{[\nu\sigma,\mu]}=0\qquad 和\quad qF^{\mu}{}_{\nu}U^{\nu}=\mathrm{d}P^{\mu}/\mathrm{d}\tau\,, \tag{7-5-4}$$

而这正是相应定律在闵氏时空整体惯性(洛伦兹)坐标系中的形式. 上述讨论可以推广至其他物理定律，可见自由下落无自转观者的固有坐标系与闵氏时空的整体惯性(洛伦兹)坐标系类似，因此被称为**局部惯性系**或**局部洛伦兹系** (local Lorentz system，local Lorentz frame). 人们常说：物理定律在局部洛伦兹坐标系的形式与它在闵氏时空洛伦兹坐标系的形式相同[Misner et al.(1973)P.207]，从而自由下落无自转观者 G 所做的一切物理实验与平直时空惯性观者的相应实验结果一样(等效). 这正是爱因斯坦等效原理所要求的结论. 不过上述提法不太准确，因为可以肯定的只是 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|_p=0,\ \ \forall p\in G$，只要偏离 $G(\tau)$，就无法保证 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=0$. 事实上，如果 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ 在 $G(\tau)$的一个邻域内竟然为零，则 $\forall p\in G$ 有

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}|_p=(-2\,\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu]\rho}+2\,\Gamma^{\lambda}{}_{\rho[\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu]\lambda})|_p=0\,,$$

即 $G(\tau)$线上各点曲率为零，与原来设定的讨论对象(弯曲时空)不符. 问题的实质是，选坐标系只能消除 $G(\tau)$线上的 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ 而不能消除其曲率(曲率与坐标系无关). 可见“物理定律在局部洛伦兹系的形式与它在闵氏时空洛伦兹系的形式相同”的说法对坐标域中除 $G(\tau)$线外的点未必成立. 然而，观者 G 做实验时偏偏往往要涉及自己世界线的一个“小”的时空邻域 U(例如电梯观者要涉及电梯，见图 7-6.)，于是问题变得不如此简单. 好在时空曲率的效应只有在足够的时空范围内才能有所显示(被实验测出)，只要实验涉及的时空邻域足够小(对电梯而言，只要其尺度

及下落时间足够小.)，实验结果便与平直时空的相应实验近似地不可区分[这同以下的简单例子类似：2 维球面上每点的 $R_{abc}{}^{d}$ 都不为零，但若只关心某点附近一小片球面 ΔS 的情况，就不妨用该点的切平面的一小部分 $\overline{\Delta S}$ 近似代替(见图 7-7). 例如，为测定地球两条经线在北极的夹角，不妨把每条经线的一小段看作直线.]. 在任意弯曲时空中，如果只关心某点的一个足够小的邻域，就可近似使用狭义相对论的物理定律.

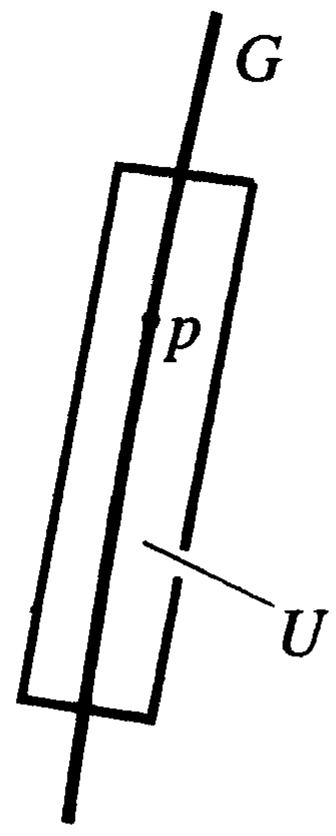


图 7-6　观者做实验时涉及的“小”时空邻域 U

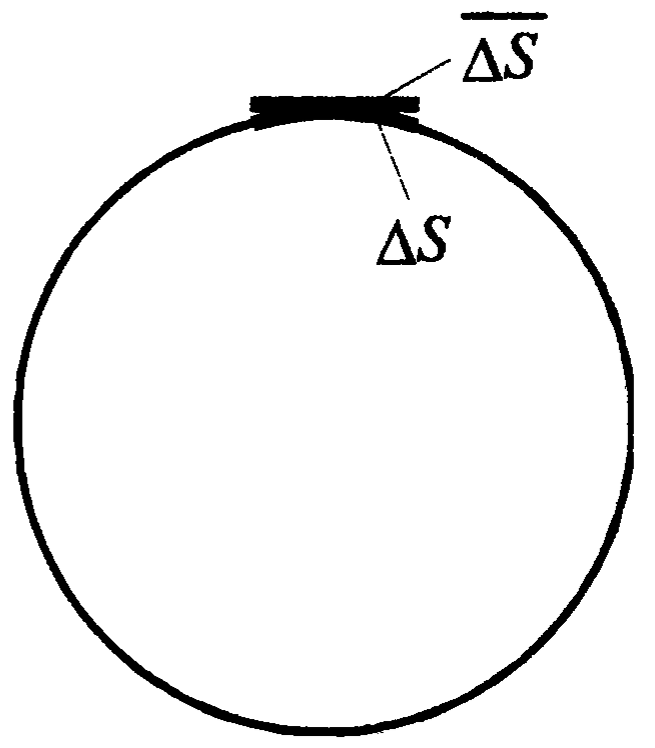


图 7-7　北极附近一小片球面 ΔS 可用切平面的一小部分 $\overline{\Delta S}$ 近似代替

自由下落无自转观者的固有坐标系是弯曲时空中非常类似于闵氏时空惯性坐标系的坐标系，因此叫局部洛伦兹系. 除此之外，在弯曲时空中，只要一个坐标系的克氏符在坐标域中某点 p 为零(即 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|_p=0$)，也可被称为 **$p$ 点的一个局部洛伦兹系**.

在牛顿力学中，设飞船在远离星体的空间中作匀加速运动，船内观者(加速观者)将看到离手的苹果在惯性力作用下做反向匀加速运动，就像在地球附近那样. 不难相信，船内的一切(非引力的)力学实验都与地面附近的对应实验结果近似相同，这可看作弱等效原理的另一表述. 据此，人们又常说“加速飞船内的宇航员发现自己置身于引力场中”，“加速度与引力场等效”. 对这两句话应有正确理解. 根据第一句话，初学者常提出这样的问题：既然加速飞船中的宇航员感到有引力，而引力就是时空曲率，船内宇航员岂非觉得自己置身于弯曲时空中？答案是否定的：因为早已约定飞船远离星体，它所在的时空必然近似平直，谁看都一样. 导致以上错误结论的关键在于推理过程中两次用到引力一词，而两次含义不同. 加速宇航员所感到的“引力”其实只是非真实的表观引力，它不由物质产生，不对应于时空弯曲，只因加速宇航员的感觉而得名.

关于等效原理的含义、地位和作用，不同学者有不同看法，其中对等效原理的作用的看法又因对其含义的理解的不同而不同. Misner 等认为“等效原理功能强大. 用它可把所有狭义相对论物理定律推广到弯曲时空.” [Misner et al.(1973) P.386]. 又说(P.207)“把经典力学带进量子力学的运载工具是对应原理. 类似地，

平直时空与弯曲时空之间的运载工具是等效原理.”而 Synge 对等效原理则持极端相反观点，他在书[Synge(1960)]的序言中写道：“我从未懂过这一原理.……它意味着引力场的效应与一个观者的加速度的效应不可分辨吗？如果这样，那是错的.在爱因斯坦理论中，要么存在一个引力场，要么不存在，取决于黎曼张量是否为零. 这是一个绝对的性质，与任何观者的世界线都毫无关系. 时空要么平直，要么弯曲，在本书的若干地方我都不得不煞费苦心地把由时空曲率导致的真实引力效应与那些由观者世界线的弯曲导致的效应区分开来(在多数通常情况下以后者为主). 等效原理在广义相对论的诞生过程中实质上起到接生婆的作用，……我建议我们以适当的荣誉埋葬掉这位接生婆而正视绝对时空这一事实.”对等效原理的这一看法也许偏激，但上引段子中的一些提法不失为防止误解的清醒剂. 例如，他关于分清由时空弯曲导致的真引力与平直时空中由于观者世界线的弯曲(非测地线)导致的表观(假)引力的警告就是十分必要的. 下面简述笔者对等效原理的肤浅认识. 第一，爱因斯坦等效原理是爱因斯坦在酝酿广义相对论的过程中对弱等效原理的假设性推广，对广义相对论的诞生起过重要的“接生婆”作用. 这是连 Synge 也同意的. 第二，§7.2 讲过，弯曲时空的物理定律必须遵守两个原则：(a)服从广义协变性原理；(b)当 g_{ab} 等于 η_{ab} 时能回到狭义相对论的相应定律. 这是本书和某些教材的提法. 更多的教材对原则(b)采用另一提法：(b′)服从爱因斯坦等效原理. 由(a)和(b′)可得到他们的最小替代法则：“把闵氏时空中洛伦兹坐标系的物理公式中的逗号改为分号(即把偏导数改为协变导数)便给出弯曲时空中局部洛伦兹系的相应物理公式.”可见用爱因斯坦等效原理(配以广义协变性原理)可从狭义相对论的物理定律得到广义相对论的相应定律，因此可以说它是“由狭义相对论通往广义相对论的桥梁”. 不过，如本书§7.2 那样不提等效原理而只提“当度规 g_{ab} 为 η_{ab} 时物理定律应回到狭义相对论的相应定律”(并配以广义协变性原理)也同样可得弯曲时空的物理定律(无论用这种提法还是用等效原理都可得到最小替代法则①). 而一旦接受了这些定律(从而建立了广义相对论)，讨论问题时原则上就可以完全不用等效原理(虽然许多作者在讨论许多问题时喜欢用等效原理). 因此，从这个角度来看，“埋葬掉接生婆”对广义相对论似无影响. 第三，对于某些较为复杂的情况(例如弯曲时空中走测地线的带电粒子有无电磁辐射)，“等效原理是否被违反”是长期以来有争论的问题. 笔者认为关键在于“等效原理”在这些情况下的准确含义尚待澄清(另一关键问题则是辐射的定义). 在这个意义上，Synge 说“我从未懂过这一原理”也许未必过分. 第四，除广义相对论外，还存

---

① 然而这一法则在遇到两个导数算符相继作用时出现算符排序的含糊性，为克服这一问题还须借用其他考虑(见§7.2). 因此等效原理“可把所有狭义相对论物理定律推广到弯曲时空”的提法似乎过强. Misner 等对此还有专门讨论[Misner et al.(1973)P.390，391].

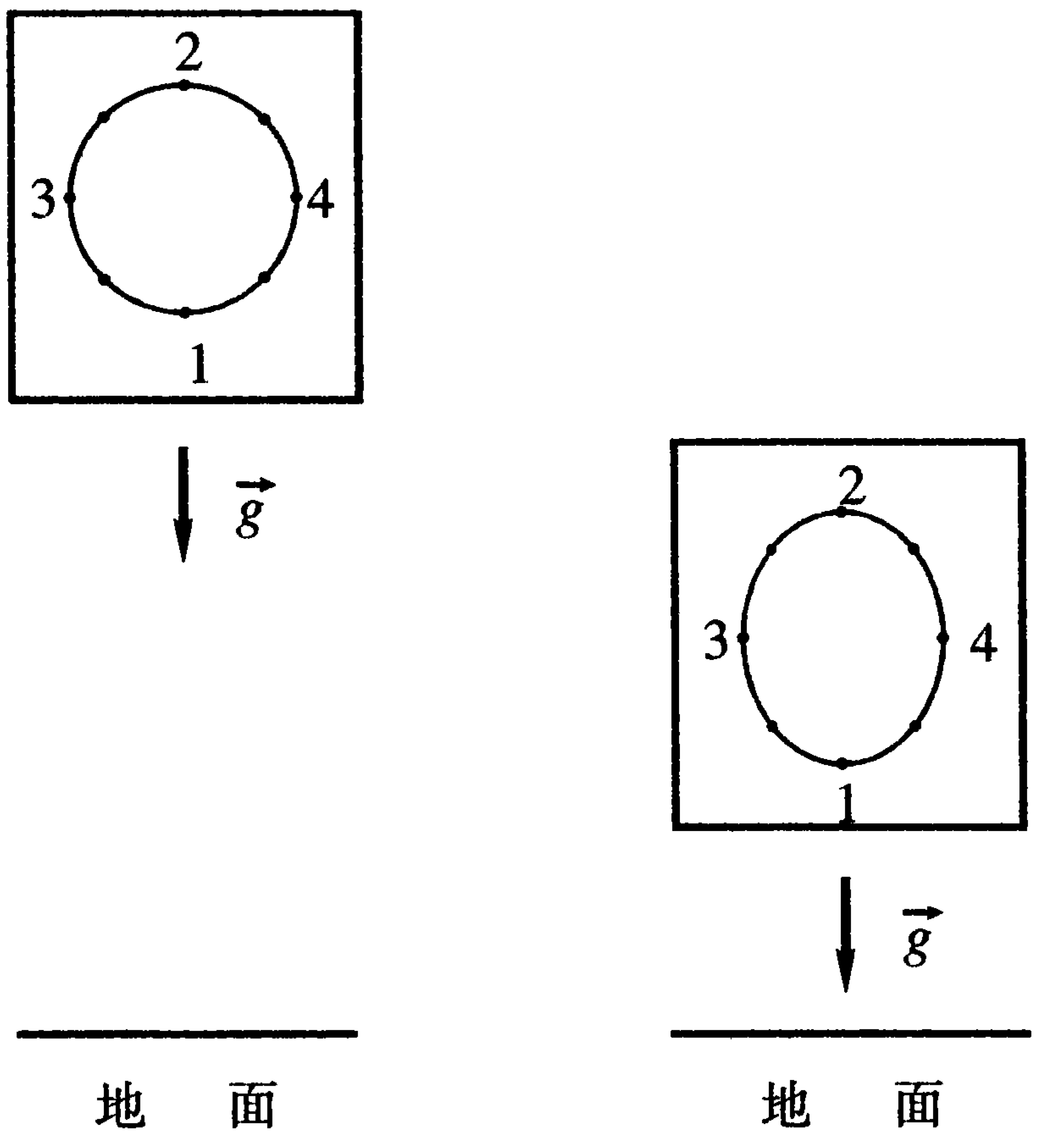
在许许多多互不相同的引力理论[详见 Will(1993)]. 所有引力理论可以分为两大类，即度规理论(要求时空具有度规，自由质点的世界线是该度规的测地线，……) 和非度规理论. 广义相对论是当然的度规理论. 还有一种著名的、很有竞争力的度规理论叫 Brans-Dicke 理论，其中描述引力的量除度规场 g_{ab} 外还有标量场 ϕ. 此外还有其他度规理论. 判断哪个引力理论是正确理论的标准当然是实验. 为此需要一个关于引力实验的理论. Dicke 从 20 世纪 60 年代开始从事这种理论的研究，他的开创性成果使人们对等效原理及其意义的理解逐渐加深，并终于意识到应把等效原理摆在考察引力理论(而不只是限于广义相对论)的基础这一重要位置上. 等效原理可分为三个层次，即弱等效原理(WEP)、爱因斯坦等效原理(EEP)和强等效原理(strong equivalence principle, SEP), SEP 与 EEP 的区别在于: EEP(及 WEP)只考虑系统(如电梯)所处的外引力场而不考虑系统中的物体所激发的自引力场，即在引力上只考虑它们的被动方面而忽略其主动方面，而 SEP 则对主动、被动方面都做考虑，讨论对象是“自引力系统”，大到恒星的自引力，小到卡文迪许实验中两个铅球间的引力都在考虑之列. EEP 可以看作 SEP 在自引力可忽略情况下的特例. 这三个等效原理的实验检验对选择引力理论有重要意义. 任何引力理论都满足 WEP(因为有越来越精密的实验证实 WEP，无人愿意创造一个不满足 WEP 的引力理论.)，但对 EEP 和 SEP 则不然. 讨论表明[见 Will(1995)，Will (2001).]，如果 EEP 成立，则只有度规理论才可能正确. 这就表明，如果有越来越精密的实验证实 EEP，那么非度规理论就将越来越没有立锥之地. 进一步的讨论还表明[仍见 Will(1981)，Will(1995).]，广义相对论满足 SEP 而其他已知的度规理论(含 Brans-Dicke 理论)都不满足[可惜这一讨论还不等于完全严格的证明，因此上述结论至今仍被称为猜想(conjecture).]. 所以，如果有越来越精密的实验证实 SEP，那么广义相对论很可能就是唯一正确的引力理论. 可见对三个等效原理的实验检验有着非常重要的理论意义，这些实验正以越来越高的精度在进行中.

§7.6 潮汐力与测地偏离方程

命题 7-5-1 只证明了克氏符在自由下落无自转观者的固有坐标系的分量 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 在该观者世界线上为零. 只要偏离该世界线，$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 就可以非零. 为了看出第二句话的物理效应，我们介绍如下的假想实验. 在自由下落电梯内用 8 个小球摆成一个圆形花样(圆平面与地面垂直)，如图 7-8(a). 先用牛顿力学讨论. 设球 1，2 连线的延线正好过地球中心，开始时各球相对静止. 由于引力场强在球 1 处比在球 2 处略大，球 1 的重力加速度比球 2 的略大，于是两者间的距离渐增. 一段时间后的整个花样将变成如图 7-8(b)，不再是圆形. 设想球 1 是个观者，他将发现球 2

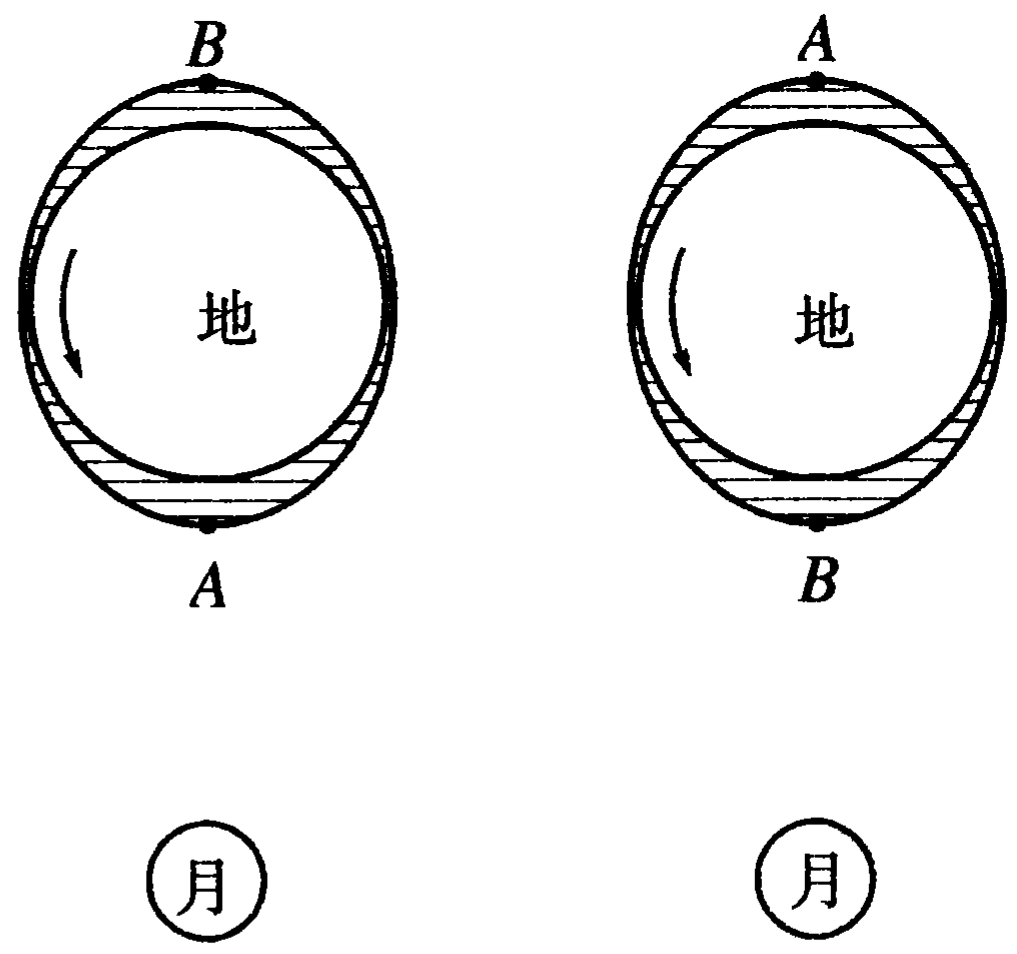
与他的距离随时间增大. 然而，如果无引力地区的惯性飞船内也有 8 个小球摆成圆形花样(而且开始时相对静止)，则球 1(作为观者)不会发现球 2 与他的距离有任何变化. 可见，即使就力学实验而言，电梯与飞船也并非完全等效.

以上是假想实验，但道理与此相类似的现象却可在日常生活中找到. 海水的潮汐现象就是一例. 下面是用牛顿力学对这一现象所做的简化分析，旨在突出本质. 潮汐现象的主要起因是月球，其次是太阳. 忽略太阳的影响可使问题简化而不影响对实质的理解. 地球，作为一个物体，处于月球的引力场中. 假定地球表面被一层海水所覆盖，考虑水面上的 A，B 两点，其连线经过地心. 设某一时刻 A 点离月球最近，则 B 点离月球最远，A，B 点受到的来自月球的引力有所不同，两点就要相互远离，于是 A，B 附近的海面向外鼓起[图 7-9(a)].[①] 随着地球的自转，A 点不再正对月球，海水高度降低. 地球自转半周后，A 点离月球最远[图 7-9(b)]，海水再次鼓起. 可见海水每天都有两次涨潮和退潮. 这种“潮汐现象”其实也不限于海水. 对地面附近自由下落的人来说，头顶和脚底与地心距离不同，也存在把人拉长的力(只考虑地球引力场)，不过这种“潮汐力”很小，不会造成感觉. 如果你在中子星表面自由下落，潮汐力可以大到 10^{11}N 的程度，你将被撕裂而丧生. 注：①中子星是一种主要由中子组成的、密度高达水密度的 10^{14} 倍(!)的星体，高密度导致表面引力场强的变化率奇大，见§9.3. ②按照估算，人体能经受的临界压力或拉力(超过此限则人体破裂)约为 10^7N/m^2.



(a)　　　　　　　　(b)

图 7-8　电梯内小球花样在自由下落中变形



(a)　　　　　　　　(b)

图 7-9　潮汐现象示意

以上讨论说明地球和月球引力场中的自由下落物体都受到潮汐力. 其实潮汐现象是引力场的普遍性质. 我们分别用牛顿引力论和广义相对论对潮汐现象做定

① 从地球观者看来，A 点鼓起的原因是两个力的合力：(a)月球引力，(b)地球绕地月共同质心做圆周运动导致的惯性离心力. 两力的合力叫生潮力(或起潮力).

量讨论.

先用牛顿引力论. 不失一般性，仍以地球附近的爱因斯坦电梯为例. 设电梯内处处放有小球(见图 7-10). 以 $\vec{r}(t)$ 和 $\vec{r}(t)+\vec{\lambda}(t)$ 分别代表两个紧邻小球 1 和 2 相对于笛卡儿系坐标原点 o 的位矢，则 $\vec{\lambda}(t)$ 是球 2 相对于 1 的位矢，故 $\mathrm{d}^2\vec{\lambda}/\mathrm{d}t^2$ 是球 2 相对于 1 的加速度(**潮汐加速度**). 为计算潮汐加速度，可借用引力势 ϕ 和牛顿第二定律写出

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2}=-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}},$$

及
$$\frac{\mathrm{d}^2(x^i+\lambda^i)}{\mathrm{d}t^2}=-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}+\vec{\lambda}}\cong-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}}-\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}}\lambda^j,$$

两式相减得

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda^i}{\mathrm{d}t^2}=-\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{\vec{r}}\lambda^j,\qquad i=1,\ 2,\ 3, \tag{7-6-1}$$

这就是牛顿引力论中潮汐加速度的表达式.

用式(7-6-1)可对图 7-8 中两球距离的变化做到心中有数. 取坐标系$\{x, y, z\}$使 z 轴竖直向上，则球 1，2 间的相对加速度的 z 分量为

$$\tilde{a}^z\equiv\frac{\mathrm{d}^2\lambda^z}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2}\lambda^z=-\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2}\lambda^z, \tag{7-6-2}$$

其中 r 是同地心的距离. 地球引力势 $\phi_\oplus=-GM_\oplus/r_\oplus$，故 $\tilde{a}^z=2GM_\oplus\lambda^z/r_\oplus{}^3$. 设两球初始距离 $\lambda^z=1\mathrm{m}$，以国际制数值 $G=6.67\times10^{-11}$，$M_\oplus=6\times10^{24}$ 及 $r_\oplus=6.37\times10^6$ 代入得 $\tilde{a}^z=0.31\times10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 设两球初始时相对静止，则两球距离在 $\Delta t=5\mathrm{s}$ 后的增量为

$$\Delta\lambda^z=\frac{1}{2}\tilde{a}^z(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\times0.31\times10^{-5}\times5^2\cong4\times10^{-5}\,\mathrm{m}. \tag{7-6-3}$$

下面再从广义相对论的角度考察潮汐现象. 我们将证明，潮汐效应起因于时空曲率，是时空内禀弯曲的必然表现. 仍以图 7-10 为例. 每一小球可看作一个自由下落观者，他们的世界线都是以固有时 τ 为仿射参数的类时测地线. 这些测地线构成时空中某个开域 U 上的一个**测地线汇**[①] (物理上对应于一个自由下落参考系)，测地线的切矢 $Z^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 是 U 上的一个类时矢量场. 令$\mu_0(s)$是一条光滑的**横向曲线**[②][横向是指$\mu_0(s)$上任一点的切矢都不与过该点的测地线相切]，则线汇中与$\mu_0(s)$相交的每一测地线 $\gamma(\tau)$ 可用 s 标志，即可记作 $\gamma_s(\tau)$，其中 s 是该测地线与

① U 内的一个线汇(congruence of curves)是一族曲线，对每一 $p\in U$ 有该族的唯一曲线经过.

② 还应满足某些要求(如非自相交).

$\mu_0(s)$交点的 s 值. 选择各$\gamma_s(\tau)$的固有时初始设定使每一$\gamma_s(\tau)$与$\mu_0(s)$交点的τ为零. 设ϕ_τ是矢量场Z^a对应的单参微分同胚(局部)群的一个元素，以$\mu_\tau(s)$代表曲线$\mu_0(s)$在ϕ_τ映射下的像(见图 7-11). 不同τ值的所有曲线$\mu_\tau(s)$铺成一个子集$\mathscr{S}$，其上每点由两个实数(坐标)τ和s确定，因此是个 2 维子流形. $\mathscr{S}$上的所有测地线构成测地线汇的一个子集，其中每条测地线可用参数 s 标记，所以也称为一个单参测地线族(线汇中的测地线充满时空中的 4 维开域 U，而这个单参测地线族只铺出一个 2 维面$\mathscr{S}$.). 总之,给定一条横向曲线$\mu_0(s)$就挑出了一个单参测地线族$\{\gamma_s(\tau)\}$. 令$\eta^a \equiv (\partial/\partial s)^a$，则$Z^a$和$\eta^a$便是$\mathscr{S}$上的坐标基矢场，因而对易：

$$0=[Z,\ \eta]^a = Z^b\nabla_b\eta^a - \eta^b\nabla_b Z^a\ , \tag{7-6-4}$$

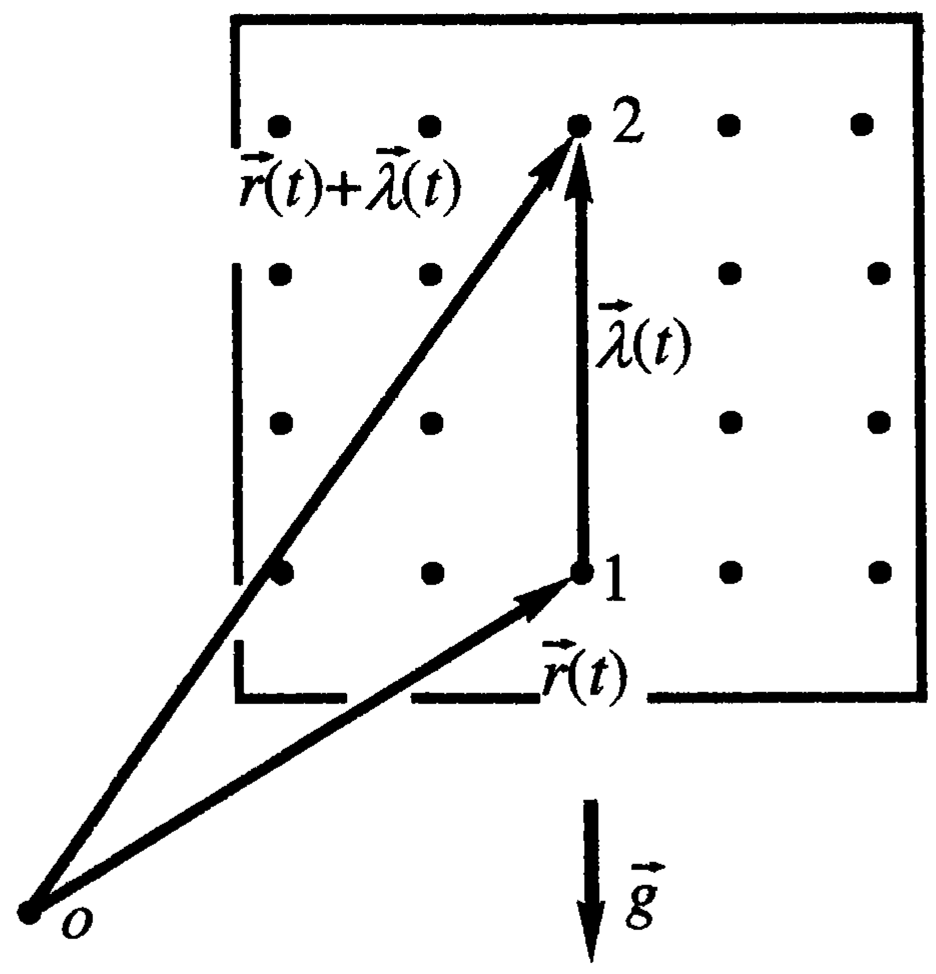


图 7-10　爱因斯坦电梯内处处放置的小球

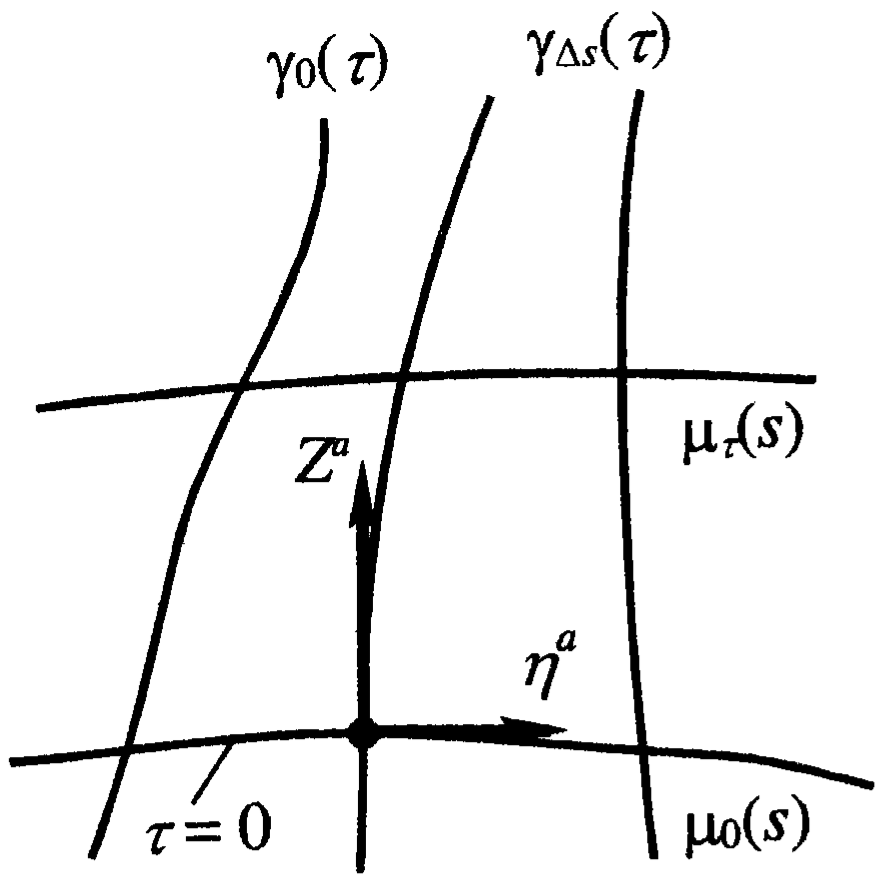


图 7-11　一条横向曲线挑出一个单参测地线族$\{\gamma_s(\tau)\}$，纸面代表该族铺出的 2 维面

其中∇_a可为任意导数算符. 选∇_a与时空度规适配，则

$$\begin{aligned} Z^b\nabla_b(\eta^a Z_a) &= \eta_a Z^b\nabla_b Z^a + Z_a Z^b\nabla_b\eta^a = Z_a Z^b\nabla_b\eta^a \\ &= Z_a\eta^b\nabla_b Z^a = \tfrac{1}{2}\eta^b\nabla_b(Z_a Z^a) = 0\ , \end{aligned} \tag{7-6-5}$$

其中第二步是因为 Z^a 是测地线的切矢，第三步用到式(7-6-4)，第五步用到 $Z_aZ^a=-1$对各点成立. 式(7-6-5)说明$\eta^a Z_a$沿任一测地线$\gamma_s(\tau)$为常数. 因此，只要开始时选$\mu_0(s)$使它与所有$\gamma_s(\tau)$正交(这总可做到)，则任一$\mu_\tau(s)$都与所有$\gamma_s(\tau)$正交. 这样选定后，$\mathscr{S}$上每点的η^a都可看作过该点的测地观者$\gamma_s(\tau)$的空间矢量，因此从现在起按本书习惯把η^a改记作 w^a. 设Δs为小量，则$\gamma_0(\tau)$和$\gamma_{\Delta s}(\tau)$可分别看作图 7-10 的球 1 和 2 的世界线. 把$\gamma_0(\tau)$称为**基准观者**(fiducial observer)，令$\lambda^a \equiv w^a\Delta s$，则$\lambda^a$可看作图 7-10 的$\vec{\lambda}$，即球 2 相对于基准观者(球 1)的位矢，于是$\tilde{u}^b \equiv Z^a\nabla_a\lambda^b$便可解释为球 2 相对于基准观者的 3 速[注意，它是球 1 世界线$\gamma_0(\tau)$上的空间矢量场，因$Z_b(Z^a\nabla_a\lambda^b) = Z^a\nabla_a(Z_b\lambda^b) - \lambda^b Z^a\nabla_a Z_b = 0$，其中第二步用到测地线方程$Z^a\nabla_a Z_b = 0$和$\lambda^b$的空间性(即$Z_b\lambda^b = 0$).]，类似地

$$\tilde{a}^c \equiv Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b \lambda^c)$$

可解释为球 2 相对于球 1 的 3 加速[亦为 $\gamma_0(\tau)$ 上的空间矢量场]. 考虑单参测地线族的第三条测地线 $\gamma_{\Delta\bar{s}}(\tau)$ （相当于图 7-10 中1，2 联线的延线上的某个邻近小球 $\bar{2}$），它相对于球 1 的位矢 $\bar{\lambda}^a$ 自然是 $\bar{\lambda}^a = w^a \Delta\bar{s}$，故它的潮汐加速度与球 2 的潮汐加速度之比是常数 $\Delta\bar{s}/\Delta s$. 于是索性甩开具体的球 2, $\bar{2}$, ⋯(甩开 λ^a)而径直用 w^a 定义适用于单参测地线族内与球 1 邻近的所有小球的普适量

$$u^b := Z^a \nabla_a w^b \tag{7-6-6}$$

和

$$a^c := Z^a \nabla_a u^c = Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b w^c), \tag{7-6-7}$$

u^b 和 a^c 都是基准观者 $\gamma_0(\tau)$ 上的空间矢量场. 实际上，w^a 起着该族的位矢的量度单位的作用：族内任一 $\gamma_{\Delta s}(\tau)$ 的位矢等于 w^a 乘以 Δs. 文献中对 w^a 的称谓不很统一，本书称之为**分离矢量**(separation vector)，同 Misner et al.(1973)及 Hawking and Ellis (1973)一致. 类似地，u^b 和 a^c 也起着该族的 3 速和 3 加速的量度单位的作用，分别称为球 1 测得的 **3 速**和 **3 加速(潮汐加速度)**. 指定一个单参测地线族以及族内一条基准测地线 $\gamma_0(\tau)$，就有确定的 3 速场 u^b 和 3 加速场 a^c. 我们的任务是揭示 a^c 与时空曲率的密切联系，请看如下命题：

命题 7-6-1 任一单参类时测地线族内任一基准测地线 $\gamma_0(\tau)$ 测得的潮汐加速度与时空的曲率张量有如下关系[称为**测地偏离方程**(geodesic deviation equation)]：

$$a^c = -R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d. \tag{7-6-8}$$

证明

$$a^c = Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b w^c) = Z^a \nabla_a (w^b \nabla_b Z^c) = w^b Z^a \nabla_a \nabla_b Z^c + (Z^a \nabla_a w^b) \nabla_b Z^c = p^c + q^c,$$

$$[\text{第二步用到式(7-6-4)，即}\ [Z,\ w]^b = 0\,.] \tag{7-6-9}$$

其中 $p^c \equiv w^b Z^a \nabla_a \nabla_b Z^c, \quad q^c \equiv (Z^a \nabla_a w^b) \nabla_b Z^c$，

而

$$p^c = w^b Z^a \nabla_b \nabla_a Z^c - w^b Z^a R_{abd}{}^c Z^d = w^b \nabla_b (Z^a \nabla_a Z^c) - (w^b \nabla_b Z^a) \nabla_a Z^c$$
$$- R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d = -(Z^b \nabla_b w^a) \nabla_a Z^c - R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d = -q^c - R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d,$$

其中第三步用到测地线方程及式(7-6-4). 上式代入式(7-6-9)便得式(7-6-8). □

下面对测地偏离方程再做四点说明.

(1) 测地偏离(deviation)方程(7-6-8)是描写两条相邻(“无限邻近”)测地线的相对加速度 a^c 的方程，而 a^c 是描写两线分离情况(separation)的分离矢量 w^a 的 2 阶导数. 两线之间当然有所分离($w^a \neq 0$)，分离矢量还可能不断变化($u^a \neq 0$)，但未

必有偏离(a^c 未必非零).[①]

(2) 式(7-6-8)反映 a^c 与时空曲率张量 $R_{abc}{}^d$ 的密切联系：对平直时空($R_{abc}{}^d=0$)，a^c 必定为零，因此初始平行的测地线永保平行[仍见(1)后的脚注]. 然而，只要 $R_{abc}{}^d\neq 0$，就存在这样的单参测地线族，其测地偏离(由 a^c 表征)非零，这可以解释为初始平行的测地线后来变得不再平行. “初始平行”的准确含义是 $u^b|_{\tau=0}\equiv Z^a\nabla_a w^b|_{\tau=0}=0$，因为此式表明两邻近测地线开始时($\tau=0$)相对 3 速(借用 u^b 对类时测地线族的物理意义)为零，因而“初始平行”. 然而，只要 $a^c|_{\tau=0}\equiv Z^b\nabla_b u^c|_{\tau=0}\neq 0$，一段时间后 u^b 不再为零，即两线“不再平行”. 正如§3.5 所说的，曲率张量非零的一个等价表述就是存在初始平行后来不平行的测地线.

(3) 克氏符 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 依赖于坐标系，选择自由下落无自转观者的固有坐标系可使克氏符在观者世界线上为零(见命题 7-5-1)，由此可解释爱因斯坦电梯观者的失重感. 然而，潮汐加速度 a^c 与黎曼张量 $R_{abc}{}^d$ 直接相联[式(7-6-8)]，作为张量，后者不可能通过选择坐标系而变为零，因此潮汐加速度不能通过坐标变换消除，爱因斯坦电梯观者虽然感觉不到引力(他所在处的“引力场强”为零)，却仍然感觉到潮汐力，这就是从广义相对论角度对图 7-8 的解释. 另一方面，式(7-6-3)的 $\Delta\lambda^z$ 如此之小，至少从一个侧面验证了前面关于“时空曲率效应只有在足够的时空范围内才可有所显示”的说法.

(4) 前面集中注意于类时测地线族，把仿射参数明确选为固有时，把 $\mu_\tau(s)$ 选得与测地线正交，无非是为突出 a^c 是潮汐加速度这一物理意义(更好地与图 7-10 对应). 从纯数学角度讲，测地偏离方程(7-6-8)对类空和类光测地线族也成立，只须把 τ 理解为测地线的仿射参数. 这时 a^c 不再有潮汐加速度的物理解释，分离矢量 η^a 也不一定要选得与 Z^a 正交. 其实测地偏离方程对非洛伦兹号差的度规也成立. 更有甚者，一个没有度规的流形只要有导数算符就可谈及测地线，虽然这时谈正交根本没有意义，但照样有测地偏离方程，即下述命题成立：

命题 7-6-1′ (M,∇_a) 中任一单参测地线族 $\{\gamma_s(\lambda)\}$ 的测地偏离方程为

$$a^c=-R_{abd}{}^cT^a\eta^bT^d\,, \tag{7-6-8′}$$

其中 $R_{abd}{}^c$ 是黎曼张量，$T^a\equiv(\partial/\partial\lambda)^a$ 是基准测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 的切矢，η^a 是 $\gamma_0(\lambda)$ 上的分离矢量(定义如前)，$a^c\equiv T^a\nabla_a(T^b\nabla_b\eta^c)$.

证明 与命题 7-6-1 的证明一样. □

① 平直时空中存在这样的测地线族，其中基准测地线 $\gamma_0(\tau)$ 上有 $u^b=0$ 和 $a^c=0$ (平行测地线族就如此). 平直时空中也存在这样的测地线族，其 $\gamma_0(\tau)$ 上有 $u^b\neq 0$ [让 $\gamma_0(\tau)$ 附近的测地线与 $\gamma_0(\tau)$ 不平行就可做到]. 然而不存在这样的测地线族，其 $\gamma_0(\tau)$ 上有 $a^c\neq 0$，除非时空不平直.

[选读 7-6-1]

式(7-6-8)的潮汐加速度 a^c 是用 w^a 定义的[式(7-6-7)]. 为了与牛顿引力论对应，我们曾引入 $\lambda^a \equiv w^a \Delta s$，并认为它对应于图 7-10 的相对位矢 $\vec{\lambda}$. 为什么 λ^a 可被解释为球 2 相对于球 1 的位矢? 设 p, q 是平直空间中任意两点，w'^a 是 p, q 间的直线在 p 点的单位切矢，$\Delta s'$ 是两点间的直线长，则 $\lambda^a \equiv w'^a \Delta s'$ 可称为 q 相对于 p 的位矢(注意 $|\lambda^a| = \Delta s'$). 回到弯曲空间的测地偏离问题. 取横向曲线族中的任一条 $\mu_\tau(s)$，令 $p \equiv \mu_\tau(0)$，$q \equiv \mu_\tau(\Delta s)$ (p, q 两点分别是基准观者和被测质点在 τ 时刻的表现). 用线长 s' 对 $\mu_\tau(s)$ 重参数化，即 $\mu'_\tau(s') = \mu_\tau(s)$，以 w^a 和 w'^a 分别代表 $\mu_\tau(s)$ 和 $\mu'_\tau(s')$ 在 p 点的切矢，则 $w'^a = w^a \mathrm{d}s/\mathrm{d}s'$，故若令 $\lambda^a \equiv w^a \Delta s$，则当 Δs 很小时有 $\lambda^a \equiv w^a \Delta s = w'^a \Delta s'$. 注意到 $|w'^a| = 1$，便知 $|\lambda^a| = \Delta s'$，与平直空间的位矢对照，不妨说 λ^a 是球 2 相对于球 1 的位矢. 在正文的处理中不必引入线长参数 s'，因而也没有 w'^a，只须关心长度随 τ 而变的 w^a (请注意 Δs 不随 τ 而变)，球 1，2 之间的"距离"变化完全体现在 $|w^a|$ 随 τ 的变化中，用 $\lambda^a \equiv w^a \Delta s$ 定义相对 3 速和相对 3 加速与图 7-10 对应得很好. **[选读 7-6-1 完]**

[选读 7-6-2]

如果给每一 $\gamma_s(\tau)$ 的 τ 加上一个与 s 有关的常数，$\mu_\tau(s)$ 就变得与测地线不正交，可见 η^a 同 Z^a 正交与否取决于各测地线固有时的零点设定. 进一步说，如果用任意仿射参数 τ' 代替固有时 τ，情况又如何? 因为 τ 是仿射参数，由定理 3-3-3 可知 τ' 是仿射参数当且仅当 $\tau' = \alpha\tau + \beta$. α, β 在每条测地线上当然应是常数(且 $\alpha \neq 0$)，但对不同测地线可以不同，即 α 和 β 可为 s 的函数: $\tau' = \alpha(s)\tau + \beta(s)$. 仿射参数的这一改变可看作 2 维流形 $\mathscr{S}$ 上的一个坐标变换 $\{\tau, s\} \mapsto \{\tau', s'\}$，其中

$$s' = s, \qquad \tau' = \alpha(s)\tau + \beta(s). \tag{7-6-10}$$

以 Z'^a 和 η'^a 代表新的坐标基矢，即 $Z'^a \equiv (\partial/\partial\tau')^a, \eta'^a \equiv (\partial/\partial s')^a$，则不难证明

$$Z'^a = \alpha^{-1} Z^a, \qquad \eta'^a = \eta^a + \nu Z'^a, \tag{7-6-11}$$

其中 $\nu(\tau, s) \equiv -(\tau \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}s + \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}s)$ 可看作 $\mathscr{S}$ 上的函数. 因为我们只关心基准测地线 $\gamma_0(\tau')$ 与其邻近测地线 $\gamma_{\Delta s}(\tau')$ 的分离情况，所以 η'^a 和 η^a 可看作描述同一分离的矢量. 就是说，如果分离矢量 η'^a 和 η^a 只差 Z'^a 的一个倍数，它们就描述同一分离. 可见分离矢量的选择存在"规范任意性". 如果坚持用固有时，但允许各测地线有完全任意的零点设定，就相当于式(7-6-10)中的 $\alpha = 1$ 而 $\beta(s)$ 任意. 这时 $Z'^a = Z^a$，$\eta'^a = \eta^a + \nu Z^a$，$\nu = -\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}s$. 式(7-6-8)可表为

$$a'^c = -R_{abd}{}^c Z'^a \eta'^b Z'^d = -R_{abd}{}^c Z^a (\eta^b + \nu Z^b) Z^d = a^c,$$

(其中用到 $R_{abd}{}^c Z^a Z^b Z^d = R_{[ab]d}{}^c Z^{(a} Z^{b)} Z^d = 0$.) 可见零点设定不影响 a^c 的值. 然

而，如果不坚持用固有时，即允许 α 不为 1，则只能做到

$$a'^c = -R_{abd}{}^c Z'^a \eta'^b Z'^d = \alpha^{-2} a^c .$$

这是自然的，因为用 τ' 代替固有时 τ 相当于用“坐标钟”代替标准钟，该坐标钟的走时率是标准钟的 α^{-1} 倍，用该钟测得的“潮汐加速度”与用标准钟的测量结果自然差 α^{-2} 倍.

[选读 7-6-2 完]

[选读 7-6-3]

测地偏离方程(7-6-8′)的一个解 η^b 称为所论测地线 $\gamma(\lambda)$ 上的一个**雅可比场**(Jacobi field). 不同的两点 $p, q \in \gamma(\lambda)$ 称为**共轭的**(conjugate)，若 $\gamma(\lambda)$ 上存在一个不恒为零的雅可比场 η^b，它在 p 和 q 点为零. 这时也说 p，q 为测地线 $\gamma(\lambda)$ 上的一对**共轭点**(conjugate points). 例如，图 7-13 所示的 2 维球面上的南、北极点 s 和 n 就是从 s 到 n 的测地线 γ (半个大圆)上的一对共轭点. 不难接受如下直观说法：$p, q \in \gamma$ 是共轭点对，若存在从 p 到 q 的、与 γ 无限邻近而又不同于 γ 的测地线(例如图中的 γ'). “若”字之后的条件的准确含义是：存在从 p 到 q 的单参测地线族，其中一条是 γ. 上述逻辑关系可明确表为：

存在从 p 到 q 的、与 γ 无限邻近而又不同于 γ 的测地线

$\Leftrightarrow$ 存在从 p 到 q 的单参测地线族，其中一条是 γ.

$\Rightarrow$ $p, q \in \gamma$ 是共轭点对 $\Leftrightarrow$ γ 上存在不恒为零的雅可比场，它在 p 和 q 点为零.

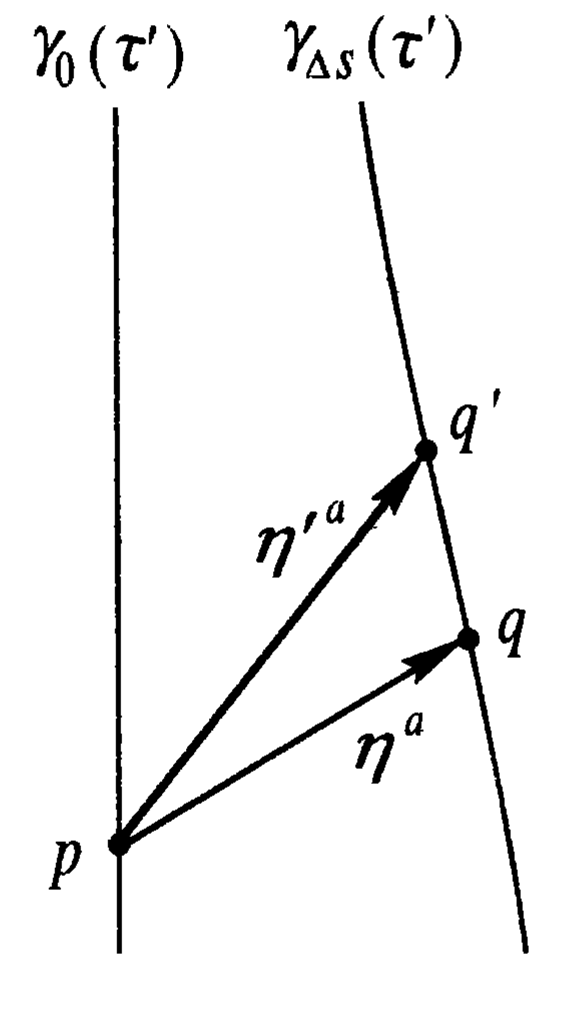


图 7-12　η'^a 和 η^a 描述同一分离情况

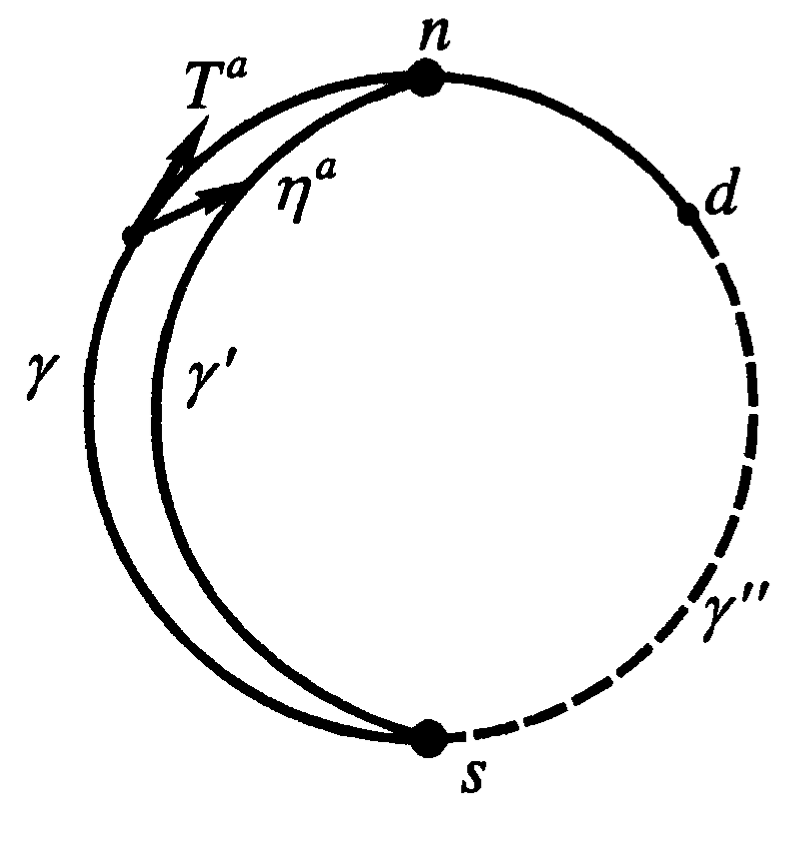


图 7-13　s 和 n 是一对共轭点，s 和 d 不是

这一逻辑关系有助于澄清两个微妙问题，下面用问答方式讲述(约定 γ 是测地线).

问　设 $p, q \in \gamma$ 是共轭点对，是否一定存在从 p 到 q 的、与 γ 无限邻近而又不同于 γ 的测地线?

答　否. 因为上述逻辑关系中的 $\Rightarrow$ 不能改为 $\Leftrightarrow$. 的确存在这样的情况，其中 $p, q \in \gamma$ 共轭，但就是找不到从 p 到 q 的、与 γ 无限邻近而又不同于 γ 的测地线

(略).

问 设存在一条过 $p,q\in\gamma$ 而又不同于 γ 的测地线 γ''，可否肯定 p，q 共轭?

答 否. 因为只存在 γ'' 不足以保证 p，q 之间存在单参测地线族，其中一条是 γ. 反例：把图 7-13 的大圆弧 γ 延长至 d 点，把所得的大半个大圆弧记作 $\tilde{\gamma}$，则 $s,d\in\tilde{\gamma}$，而且存在一条过 s，d 而又不同于 $\tilde{\gamma}$ 的测地线 γ''(小半个大圆弧)，但 $s,d\in\tilde{\gamma}$ 不是共轭点对，因为(直观地说)不存在联结 s，d 的与 $\tilde{\gamma}$ "无限邻近" 的测地线(γ'' 当然不邻近)，或者(准确地说)不存在满足要求的雅可比场 η^b.

共轭点对在线长问题上的重要意义见§3.3，其在奇性定理证明中的作用见 Wald(1984)P.223~233.

[选读 7-6-3 完]

§7.7 爱因斯坦场方程

既然物质分布产生引力，而引力表现为时空弯曲，一个自然的猜想是时空曲率要受物质分布的影响. 物质分布由能动张量 T_{ab} 描写，因此应存在一个把时空曲率与 T_{ab} 相联系的方程. 考虑到牛顿引力论应是广义相对论的弱场低速近似，测地偏离方程(7-6-8)与牛顿引力论的潮汐力表达式(7-6-1)的对比提供了寻求(猜测)这个方程的重要线索. 由于式(7-6-8)的 a^c 是用 w^a 而非 λ^a 定义的，为便于对比，应把式(7-6-1)的 λ^i 改为 w^i. 设 $\{x^i\}$ 为 3 维欧氏空间的笛卡儿系，则式(7-6-1)可写成

$$a^c = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c \frac{\mathrm{d}^2 w^i}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^b \partial_b\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) = -w^b\partial_b\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)\right] = -w^b\partial_b\partial^c\phi\ ,$$

这是按牛顿引力论得出的潮汐加速度，应是按广义相对论求得的 a^c 的近似. 因此，上式与式(7-6-8)的对比暗示如下对应关系：

$$R_{abd}{}^{c}Z^aZ^d \leftrightarrow \partial_b\partial^c\phi\,. \tag{7-7-1}$$

上指标 c 与下指标 b 缩并得

$$R_{abd}{}^{b}Z^aZ^d \leftrightarrow \partial_b\partial^b\phi = \nabla^2\phi = 4\pi\rho = 4\pi T_{ad}Z^aZ^d\ ,$$

其中 $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$ 是牛顿引力论中的泊松方程，最后一步用到§6.4 开头第 3 点的(a)(把该式的 μ 改为 ρ). 以上对应关系使我们希望下式成立：

$$R_{ad}Z^aZ^d = 4\pi T_{ad}Z^aZ^d\ , \tag{7-7-2}$$

满足上式的最简单假设为

$$R_{ab} = 4\pi T_{ab}\,. \tag{7-7-3}$$

事实上，爱因斯坦最初就是这样假设并公开发表的. 然而，由§6.4 可知能动张量

T_{ab}满足$\partial^a T_{ab}=0$，利用§7.2 的最小替换法则便有$\nabla^a T_{ab}=0$，故式(7-7-3)导致

$$\nabla^a R_{ab}=0, \tag{7-7-3'}$$

而这将导致物理上难以接受的推论. 由比安基恒等式$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e=0$缩并得$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^a=0$，因而

$$0=\nabla_a R_{bcd}{}^a+\nabla_c R_{abd}{}^a+\nabla_b R_{cad}{}^a=\nabla_a R_{bcd}{}^a-\nabla_c R_{bd}+\nabla_b R_{cd},$$

用度规把下指标 d 上升并与下指标 b 缩并得

$$0=\nabla_a R_c{}^a-\nabla_c R+\nabla_b R_c{}^b=2\nabla^a R_{ca}-\nabla_c R,$$

所以式(7-7-3′)要求

$$\nabla_c R=0. \tag{7-7-4}$$

这是式(7-7-3′)给 R_{ab} 强加的额外条件. 为说明这一条件的不可接受性，令$T\equiv g^{ab}T_{ab}$，用度规把式(7-7-3)的下指标 b 上升并与下指标 a 缩并得$R=4\pi T$. 故式(7-7-4)导致$\nabla_c T=0$，即 T 在整个物质场中为常数. 以理想流体为例，由式(6-5-1)(把式中的μ改为ρ)得

$$T=T_a{}^a=\rho U_a U^a+p\,(\delta_a{}^a+U_a U^a)=-\rho+3p,$$

在牛顿近似下有$\rho>>p$，故$T\cong-\rho$，因而T为常数意味着能量密度ρ在整个流体场中为常数. 这与物理上知道的理想流体的情况显然不符. 所以式(7-7-3)必须修改. 问题出在$\nabla^a T_{ab}=0$而$\nabla^a R_{ab}$不应为零. 如果能够找到一个(0, 2)型对称张量G_{ab}，它既自动满足$\nabla^a G_{ab}=0$，又能在代替R_{ab}写成类似于式(7-7-3)的等式后仍导致式(7-7-2)，困难便可克服. 爱因斯坦果然找到了这一张量(故称爱因斯坦张量，见§3.4 定义 3 及定理 3-4-8.)，即

$$G_{ab}\equiv R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab},\qquad \nabla^a G_{ab}=0, \tag{7-7-5}$$

他用方程$G_{ab}=8\pi T_{ab}$代替式(7-7-3)，亦即假定

$$R_{ab}-\frac{1}{2}R\,g_{ab}=8\pi T_{ab}. \tag{7-7-6}$$

方程(7-7-6)既与$\nabla^a T_{ab}=0$相容，又可在牛顿近似下($T\cong-\rho$)回到我们希望的式(7-7-2). 首先，由式(7-7-6)得$8\pi T_a{}^a=R_a{}^a-\frac{1}{2}\delta_a{}^a R=R-2R=-R$，即

$$R=-8\pi T, \tag{7-7-7}$$

可见式(7-7-6)导致

$$R_{ab}=8\pi T_{ab}+\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi T_{ab}+\frac{1}{2}g_{ab}(-8\pi T)=8\pi(T_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}T).$$

从而

$$R_{ab}Z^aZ^b = 8\pi(T_{ab}Z^aZ^b - \frac{1}{2}g_{ab}Z^aZ^bT) = 8\pi(\rho + \frac{1}{2}T)$$

$$\cong 8\pi\ (\rho - \frac{1}{2}\rho) = 4\pi\rho = 4\pi T_{ab}Z^aZ^b.$$

而这正是式(7-7-2). 于是爱因斯坦把式(7-7-6)作为描述时空曲率与物质场关系的方程，并于 1915 年 11 月发表. 后人称之为**爱因斯坦场方程**，是广义相对论的一个基本假设.

闵氏时空处处有 $R_{abc}{}^d = 0$，故 $G_{ab} = 0$，由爱因斯坦方程知 $T_{ab} = 0$. 然而，没有物质还有物理学吗？实际上，狭义相对论物理学研究各种物理客体的运动及各种相互作用，但却忽略它们之间的引力作用，亦即忽略各物理客体产生的引力场，因此时空近似平直. 可见狭义相对论物理学是广义相对论物理学在引力(时空曲率)可忽略时的近似. 只要引力不可忽略，时空就不能近似看作平直，原则上就不能使用狭义相对论.

$T_{ab} = 0$ 是一类重要的特殊情况，这时的爱因斯坦方程成为

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0\,, \tag{7-7-8}$$

叫做**真空爱因斯坦方程**. 选定坐标系后，里奇张量的分量 $R_{\mu\nu}$ 可由度规分量 $g_{\mu\nu}$ 及其偏导数(直至 2 阶)表出[见式(3-4-21)]，而且 $R_{\mu\nu}$ 对 $g_{\mu\nu}$ 的依赖关系是高度非线性的.① 所以式(7-7-8)可看作关于未知函数组 $g_{\mu\nu}$ 的一组非线性 2 阶偏微分方程，每个解 g_{ab} 就是一个真空度规. 闵氏度规自然是方程(7-7-8)的解，但方程(7-7-8)的解却可以是弯曲度规，一个重要例子是施瓦西在爱因斯坦方程发表不到一年后找到的真空度规，详见§8.3 和第 9 章.

不难证明 $T_{ab} = 0$ 时标量曲率 R 为零，因而真空爱因斯坦方程(7-7-8)可简化为

$$R_{ab} = 0, \tag{7-7-8$'$}$$

这表明真空度规(真空爱因斯坦方程的解) g_{ab} 的黎曼张量等于其外尔张量(见§3.4 定义 2)，一般非零.

$T_{ab} \neq 0$ 的式(7-7-6)称为**有源爱因斯坦方程**，它很像闵氏时空中的有源麦氏方程，但有一个重要区别. 对于麦氏方程，可以在场源(4 电流密度 J^a)指定的前提下对未知量 F_{ab} 求解. 看来，对爱因斯坦方程也可以先指定 T_{ab} (作为已知量)再求解未知量 g_{ab}，然而这里有一个问题：在 g_{ab} 不明确时 T_{ab} 意义不明. 以压强为零的理想流体(尘埃)为例. 所谓给定尘埃这一物质场，就是给定其 4 速场 U^a 和固有密度场 ρ. 尘埃的能动张量 $T_{ab} = \rho U_a U_b$，其中 $U_a \equiv g_{ac}U^c$. 因此，只要 g_{ac} 尚未明确，T_{ab} 就意

① 具体地说，$G_{\mu\nu}$ 对 $g_{\mu\nu}$ 的 2 阶导数的依赖是线性的，对 $g_{\mu\nu}$ 的 1 阶导数的依赖是 2 次的. 更糟的是 $G_{\mu\nu}$ 还含有 $g_{\mu\nu}$ 的逆 $g^{\mu\nu}$ (用于升指标)，当表为 $g_{\mu\nu}$ 的函数时就非常复杂.

义不明. 再者，4 速场 U^a 应该类时且归一，而这两个概念都涉及度规 g_{ab}，在 g_{ab} 为未知量时把 U^a 看作已知量也说不清楚. 可见把 g_{ab} 和 T_{ab} 分别作为未知量和已知量的做法不妥. 爱因斯坦方程与麦氏方程的这一区别的根源是：在麦氏理论中时空背景(闵氏时空)早已约定，给定 4 电流矢量 J^a 也就使方程 $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 的右边 $-4\pi g_{bc} J^c$ 成为已知量；对爱因斯坦方程，描述时空背景的 g_{ab} 是待求量，它偏偏不但出现在方程左边而且出现在右边，因此不能简单地认为右边可作为已知量事先给定. 求解爱因斯坦方程时应该把描述物质场的量(对尘埃就是 U^a 和 ρ)与 g_{ab} 一同作为未知量联立求解. §8.4 将给出一个求解实例，那里的物质场是电磁场.

爱因斯坦方程的非线性性使叠加原理不成立，这会导致诸多后果. 例如，方程的两个解之和并非方程的解. 这是与麦氏方程的又一重大区别.

爱因斯坦张量满足 $\nabla^a G_{ab} = 0$ [见式(7-7-5)]，因此爱因斯坦方程蕴含 $\nabla^a T_{ab} = 0$，这一方程包含着关于物质运动的大量信息. 事实上，对理想流体，它就是物质场的运动方程(参见§6.5). 对压强为零的理想流体，即尘埃，由 $\nabla^a T_{ab} = 0$ 可知尘埃粒子的世界线为测地线[参见式(6-5-8)及其后的几句话]. 这一结论还可推广至任何自引力足够弱的足够小的物体[Fock(1939)；Geroch and Jang(1975)]. 可见，§7.1 关于自由粒子世界线为测地线的假设不再是独立假设.

§7.8 线性近似和牛顿极限

7.8.1 线性近似[线性引力论(linearized theory of gravity)]

爱因斯坦场方程的非线性性给求解以及整个广义相对论带来许多困难. 在大多数情况下引力场很弱，这时可用近似处理把场方程变为线性方程，从而使问题大为简化. 在 4 维语言中，弱引力场意味着时空度规 g_{ab} 接近闵氏度规 η_{ab}.① 用下式定义 γ_{ab}：

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}, \tag{7-8-1}$$

则 γ_{ab} “很小”，其含义是 γ_{ab} 在 η_{ab} 的某个洛伦兹坐标系的分量满足 $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$，以致 $\gamma_{\mu\nu}$ 的 2 阶和高阶项都可忽略. 这一近似条件使 γ_{ab} 可被当作闵氏时空中的某种物理场(类似于电磁场)来处理. 它和一般物理场的区别在于它与 η_{ab} 之和就是时空度规 g_{ab}，从这一角度来说(加之 γ_{ab} “很小”)，γ_{ab} 又可看作对 η_{ab} 的一种微扰. 为了方便和避免混淆，我们约定张量的指标升降一律用 η^{ab} 和 η_{ab}(而不是 g^{ab} 和 g_{ab})进行，只有一个例外，那就是 g^{ab}，它仍代表 g_{ab} 的逆而不是 $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$. 在线性近似下由式(7-8-1)不难得知

① 在线性引力论中通常只讨论背景流形为 $\mathbb{R}^4$ 的时空，即 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$，因此闵氏度规 η_{ab} 有意义.

$$g^{ab}=\eta^{ab}-\gamma^{ab}\,,\tag{7-8-2}$$

因为由此可得 $g^{ab}g_{bc}=\delta^a{}_c-(\gamma$ 的 2 阶项). 设 ∂_a 和 ∇_a 分别是与 η_{ab} 和 g_{ab} 适配的导数算符，则由式(3-2-10)知 g_{ab} 在洛伦兹系的克氏符(亦即 ∂_a 与 ∇_a 之“差”)为

$$\Gamma^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab})\,,\tag{7-8-3}$$

把式(7-8-1)和(7-8-2)代入上式且只保留 γ_{ab} 的 1 阶项得

$$\Gamma^{(1)c}{}_{ab}=\frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a\gamma_{bd}+\partial_b\gamma_{ad}-\partial_d\gamma_{ab})\,,\tag{7-8-4}$$

利用 $\Gamma^{(1)c}{}_{ab}$ 本身为 1 阶小这一性质，把上式代入式(3-4-20)可得 g_{ab} 的(降指标)黎曼张量的 1 阶近似(称为**线性黎曼张量**)

$$R^{(1)}_{acbd}=\partial_d\partial_{[a}\gamma_{c]b}-\partial_b\partial_{[a}\gamma_{c]d}\,,\tag{7-8-5}$$

用 η^{cd} 对上式升指标后缩并可得 g_{ab} 的里奇张量的 1 阶近似(线性里奇张量)

$$R^{(1)}_{ab}=\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\tfrac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\tfrac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma\,,\tag{7-8-6}$$

其中 $\gamma\equiv\gamma^a{}_a=\eta^{ab}\gamma_{ab}$. 由此易得爱因斯坦张量的 1 阶近似(称为**线性爱因斯坦张量**)

$$G^{(1)}_{ab}=R^{(1)}_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)}=\partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd}-\partial^c\partial_c\gamma)\,.\tag{7-8-7}$$

于是

$$\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd}-\partial^c\partial_c\gamma)=8\pi T_{ab}\tag{7-8-8}$$

称为**线性爱因斯坦方程**(linearized Einstein equation). 令

$$\bar\gamma_{ab}\equiv\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma\,,\tag{7-8-9}$$

则线性爱因斯坦方程又简化为

$$-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar\gamma_{ab}+\partial^c\partial_{(a}\bar\gamma_{b)c}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar\gamma_{cd}=8\pi T_{ab}\,.\tag{7-8-8$'$}$$

用 $\partial^b\equiv\eta^{bc}\partial_c$ 作用于上式左边，结果为零，可见上式保证 $\partial^b T_{ab}=0$. 这有重要物理意义，它表明线性引力论中的能动张量的散度为零，从而保证能量、动量、角动量等守恒律在线性引力论(作为一种物理理论)中也成立.

式(7-8-8′)还可简化，为此先复习一个很有启发性的例子. 闵氏时空的麦氏方程 $\partial^a F_{ab}=-4\pi J_b$ 可用电磁 4 势 A_a 表为[见式(6-6-30)]

$$\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial^a A_a=-4\pi J_b\,.\tag{7-8-10}$$

设 χ 为任一标量场，则 A_a 的如下变换

$$\tilde A_a=A_a+\partial_a\chi\tag{7-8-11}$$

叫规范变换，因为 $\tilde{A}_a$ 与 A_a 对应着相同的 F_{ab}. 选择洛伦兹规范

$$\partial^a A_a = 0\,, \tag{7-8-12}$$

则式(7-8-10)简化为

$$\partial^a \partial_a A_b = -\ 4\pi J_b\,. \tag{7-8-13}$$

在线性引力论中也存在十分类似的规范自由性. 设 ξ^a 是任意无限小矢量场("无限小"是指 ξ^a 的分量 ξ^μ 足够小，以致其自我乘积或与 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的乘积都可看作2阶量而略去.)，γ_{ab} 的如下变换

$$\tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \tag{7-8-14}$$

叫**线性引力论的规范变换**，因为由 ∂_a 同 ∂_b 的可交换性不难验证 $\eta_{ab} + \tilde{\gamma}_{ab}$ 与 $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$ 有相同的线性黎曼张量. $R^{(1)}_{abcd}$ 的不变性导致 $R^{(1)}_{ab}$ 和 $G^{(1)}_{ab}$ 的不变性. 因此，若 γ_{ab} 是线性爱因斯坦方程(7-8-8)的解，则 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 也是. 规范不变性使我们可从众多等价的 γ_{ab} 中选一适当者(即选适当规范)来简化线性爱因斯坦方程(7-8-8). 仿照 A_a 选择洛伦兹规范(7-8-12)的做法，下面将证明在等价类中存在一个子类，其中任一 γ_{ab} 对应的 $\bar{\gamma}_{ab}$ 满足下式：

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad \text{(称为线性引力论的}\textbf{洛伦兹规范条件}\text{).} \tag{7-8-15}$$

由上式可知这类 $\bar{\gamma}_{ab}$ 的线性爱因斯坦方程(7-8-8′)右边第二、三项为零，于是简化为

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}\,, \tag{7-8-16}$$

与式(7-8-13)十分相似!下面补证式(7-8-15)总可通过选择 ξ^a 得到满足. 设 $\bar{\gamma}_{ab}$ 不满足式(7-8-15)，欲选 ξ^a 使由式(7-8-14)决定的 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 对应的

$$\bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = \tilde{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\tilde{\gamma} \quad (\tilde{\gamma} \equiv \eta^{ab}\tilde{\gamma}_{ab})$$

满足式(7-8-15). 由式(7-8-14)出发的简单计算表明 $\partial^b \bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial^b \partial_b \xi_a$，因此，只要选 ξ_a 满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\,\partial^b \bar{\gamma}_{ab}\,, \tag{7-8-17}$$

便能保证 $\partial^b \bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = 0$. 满足式(7-8-17)的 ξ_a 必定存在，因为在惯性坐标系中写为分量形式后就是如下的熟知方程：$-\dfrac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial z^2} = -\,\partial^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu}$，在 $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ 给定后，其解不但存在，而且很多.

[选读 7-8-1]

正文中用主动语言介绍了线性引力论的规范变换. 在被动语言中，这一变换是如下的**无限小坐标变换**：

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \qquad \text{(括号中的 } x \text{ 是 } x^\sigma \text{ 的简写)}, \tag{7-8-18}$$

其中 $\xi^\mu(x)$ 是四个无限小(任意小)的任意函数. 详见 Misner et al.(1973)P.439-440.

前面从式(7-8-3)推得式(7-8-4)时忽略了诸如 $\gamma^{cd}\partial_a\gamma_{bd}$ 的项,理由是 γ^{cd} 和 $\partial_a\gamma_{bd}$ 都为 1 阶小,因而两者乘积为 2 阶小. 然而,为什么 γ^{cd} 是 1 阶小能保证 $\partial_a\gamma_{bd}$ 也是 1 阶小? 先考虑函数 $f(x)=x\cos x$. 设 x 为小量,则 $f(x)$ 为 1 阶小,但 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x=\cos x-x\sin x\sim\cos x$ 却不是 1 阶小量. 于是式(7-8-4)似乎成了问题. 下面说明这一问题其实并不存在.

因为 g_{ab} 是爱因斯坦方程 $G_{ab}=8\pi T_{ab}$ 的一个确定解("死"的),所以 $\gamma_{ab}=g_{ab}-\eta_{ab}$ 是一个确定的度规. 由于它的分量满足 $|\gamma_{\mu\nu}|<<1$,可以说它"很小". 但既然它是确定的,就不能说它无限小(无限小涉及变化趋势). 为使"1 阶小"、"2 阶小"的提法更为合法,可以考虑一个单参度规族(one-parameter family of metrics) $g_{ab}(s)$ (其中 s 代表参数),满足 $g_{ab}(0)=\eta_{ab}$. 令

$$\mu_{ab}\equiv \mathrm{d}g_{ab}/\mathrm{d}s|_{s=0}\equiv\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[g_{ab}(s)-\eta_{ab}],$$

则
$$g_{ab}(s)=\eta_{ab}+s\mu_{ab}+O(s^2). \tag{7-8-19}$$

令
$$\gamma_{ab}(s)\equiv s\mu_{ab}+O(s^2), \tag{7-8-20}$$

则
$$g_{ab}(s)=\eta_{ab}+\gamma_{ab}(s). \tag{7-8-21}$$

式(7-8-1)中的 g_{ab} 和 γ_{ab} 是"死"的,现在的 $g_{ab}(s)$ 和 $\gamma_{ab}(s)$ 是"活"的,它们随 s 而变. 式(7-8-1)的 γ_{ab}"很小"对应于式(7-8-21)的 $\gamma_{ab}(s)$ 在 s 很小时"很小"(即 $s<<1$ 时 $s|\mu_{\mu\nu}|<<1$). 与前面关于 $f(x)=x\cos x$ 的讨论的区别在于 $\partial_a\gamma_{bd}$ 是对时空坐标求导而不是对小量参数 s 求导(求导时 s 不变),故由 $\gamma_{bd}\sim s\mu_{bd}$ 有 $\partial_a\gamma_{bd}\sim s\partial_a\mu_{bd}$,从而 $\partial_a\gamma_{bd}\sim O(s)$,即 $\partial_a\gamma_{bd}$ 为 1 阶小.

[选读 7-8-1 完]

7.8.2 牛顿极限

本小节证明牛顿引力论可以看作广义相对论在弱场低速条件下的极限情况. 先对"弱场低速条件"做一解释. 以地球周围的引力场为例,它相应于一个略微弯曲的度规场 $g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$,其中 γ_{ab} 是"小量". 在图 7-14 中,E 和 D 分别代表地球和地面大炮发出的炮弹的世界线(两者的相对速率 $u_{\mathrm{ED}}<<1$),μ 代表宇宙射线中某"高速"μ 子的世界线. "高速"是地球观者的看法,μ 子则认为自己不动而 E 在高速运动,总之是两者的相对速率大到接近光速($u_{\mu\mathrm{E}}\cong1$). 作为平直度规场,η_{ab} 有许多惯性坐标系,例如以 E 的世界线为一条 t 坐标线的惯性系 $\{t, x^i\}$ 和以 μ 的世界线为一条 t' 坐标线的惯性系 $\{t', x'^i\}$,两者之间差一个伪转动. 地球、炮弹以及汽车、飞机等相对于 $\{t, x^i\}$ 系的 3 速率都很小,而相对于 $\{t', x'^i\}$ 系

的 3 速率都很大. “弱场低速极限”应理解为：存在 η_{ab} 的惯性坐标系(对上例是指 $\{t, x^i\}$)，其中所有关心的物体的坐标速率都很小于 1 (因此不能用牛顿理论在 $\{t, x^i\}$ 系中讨论涉及μ子的问题)，而且 $|\gamma_{\mu\nu}| \equiv |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| << 1$.

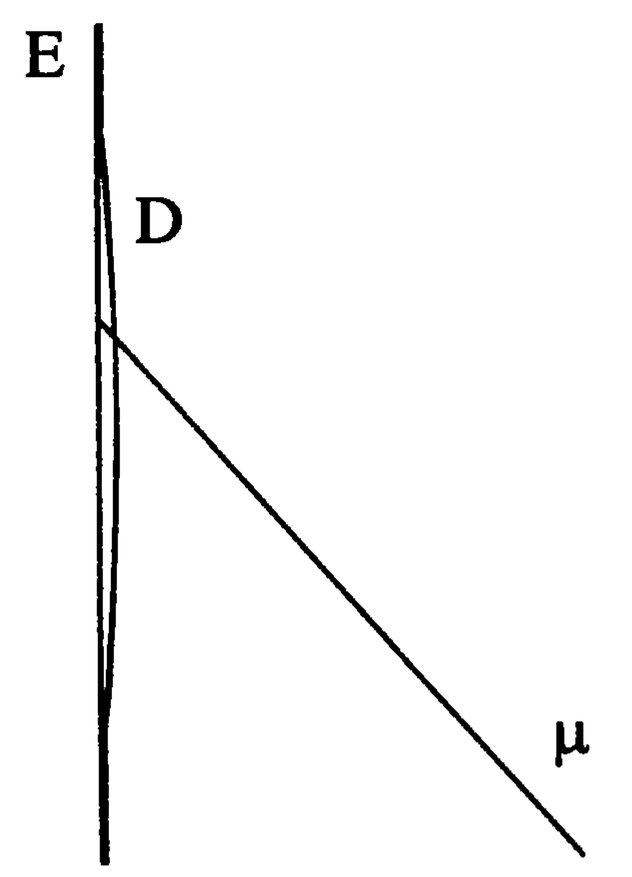


图 7-14　地球 E、炮弹 D 和μ子的世界线

具体地说，“弱场低速”条件保证存在 η_{ab} 使 $\gamma_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ 为“小量”，而且存在 η_{ab} 的惯性坐标系 $\{t, x^i\}$，满足：

(1) 引力场源的能动张量 T_{ab} 在该系可表为

$$T_{ab} \cong \rho(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b\ ; \tag{7-8-22}$$

就是说，T_{ab} 在该系中只有时-时分量 T_{00} (时-空分量 T_{0i} 为零是因物体速度很小导致动量密度很小；空-空分量 T_{ij} 为零表明 3 维应力与质量密度相较可忽略，例如地心的压强 p 只有密度 ρ 的 10^{-10} 倍.)．可见，虽然在广义相对论中物质场的能动张量 T_{ab} 的各个分量对时空弯曲都有贡献，但在牛顿引力论中(正如人们早已知道的那样)，只有质量密度 ρ 才对引力场有所贡献.

(2) (a) 引力场源低速运动导致时空几何缓慢变化，故 $\partial\bar{\gamma}_{\mu\nu}/\partial t$ 可忽略；

(b) 物体低速运动导致其 4 速 U^a 近似等于 $\{t, x^i\}$ 系的观者的 4 速 Z^a $[\equiv(\partial/\partial t)^a]$，即 $U^a \cong Z^a$.

洛伦兹规范下的线性爱因斯坦方程(7-8-16)在上述近似下可用下法化简：

式(7-8-16)左边的分量 $= \partial^\sigma\partial_\sigma\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \partial^0\partial_0\bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial^i\partial_i\bar{\gamma}_{\mu\nu} \cong \partial^i\partial_i\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \nabla^2\bar{\gamma}_{\mu\nu}$，

其中第三步用到近似条件(2)，∇^2 是 3 维坐标系 $\{x^i\}$ 的导数算符 $\vec{\nabla}$ 的平方．而由近似条件(1)可知式(7-8-16)右边的分量当 $\mu = \nu = 0$ 时 $\cong -16\pi\rho$，其他分量为零，即

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{00} = -16\pi\rho\ , \tag{7-8-23}$$

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{0i} = 0\ , \tag{7-8-24}$$

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{ij} = 0\ . \tag{7-8-24$'$}$$

方程(7-8-24)及(7-8-24′)在无限远表现良好的唯一解 $\bar{\gamma}_{0i}$ 及 $\bar{\gamma}_{ij}$ 为常数，而借助一个规范变换又可把这常数变为零，所以 $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ 的唯一非零分量为 $\bar{\gamma}_{00}$，它满足方程(7-8-23)．令

$$\phi \equiv -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00}\ , \tag{7-8-25}$$

并把 ϕ 解释为牛顿引力势，则方程(7-8-23)便成为牛顿引力论中熟知的泊松方程：

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho\ . \tag{7-8-26}$$

$\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ 的唯一非零分量为 $\bar{\gamma}_{00}$ 的结论也可用张量等式表为

$$\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b = -4\phi(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b\ . \tag{7-8-27}$$

于是

$$\bar{\gamma} \equiv \eta^{ab}\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}\eta^{ab}(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b = -\bar{\gamma}_{00} = 4\phi . \tag{7-8-28}$$

而由 $\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma/2$ 得 $\gamma = \eta^{ab}\gamma_{ab} = \eta^{ab}\bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2}\eta^{ab}\eta_{ab}\gamma/2 = \bar{\gamma} + 2\gamma$ ，故 $\gamma = -\bar{\gamma}$ ，因而

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{\gamma} . \tag{7-8-29}$$

借用式(7-8-27)、(7-8-28)可把上式改写为

$$\gamma_{ab} = -\phi[4(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + 2\eta_{ab}] . \tag{7-8-30}$$

在上述基础上就可导出牛顿近似下的质点运动方程. 设质点除引力外不受力，则从广义相对论角度看来它的世界线应为测地线，在 η_{ab} 的惯性坐标系中的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0 , \tag{7-8-31}$$

其中 τ 是质点的固有时. 牛顿近似下质点 4 速 U^a 所满足的条件 $U^a \cong Z^a$ 保证 $\tau \cong t$ (固有时近似等于坐标时)及 $u^i \equiv \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t \cong 0$ (3 速近似为零)，故 $U^\nu \equiv \mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}t$ 近似为(1, 0, 0, 0). 于是式(7-8-31)可近似表为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma^\mu{}_{00} . \tag{7-8-32}$$

由式(7-8-4)可求得[略去 Γ 右上方的(1)]

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{00}(\gamma_{00,0} + \gamma_{00,0} - \gamma_{00,0}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t} \cong 0 ,$$

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{ij}(\gamma_{j0,0} + \gamma_{0j,0} - \gamma_{00,j}) \cong -\frac{1}{2}\delta^{ij}\gamma_{00,j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7-8-33}$$

(其中第二步是由于 $\gamma_{j0} = \bar{\gamma}_{j0} + \frac{1}{2}\gamma\eta_{j0} = 0$.) 故式(7-8-32)在 $\mu = 0$ 时给出恒等式，在 $\mu = i$ 时给出 $\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}$ ($i = 1, 2, 3$). 再由式(7-8-29)、(7-8-28)得 $\gamma_{00} = \bar{\gamma}_{00}/2 = -2\phi$ ，代入上式，注意到式(7-8-25)，得 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2 = -\partial\phi/\partial x^i$. 而 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2$ 是质点相对于惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 的 3 加速 $\vec{a}$ 的 i 分量，故上式可表为 3 矢量等式

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi . \tag{7-8-34}$$

这正是牛顿引力论中只受引力的质点的运动方程. 式(7-8-26)和(7-8-34)是牛顿引力论的基本方程，可见牛顿引力论可看作广义相对论的弱场低速极限. 由

$$\phi \equiv -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00} = -\frac{1}{2}\gamma_{00} \tag{7-8-35}$$

得 $g_{00} = \eta_{00} + \gamma_{00} = -(1 + 2\phi)$ ，或

$$\phi = -\frac{1}{2}(1+g_{00})\,. \tag{7-8-36}$$

这反映牛顿近似下度规分量 g_{00} 同牛顿引力势的密切联系. 再以图 7-10 的小球 1, 2 为例. 选 η_{ab} 的惯性系 $\{t, x, y, z\}$ 使 z 轴竖直向上, 则式(7-6-8)中的 $Z^a=(\partial/\partial t)^a$. 注意到式(7-6-7), 可把式(7-6-8)改写为 $\tilde{a}^c=-R_{0b0}{}^c\lambda^b$, 其 z 分量为 $\tilde{a}^z=-R_{0z0z}\lambda^z$ (不对 z 求和). 在牛顿近似中对 t 的导数可忽略, 故由式(7-8-5)得 $R_{0z0z}=-\frac{1}{2}\partial^2\gamma_{00}/\partial z^2=\partial^2\phi/\partial z^2=\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}r^2$, 因而 $\tilde{a}^z=-(\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}r^2)\lambda^z$, 与式(7-6-2)一致. 这是如下结论的一个验证: 广义相对论中由曲率张量按式(7-6-8)决定的潮汐加速度在弱场低速近似下回到牛顿力学按式(7-6-2)决定的潮汐加速度.

§7.9 引力辐射

引力场同电磁场的相似之处使人期望广义相对论存在与电磁辐射类似的引力辐射. 事实上, 爱因斯坦方程存在以光速传播的波动解一事从广义相对论诞生不久就已为人所知, 然而在相当一段时间内引力波的真实性一直受到怀疑. Eddington 在 1922 年提出如下疑问: 引力波解可能只代表时空坐标的波动, 因而没有观测效应. 情况从 20 世纪 50 年代开始出现转机. Bondi 及其合作者们借用不依赖于坐标系的手法证明引力波的确携带能量、动量以及系统在发射引力波时质量必然减小, 使引力辐射的物理真实性及其可观测性逐渐被普遍接受.

我们先在线性引力近似下对引力辐射问题做一简要讨论. 由 7.8.1 小节可知真空爱因斯坦方程的线性近似为

$$\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}=-16\pi T_{ab}\,, \tag{7-9-1}$$

其中 $\bar{\gamma}_{ab}$ 满足洛伦兹规范条件

$$\partial^a\bar{\gamma}_{ab}=0\,. \tag{7-9-2}$$

上述规范条件是受电磁场的洛伦兹规范 $\partial^a A_a=0$ 启发而得的. 然而, 条件 $\partial^a A_a=0$ 并未把 A_a 完全确定, 因为如果令 $A'_a=A_a+\partial_a\chi$, 其中 χ 满足 $\partial^a\partial_a\chi=0$, 则 A'_a 也满足洛伦兹条件 $\partial^a A'_a=0$. 在讨论电磁辐射时可以利用这一剩余规范自由性来选择 A'_a 使其在某惯性系 $\{x^0\equiv t,\ x^i\}$ 中的 A'_0 在无源($J^a=0$)区为零.[①] 具体做法如下: 设 A_a 是满足 $\partial^a A_a=0$ 的任一 4 势, 其分量为 $(A_0,\ \vec{a})$. 设 Σ_0 是 $t=t_0$ 的超曲面, 对 χ 的初值 $\chi|_{\Sigma_0}$ 及 $\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0}$ 提出如下要求:

① 实际上只能在无源区的这样一些点(例如 p)上做到 $A'_0=0$: 过 p 的光锥在 p 和 Σ_0 之间的部分都在无源区中. 后面说到线性引力论中的无源区时指的也是这个意思.

$$\nabla^2 \chi |_{\Sigma_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a} |_{\Sigma_0}, \tag{7-9-3}$$

[$\vec{a}|_{\Sigma_0}$ 给定后 $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}|_{\Sigma_0}$ 为 Σ_0 上的已知函数，Σ_0 上满足方程(7-9-3)的函数 χ 存在且很多.]

$$\partial \chi / \partial t |_{\Sigma_0} = -A_0 |_{\Sigma_0}. \tag{7-9-4}$$

令 χ 为方程 $\partial^a \partial_a \chi = 0$ 在初始条件式(7-9-3)、(7-9-4)下的解(方程 $\partial^a\partial_a\chi = 0$ 在任意指定初值 $\chi|_{\Sigma_0}$ 和 $\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0}$ 下的解的存在唯一性早已在数学上证明). 我们来证明由 χ 和 A_a 按照 $A'_a = A_a + \partial_a \chi$ 构造的 A'_a 在无源区果然满足 $A'_0 = 0$. 首先，由 $A'_a = A_a + \partial_a\chi$ 可知 A'_0 满足

$$\partial^a \partial_a A'_0 = \partial^a \partial_a A_0 + \partial_0 \partial^a \partial_a \chi = \partial^a \partial_a A_0 = -4\pi J_0, \tag{7-9-5}$$

$$A'_0 |_{\Sigma_0} = A_0 |_{\Sigma_0} + \partial\chi/\partial t |_{\Sigma_0} = 0 \qquad \text{[其中第二步用到式(7-9-4)]}, \tag{7-9-6}$$

$$\partial A'_0/\partial t|_{\Sigma_0} = \partial A_0/\partial t|_{\Sigma_0} + \partial^2\chi/\partial t^2 |_{\Sigma_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}|_{\Sigma_0} + \nabla^2\chi|_{\Sigma_0} = 0. \tag{7-9-7}$$

[其中第三步用到式(7-9-3)，第二步是由于 $0 = \partial^a A_a = -\partial A_0/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ 导致 $\partial A_0/\partial t = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ 以及 $0 = \partial^a\partial_a\chi = -\partial^2\chi/\partial t^2 + \nabla^2\chi$ 导致 $\partial^2\chi/\partial t^2 = \nabla^2\chi$.] 对无源电磁场，式(7-9-5)成为 $\partial^a\partial_a A'_0 = 0$，而此方程满足初始条件式(7-9-6)、(7-9-7)的唯一解是 $A'_0 = 0$. 可见 A'_a 是既满足洛伦兹条件 $\partial^a A'_a = 0$ 又满足 $A'_0 = 0$ 的规范，这称为**辐射规范**(radiation gauge). 线性引力论的情况与此非常类似：洛伦兹规范条件式(7-9-2)并未把 $\bar{\gamma}_{ab}$ 完全确定，因为如果令

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \tag{7-9-8}$$

其中 ξ_a 满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = 0, \tag{7-9-9}$$

则 $\bar{\gamma}'_{ab}$ 也满足方程(7-9-1)和条件式(7-9-2). 仿照电磁场的做法，可以利用这一剩余规范自由性选择 γ'_{ab} 使其在某惯性系 $\{x^0 \equiv t,\ x^i\}$ 的分量在无源区($T_{ab} = 0$)满足 $\gamma' = 0$，$\gamma'_{0i} = 0$，$i = 1, 2, 3$. 为此，从满足式(7-9-2)的任一 γ_{ab} 出发，以 ξ_0 和 $\vec{\xi}$ 分别代表 ξ_a 在该系的时、空分量，要求初值 $\xi_0|_{\Sigma_0}$，$\vec{\xi}|_{\Sigma_0}$，$\partial\xi_0/\partial t|_{\Sigma_0}$，$\partial\xi_i/\partial t|_{\Sigma_0}$ 满足如下方程：

$$2(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} - \partial\xi_0/\partial t)|_{\Sigma_0} = -\gamma|_{\Sigma_0}, \tag{7-9-10}$$

$$2[-\nabla^2\xi_0 + \vec{\nabla}\cdot(\partial\vec{\xi}/\partial t)]_{\Sigma_0} = -\partial\gamma/\partial t|_{\Sigma_0}, \tag{7-9-11}$$

$$[(\partial\xi_i/\partial t) + (\partial\xi_0/\partial x^i)]_{\Sigma_0} = -\gamma_{0i}|_{\Sigma_0}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7-9-12}$$

$$\left[\nabla^2\xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)\right]_{\Sigma_0} = -\left.\frac{\partial\gamma_{0i}}{\partial t}\right|_{\Sigma_0}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7-9-13}$$

令 ξ_μ ($\mu=0$, 1, 2, 3) 为方程 $\partial^b\partial_b\xi_\mu=0$ 在初始条件式(7-9-10) ~ (7-9-13)下的解，则仿照电磁场的讨论不难证明由 $\xi_a\equiv\xi_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a$ 及 γ_{ab} 按式(7-9-8)构造的 γ'_{ab} 在无源区既满足洛伦兹规范条件 $\partial^a\bar{\gamma}'_{ab}=0$ 又满足 $\gamma'=0$ 和 $\gamma'_{0i}=0$ ，$i=1$, 2 , 3 . 从现在起把满足上述条件的 γ'_{ab} 简记为 γ_{ab} . 由 $\gamma=0$ 可知 $\bar{\gamma}_{ab}=\gamma_{ab}$ ，于是洛伦兹条件 $\partial^a\gamma_{ab}=0$ 与 $\gamma_{0i}=0$ 结合导致

$$\partial\gamma_{00}/\partial t=0. \tag{7-9-14}$$

从而线性爱因斯坦方程(7-9-1)在无源区给出

$$\nabla^2\gamma_{00}=0. \tag{7-9-15}$$

如果在全时空都无源，则方程(7-9-15)在无限远表现良好的解就只能是 γ_{00} = 常数. 可以证明(习题)，通过进一步的规范变换可把 γ_{00} 变为零，同时保留前面所有既得成果. 因此，在这一新规范中有 $\gamma=0$，$\gamma_{0i}=0$ ($i=1$, 2, 3) 以及 $\gamma_{00}=0$. 我们就在这一规范下讨论线性引力论的引力辐射. 单色平面波是真空线性爱因斯坦方程 $\partial^c\partial_c\gamma_{ab}=0$ 的最简单解，它可表为(参见 6.6.5 小节对单色平面电磁波的讨论)

$$\gamma_{ab}=H_{ab}\cos(K_\mu x^\mu), \tag{7-9-16}$$

其中 H_{ab} 是对称常张量场(“常”是指 $\partial_c H_{ab}=0$)，代表波的振幅，亦称**偏振张量**；K^μ 是常矢量场 K^a(4 波矢)的分量，满足(来自 $\partial^c\partial_c\gamma_{ab}=0$)

$$K_\mu K^\mu\equiv\eta_{\mu\nu}K^\mu K^\nu=0, \tag{7-9-17}$$

即 K^a 是类光矢量场，表明引力波同电磁波一样以光速传播. 把 K^a 做 3 + 1 分解：

$$K^a=\omega(\partial/\partial t)^a+k^a, \tag{7-9-18}$$

则 ω 和 $\vec{k}\equiv k^a$ 可分别解释为波的角频率和 3 波矢，且由式(7-9-17)可知

$$\omega^2=k^a k_a\equiv k^2. \tag{7-9-19}$$

式(7-9-16)同洛伦兹条件 $\partial^a\gamma_{ab}=0$ 结合得

$$H_{\mu\nu}K^\nu=0,\qquad \mu=0,1,2,3, \tag{7-9-20a}$$

反映单色平面引力波的 4 维振幅 H_{ab} 同时空传播方向 K^a 正交. 式(7-9-16)同 $\gamma_{0\nu}=0$ 和 $\gamma=0$ 结合则给出

$$H_{0\nu}=0,\qquad \nu=0,1,2,3 \tag{7-9-20b}$$

和

$$H\equiv\eta^{\mu\nu}H_{\mu\nu}=0. \tag{7-9-20c}$$

由 $H_{\mu\nu}=H_{\nu\mu}$ 可知 H_{ab} 至多有 10 个独立分量，但它们还受式(7-9-20)的限制. 式(7-9-20)共含 4 + 4 + 1 = 9 个方程，但式(7-9-20a)中的方程 $H_{0\nu}K^\nu=0$ 是式(7-9-20b)的结果，式(7-9-20)的 9 个方程中只有 8 个独立. 因此 H_{ab} 只有 $10-8=2$ 个独立分量，它们在物理上代表平面引力波的两种独立偏振态(偏振模式)，详见选读 7-9-1

之末.

爱因斯坦方程是非线性方程，广义相对论是非线性理论. 虽然在许多情况下可用弱场近似，但在强引力场情况下必须对非线性性给予充分注意，这是引力波与(闵氏时空的)电磁波的重要不同. 麦氏方程是线性方程，叠加原理对电磁场适用，同一空间传播的两列电磁波互不影响. 反之，一般而言，两列引力波之间存在相互作用(散射). Penrose，Khan 和 Szekeres 等对平面引力波的碰撞问题曾做过开拓性研究. 有兴趣的读者可参阅 d'Inverno (1992).

下面简介引力波的发射. 先与电磁波做一对比. 如果系统的带电粒子做变速运动(相对于惯性系)，它便发射电磁波. 众所周知，对辐射场的主要贡献来自电偶极辐射，其次(弱得多)是磁偶极辐射和电四极辐射(两者量级相同). 类似地，在牛顿近似下，如果系统的质点做变速运动，它便发射引力波. 与电偶极矩对应的是**质量偶极矩**(mass dipole moment)

$$\vec{D} = \sum_{\text{质点}P} m_P \vec{r}_P \, , \tag{7-9-21}$$

其中 m_P 和 $\vec{r}_P$ 分别是质点 P 的质量和矢径，上式右边要对系统中的所有质点求和. 由于电偶极辐射的强度正比于电偶极矩对时间的 2 阶导数的平方，可以预期由质量偶极矩贡献的引力辐射强度正比于 $\ddot{\vec{D}}^2$. 然而，由式(7-9-21)可知 $\dot{\vec{D}} = \sum_{\text{质点}P} m_P \dot{\vec{r}}_P$ 等于系统的总动量 $\vec{p}$，而由动量守恒律可知 $\dot{\vec{p}} = 0$，因此 $\ddot{\vec{D}} = 0$，即引力波中不含对应于电偶极辐射的引力偶极辐射. 根据电磁辐射理论，磁偶极辐射的强度正比于磁偶极矩对时间的 2 阶导数的平方. 引力系统与磁偶极矩对应的量为

$$\vec{\mu} = \sum_{\text{质点}P} (P\text{ 的矢径}) \times (P\text{ 贡献的流矢量}) = \sum_{\text{质点}P} \vec{r}_P \times (m_P \vec{u}_P) \, ,$$

其中 $\vec{u}_P$ 是质点 P 的速度. 上式右边无非是系统的总角动量. 由角动量守恒律可知 $\dot{\vec{\mu}} = 0$，因此引力波中也不含对应于磁偶极辐射的引力偶极辐射. 简言之，引力波中不含偶极辐射. 只有转而研究四极辐射才会得到非零结果[详见 Misner et al. (1973)P.974~978]. 由于四极辐射在量级上小于偶极辐射，引力系统发射的引力波在量级上弱于条件类似的电磁系统发射的电磁波.

一般认为强引力波的发射源都同剧烈变化的天体物理过程有关，例如星体晚期的急剧的非球对称引力坍缩、超新星爆发(见 9.3.2 小节)①以及活动星系核中的剧烈扰动等. 这时引力场不弱，线性近似不适用. 对这些过程的严格处理必然涉及在非球对称情况下求解非线性爱因斯坦方程这一艰巨课题，人们对强引力波的

① 根据 Birkhoff 定理(见 8.3.3 小节)，球对称星体的任何球对称演化(例如坍缩或振荡)无论多么剧烈都不会发射引力波，正如麦氏理论中不存在球对称电磁波那样[电偶极振子在远区的球面波并非球对称电磁波，因为场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 并无球对称性. 事实上，球对称电磁波相当于电单极矩(monopole)贡献的辐射，麦氏理论中不存在这种辐射.].

发射问题的了解至今还很不完善.

既然广义相对论预言了引力辐射的物理存在性，引力波的探测就成为十分重要的课题. 由于到达太阳系的引力波的波源都很遥远，被探测的引力波完全可以看作平面波，并且弱得使线性近似适用，这使引力波的探测理论比发射理论简单. 然而，引力波的直接探测在实验上有很高难度：微弱的被测对象对探测仪器的灵敏度提出很高要求；探测实验还带有“守株待兔”的味道(随时等待较近处较剧烈的天体过程带来较强的引力波). Weber 于 1966 年在 Maryland 大学开拓性地建立了世界上第一个引力波探测器(一根悬挂着的长 153cm，直径 66cm 的铝棒及其附加装置)，经过数年不懈努力，他宣布在两地探测器上同时测得引力波脉冲. 遗憾的是其他引力波探测者对此都未予认证. 例如，Tyson 的探测器比 Weber 的探测器有更高的灵敏度，却丝毫未收到类似脉冲[见 Ohanian(1976)；刘辽(1987)]. 1987 年 2 月，地球上的天文学家观测到离银河系最近的河外星系“大麦哲伦云”中爆发的一颗超新星(SN1987A，距地球只有 16 万光年.)，国外一个小组于 1987 年宣称接收到来自该超新星的引力辐射，但也未取得世界上其他(为数不多的)引力波探测器的认证. 然而，对脉冲星由于发射引力波对自身运动的影响的观测却异军突起地取得突破性成果. 脉冲星(pulsar)是一种快速自转的中子星(见 9.3.2 小节)，由于某种机制而不断发射电磁波. 如果地球位于波束扫射范围之内，就会按准确周期接收到射电脉冲信号. 由两颗恒星组成的近似孤立的引力系统叫做**双星**，这两颗恒星称为**子星**. 子星围绕系统的质心公转. 根据广义相对论，子星的这种加速运动会因发射引力波而损失能量，后果是轨道变小和公转周期变短. 与剧烈变化的天体物理过程不同，双星系的引力场很弱，可用线性引力论计算其引力波带走的能量及由此导致的轨道周期变化. 要使这些效应能被测量，至少应满足两个条件：①轨道非常小(两子星足够近)，以使广义相对论效应足够明显；②有一种精度很高的轨道周期测量方法. Hulse 和 Taylor 在 1974 年发现的脉冲双星 PSR1913 + 16 正好满足这些条件[脉冲双星(binary pulsar)是指一个子星为脉冲星的双星，PSR 是脉冲星的识别符，1913 和 + 16 分别代表它的赤经和赤纬(角度坐标).]. 该双星的两子星的最大距离只有 10^9m 的量级(约 1 个太阳半径)，一个子星为脉冲星则使条件②得以满足：由于脉冲星所发脉冲的周期被誉为“钟一般地准确”，Taylor 及其合作者们便能以异常高的精度观测，从而推算轨道周期变化率. 经过 4 年来上千次的观测，他们于 1978 年宣布了对轨道周期变化率的观测结果，与线性引力论的四极辐射公式计算的理论值吻合得很好. 这是引力波理论提出 60 年来关于引力波携带能量的第一个定量观测证据，虽然只是间接的证据. 他们后来又对这一脉冲双星继续观测并取得进步，终于获得 1993 年诺贝尔物理奖.

[选读 7-9-1]

下面以一个具体例子介绍广义相对论(不限于线性近似)中的平面引力波 [参

见 Sachs and Wu(1977)]. 设$\{t, x, y, z\}$是闵氏时空$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$的一个整体惯性系. 令$u \equiv t-z$, $f(u)$和$g(u)$是u的两个任意的光滑函数, 只要求f^2+g^2不恒为零. 设P是坐标x, y和u的如下函数:

$$P(x, y, u)=\frac{1}{2}f(u)\ (x^2-y^2)+g(u)\,xy\,, \tag{7-9-22}$$

不难验证由下式定义的

$$g_{ab}:=\eta_{ab}+2P(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b=\eta_{ab}+2P[(\mathrm{d}t)_a-(\mathrm{d}z)_a][(\mathrm{d}t)_b-(\mathrm{d}z)_b] \tag{7-9-23}$$

是$\mathbb{R}^4$上的一个洛伦兹度规场. 首先, 由上式易见g_{ab}是对称的. 其次, 令

$$K^a \equiv (\partial/\partial t)^a+(\partial/\partial z)^a\,, \tag{7-9-24}$$

则容易验证$g_{ab}K^aK^b=0$, 即K^a以g_{ab}衡量为类光矢量场. 引入$\mathbb{R}^4$上的基底(标架)场

$$\begin{aligned}&(e_1)^a=(\partial/\partial x)^a, \qquad (e_2)^a=(\partial/\partial y)^a, \qquad (e_3)^a=K^a,\\&(e_4)^a=\tfrac{1}{2}[(\partial/\partial t)^a-(\partial/\partial z)^a]+PK^a,\end{aligned} \tag{7-9-25}$$

由直接计算(练习)可知g_{ab}在此基底的分量$g_{\mu\nu}\equiv g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b$排成如下矩阵:

$$(g_{\mu\nu})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}. \tag{7-9-26}$$

矩阵有逆表明g_{ab}非退化, 因而是度规张量场. 不难看出它有洛伦兹号差. 以上讨论表明$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$是一个时空, 它与闵氏时空$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$有相同的底流形$\mathbb{R}^4$而有不同的度规场. 曲率张量的计算表明这是一个弯曲时空(见稍后的命题 7-9-1). 由式(7-9-26)求得逆矩阵, 配上式(7-9-25)的基矢便得

$$\begin{aligned}g^{ab}=&(\partial/\partial x)^a(\partial/\partial x)^b+(\partial/\partial y)^a(\partial/\partial y)^b-(1+2P)(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b\\&+(1-2P)(\partial/\partial z)^a(\partial/\partial z)^b-2P[(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial z)^b+(\partial/\partial z)^a(\partial/\partial t)^b]\,.\end{aligned} \tag{7-9-27}$$

以下的指标升降一律用g^{ab}和g_{ab}.

命题 7-9-1　式(7-9-23)定义的g_{ab}是真空爱因斯坦方程的非平直解.

证明　先用§5.7 的标架法计算g_{ab}的黎曼张量$R_{abc}{}^d$. 第一步, 选用式(7-9-25)的标架. 由式(7-9-26)可知这是刚性标架(虽然非正交归一), §5.7 的具体算法适用. 容易验证其对偶标架为

$$(e^1)_a=(\mathrm{d}x)_a,\ (e^2)_a=(\mathrm{d}y)_a,\ (e^3)_a=\frac{1}{2}[(\mathrm{d}t)_a+(\mathrm{d}z)_a]-P(\mathrm{d}u)_a,\ (e^4)_a=(\mathrm{d}u)_a. \tag{7-9-28}$$

第二步, 由定理 5-7-4 或 5-7-1 计算联络 1 形式, 发现非零的$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$只有如下 4 个:

$$-\omega_{41}=\omega_{14}=\omega_{144}e^4=-(fx+gy)\ \mathrm{d}u\,,$$
$$-\omega_{42}=\omega_{24}=\omega_{244}e^4=-(gx-fy)\ \mathrm{d}u\,. \tag{7-9-29}$$

由式(7-9-26)求逆易见 g^{ab} 在对偶标架的分量 $g^{\mu\nu}$ 亦排成式(7-9-26)右边的矩阵，故由 $\omega_\mu{}^\rho=g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}$ 可知非零的 $\omega_\mu{}^\rho$ 为

$$\omega_4{}^1=\omega_1{}^3=(fx+gy)\ \mathrm{d}u\,,\qquad \omega_4{}^2=\omega_2{}^3=(gx-fy)\ \mathrm{d}u\,. \tag{7-9-30}$$

第三步是用嘉当第二方程由 $\omega_\mu{}^\rho$ 计算全部曲率 2 形式 $R_\mu{}^\nu$. 由于全部非零 $\omega_\mu{}^\rho$ 由式(7-9-30)表示，有 $\omega_\mu{}^\lambda\wedge\omega_\lambda{}^\rho=0$，故 $R_\mu{}^\nu=\mathrm{d}\omega_\mu{}^\nu$，于是全部非零 $R_\mu{}^\nu$ 为

$$R_4{}^1=R_1{}^3=f\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}u+g\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}u=f\,e^1\wedge e^4+g\,e^2\wedge e^4,$$
$$R_4{}^2=R_2{}^3=g\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}u-f\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}u=g\,e^1\wedge e^4-f\,e^2\wedge e^4. \tag{7-9-31}$$

由此可得黎曼张量

$$\begin{aligned}R_{abc}{}^d&=R_{ab1}{}^3(e^1)_c(e_3)^d+R_{ab2}{}^3(e^2)_c(e_3)^d+R_{ab4}{}^1(e^4)_c(e_1)^d+R_{ab4}{}^2(e^4)_c(e_2)^d\\&=[f\,(e^1)_a\wedge(e^4)_b+g\,(e^2)_a\wedge(e^4)_b]\ [(e^1)_c(e_3)^d+(e^4)_c(e_1)^d]\\&\quad+[g\,(e^1)_a\wedge(e^4)_b-f\,(e^2)_a\wedge(e^4)_b]\ [(e^2)_c(e_3)^d+(e^4)_c(e_2)^d]\,.\end{aligned} \tag{7-9-32}$$

这是非零张量，因为

$$R_{414}{}^1=R_{abc}{}^d(e_4)^a(e_1)^b(e_4)^c(e^1)_d=-f$$

及

$$R_{424}{}^1=R_{abc}{}^d(e_4)^a(e_2)^b(e_4)^c(e^1)_d=-g$$

中至少有一个非零(开始时对 f 和 g 的要求是 f^2+g^2 不恒为零). 这表明 $(\mathbb{R}^4,\ g_{ab})$ 不是平直时空. 由式(7-9-32)不难求得里奇张量

$$R_{ac}=R_{abc}{}^b=(f-f)(e^4)_a(e^4)_c=0\,,\text{①}$$

可见 g_{ab} 是真空爱因斯坦方程的解. □

为了后面的需要，可由式(7-9-32)导出 R_{abcd} 的表达式，见如下命题：

命题 7-9-2

$$\begin{aligned}R_{abcd}&=[f\,(e^1)_a\wedge(e^4)_b+g\,(e^2)_a\wedge(e^4)_b]\ (e^4)_c\wedge(e^1)_d\\&\quad+[g\,(e^1)_a\wedge(e^4)_b-f\,(e^2)_a\wedge(e^4)_b]\ (e^4)_c\wedge(e^2)_d.\end{aligned} \tag{7-9-33}$$

证明　习题. 提示：用 $R_{abcd}=g_{de}R_{abc}{}^e$，注意

$$g_{de}(e_3)^e\equiv(e_3)_d=g_{3\mu}(e^\mu)_d=g_{34}(e^4)_d=-\ (e^4)_d,$$

$$g_{de}(e_1)^e\equiv(e_1)_d=g_{11}(e^1)_d=(e^1)_d\,.$$ □

鉴于类光矢量场 K^a 对引力波传播的重要性，我们证明如下命题：

---

① 此式实为 $R_{ac}=-(\partial_1\partial_1P+\partial_2\partial_2P)\ (e^4)_a(e^4)_c$，$P$ 取式(7-9-22)的特定形式使 $\partial_1\partial_1P=f=-\partial_2\partial_2P$，从而保证 $R_{ac}=0$.

命题 7-9-3　设 ∇_b 是同 g_{ab} 适配的导数算符，则 $\nabla_b K^a = 0$.

证明　采用式(7-9-25)的标架及其对偶标架(7-9-28)并注意 $K^a = (e_3)^a$. 由式(5-7-4)可知 $\omega_3{}^\nu{}_a = -\gamma^\nu{}_{3\tau}(e^\tau)_a$，$\nu = 1, 2, 3, 4$. 因为非零的 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$ 由式(7-9-30)表示，所以 $\omega_3{}^\nu{}_a = 0$，$\nu = 1, 2, 3, 4$. 于是由上式得 $\gamma^\nu{}_{3\tau} = 0$，$\nu, \tau = 1, 2, 3, 4$，从而由式(5-7-1)知

$$(e_\tau)^b \nabla_b (e_3)^a = \gamma^\nu{}_{3\tau}(e_\nu)^a = 0, \qquad \tau = 1, 2, 3, 4.$$

由于 $(e_\tau)^b$ 是任一基矢，上式表明 $\nabla_b (e_3)^a = 0$. 注意到 $(e_3)^a = K^a$，便有 $\nabla_b K^a = 0$. □

由命题 7-9-3 得 $K^b \nabla_b K^a = 0$ 及 $\nabla_{(a} K_{b)} = 0$，可见①K^a 的积分曲线是(类光)测地线；②K^a 是 Killing 矢量场.

以上是数学计算结果. 物理地说，上面定义的弯曲时空($\mathbb{R}^4, g_{ab}$)代表一个引力平面波. 由式(7-9-23)可知 P 是决定($\mathbb{R}^4, g_{ab}$)的唯一可供选择的量，因此在研究引力波时首当其冲应该考察的就是函数 $P(x, y, u)$. 为了帮助理解，先看一个简单特例. 设 $f(u)$ 和 $g(u)$ 可表为

$$f(u) = F\cos\omega u, \qquad g(u) = G\cos\omega u \qquad (F，G \text{ 和 } \omega \text{ 为正的常数}), \tag{7-9-34}$$

则

$$2P(x, y, u) = [F(x^2 - y^2) + 2Gxy]\cos(\omega t - kz) \qquad (\text{其中 } k \equiv \omega). \tag{7-9-35}$$

上式的诱人之处是它很像某种单色平面波. 但应注意，尽管 $(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial z)^a$ 用 η_{ab} 衡量分别是类时和类空矢量场，用 g_{ab} 衡量却未必. 而如果 $(\partial/\partial t)^a$ 非类时或非类空，就不能把 t, z 分别看作时间和空间坐标，对式(7-9-35)的波动解释就遇到困难. 幸好可以证明($\mathbb{R}^4, g_{ab}$)中存在这样的时空区域，其中 $(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial z)^a$ 用 g_{ab} 衡量分别为类时和类空，因此至少在这种区域中可把式(7-9-35)解释为沿 z 向以光速 $c = 1$ 传播的单色引力平面波. “单色”是指有单一的角频率 ω；“平面”是因为每一时刻 t 的波阵面(等相面)是 z 为常数的平面(时刻 t 的相位 $\theta \equiv \omega t - kz$ 只是 z 的函数)；“引力”是由于 g_{ab} 代表引力场. 以上是 3 维语言. 用 4 维语言的讨论与 6.6.5 小节对电磁波的讨论类似(g_{ab} 及其曲率 R_{abcd} 分别对应于电磁 4 势 A_a 及电磁场 F_{ab})，见图 7-15.

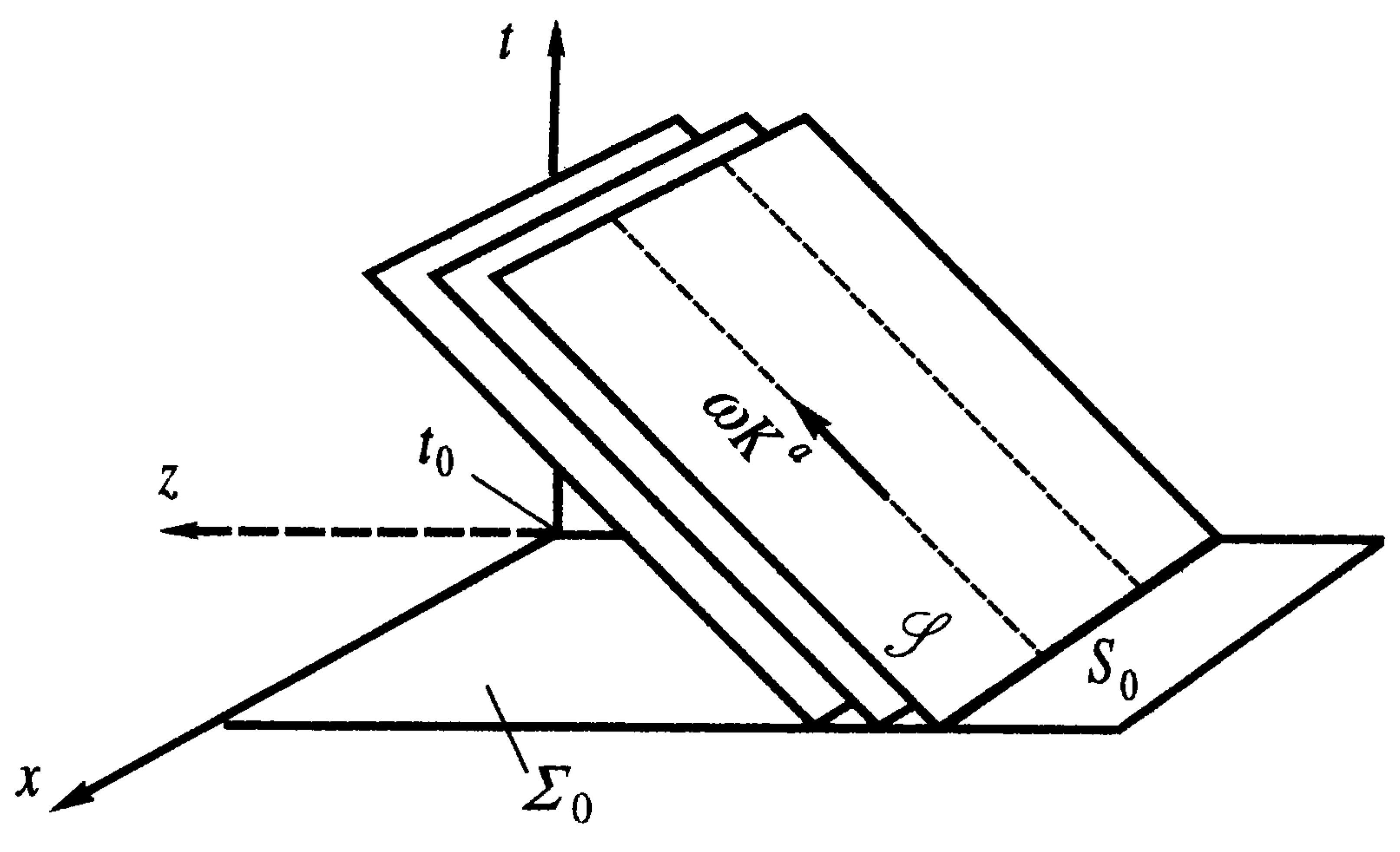


图 7-15　沿 z 轴正向传播的平面引力波的时空图. $\mathscr{S}$ 是时空中的等相面，S_0 是 t_0 时刻的波阵面.

式(7-9-24)定义的 K^a 与 ω 之积 ωK^a 可解释为 4 波矢，因为式(7-9-24)表明 ωK^a 在坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 的时间分量和空间分量分别为该系测得的角频率 ω 和 3 波矢 $\vec{k}$：

$$\omega K^0 = \omega, \qquad \omega K^1 = \omega K^2 = 0, \qquad \omega K^3 = k = \omega.$$

K^a(因而 ωK^a)的类光性反映上述引力波的相位 ωu 以光速传播. 设 G_1 和 G_2 是两个惯性观者(以 η_{ab} 衡量)，其空间坐标分别为(x, y, z_1)和(x, y, z_2). 两人在时刻 t_1 一般有不同相位，分别为 $\omega t_1 - kz_1$ 和 $\omega t_1 - kz_2$. 设在一段时间 $t_2 - t_1$ 后 G_2 “获得” G_1 刚才(时刻 t_1)的相位，即

$$\omega t_2 - kz_2 = \omega t_1 - kz_1,$$

我们便说相位值 $\omega t_1 - kz_1$ 在时间 $t_2 - t_1$ 内由 G_1 传到了 G_2，传播速率自然为

$$v = (z_2 - z_1)/(t_2 - t_1) = \omega/k = 1,$$

可见引力波的相位传播速率为光速(这只是坐标速率，更有意义的是几何语言中的相速，4 维语言中波阵面 $\mathscr{S}$ 的类光性保证这一相速是光速.). 图 7-16 是这一讨论的 4 维表述，图中 γ 是类光 4 矢 K^a 的一条积分曲线(类光测地线)，p_1，p_2 是 γ 线与观者 G_1, G_2 的世界线的交点. G_1 在时刻 p_1 的相位值 $\omega t_1 - kz_1$ 被 G_2 在时刻 p_2“获得”：相位沿类光测地线从 p_1 传到了 p_2. 请注意上述物理解释只适用于$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$的部分时空区域，$(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial z)^a$ 在其中分别为类时和类空. 然而现在可以抽掉观者、坐标等非内禀因素而只留下类光测地线 γ 及其任意两点 p_1，p_2，从而把波动解释推广到全时空. 其实 K^a 所代表的是引力波的全部信息(而不只是相位)的传播方向. 理由如下：作为 Killing 矢量场，K^a 对应的单参微分同胚群是单参等度规群，K^a 的积分曲线正是这个等度规群的轨道. 设 U_2 是 p_2 的任一邻域(见图 7-17)，则必存在 p_1 的邻域 U_1 和等度规映射 $\phi: U_1 \to U_2$ 使 $p_2 = \phi(p_1)$. 因此 U_2 中关于引力波的任何信息都完全一样地(等度规映射的后果)存在于 U_1 中，在这个意义上可以说引力波的所有信息都沿 K^a(因而以光速)传播. 这种基于等度规映射的解释不但适用于式(7-9-34)那样的特例，而且适用于由式(7-9-22)[其中 $f(u)$及 $g(u)$任意]和(7-9-23)定义的 g_{ab}. 于是我们说时空$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$存在引力平面波，或把 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$就称为**引力平面波时空**(gravitational plane wave spacetime). Sachs and Wu(1977)还从群论角度通过与闵氏时空中平面电磁波对比为这一平面引力波解释提供了更为深刻的论据. 命题 7-9-3 表明这种引力波的射线相互平行.[①] 当 f 和 g 线性相关时则称$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$为**单色引力平面波时空**.

---

① 因此称为**有平行射线的平面波前引力波**，简称 pp 波(plane-fronted gravitational waves with parallel rays). 一般说，凡有满足 $\nabla_a K^b = 0$ 的类光矢量场 K^a 的时空都叫 pp 波，见 Kramer et al.(1980).

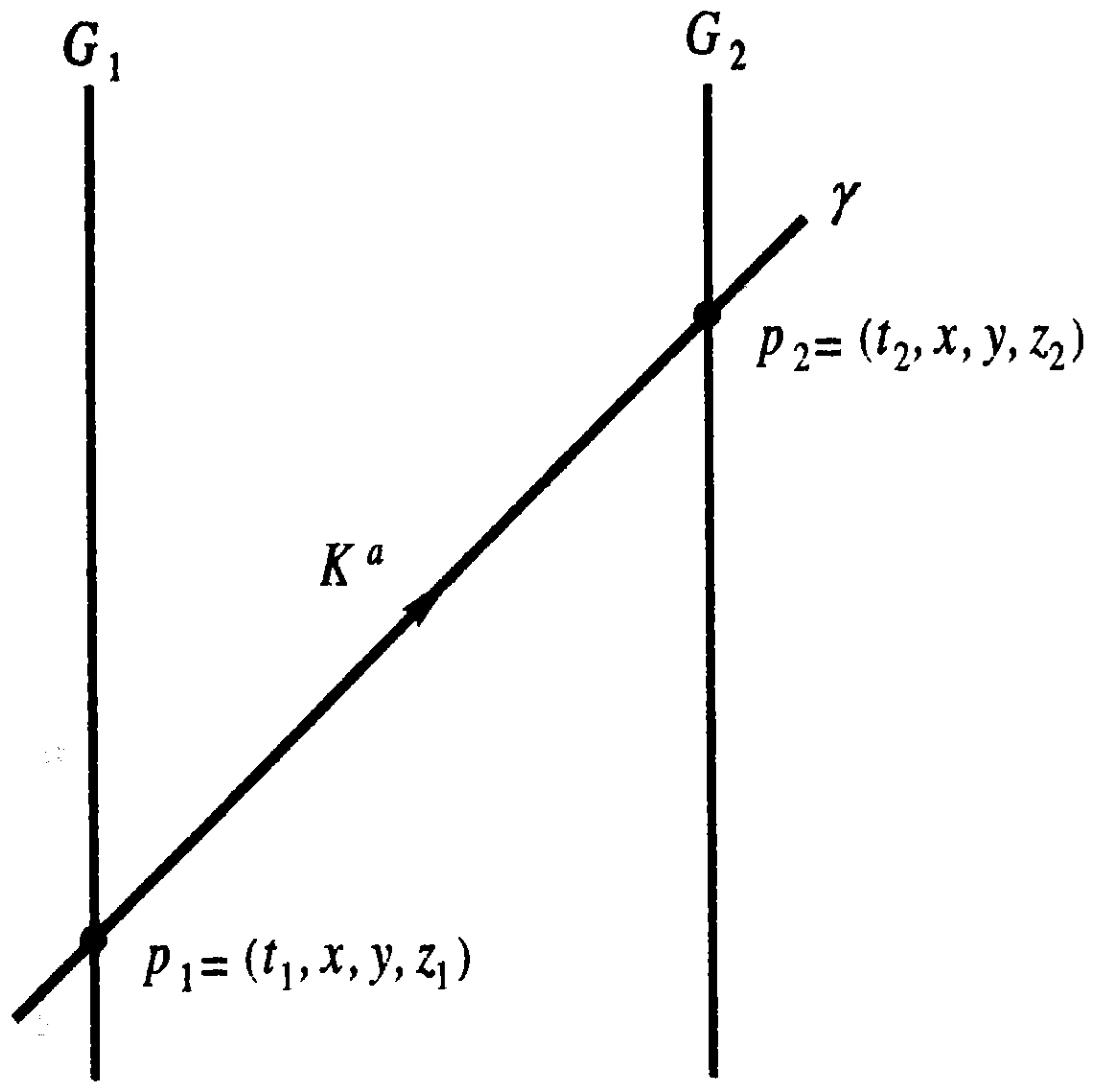


图 7-16 观者 G_1 在 t_1 时的相位值 ωt_1-kz_1 经历时间 t_2-t_1 后传到观者 G_2

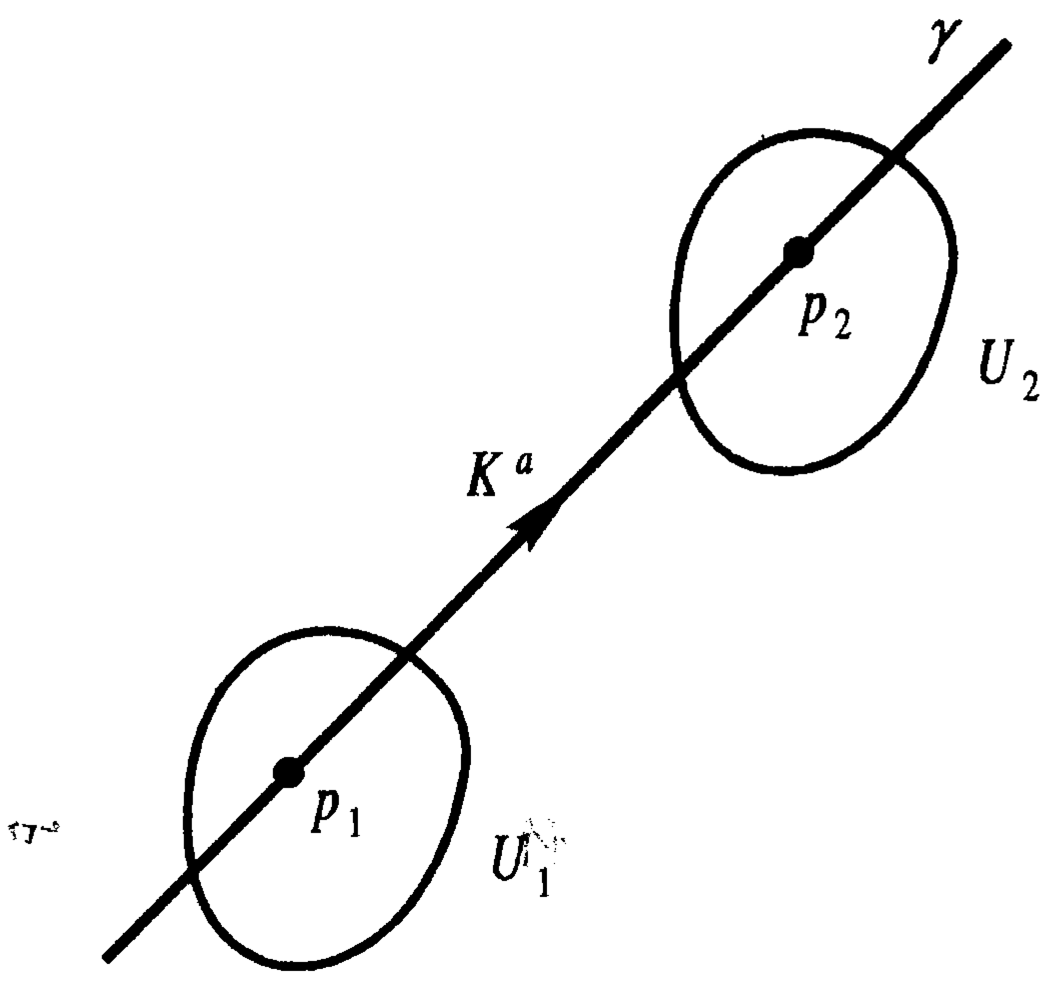


图 7-17 K^a 把引力波在 U_1 的信息如实地传播至 U_2

为进一步理解$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$的引力波，我们再补充如下内容(命题 7-9-4、7-9-5 和注 1，2). 急于学习引力波接收机理的读者可跳过这一部分. 为了有更大的普适性，以下两个命题中对 $P(x, y, u)$的函数形式不加限制.

命题 7-9-4 以 ∇_a 代表与式(7-9-23)的 g_{ab} 适配的导数算符，则

$$\nabla^a\nabla_a P=(\partial^2 P/\partial x^2)+(\partial^2 P/\partial y^2)\,. \tag{7-9-36}$$

证明 习题. □

注 1 设 $Q(t,x,y,z)$是闵氏时空中的已知函数，则

$$\partial^\mu\partial_\mu P(t,x,y,z)=Q(t,x,y,z) \tag{7-9-37}$$

在数学物理中称为关于待求函数 $P(t,x,y,z)$ 的(有源)波动方程，满足此方程的物理量 $P(t, x, y, z)$代表某种波动. 式(7-9-36)左边 $\nabla^a\nabla_a P$ 也可表为 $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu P$，当 $g_{ab}=\eta_{ab}$ 时退化为 $\partial^\mu\partial_\mu P$，可见 $\nabla^a\nabla_a P$ 是 $\partial^\mu\partial_\mu P$ 在弯曲时空的推广，因而式(7-9-36)代表弯曲时空$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$中物理量 $P(x,y,u)$ 的某种波动. 当 P 取式(7-9-22)的形式时

$$(\partial^2 P/\partial x^2)+(\partial^2 P/\partial y^2)=0\,,$$

故 $\nabla^a\nabla_a P=0$，即式(7-9-22)的 $P(x,y,u)$是弯曲时空中无源波动方程的解. 加上 $R_{ac}=0$ (即 g_{ab} 满足真空爱因斯坦方程)，便可看到“弯曲时空$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$代表真空中的引力波”的说法的合理性. 由此也可(至少部分地)看出把 P 取为式(7-9-22)的形式的用意所在.

命题 7-9-5 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$中的等 u 面是类光超曲面.

证明 由式(7-9-25)得 $K_a=g_{ab}K^b=g_{ab}(e_3)^b$. 仿照式(2-6-10a)的推导可得 $g_{ab}(e_3)^b=g_{3\mu}(e^\mu)_a$，故

$$K_a=g_{3\mu}(e^\mu)_a=g_{34}(e^4)_a=-(e^4)_a=-\nabla_a u\,,$$

其中最末一步用到式(7-9-28). 注意到 $\nabla_a u$ 是等 u 面的法余矢，可知其法矢

$\nabla_a u = -K^a$ 为类光. □

注 2 在式(7-9-34)的特例中，$\omega u = \omega t - kz$ 代表波的相位，而 ω 为常数，故等 u 面即 4 维语言中的 3 维等相面(波阵面)$\mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ 为类光超曲面表明式(7-9-34)的引力波以光速传播. 命题 7-9-5 保证在 $P = P(x, y, u)$ 的一般情况下等 u 面仍是类光超曲面(仍以类光矢量 K^a 为法矢)，因此不妨把 u 看作某种(推广的)相位，而等 u 面是类光超曲面则表明这个一般的 $P(x, y, u)$ 所代表的引力波的相速仍是光速.

下面以上述平面引力波为例介绍引力波接收的机理. 在 Weber 探测器中，铝棒的每个分子可看作一个观者，铝棒可看作定义于时空$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$中的一个子时空的参考系. 由于分子之间存在引力之外的相互作用，分子世界线不是测地线. 不过可以只讨论世界线为测地线的参考系(这种参考系最简单)，因为铝棒参考系对引力波的响应可从测地参考系的响应通过牛顿力学和固体物理学推出[见 Weber(1961)]. 测地参考系中相邻观者在时空曲率作用下的相对加速度就是潮汐加速度(见§7.6). 在式(7-9-35)的引力波的作用下，潮汐加速度将周期性地改变大小和方向，从而导致两相邻观者的相对振动. 取测地线 $\gamma(\tau)$ 为基准观者，我们来计算他周围的相邻观者相对于他的潮汐 3 加速 a^c. 设 $p \in \gamma$，Z^a 是 γ 在 p 点的 4 速(γ 的单位切矢)，W_p 是 p 点切空间 V_p 中与 Z^a 正交的 3 维子空间(画在图上就是一个与 Z^a 正交的小平面)，则空间分离矢量 w^a 便代表一个邻近观者(§7.6).① w^a 相应的观者相对于基准观者 $\gamma(\tau)$ 的潮汐加速度 a^c 由测地偏离方程(7-6-8)给出：

$$a^c = -R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d . \tag{7-9-38}$$

$\forall\, w^b \in W_p$，由上式便可确定一个 $a^c \in W_p$，因此上式定义了一个线性映射 $\psi : W_p \to W_p$. 由“张量面面观”(见§2.4)可知 ψ 可看作 W_p 上的一个(1, 1)型张量，记作 $\psi^c{}_b$，即

$$a^c = \psi^c{}_b w^b . \tag{7-9-39}$$

与式(7-9-38)对比便得

$$\psi^c{}_b = -R_{abd}{}^c Z^a Z^d . \tag{7-9-40}$$

为了计算 $\psi^c{}_b$，可先给 W_p 选择一个方便的正交归一 3 标架$\{(E_i)^a\}$：

$$\begin{aligned}(E_1)^a &= (\partial/\partial x)^a + E^{-1} Z_1 K^a ,\\ (E_2)^a &= (\partial/\partial y)^a + E^{-1} Z_2 K^a ,\\ (E_3)^a &= E^{-1} K^a - Z^a ,\end{aligned} \tag{7-9-41}$$

其中 $E \equiv -g_{ab} Z^a K^b > 0$，$Z_1 \equiv g_{ab} Z^a (\partial/\partial x)^b = Z_b (\partial/\partial x)^b$ (故 Z_1 是 Z_b 的坐标分量而

① 更准确地说，w^a 只给出一个“分离方向”，$w^a \Delta s$(其中 Δs 为小量)才确定在该方向上的一个相邻观者，见§7.6.

非标架分量)，$Z_2\equiv g_{ab}Z^a(\partial/\partial y)^b=Z_b(\partial/\partial y)^b$. 请读者验证：①$\{(E_i)^a\}$以 g_{ab} 衡量的确正交归一；②$(E_3)^a$ 是 p 点的 K^a 在 W_p 上的投影 $h^a{}_bK^b=K^a+Z^aZ_bK^b$ 做归一化的结果；③$\{(E_i)^a\}$沿测地线平移(因而费移) [证明提示：由 $\gamma(\tau)$ 的测地性及 $\nabla_aK^b=0$ 可知 E 沿线为常数，由此易证 $Z^b\nabla_b(E_3)^a=0$. 注意到 $\nabla_b(\partial/\partial x)^a=-K^a\omega_1{}^3{}_b$，便可证明 $Z^b\nabla_b(E_1)^a=0$.]. 以 $\mathscr{S}$ 代表含点 $p\in\gamma$ 的波阵面(见图 7-18 的类光超曲面)，$\hat{\mathscr{S}}$ 代表 V_p 中切于 $\mathscr{S}$ 的全体元素构成的 3 维子空间，$S_p\equiv\hat{\mathscr{S}}\cap W_p=\{w^a\in W_p\,|\,g_{ab}w^aK^b=0\}$，则$\{(E_1)^a, (E_2)^a\}$是 S_p 的一个基底. 由于画图时总把 V_p 的子空间(例如 W_p)画成小平面(把 V_p 的子集画成 M 的子集)，故 $\hat{\mathscr{S}}$ 在图 7-18 中与 $\mathscr{S}$ 并无区别. 以上数学设定的物理意义很明确：测地观者 $\gamma(\tau)$ 在时刻 p 认为引力波沿空间方向$(E_3)^a$传过，2 维波阵面 S_p 与传播方向$(E_3)^a$ 正交(见图 7-18). $\psi^c{}_b$ 在 3 标架$\{(E_i)^a\}$的分量为

$$\psi^i{}_j=\psi^c{}_b(E^i)_c(E_j)^b=\psi_{cb}(E^i)^c(E_j)^b=\psi_{cb}(E_i)^c(E_j)^b=-R_{abcd}Z^a(E_j)^bZ^c(E_i)^d\,,\tag{7-9-42}$$

其中用到正交归一标架的性质 $(E^i)^c=\delta^{ij}(E_j)^c=(E_i)^c$. 以式(7-9-33)的 R_{abcd} 和式(7-9-41)代入上式，便得$\psi^i{}_j$ 的矩阵

$$(\psi^i{}_j)=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \alpha\equiv-E^2f,\qquad \beta\equiv-E^2g\,.\tag{7-9-43}$$

上式的推导留作习题. 提示：

(1) 注意利用 $(e^1)_a(E_2)^a=(e^2)_a(E_1)^a=(e^4)_a(E_1)^a=(e^4)_a(E_2)^a=0$；

(2) $(e^4)_aZ^a=g_{ab}Z^a(e^4)^b=g_{ab}Z^ag^{43}(e_3)^b=-g_{ab}Z^aK^b=E$，其中 g^{43} 是 g^{ab} 在标架$\{(e^\mu)_a\}$的分量，见式(7-9-26)；

(3) $(e^4)_a(E_3)^a=(e^4)_a[E^{-1}(e_3)^a-Z^a]=-(e^4)_aZ^a=-E$.

现在讨论式(7-9-43)的物理意义. 设$\gamma(\tau)$为基准观者，$p\in\gamma$，Q 是正交“小平面” W_p上以 p 为心、以小量为半径的球面，则球面上每点可看作一个相邻观者在时刻 p 的表现(见图 7-19). 我们用式(7-9-39)和(7-9-43)讨论在引力波作用下这些相邻观者相对于$\gamma(\tau)$的潮汐 3 加速 a^c. 球面上每点对应于一个 w^b，设它在正交归一 3 标架$\{(E_i)^a\}$的分量为 w^1，w^2，w^3，则它的 3 加速的分量排成的列矩阵为

$$\begin{bmatrix}a^1\\ a^2\\ a^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^1\\ w^2\\ w^3\end{bmatrix}.\tag{7-9-44}$$

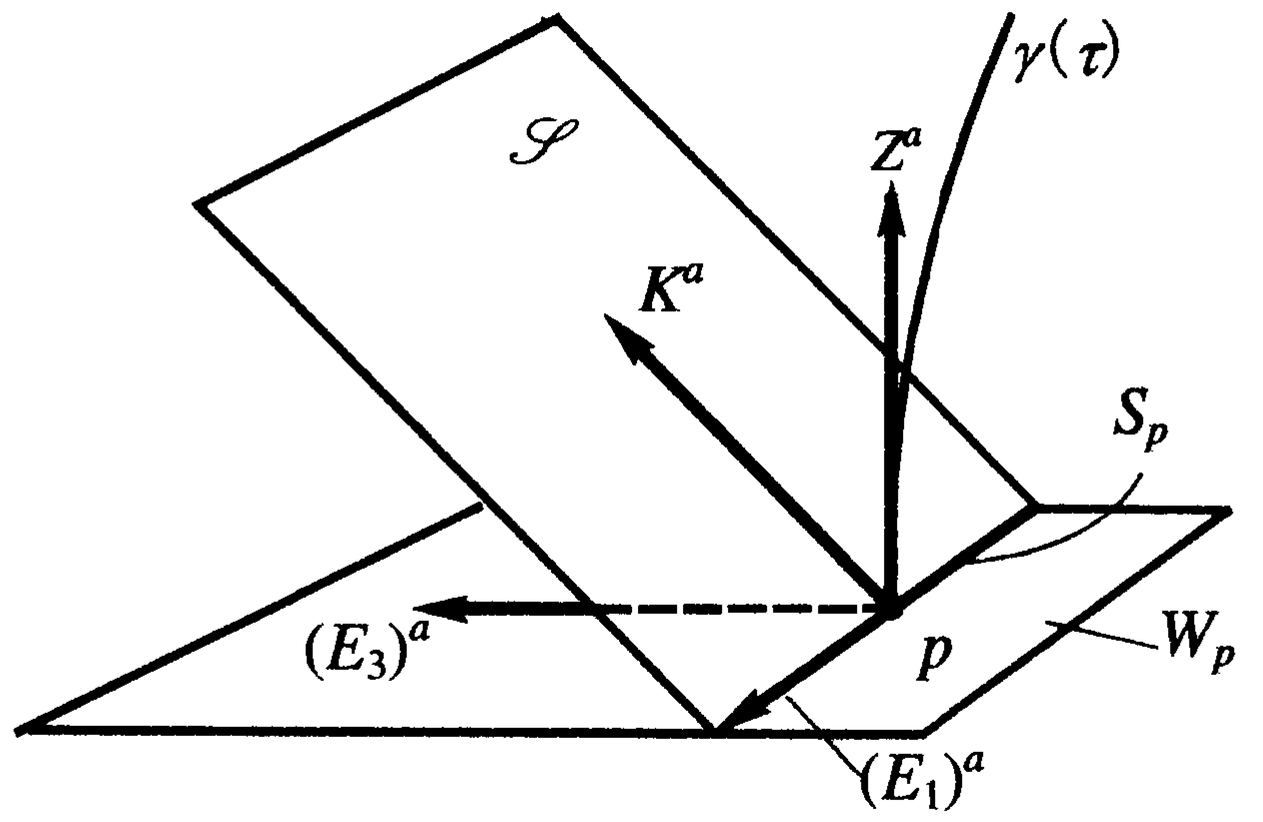


图 7-18 测地观者$\gamma(\tau)$在时刻 p 认为引力波沿$(E_3)^a$传过，波阵面 S_p 与$(E_3)^a$正交

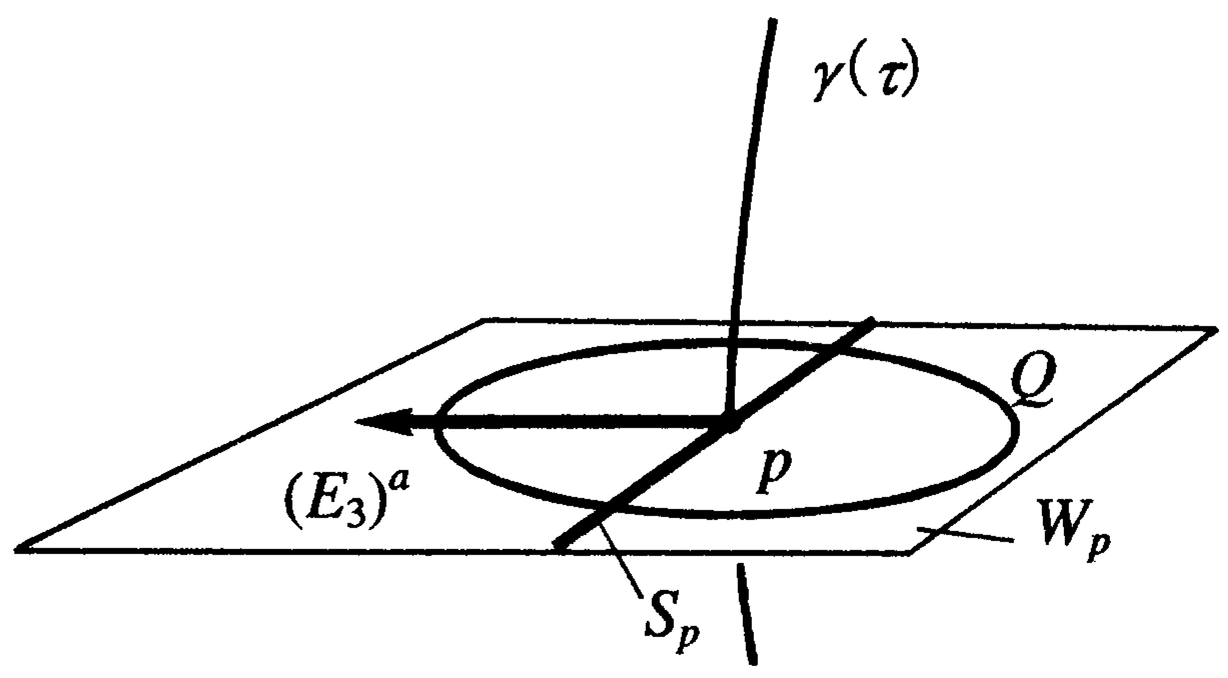
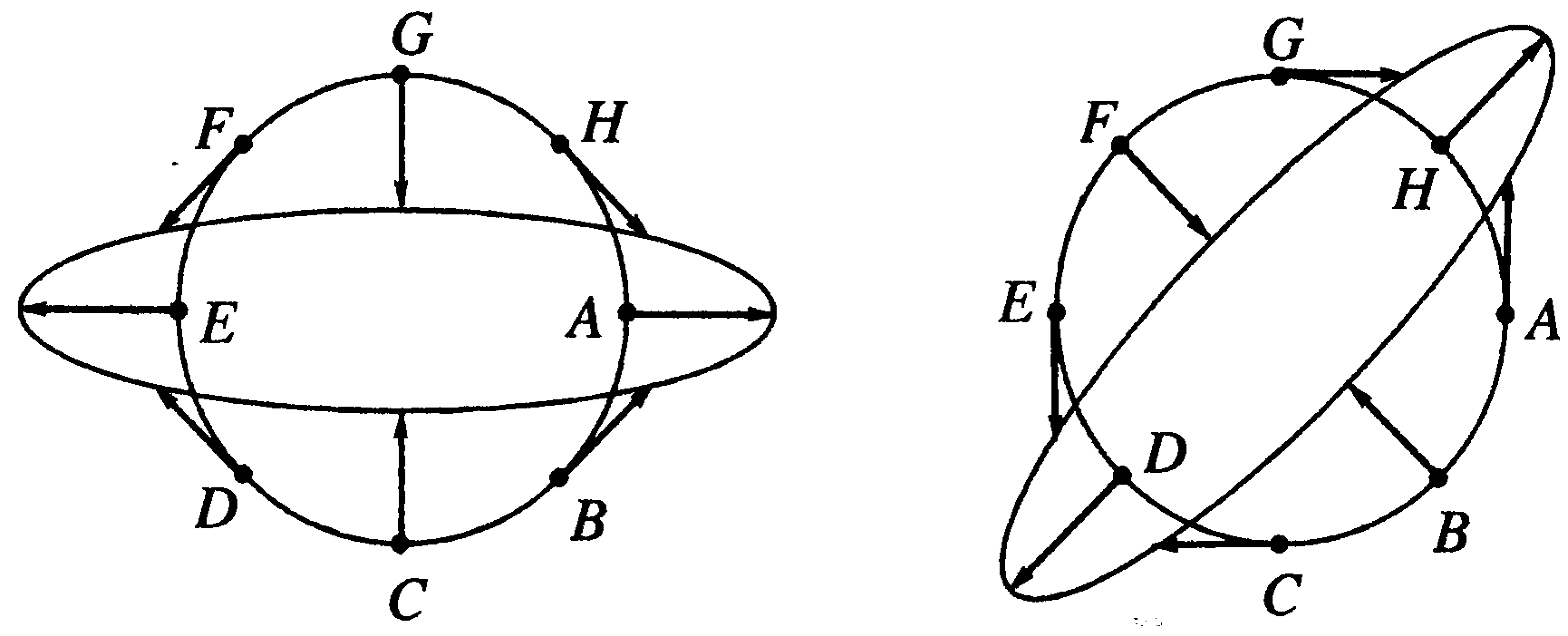


图 7-19 正交面 W_p 上以 p 为心的小球面 Q 的每点代表一个相邻观者在时刻 p 的表现

如果 $w^1=w^2=0$，即 w^a 平行于引力波传播方向$(E_3)^a$，则由式(7-9-44)得 $a^1=a^2=a^3=0$，可见这种相邻观者根本没有 3 加速. 这是引力波横波性的一种物理表现：位于纵向(与传播方向平行的方向)的相邻观者毫无反应，只有横向相邻观者才有振动. 或者说，所有潮汐加速度都正交于传播方向$(E_3)^a$，因而位于图 7-18 的波阵面 S_p 内. 于是可以只关心横向响应，即把式(7-9-44)简化为

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}, \qquad (7\text{-}9\text{-}45)$$

即只关心由$(E_1)^a$和$(E_2)^a$支起的 2 维子空间的一个小圆周上各点的响应. 取圆周上 A, B, C, D, E, F, G, H 等 8 个有代表性的点(见图 7-20)，并分别讨论以下两种特殊情况：(a)$\beta\equiv 0$, $\alpha>0$；(b)$\alpha\equiv 0$, $\beta>0$. 由简单计算可得表 7-1 和图 7-20 的结果. 图 7-20 所示的变形称为剪切(shear)，详见§14.1.

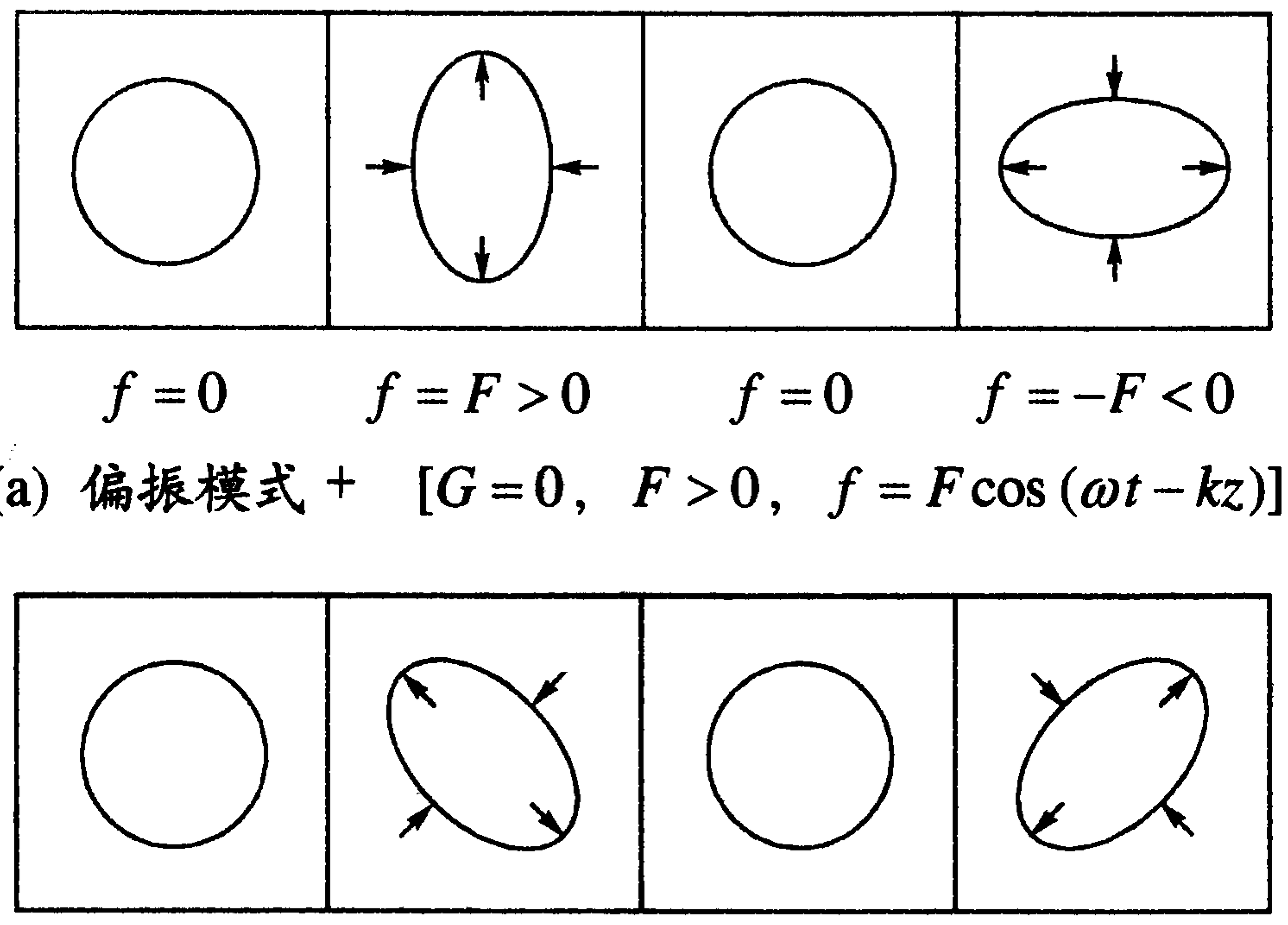


情况(a) $\alpha>0, \beta=0$ 情况(b) $\alpha=0, \beta>0$

图 7-20 引力波作用下圆周在某一时刻的变形趋势(参见表 7-1)

表 7-1 和图 7-20 只反映圆周在某一特定时刻的潮汐加速度(及其变形趋势). 要把握圆周在一段时间内的变形(振动)情况，就要先给出函数 $f(u)$和 $g(u)$的具体形式. 我们仍只讨论 $f(u)=F\cos(\omega t-kz)$ 和 $g(u)=G\cos(\omega t-kz)$ 的情况. 式(7-9-43)表明，决定潮汐加速度的直接因素是 $E^2 f$ 和 $E^2 g$ 而非 f 和 g. 不过，由 K^a 的测地性可知 E 在测地线 $\gamma(\tau)$ 上为常数，所以潮汐加速度反映的也就是 f 和 g 的值. 又由于测地线 $\gamma(\tau)$ 上的 u 与固有时 τ 有线性关系 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau=E$(证明留作练习)，观者

测得的 $a^i \sim \tau$ 曲线在纵横坐标的适当伸缩后反映引力波的 $f \sim u$ 曲线或 $g \sim u$ 曲线. 考虑上述引力波的两种基本偏振模式：① $G=0$[因而 $g(u)\equiv 0$]，称为**模式 +**；② $F=0$[因而 $f(u)\equiv 0$]，称为**模式 ×** . 在引力波足够弱的近似情况下，圆周在这两种模式作用下在一个周期中的振动情况分别如图 7-21(a)、(b)所示. 一般振动可表为这两种振动模式的叠加.



$f=0$　　$f=F>0$　　$f=0$　　$f=-F<0$

(a) 偏振模式 +　[$G=0$, $F>0$, $f=F\cos(\omega t-kz)$]

$g=0$　　$g=G>0$　　$g=0$　　$g=-G<0$

(b) 偏振模式 ×　[$G=0$, $F>0$, $g=G\cos(\omega t-kz)$]

图 7-21　线偏振平面引力波作用下圆周在一个周期内的振动

图 7-20 和 7-21 所显示的引力波对试验粒子的效应与电磁波的效应有所不同. 在指出这种区别之前，有必要说明一点. 引力波是"曲率的振动的传播"，而曲率导致潮汐加速度，因此要通过测量一个自由粒子相对于另一个(作为基准的)自由粒子的相对加速度来探测，已如上述. 电磁波是电磁场的振动的传播，探测时只须测量一个带电粒子相对于惯性系的加速度，其表达式比潮汐加速度简单得多，即 $\vec{a}=(q/m)\vec{E}$. 设被测的是线偏振电磁波，则与图 7-21 对应的就是简单得多的图 7-22. 现在指出引力波与电磁波的一个区别：图 7-21 中的任一方格内(实际是指任一时刻)的花样在绕传播方向(过对称中心垂直于纸面的直线)转 180°(及其整数倍)后复原(不变)，而图 7-22 中任一方格内的花样至少要转 360°后才复原. 这一区别体现为引力子与光子有不同的自旋[人们普遍相信广义相对论最终必须同量子理论结合成为一套完整、自洽的量子引力论. 虽然这一理论至今尚未建成，物理学家仍然经常谈及引力量子化及其量子——**引力子**(graviton). 粗略地说，引力子与单色平面引力波的联系类似于光子与单色平面电磁波的联系.]. 引力子与光子一样没有静质量，但两者有不同的自旋. 图 7-21 与 7-22 的上述区别同以下事实有密切联系：光子的自旋为 1，而引力子的自旋为 2.

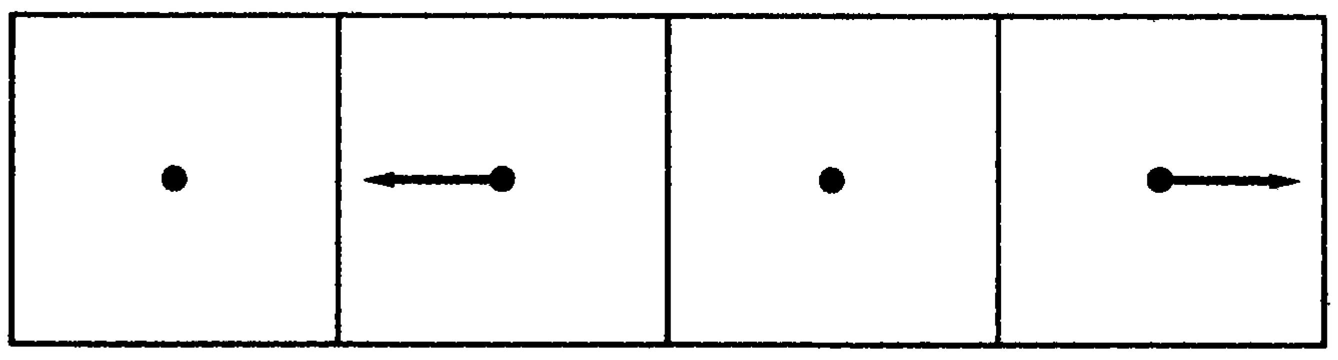


图 7-22　线偏振电磁波作用下带电粒子在一个周期内的振动

[选读 7-9-1 完]

表 7-1 圆周上 8 个点在同一时刻相对于圆心的潮汐加速度 $\vec{a}$ (总体效果见图 7-20)

情况(a) $\alpha>0, \beta=0$

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha/\sqrt{2} \\ \alpha/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\alpha/\sqrt{2} \\ \alpha/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\alpha/\sqrt{2} \\ -\alpha/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha/\sqrt{2} \\ -\alpha/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\vec{a}$	A →	B ↗	C ↑	D ↖	E ←	F ↙	G ↓	H ↘

情况(b) $\alpha=0, \beta>0$

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\beta/\sqrt{2} \\ \beta/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\beta/\sqrt{2} \\ -\beta/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \beta/\sqrt{2} \\ -\beta/\sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \beta/\sqrt{2} \\ \beta/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\vec{a}$	A ↑	B ↖	C ←	D ↙	E ↓	F ↘	G →	H ↗

习 题

~1. 试证弯曲时空麦氏方程 $\nabla^a F_{ab}=-4\pi J_b$ 蕴含电荷守恒定律，即 $\nabla_a J^a=0$．注：$\nabla^a F_{ab}=-4\pi J_b$ 等价于式(7-2-8)而非式(7-2-9)，故本题表明式(7-2-8)而非式(7-2-9)可推出电荷守恒.

~2. 试证 $\dfrac{D_F\omega_a}{d\tau}=\dfrac{D\omega_a}{d\tau}+(A_a\wedge Z_b)\,\omega^b \quad \forall\omega_a\in\mathscr{F}_G(0,1)$.

~3. 试证费米导数性质 3.

4. 试证类时线 $G(\tau)$上长度不变(且非零)的矢量场 v^a 必经受时空转动. 提示：令 $u^a\equiv Dv^a/d\tau$，则 $u_a v^a=0$. 先证：无论 $v_a v^a$ 为零与否，总有 $G(\tau)$上矢量场 v'^a 使 $v'_a v^a=1$. 再验证 v^a 经受以 $\Omega_{ab}\equiv 2\,v'_{[a}u_{b]}$ 为角速度 2 形式的时空转动.

5. 设$\{T,X,Y,Z\}$为闵氏时空的洛伦兹坐标系，曲线 $G(\tau)$的参数表达式为

$$T=A^{-1}\text{sh}A\tau\,,\qquad X=A^{-1}\text{ch}A\tau\,,\qquad Y=Z=0\,,\quad (\text{其中}\,A\,\text{为常数})$$

(a) 试证 $G(\tau)$是类时双曲线(即图 6-42 的 G)，τ 是固有时，A 是 $G(\tau)$的 4 加速 A^a 的长度.

*(b) 试证从$\{T, X, Y, Z\}$系原点 o 出发的与 $G(\tau)$有交的任一半直线 $\mu(s)$ 都与 $G(\tau)$正交.

*(c) 设(b)中的 $\mu(s)$ 的参数 s 是 μ 的线长，随着 $\mu(s)$ 取遍所有从 o 出发并与 $G(\tau)$有交的半直线，便得 $G(\tau)$上的一个空间矢量场 $w^a \equiv (\partial/\partial s)^a$，试证 w^a 沿 $G(\tau)$费移.

*(d) 令 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$，选$\{Z^a, w^a, (\partial/\partial Y)^a, (\partial/\partial Z)^a\}$为 $G(\tau)$上的正交归一 4 标架场，求出 $G(\tau)$的固有坐标系$\{t, x, y, z\}$并指出其坐标域.

答：$T=(A^{-1}+x)\,\mathrm{sh}At$, $X=(A^{-1}+x)\,\mathrm{ch}At$, $Y=y$, $Z=z$.

(e) 写出闵氏度规在上述固有坐标系中的线元表达式. 计算闵氏度规在该系的克氏符，验证它满足引理 7-4-3，即式(7-4-10).

6. 设 G 是质点 L 在点 $p\in L$ 的瞬时静止自由下落观者(即 G 的 4 速 Z^a 与 L 的 4 速 U^a 在 p 点相切)，A^a是L在p点的4加速，a^a是L在p点相对于G的3加速[由式(7-4-3)定义]，试证 $a^a=A^a$. 注：本命题可视为命题 6-3-6 在弯曲时空的推广.

~7. 度规 g_{ab} 叫**里奇平直**的，若 g_{ab} 的里奇张量为零. 试证 g_{ab} 是真空爱因斯坦方程的解的充要条件为 g_{ab} 是里奇平直的.

~8. 设(M, g_{ab})为里奇平直时空(定义见上题)，ξ^a 是其中的一个 Killing 矢量场，试证 $F_{ab}:=(\mathrm{d}\xi)_{ab}$ 满足(M, g_{ab})的无源 $(J_a=0)$ 麦氏方程. 提示：利用 Killing 场 ξ^a 满足的 $\nabla_a\xi^a=0$ (第 4 章习题 11 的结果).

9. 设 $\xi_\mu(\mu=0, 1, 2, 3)$ 为方程 $\partial^b\partial_b\xi_\mu=0$ 在初始条件式(7-9-10)~(7-9-13)下的解，试证由 $\xi_a=\xi_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a$ 及 γ_{ab} 按式(7-9-8)构造的 γ'_{ab} 在无源区既满足洛伦兹规范条件 $\partial^a\bar{\gamma}'_{ab}=0$ 又满足 $\gamma'=0$ 和 $\gamma'_{0i}=0(i=1, 2, 3)$. 提示：(1)根据解的唯一性定理，只须证明 $\gamma'=0$ 和 $\gamma'_{0i}=0$ 分别是方程 $\partial^c\partial_c\gamma=0$ 和 $\partial^c\partial_c\gamma'_{0i}=0$ 的满足初始条件 $\gamma'|_{\Sigma_0}=0$，$\partial\gamma'/\partial t|_{\Sigma_0}=0$，$\gamma'_{0i}|_{\Sigma_0}=0$ 和 $\partial\gamma'_{0i}/\partial t|_{\Sigma_0}=0$ 的解. (2)由 $\partial^b\partial_b\xi_\mu=0$ 可得 $\partial^2\xi_\mu/\partial t^2=\nabla^2\xi_\mu$.

10. 设 γ_{ab} 满足 (a) $\partial^a\bar{\gamma}_{ab}=0$；(b) $\gamma=0$；(c) $\gamma_{0i}=0\ (i=1, 2, 3)$；(d) $\gamma_{00}=$常数. 试找出一个“无限小”矢量场 ξ^a 使 $\tilde{\gamma}_{ab}\equiv\gamma_{ab}+\partial_a\xi_b+\partial_b\xi_a$ 满足

(a) $\partial^a\bar{\tilde{\gamma}}_{ab}=0$；(b) $\tilde{\gamma}=0$；(c) $\tilde{\gamma}_{0i}=0\ (i=1,2,3)$；(d) $\tilde{\gamma}_{00}=0$.

11. 试证命题 7-9-2.

12. 验证式(7-9-41)后的(1)~(3).

13. 试证式(7-9-43).

14. 试证式(7-9-36)，即 $\nabla^a\nabla_a P=(\partial^2 P/\partial x^2)+(\partial^2 P/\partial y^2)$.

第 8 章　爱因斯坦方程的求解

爱因斯坦方程的求解是广义相对论的重要问题. 许多精确解对广义相对论的研究和发展起到重要作用. 由于爱因斯坦方程是高度非线性的偏微分方程，一般情况下求解(指精确解)非常困难. 然而，在时空度规具有适当对称性(例如有若干独立 Killing 矢量场)时求解变得相对容易. 第一个精确解(也是物理上最重要的解之一)——施瓦西真空解——就是 Schwarzschild (施瓦西)在时空具有静态性和球对称性的前提下、在爱因斯坦方程发表不到一年后求得的.

§8.1　稳态时空和静态时空

定义 1　时空(M, g_{ab})称为**稳态的**(stationary),若它存在类时 Killing 矢量场. 这时也称 g_{ab} 为稳态度规.

设(M, g_{ab})存在类时 Killing 矢量场ξ^a，其积分曲线的参数为 t, 即 $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$. 选择以 t 为第零坐标(即 $t = x^0$)、以 ξ^a 的积分曲线为 x^0 坐标线的任一坐标系 $\{x^\mu\}$ (即 ξ^a 的适配坐标系，见§ 4.2)，以 $g_{\mu\nu}$ 表示 g_{ab} 在该系的分量，则

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial t = (\mathscr{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0, \tag{8-1-1}$$

其中第一步用到定理 4-2-2, 第二步是由于ξ^a 为 Killing 场. 式(8-1-1)说明全部 $g_{\mu\nu}$ 都与时间坐标 t 无关，即 $g_{\mu\nu}$ 具有“时间平移不变性”. 这正是“稳态”一词的由来.

反之，若(M, g_{ab})中存在局域坐标系$\{x^\mu\}$使

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0 \qquad (t \equiv x^0 \text{ 是类时坐标}), \tag{8-1-2}$$

则$\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$是坐标域 O 上的光滑矢量场，而$\{x^\mu\}$正是这一矢量场的适配坐标系，故由定理 4-2-2 有

$$(\mathscr{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0,$$

因而在 O 上有 $\mathscr{L}_\xi g_{ab} = 0$，可见$\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$是类时 Killing 矢量场. 所以稳态时空也可用坐标语言定义如下: 若存在局域坐标系$\{x^\mu\}$(坐标域为 O)使 g_{ab} 的全部分量与类时坐标 x^0 无关，则至少(O, g_{ab})是稳态时空.

直观地说，稳态时空对应于不随时间而变的引力场. 然而时间概念与观者有关. 例如，由于地球引力场在地面比高空较强，如果你(作为观者)在从地面向高空运动的过程中不断测量地球的引力场，你会发现“地球引力场随时间而变”. 这

当然不表明地球引力场不是稳态引力场. 可见在借用观者判断引力场的稳态性时需要选择适当的观者(参考系). 如果你设法把自己保持在地球某点上空的固定高度(你的世界线与地球表面世界面的母线平行), 你就会(才会)发现地球引力场"不随时间而变". 就是说, 地球引力场相应的时空有如下特点: 存在一组特定的类时曲线(重合于类时 Killing 矢量场的积分曲线), 以这些曲线为世界线的观者测得的度规分量不随时间而变. 许多时空(例如正在膨胀着的宇宙)不具备这一特点(不存在类时 Killing 矢量场), 定义 1 正是这一特点的数学表述.

例 1 闵氏时空是稳态时空, 因为其洛伦兹坐标系 $\{x^\mu\}$ 的第零坐标基矢场 $(\partial/\partial x^0)^a$ 是类时 Killing 矢量场.

例 2 某 2 维时空的度规在某坐标系 $\{t, x\}$ 中可表为 $\mathrm{d}s^2 = -t^{-4}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2, t > 0$. 有人认为这不是稳态度规, 因其分量 $g_{00} = -t^{-4}$ 与时间坐标 t 有关. 然而一个简单的坐标变换 $T = t^{-1}$、$X = x$ 就把线元变为 $\mathrm{d}s^2 = -\ \mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2$, 这无非是 2 维闵氏度规, 当然是稳态的!

例 2 从一个角度说明不从几何角度看问题容易出现误解. 稳态性是时空的内禀几何性质, 不因坐标系的选择而变. 请注意下面两个说法都是错的:

(1) (错!) 若度规的某些坐标分量 $g_{\mu\nu}$ 与该坐标系的类时坐标 t 有关, 则时空不是稳态的.

(2) (错!) 例 2 的时空在坐标系 $\{T, X\}$ 中是稳态时空, 在坐标系 $\{t, x\}$ 中不是稳态时空.

定义 2 (M, g_{ab}) 中的矢量场 v^a 称为**超曲面正交的**(hypersurface orthogonal), 若 $\forall p \in M$ 存在与 v^a 处处正交的超曲面 Σ 使 $p \in \Sigma$.

定义 3 时空 (M, g_{ab}) 称为**静态的**(static), 若它存在超曲面正交的类时 Killing 矢量场. 这时也称 g_{ab} 为**静态度规**.

可见静态时空必稳态, 但反之不然.

命题 8-1-1 设 $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ 是 Killing 矢量场, $\Sigma_0 = \{p \in M \mid t(p) = 0\}$ 是处处与 ξ^a 正交的超曲面, 则超曲面 $\Sigma_{t_1} = \{p \in M \mid t(p) = t_1\}$ 也处处与 ξ^a 正交.

证明 习题. 提示: $\Sigma_t = \phi_t[\Sigma_0]$, ϕ_t 是与 ξ^a 对应的单参等度规群的一个元素, 即一个等度规映射. □

设 (M, g_{ab}) 为静态时空, $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ 为类时 Killing 场, Σ_0 为与 ξ^a 正交的超曲面. 把 ξ^a 的每条积分曲线与 Σ_0 的交点选作曲线参数的零点, 在 Σ_0 上选局域坐标系 $\{x^i\}$. 因 Σ_0 上各点有 $\xi^a \neq 0$, 故可用 ξ^a 的积分曲线把这 3 个坐标"携带"至 Σ_0 以外(即令 ξ^a 的每条积分曲线上各点的 x^i 都等于该线与 Σ_0 的交点的 x^i), 再把每条积分曲线的参数 t 作为线上每点的类时坐标 x^0(称为 Killing 时间坐标), 便得一

个 4 维局域坐标系$\{t, x^i\}$，它以ξ^a的积分曲线为t坐标线．又由于x^i坐标线都躺在正交面Σ_t上，所以类时坐标基矢$(\partial/\partial t)^a$与类空坐标基矢$(\partial/\partial x^i)^a$正交，因而

$$g_{0i} = g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial x^i)^b = 0, \qquad i=1, 2, 3,$$

故g_{ab}在此系中的线元表达式简化为

$$ds^2 = g_{00}(x^1,x^2,x^3)dt^2 + g_{ij}(x^1,x^2,x^3)dx^i dx^j . \tag{8-1-3}$$

这样的坐标系叫**时轴正交坐标系**(time-orthogonal coordinate system).

设(M, g_{ab})为稳态时空，则类时 Killing 矢量场ξ^a的积分曲线对应的参考系叫**稳态参考系**(“对应”是指把积分曲线重新参数化，以固有时τ代替 Killing 时间t作为参数．)．ξ^a为超曲面正交的稳态参考系叫**静态参考系**．一个观者称为**稳(静)态观者**，若他是某一稳(静)态参考系的观者．命题 8-1-1 中定义的Σ_t称为静态参考系的**同时面**(simultaneity surface)．应注意此处的“时间”t是坐标时而不是静态观者的固有时τ(除非$g_{00}=-1$)，易证两者间有如下关系：$d\tau = \sqrt{-g_{00}}dt$．

静态时空不但有稳态时空所具有的时间平移不变性，而且具有时间反射不变性(不考虑可能出现的某些微妙情况)．设$\xi^a = (\partial/\partial t)^a$是超曲面正交的类时 Killing 矢量场，则时间反射变换是指微分同胚映射$\phi: M\to M$，满足$t(\phi(p)) = -t(p)$，$x^i(\phi(p))=x^i(p)$，$\forall p\in M$．下面证明这个ϕ是等度规映射，因而说静态时空有时间反射不变性．

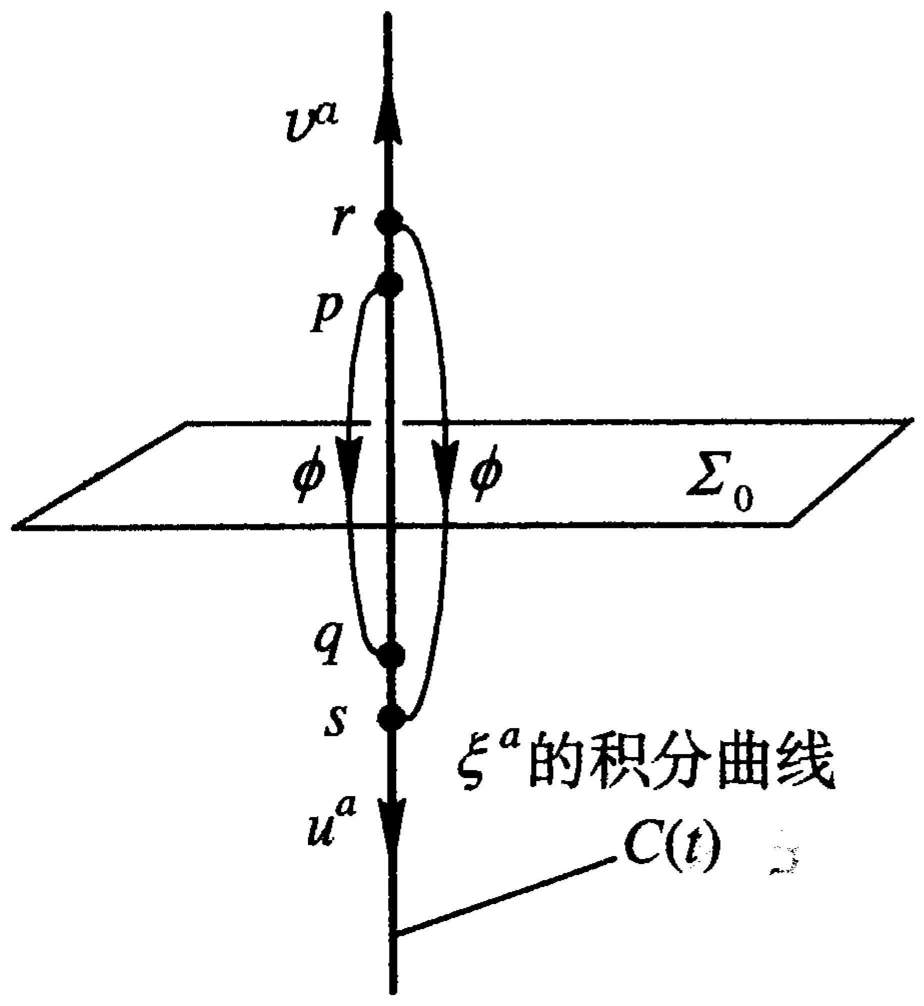


图 8-1　时间反射$\phi: M\to M$

设$C(t)$是ξ^a过p的积分曲线，且$p=C(t_1)$．由$x^i(\phi(p))=x^i(p)$可知$q\equiv\phi(p)$也在$C(t)$上．先证$\phi_*[(\partial/\partial t)^a|_p] = -(\partial/\partial t)^a|_q$．令$v^a\equiv(\partial/\partial t)^a|_p$，$u^a\equiv-(\partial/\partial t)^a|_q$，$r\equiv C(t_1+\Delta t)$，$s\equiv\phi(r)$(见图 8-1)．设$f$是$M$上任一光滑函数，则$q$点的矢量$\phi_* v^a$对$f$的作用结果为

$$(\phi_* v)(f) = v(\phi^* f) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_1}(\phi^* f) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(\phi^* f)|_r - (\phi^* f)|_p]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(f|_s - f|_q) = u(f),$$

故$\phi_* v^a = u^a$，即$\phi_*[(\partial/\partial t)^a|_p] = -(\partial/\partial t)^a|_q$．类似地可证

$$\phi_*[(\partial/\partial x^i)^a|_p] = (\partial/\partial x^i)^a|_q, \qquad i=1, 2, 3.$$

以$g_{\mu\nu}$和$(\phi^* g)_{\mu\nu}$分别代表g_{ab}和$(\phi^* g)_{ab}$在$\{t, x^i\}$系的分量，则

$$(\phi^* g)_{00}|_p = [(\phi^* g)_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b]|_p$$
$$= [g_{ab}(\phi_*\partial/\partial t)^a(\phi_*\partial/\partial t)^b]|_q$$
$$= [g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b]|_q = g_{00}|_q = g_{00}|_p,$$

最后一步是因$0=(\mathscr{L}_\xi g)_{\mu\nu}=\partial g_{\mu\nu}/\partial t$，即$g_{\mu\nu}$沿$C(t)$为常数. 类似地有$(\phi^* g)_{ij}|_p = g_{ij}|_p$，但$(\phi^* g)_{0i}|_p = -g_{0i}|_p$，幸好$g_{0i}=0$(此处用到超曲面正交性)，故$(\phi^* g)_{\mu\nu}|_p = g_{\mu\nu}|_p$. 注意到$p$的任意性，便知$(\phi^* g)_{ab} = g_{ab}$，所以$\phi: M\to M$是等度规映射.

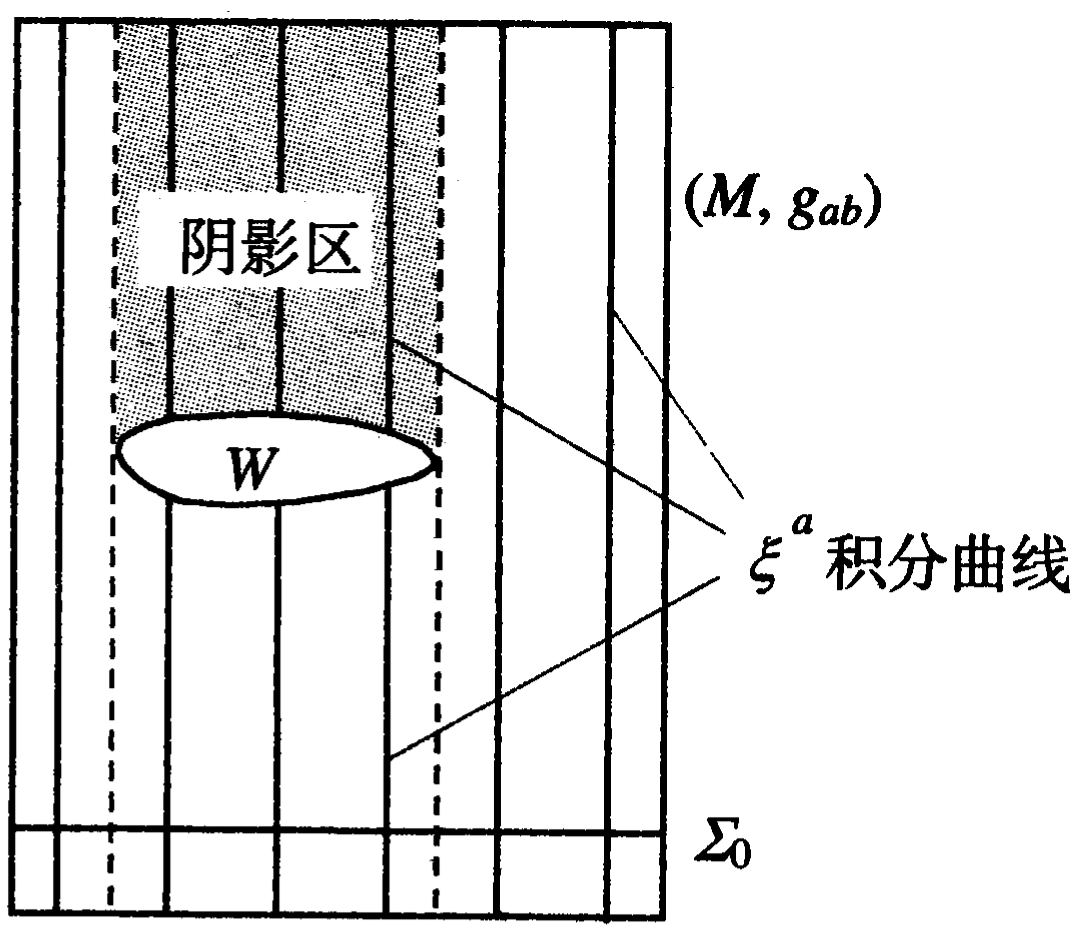


图 8-2　强静态时空挖去 W 后成为弱静态时空

[选读 8-1-1]

Killing 矢量场的定义严格说来有强、弱之分. 弱定义只关心局域性质，凡满足 Killing 方程$\nabla_{(a}\xi_{b)}=0$(等价于$\mathscr{L}_\xi g_{ab}=0$)的矢量场ξ^a都称为 Killing 矢量场. 这种ξ^a可以是不完备的，即其参数t的取值范围不是全$\mathbb{R}$而只是$\mathbb{R}$的一个区间. 强定义则还要求ξ^a完备. 相应地，稳态和静态时空的定义也分为强、弱两种，视其类时 Killing 场是否完备而定. 在只关心局域问题时不必强调两者的区别，但在涉及全局性问题时，某些结论只当时空满足强条件时才成立. 例如，在强静态时空(M, g_{ab})中挖去区域W就成为弱静态时空. 设命题 8-1-1 中的Σ_0如图 8-2 所示，则当t足够大时$\Sigma_{t_1}=\{p\in M \mid t(p)=t_1\}$失去意义，因为 Killing 场$\xi^a$在“阴影区”内的每条积分曲线的$t$值零点(因而$t$值)并无定义. 可见对静态时空而言命题 8-1-1 有可能只是局域成立.

总之，强、弱之间的关键区别在于ξ^a是否完备. ξ^a完备时可生成单参等度规群，不完备时只能生成单参等度规局部群. 为了简化文字，行文中往往略去局部二字.

[选读 8-1-1 完]

§8.2　球对称时空

先讨论 3 维欧氏空间$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$中的 2 维球面$(S^2, h_{ab})$，其中$h_{ab}$是$\delta_{ab}$的诱导度规，在球面坐标系$\{\theta, \varphi\}$中的线元表达式为

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

其中 r 是球面半径. 不失一般性，我们只讨论单位球面($r=1$)，其线元为

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 . \qquad (8\text{-}2\text{-}1)$$

由上式可知

$$\xi_1{}^a \equiv (\partial/\partial\varphi)^a \qquad (8\text{-}2\text{-}2a)$$

是 Killing 矢量场，它反映 (S^2, h_{ab}) 有绕 z 轴旋转的不变性，其积分曲线是球面上的所有纬线(两极的纬线各缩为一个点)，见图 8-3. 从直观想像不难相信 (S^2, h_{ab}) 具有最高对称性，因此应有 3 个独立的 Killing 矢量场. 事实的确如此. 不难验证

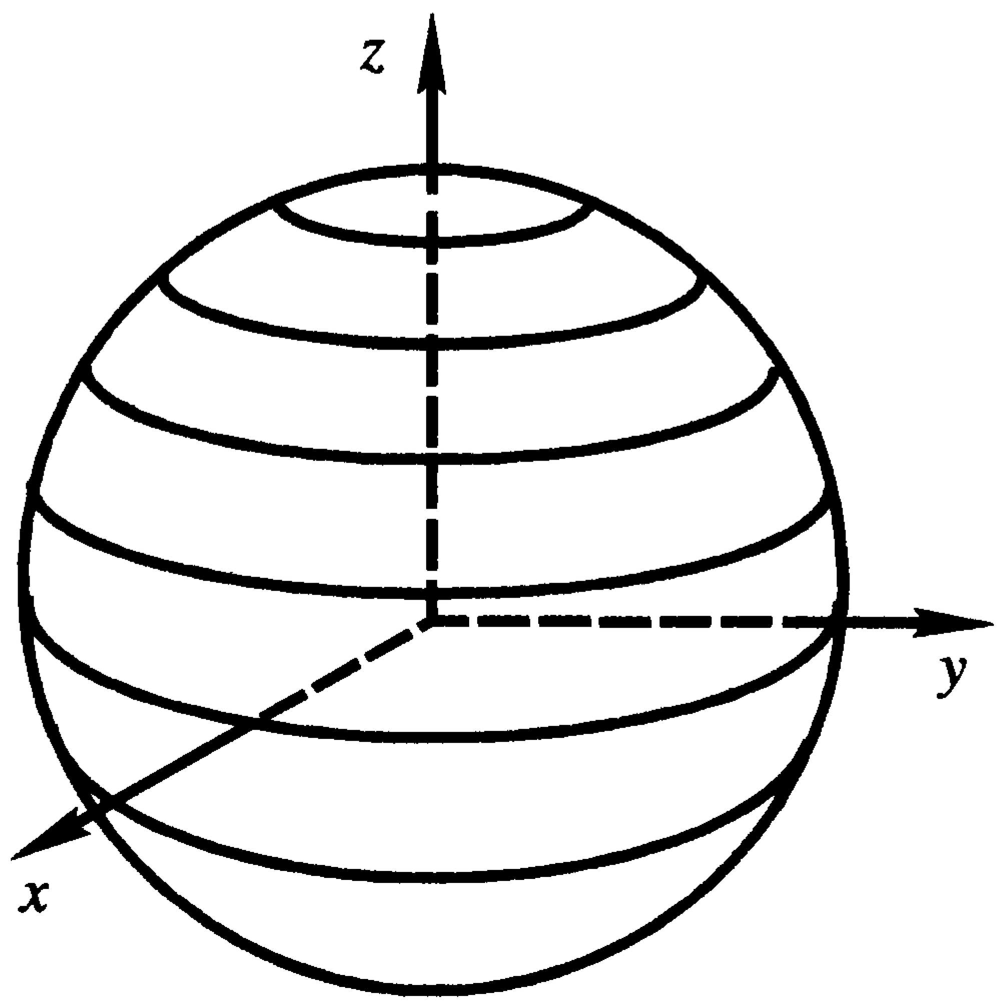


图 8-3　球面上 Killing 矢量场 $(\partial/\partial\varphi)^a$ 的积分曲线

$$\xi_2{}^a \equiv (\partial/\partial\theta)^a \sin\varphi + (\partial/\partial\varphi)^a \cot\theta\cos\varphi \qquad (8\text{-}2\text{-}2b)$$

及

$$\xi_3{}^a \equiv [\xi_1, \xi_2]^a = (\partial/\partial\theta)^a \cos\varphi - (\partial/\partial\varphi)^a \cot\theta\sin\varphi \qquad (8\text{-}2\text{-}2c)$$

也是 Killing 场，而且 $\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$ 线性独立. 由§4.3 可知，一个 Killing 矢量场对应的单参微分同胚群是单参等度规群，故 (S^2, h_{ab}) 上所有等度规映射的集合是个 3 参数群，与 3 维欧氏空间的转动群 SO(3)同构. 缺乏群论知识的读者对此不必深究，只要知道 SO(3)是这样一个群，它的每个元素是 3 维欧氏空间中保持原点不动的一个转动(详见下册附录 G).

谈及时空对称性时，应注意等度规映射与微分同胚映射的联系和区别. 等度规映射一定是微分同胚映射，但反之不然. 每一光滑矢量场对应于一个单参微分同胚群(以下略去“局域”一词)，所以任意流形 M 都有无数个单参微分同胚群，全部微分同胚映射的集合是一个无限多参数的群，叫 M 上的**微分同胚群**. (M, g_{ab}) 上每一 Killing 矢量场对应于一个单参等度规群，它是 M 上微分同胚群的一个子群. 全部等度规映射的集合称为(M, g_{ab})的**等度规群**(isometry group). 由于 4 维时空最多只有 10 个独立的 Killing 矢量场，其等度规群最多只有 10 个参数. 设 G_1 是 M 上的一个单参微分同胚群，则 $\forall\, p\in M$，G_1 中所有元素作用于 p 所得的点的集合叫 G_1 的、过 p 的一条轨道(见§2.2). 轨道的这一定义可推广到 M 上微分同胚群的任一子群. 不难看出，设 G_3 为 (S^2, h_{ab}) 上的等度规群[与 SO(3)同构]，则 G_3 过任意点 $p\in S^2$ 的轨道都是 S^2 本身.

定义 1　时空(M, g_{ab})称为球对称的(spherically symmetric)，若其等度规群含有一个与 SO(3)同构的子群 G_3，且 G_3 的所有轨道(不动点除外)都是 2 维球面. 这些球面称为**轨道球面**.

注 1　①球对称时空(M, g_{ab})的等度规群可比 SO(3)群大. 例如，闵氏时空的

等度规群有 10 个参数，但它含有与 SO(3)群同构的子群，且其轨道(除了一个不动点外)都是 2 维球面，故闵氏时空是球对称时空. ②确切地说，定义 1 只对**球对称度规场**而不是球对称时空下了定义. 如果时空存在物质场(即$T_{ab} \neq 0$)，则只当度规场和物质场都为球对称时才把(M, g_{ab})称为**球对称时空**(§8.6 将涉及物质场对称性与度规场对称性的关系问题).

等度规群中与 SO(3)同构的子群 G_3 对应于 3 个独立的 Killing 矢量场$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$. 设$\mathscr{S}$是 G_3 的一个轨道(2 维球面)，则$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$从$\mathscr{S}$上任一点出发的积分曲线都躺在$\mathscr{S}$上，故$\mathscr{S}$上任一点的$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$都切于$\mathscr{S}$. 设$\hat{g}_{ab}$是g_{ab}在$\mathscr{S}$上诱导的 2 维度规，则由诱导度规的定义可知$\mathscr{S}$上的$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$用$\hat{g}_{ab}$衡量也是 Killing 场，可见$(\mathscr{S}, \hat{g}_{ab})$具有由$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$和$\xi_3{}^a$代表的最高对称性，因而(证明见选读 8-2-1) $\hat{g}_{ab}$只能是标准球面度规 h_{ab}(由 3 维欧氏度规在球面上诱导的度规)，即存在常数$K>0$和坐标系$\{\theta, \varphi\}$使$\hat{g}_{ab}$的线元可表为

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = K(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{8-2-3}$$

以闵氏时空为例. 设Σ是某惯性系的一个同时面，指定Σ中的一组同心 2 球面(见图 8-4)，便在 10 维等度规群中挑出一个同构于 SO(3)的子群 G_3，它过Σ中任一点 p(球心 o 除外)的轨道就是 p 点所在的球面$\mathscr{S}$. 闵氏度规在所选惯性坐标系中的线元为

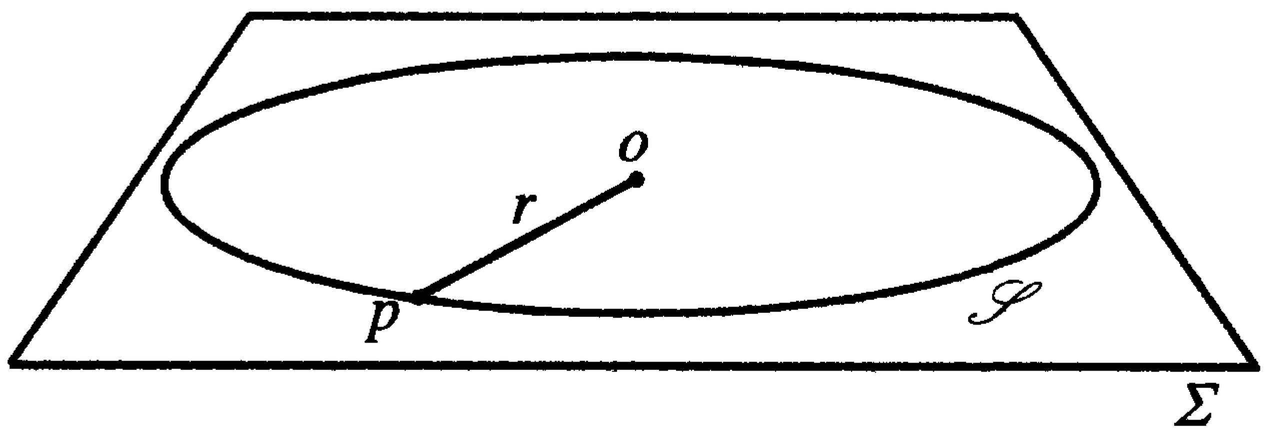


图 8-4　闵氏时空中某惯性系的同时面Σ上的一个轨道球面$\mathscr{S}$(压缩一维)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\hat{s}^2\,,$$

其中

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\varphi^2)\,,$$

可见式(8-2-3)的 K 对闵氏时空而言就是所论轨道 2 球面$\mathscr{S}$的半径的平方. 为了弄清 K 在非平直时空中的意义，可以利用$\mathscr{S}$的面积这一几何概念. 设$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$是$\mathscr{S}$上与$\hat{g}_{ab}$适配的面元，则$\mathscr{S}$的面积为$A = \int_{\mathscr{S}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$，其中$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$又可用$\mathscr{S}$上的坐标系$\{\theta, \varphi\}$表为$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\hat{g}}\ \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$，式中的$\hat{g}$是$\hat{g}_{ab}$在$\{\theta, \varphi\}$系的行列式. 由式(8-2-3)读出$\hat{g}_{ij}$后可求得$\hat{g} = K^2 \sin^2\theta$，故$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = K\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$，从而

$$A = K\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi K\,.$$

可见 K 就是球面积除以 4π. 定义

$$r := (A/4\pi)^{1/2}\,, \tag{8-2-4}$$

并仍称 r 为**半径**，则 $K = r^2$，式(8-2-3)可改写为

$$d\hat{s}^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{8-2-5}$$

这表面上与闵氏时空的 $d\hat{s}^2$ 表达式(8-2-3)一样，而且式中的 r 也叫半径，但在一般情况下半径 r 不一定有“$\mathscr{S}$ 上各点与球心的距离”这样的意义. 事实上，下列三种情况都有可能：①时空流形中根本不存在可被视作 $\mathscr{S}$ 的球心的点. 先看一个简化例子：设 S^1 是流形 $\mathbb{R}\times S^1$(柱面)中的一个圆周，则其“圆心” p 将不在流形 $\mathbb{R}\times S^1$ 上(图 8-5). 类似地，$\mathbb{R}\times S^2$ 中也不存在可被视作 S^2 的球心的点. ②时空中虽存在可被视为 $\mathscr{S}$ 的球心的点，但由于度规弯曲，$\mathscr{S}$ 面与该点的距离并不等于按式(8-2-4)定义的半径 r. ③存在不止一个球心.

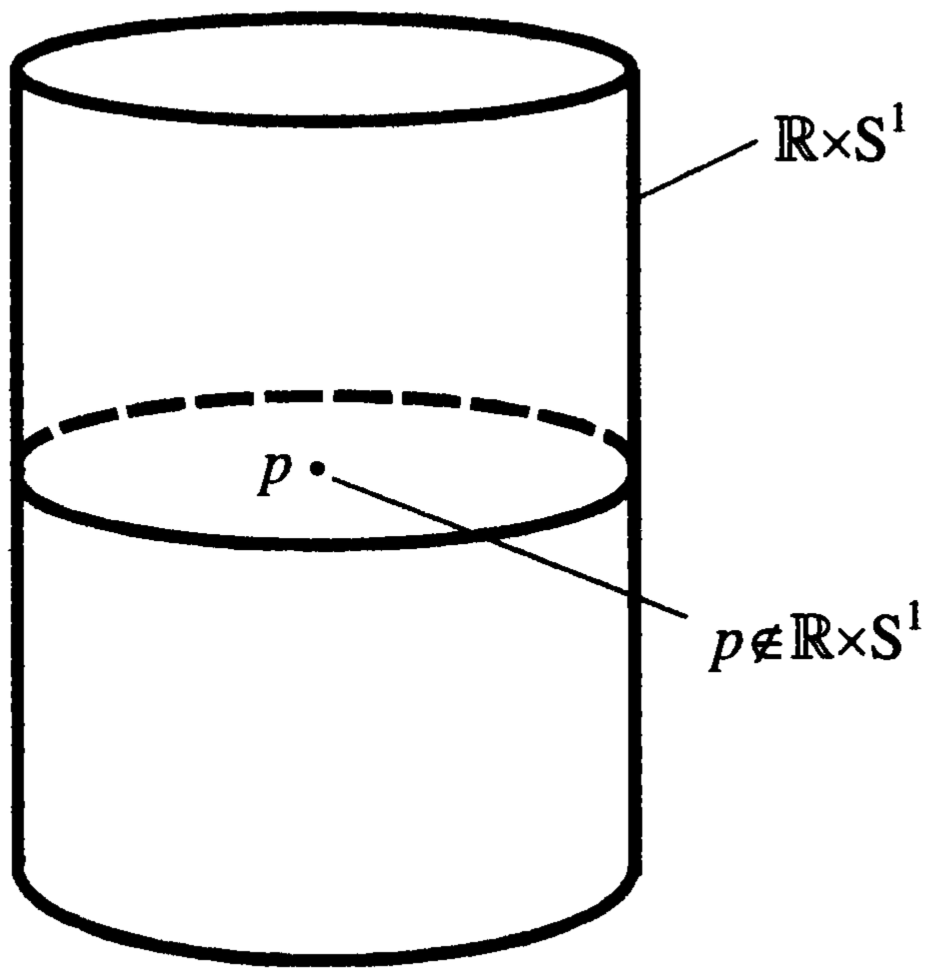


图 8-5　3 维欧氏空间中的圆柱面. 面上任一圆周的圆心 p 都不在柱面上

[选读 8-2-1]

在写出式(8-2-3)前曾默认一个命题：设 $(\mathscr{S}, \hat{g}_{ab})$ 具有由 $\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$ 和 $\xi_3{}^a$ 代表的最高对称性，则 $\hat{g}_{ab}$ 的线元总可表为式(8-2-3). 现在介绍这个命题的证明思路. 设 $\hat{g}_{ab}$ 在坐标系 $\{\theta,\varphi\}$ 的分量为 $\hat{g}_{11}$，$\hat{g}_{22}$，$\hat{g}_{12}$，则由 $\xi_1{}^a = (\partial/\partial\varphi)^a$ 可知 $\hat{g}_{11}$，$\hat{g}_{22}$，$\hat{g}_{12}$ 不是 φ 的函数. 写出 $\xi_2{}^a$ 所满足的 $\mathscr{L}_{\xi_2}\hat{g}_{ab} = 0$ 的坐标分量方程组，把 $\hat{g}_{11}(\theta)$，$\hat{g}_{22}(\theta)$，$\hat{g}_{12}(\theta)$ 作为待定函数求解，得 $\hat{g}_{12} = 0,\ \hat{g}_{11} = K$ (常数)，$\hat{g}_{22} = K\sin^2\theta$. 不难验证 $\mathscr{L}_{\xi_3}\hat{g}_{ab} = 0$. 于是命题得证.

[选读 8-2-1 完]

§8.3　施瓦西真空解

8.3.1　静态球对称度规

命题 8-3-1　设静态球对称时空(M, g_{ab})只有一个超曲面正交的类时 Killing 矢量场 ξ^a，① 则其等度规群中与 SO(3)同构的子群 G_3 的所有轨道球面必与 ξ^a 正交.

证明　$\phi \in G_3$ 可看作从 M 到 M 的等度规映射. 由于矢量场的类时性、Killing 性以及超曲面正交性都由度规判断，可以相信 $\phi_*\xi^a$ 也是超曲面正交的类时 Killing 矢量场(见第 4 章习题 12). 既然只存在一个这样的矢量场，就有 $\phi_*\xi^a = \xi^a$. 假定 ξ^a 与 G_3 的某个轨道球面 $\mathscr{S}$ 不正交，则它存在切于 $\mathscr{S}$ 的投影 $\hat{\xi}^a$. 总可找到球面

① 任意常数乘 ξ^a 当然也是类时 Killing 矢量场，此处所谓“一个”自然是指“一个线性独立的”.

上的一个转动 $\hat{\phi}:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 使 $\hat{\xi}^a$ 在此转动下有所改变，即 $\hat{\phi}_*\hat{\xi}^a\neq\hat{\xi}^a$． 然而 $\hat{\phi}:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 可看作某个 $\phi\in G_3\,(\phi:M\to M)$限制在 $\mathscr{S}$ 上的结果. 就是说，只要 $\hat{\xi}^a$ 非零，就存在 $\phi\in G_3$ 使 $\phi_*\hat{\xi}^a\neq\hat{\xi}^a$，从而 $\phi_*\xi^a\neq\xi^a$，矛盾于 $\phi_*\xi^a=\xi^a$． □

设Σ是与 ξ^a 正交的超曲面，则根据命题 8-3-1，G_3 过Σ任一点的轨道球面都躺在Σ上，如图 8-6. 利用这一几何特性可使静态线元表达式(8-1-3)进一步简化.

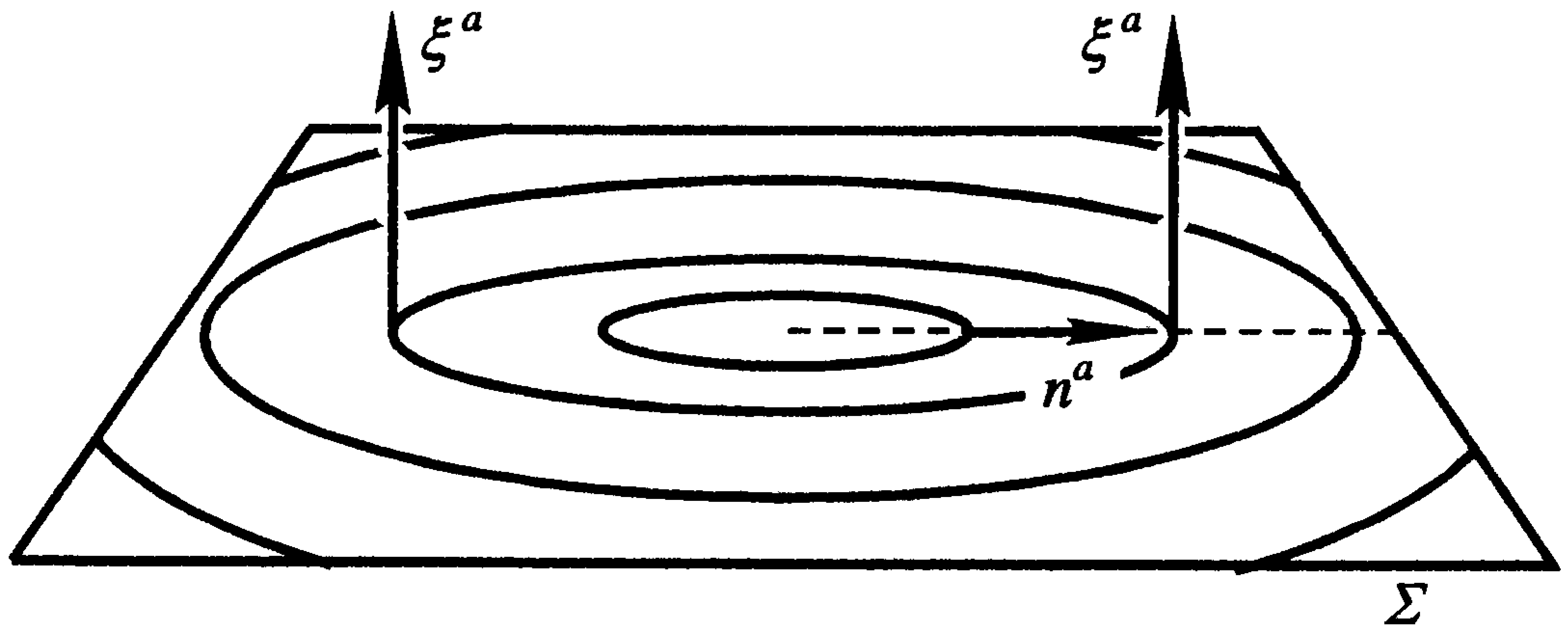


图 8-6　过Σ任一点的轨道球面都躺在Σ上(压缩一维)
虚线是球面法矢场 n^a 的积分曲线

为此只须说明如何定义等 t 面Σ上的 3 维局域坐标系$\{x^1, x^2, x^3\}$． x^1可用轨道球面的半径定义：每一点的 x^1就定义为它所在的轨道球面的半径 r. x^2和 x^3则可用如下的“携带法”定义：设$\mathscr{S}$是Σ中的某一轨道球面，则它是Σ中的(2 维)超曲面，其上有切于Σ的归一法矢场 n^a. 由于过Σ的任一点都有一个躺在Σ上的轨道球面，n^a是定义在Σ上的矢量场，其积分曲线处处与轨道球面正交 (图 8-6 用虚线示出其中一条). 在$\mathscr{S}$上任选球坐标θ, φ, 就可用 n^a 的积分曲线把这两个坐标“携带”到其他轨道球面(即令每条积分曲线上各点的θ, φ值都等于该线与$\mathscr{S}$交点的θ, φ值)，Σ上便有局域坐标系$\{r, \theta, \varphi\}$. 此坐标系使式(8-1-3)中的 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 取最简单的形式. 由θ, φ的上述定义可知法矢场 n^a 的积分曲线与 r 的坐标线重合(只是参数不同)，所以 $g_{ab}(\partial/\partial r)^a(\partial/\partial\theta)^b=0$， $g_{ab}(\partial/\partial r)^a(\partial/\partial\varphi)^b=0$，于是 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 中 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$及 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$项的系数为零. 再考虑到 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 在每一轨道球面的诱导度规都由式(8-2-5)表示，便得

$$g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=g_{11}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),$$

因而

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}\mathrm{d}t^2+g_{11}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{8-3-1}$$

根据式(8-1-3)， g_{00} 和 g_{11} 都不是 t 的函数. 考虑到球对称性，可以相信 g_{00} 和 g_{11} 也不是θ和φ的函数[有兴趣的读者可利用θ和φ在 $(\partial/\partial r)^a$ 及 $(\partial/\partial t)^a$ 的积分曲线上为常数的性质自行证明]. 把 g_{00} 和 g_{11} 分别记作 $-\mathrm{e}^{2A(r)}$ 和 $\mathrm{e}^{2B(r)}$，则式(8-3-1)成为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^{2A(r)}\mathrm{d}t^2+\mathrm{e}^{2B(r)}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{8-3-2}$$

这就是有唯一静态 Killing 矢量场的球对称度规在上述坐标系$\{t, r, \theta, \varphi\}$中相当一

般的线元表达式．我们强调$\{t, r, \theta, \varphi\}$是 M 中的局域坐标系，是指它的定义域(坐标域)不可能是全流形 M. 这是当然的，就连每个轨道球面上的坐标θ, φ也不能在全球面上定义(不能用一个坐标系覆盖整个 S^2，见§2.1)．此外，例如，$(\mathrm{d}r)_a = 0$ 的点也不在$\{t, r, \theta, \varphi\}$的坐标域内(图 9-13 的 $X = T = 0$就是这样的点).

8.3.2 施瓦西真空解

满足真空爱因斯坦方程的静态球对称度规称为**施瓦西真空解**(Schwarzschild vacuum solution)，简称施瓦西解，在物理上描述一个球对称恒星(如太阳)的外部引力场．第 7 章曾指出真空爱因斯坦方程等价于(见第 7 章习题 7)

$$R_{ab} = 0. \tag{8-3-3}$$

由于静态球对称度规(线元)的一般形式(8-3-2)只含两个待定一元函数 $A(r)$和 $B(r)$，方程的求解变得简单：用这两个函数表出里奇张量 R_{ab}，令其为零并对所得的关于 $A(r)$和 $B(r)$的微分方程求解便可．§5.7 已详细介绍过用正交归一标架计算线元式(8-3-2)的黎曼张量的方法和结果，由此易得 R_{ab}用 $A(r)$和 $B(r)$的表达式．为了帮助读者掌握用坐标基底计算曲率的方法，此处再用坐标基底法直接计算 R_{ab}. 首先计算线元(8-3-2)的克氏符．由式(3-4-19)求得非零克氏符为

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = A', \qquad \Gamma^1{}_{00} = A'\mathrm{e}^{2(A-B)}, \qquad \Gamma^1{}_{11} = B', \\
&\Gamma^1{}_{22} = -r\mathrm{e}^{-2B}, \qquad \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2\theta\ \mathrm{e}^{-2B}, \qquad \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = 1/r, \\
&\Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = 1/r, \qquad \Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = \cot\theta,
\end{aligned} \tag{8-3-4}$$

其中 $'$ 代表对 r 求导．把式(8-3-4)代入(3-4-21)求得非零(不恒等于零)的 $R_{\mu\nu}$ 为

$$R_{00} = -\mathrm{e}^{2(A-B)}(-A'' + A'B' - A'^2 - 2r^{-1}A'), \tag{8-3-5}$$

$$R_{11} = -A'' + A'B' - A'^2 + 2r^{-1}B', \tag{8-3-6}$$

$$R_{22} = -\mathrm{e}^{-2B}[1 + r(A' - B')] + 1, \tag{8-3-7}$$

$$R_{33} = -\{\mathrm{e}^{-2B}[1 + r(A' - B')] - 1\}\sin^2\theta. \tag{8-3-8}$$

于是 $R_{ab} = 0$便等价于以下 3 个关于待求一元函数 $A(r)$和 $B(r)$的微分方程[式(8-3-7)和(8-3-8)给出同一方程]：

$$-A'' + A'B' - A'^2 - 2r^{-1}A' = 0, \tag{8-3-9}$$

$$-A'' + A'B' - A'^2 + 2r^{-1}B' = 0, \tag{8-3-10}$$

$$-\mathrm{e}^{-2B}[1 + r(A' - B')] + 1 = 0, \tag{8-3-11}$$

方程(8-3-9)减(8-3-10)得

$$A' = -B', \tag{8-3-12}$$

故

$$A = -B + \alpha, \qquad \alpha = \text{常数}. \tag{8-3-13}$$

注意到式(8-3-12)，方程(8-3-11)可改写为只含一个待求函数 $B(r)$的方程

$$1-2rB'=e^{2B}, \tag{8-3-14}$$

其通解为

$$e^{2B}=\left(1+\frac{C}{r}\right)^{-1}, \tag{8-3-15}$$

其中 C 为积分常数. 由直接验证可知式(8-3-13)和(8-3-15)也满足方程(8-3-9)和(8-3-10)，故它们就是待解方程组(8-3-9)~(8-3-11)的通解. 把此二式的 A 和 B 代入线元式(8-3-2)得

$$ds^2=-\left(1+\frac{C}{r}\right)e^{2\alpha}dt^2+\left(1+\frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{8-3-16}$$

定义新坐标 $\hat{t}:=e^{\alpha}t$，得

$$ds^2=-\left(1+\frac{C}{r}\right)d\hat{t}^2+\left(1+\frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{8-3-17}$$

α 的常数性保证 $(\partial/\partial\hat{t})^a$ 同 $(\partial/\partial t)^a$ 一样是类时 Killing 矢量场. 不妨认为一开始定义坐标系 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 时就把 $\hat{t}$ 选作 Killing 时间坐标，因此式(8-3-17)的 $\hat{t}$ 可索性改写为 t：

$$ds^2=-\left(1+\frac{C}{r}\right)dt^2+\left(1+\frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{8-3-17'}$$

这就是施瓦西真空解(施瓦西度规). 当 r 足够大时，上式近似回到球坐标系的闵氏线元表达式，可见施瓦西度规是渐近平直的. 然而，式(8-3-16)在 $r\to\infty$ 时却只能趋于

$$ds^2=-e^{2\alpha}dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

由此也可看出一开始就把 $\hat{t}$ 选作时间坐标的好处.

当 r 足够大时，广义相对论的线性近似(见 7.8.1 小节)适用. 又因 $(1+C/r)^{-1}\cong 1-C/r$，故式(8-3-17')近似给出

$$ds^2=[-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)]-\frac{C}{r}(dt^2+dr^2),$$

上式右边第一项是平直线元，通过坐标变换 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ 可改写为 $[-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2]$. 所以 r 很大时的施瓦西度规 g_{ab} 可表为 $g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$，其中小量 γ_{ab} 的 00(即 tt)分量 $\gamma_{00}=-C/r$，与式(7-8-35)对比得 $\phi=C/2r$，而由牛顿引力论又知 $\phi=-M/r$ (其中 M 是星体质量)，因此 $C=-2M$，式(8-3-17')于是可表为

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{8-3-18}$$

这就是施瓦西真空解的最常见表达式，式中的 M 就称为星体的质量. 对“星体质量”概念的准确理解见选读 9-3-1 及下册第 12 章.

下面做一点更为“物理”的讨论，即讨论一个静态球对称恒星外部的空间几何．图 8-7 的圆柱面代表静态球对称恒星表面的世界面，柱面外的时空由施瓦西度规描述．施瓦西时空存在静态参考系，每一等 t 面 Σ_t 可解释为该系在 t 时刻的空间．Σ_t 与圆柱面的交面 S 代表 t 时刻的恒星表面(图中压缩成 1 维圆周)．设 G_1，G_2 是两个有相同 $\theta,\ \varphi$ 值的静态观者，其世界线与 Σ_t 的交点 p_1，p_2 就代表这两个观者在 t 时刻的位置．Σ_t 中位于 S 以外(星外)的空间几何由施瓦西度规的诱导度规 h_{ab} 描述，相应的线元为

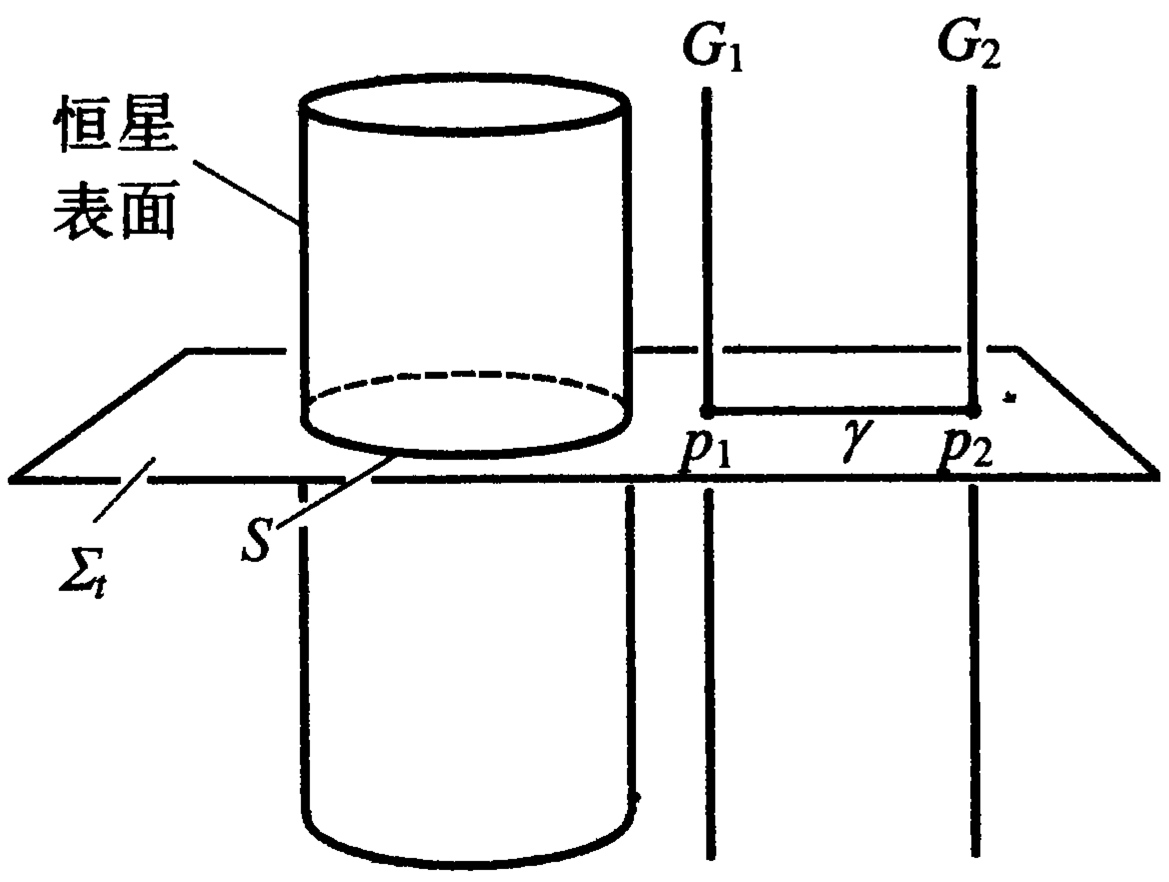


图 8-7　静态观者 G_1, G_2 在 t 时刻的空间距离是 p_1，p_2 之间的测地线 γ(躺在 Σ_t 上)的线长

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{8-3-19}$$

我们来计算 p_1 与 p_2 之间的空间距离 l．黎曼空间(度规正定)中两点的距离定义为连接这两点的所有曲线中的最短线的线长．① 不难证明 Σ_t 上从 p_1 到 p_2 的、θ 和 φ 都为常数的曲线 γ 是 p_1，p_2 之间最短的线，其长度(因而 p_1 与 p_2 的距离)为

$$l = \int (h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j)^{1/2} = \int_{r_1}^{r_2}(1-2M/r)^{-1/2}\mathrm{d}r > r_2 - r_1\,,$$

其中 r_1 和 r_2 分别是 G_1 和 G_2 的 r 坐标．上式表明 G_1 和 G_2 在任一时刻 t 的空间距离为常数(这是静态观者的性质)．l 也称为 G_1 和 G_2 的**固有距离**(proper distance)，它不等于两者的坐标距离 $r_2 - r_1$．这正是(Σ_t, h_{ab})的非欧性的一种反映．

本章对施瓦西度规的讲解重点在于求解．第 9 章将再对施瓦西时空做详细讨论．

为便于查找，我们把施瓦西度规在施瓦西坐标系的克氏符和(降指标)黎曼张量的非零分量列出如下，其中 x^0，x^1，x^2，x^3 分别代表 t，r，θ，φ．

$$\left.\begin{array}{l}
\Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = \dfrac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1}, \qquad \Gamma^1{}_{00} = \dfrac{M}{r^2}(1-2M/r), \\
\Gamma^1{}_{11} = -\dfrac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1},\ \Gamma^1{}_{22} = -r(1-2M/r),\ \Gamma^1{}_{33} = -r(1-2M/r)\sin^2\theta, \\
\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = 1/r,\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = 1/r,\ \Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = \cot\theta,
\end{array}\right\} \tag{8-3-20}$$

① 准确地说，黎曼空间(度规正定)中两点间的**距离**定义为该两点间所有曲线长度的集合(作为ℝ的子集)的下确界．

$$\left.\begin{aligned}&R_{0101}=-\frac{2M}{r^3},\ R_{0202}=\frac{M}{r}(1-2M/r),\ R_{0303}=\frac{M}{r}(1-2M/r)\sin^2\theta,\\&R_{1212}=-\frac{M}{r}(1-2M/r)^{-1},\ R_{1313}=-\frac{M}{r}(1-2M/r)^{-1}\sin^2\theta,\ R_{2323}=2Mr\sin^2\theta.\end{aligned}\right\}\tag{8-3-21}$$

[选读 8-3-1]

我们曾一再提到"引力就是时空弯曲". 现在有了稳态时空的概念，对这句话就可给出更为深入、具体的解释. 引力概念最早来自对地球附近物体运动的研究. 当你释放手中的苹果时，它以 $|\vec{g}|=9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 向地面加速下落，所以说苹果受到地球引力，或说地球在自己外部产生引力场. 这个如此重要的 $|\vec{g}|$ 在广义相对论中对应于什么？从广义相对论看来，苹果做测地运动，其 4 加速为零. 反之，你(作为稳态观者)虽然觉得自己舒服地坐在椅子上，你的 4 加速却非零. 稳态观者的 4 加速为(见习题 3)

$$A^a=\nabla^a\ln\chi,\quad 其中\ \chi\equiv(-\xi_a\xi^a)^{1/2},\quad \xi^a\ 是稳态时空的类时\ \text{Killing}\ 场.\tag{8-3-22}$$

因为 4 加速与 4 速正交，所以 A^a 是稳态观者世界线上的空间矢量场. 这是稳态时空几何本身的一个内禀的矢量场. 牛顿语言中的引力场强 $\vec{g}$ 必定对应于广义相对论的某个内禀几何量，$-A^a$ 正是这样一个量，所以可以称为稳态时空中的"引力场"(引力加速度场). 下面证明这一称谓同你心目中的地球引力场 $|\vec{g}|=9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 的确数值一致. 近似认为地球外有施瓦西度规，则

$$\chi\equiv(-\xi_a\xi^a)^{1/2}=(-g_{00})^{1/2}=(1-2M/r)^{1/2},$$

式(8-3-22)成为

$$A_a=\chi^{-1}\nabla_a\chi=\frac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1}(\mathrm{d}r)_a,$$

因而

$$|A^a|=\sqrt{g_{ab}A^aA^b}=\frac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1}\sqrt{g^{ab}(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b}=\frac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1}\sqrt{g^{11}},$$

故

$$|A^a|=\frac{M}{r^2}(1-2M/r)^{-1/2}.\tag{8-3-23}$$

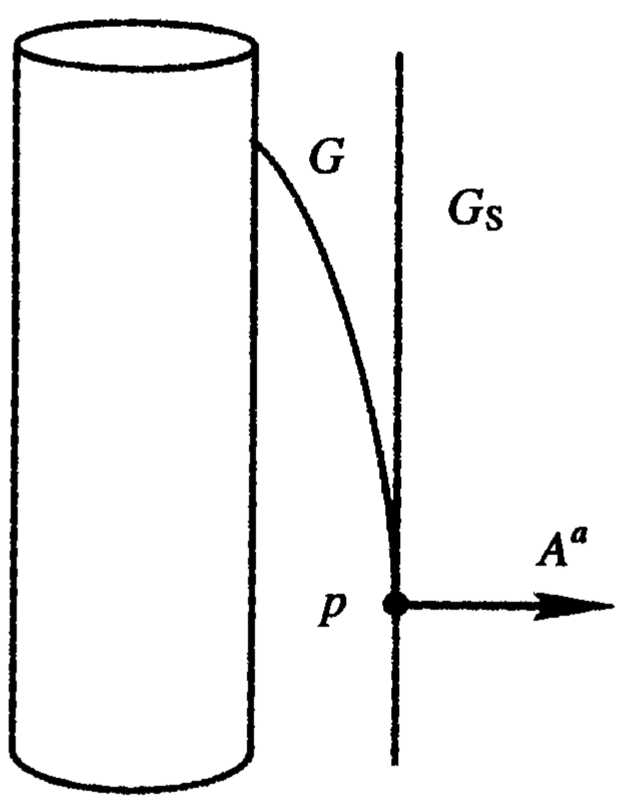


图 8-8　自由下落苹果 G 相对于稳态观者 G_S 的 3 加速 $a^a=-A^a$

设苹果 G 与稳态观者 G_S 世界线切于 p(见图 8-8). 由于自由下落，G 对应于闵氏时空的惯性观者，由命题 6-3-6 和等效原理可知 G 在 p 时刻相对于 G_S 的 3 加速 a^a 等于 G_S 的(绝对)4 加速 A^a 的负值. 而 a^a 就是 $\vec{g}$，把式(8-3-23)改回国际制便有

$$|\vec{g}|=|A^a|=\frac{GM}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}. \tag{8-3-24}$$

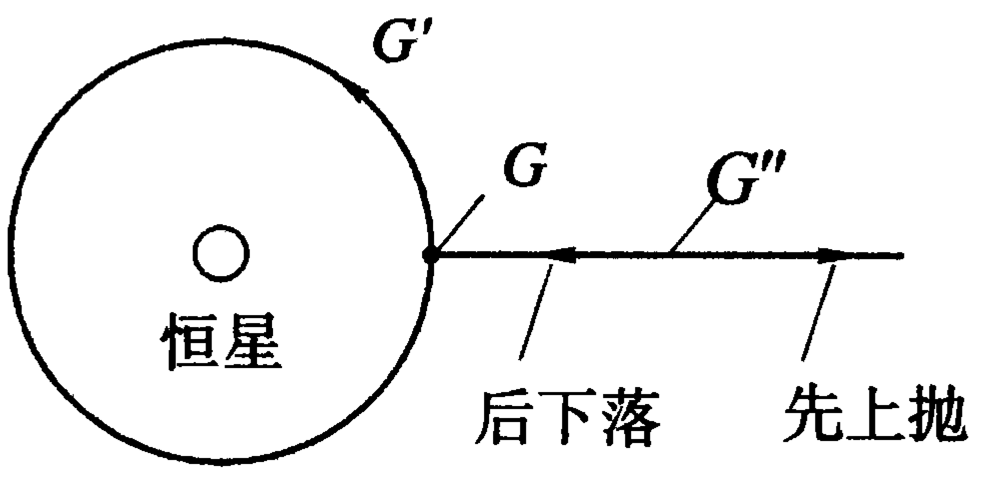
用于地球表面，以 $M=M_\oplus=6\times10^{24}$，$r=r_\oplus=6.4\times10^6$，$c=3\times10^8$，$G=6.7\times10^{-11}$ 代入，发现上式右边括号等于 $1-10^{-9}\cong1$，故

$$|\vec{g}|\cong GM_\oplus/r_\oplus^2\cong9.8.$$

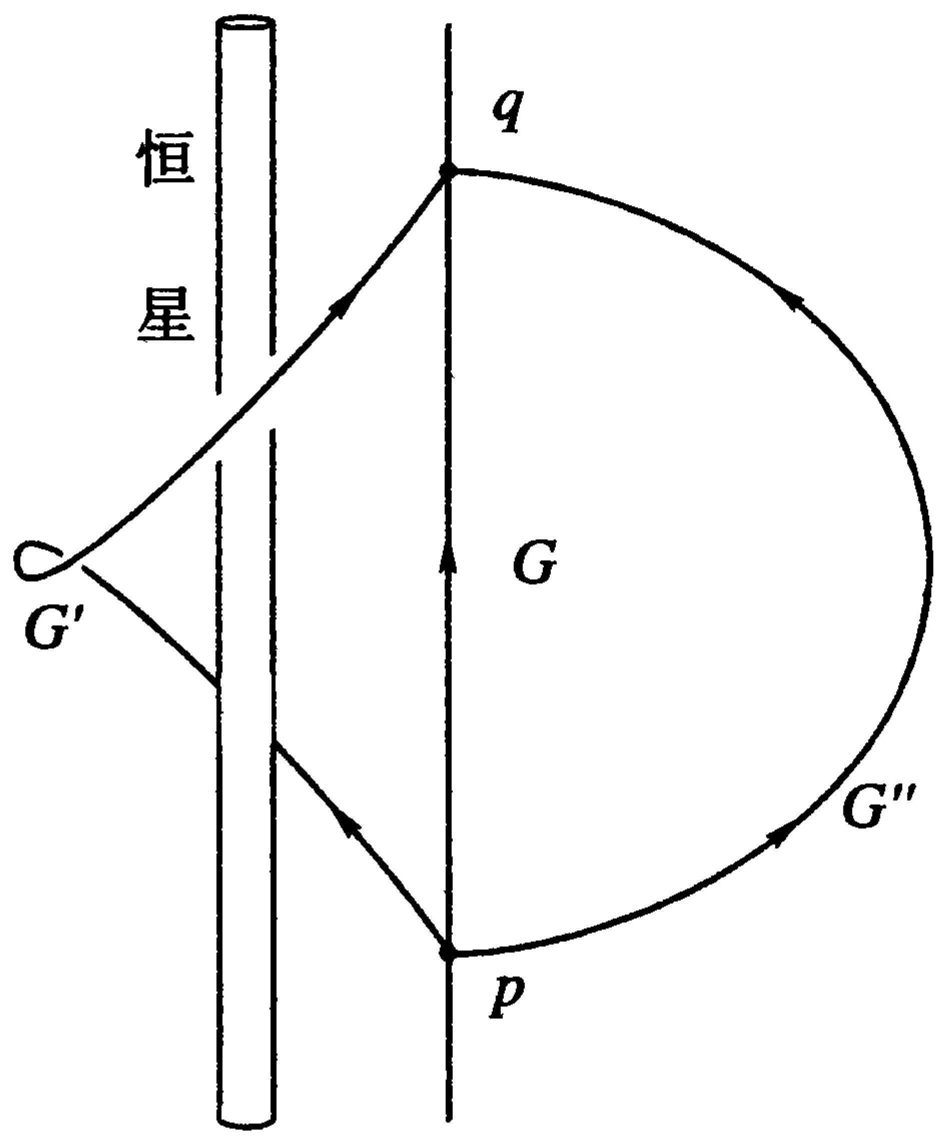
于是我们说稳态时空存在着 $-A^a=-\nabla^a\ln\chi$ 的引力场，它是地球引力场 $\vec{g}$ 的广义相对论表述. 然而又出现新的问题：非稳态时空没有稳态观者，上述意义的引力不存在，“弯曲时空必有引力”的说法如何理解？前已讲过，只要时空弯曲就有测地偏离效应(潮汐效应)，可称为相对引力效应. 这是一种“硬邦邦”的效应，与前一种意义的引力效应不同(在稳态时空中可通过选择自由下落电梯消除第一种意义的引力，却无法消除潮汐效应). 事实上，测地偏离效应才是任何弯曲时空所共有的性质，当谈到“弯曲时空必有引力”时，对非稳态时空只是指自由落体之间的相对引力(潮汐效应). 当时空曲率 $R_{abc}{}^d$ 点点为零时，两种意义的引力效应都不存在，所以说“没有时空弯曲就没有引力”.

[选读 8-3-1 完]

[选读 8-3-2]



(a) 空间图



(b) 时空图

图 8-9 观者 G, G' 和 G'' 在事件 p 分手，在 q 重逢. G' 和 G'' 为测地线，线长关系为 $l_{G'}<l_G<l_{G''}$

设 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 是孤立静态球对称恒星外的施瓦西坐标系，G 是星外静态观者，空间坐标值为 $r=r_G, \theta=\pi/2, \varphi=0$；$G'$ 是在恒星引力作用下绕星作圆周运动的自由观者，其 θ 值永为 $\pi/2$(永在恒星赤道正上方)，其世界线开始时($\tau=0$)与 G 线交于 p，转一圈后复与 G 线交于 q(图 8-9). 由式(8-3-18)易见 $\mathrm{d}t$ 对 G 和 G' 的线元的贡献相等，而 G' 线元还有来自 $\mathrm{d}\varphi$ 的符号相反的贡献 $r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$，因此 p, q 之间

的 G' 线短于 G 线. 类时测地线 G' 为何竟短于类时非测地线(G 线)? 首先, "类时测地线长度为极大"是与无限邻近的类时线相较而言的("局部最长"), 而 G 与 G' 并不邻近. 其次, 的确存在与 G' 无限邻近的、长于 G' 的类时线, 这也不足为怪, 因为"类时测地线长度为极大"成立的充要条件是线上不存在共轭点对, 而 G' 不满足这一条件. 事实上, 可以相信(根据选读 7-6-3 的共轭点对的定义可以证明) G' 上存在无数共轭点对[满足 $\varphi = \varphi_0$ 和 $\varphi = \varphi_0 + \pi$(其中 $0 \leqslant \varphi_0 < \pi$)为一对]. p, q 之间的、没有共轭点对的类时测地线对应于如下物理情况: 设自由观者 G'' 在事件 p 以适当初速被竖直上抛再自由下落(径向测地线), 与 G 线恰重逢于事件 q (见图 8-9), 则其世界线就由于没有共轭点对而至少为局部最长. 事实上它比 G 和 G' 都长[注意, 从式(8-3-18)看出 G' 短于 G 的理由不适用于 G'', 因其 r 值不等于 G 的 r 值, $\mathrm{d}t$ 对线元的贡献不等.].

[选读 8-3-2 完]

8.3.3 Birkhoff (伯克霍夫)定理

施瓦西证明了真空爱因斯坦方程的静态球对称解为施瓦西解, 已如上述. 后来发现静态条件可以取消, 因为伯克霍夫在 1923 年证明了以下定理: 真空爱因斯坦方程的球对称解必静态. 下面简介定理的证明思路. 静态球对称线元的一般形式是式(8-3-2). 如果取消静态条件, 线元表达式就不如此简单, 例如交叉项 $\mathrm{d}t\mathrm{d}r$ 的系数非零. 然而, 通过适当坐标变换可把线元变得与式(8-3-2)形式一样, 唯一区别是式(8-3-2)中的一元函数 $A(r)$ 和 $B(r)$ 要改为二元函数 $A(t, r)$ 和 $B(t, r)$. 以 A', B', $\dot{A}$, $\dot{B}$ 分别代表 $\partial A/\partial r$, $\partial B/\partial r$, $\partial A/\partial t$, $\partial B/\partial t$, 通过比 8.3.2 小节的计算略为复杂的求解过程[见 Cameli(1982); Stephani(1982)], 仍然得到施瓦西线元式(8-3-18).

Birkhoff 定理是个强有力的定理, 它断定非静态物质分布只要保持球对称性(例如急剧收缩、膨胀、径向振荡甚至爆炸的星体), 外部时空几何就仍由施瓦西真空解描述. 这为星体演化的研究提供了很大方便(见§9.3 和§9.4).

Birkhoff 定理同电动力学的下述定理很相似: 球对称电荷分布的电磁场(即真空麦氏方程的球对称解)必为静电场. 电磁波是时变电磁场在空间的传播, "球对称电磁场必为静电场"表明不存在球对称电磁波(球面电磁波是指波阵面为球面的电磁波, 其电磁场并无球对称性, 不是球对称电磁波). 类似地, 由于引力波不会在稳态引力场中出现(稳态就是"不随时间而变"), Birkhoff 定理表明不存在球对称引力波. 注意到球对称辐射也就是单极辐射, 以上结论的等价说法是: 不存在单极的电磁和引力辐射. 电磁辐射的主要贡献来自偶极辐射. 与此不同, 由§7.9 可知对引力而言既不存在单极辐射也不存在偶极辐射. 引力辐射的主要贡献来自四极辐射. 表 8-1 给出了两种辐射的对照.

表 8-1 引力辐射与电磁辐射对照表

	单极辐射	偶极辐射	四极辐射
电磁辐射	无	有(主要)	有
引力辐射	无	无	有(主要)

后来发现 Birkhoff 的原始提法不够准确，修正后的 Birkhoff 定理可表述为：真空爱因斯坦方程的球对称解必为施瓦西度规. 这一提法与原始提法的区别在于延拓后的施瓦西度规在部分时空区域内并非稳态，详见 9.4.3 小节. Petrov 于 1963 年最先对 Birkhoff 定理提出质疑[见 Kramer et al.(1980)P. 157 及其所引文献]，修正后的定理的证明见 Hawking and Ellis(1973)附录 B. 邝志全和梁灿彬[Kuang and Liang(1988)]进一步把定理的球对称性条件减弱为“共形球对称性”而保持定理的结论. 共形一词的定义见§12.1(下册).

§8.4 Reissner-Nordstrom(来斯纳-诺斯特朗)解

8.4.1 电磁真空时空和爱因斯坦-麦克斯韦方程

施瓦西度规描述静态球对称星体外部(真空)的时空弯曲. 不少实际星体带有电荷，其外部时空充满电磁场，并非真空. 除电磁场外没有物质场的时空称为**电磁真空**(electrovac，是 electrovaccum 的简写)**时空**. 电磁真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=8\pi T_{ab}$ 中的 T_{ab} 是某种电磁场(我们只讨论无源电磁场)F_{ab} 的能动张量，即

$$T_{ab}=\frac{1}{4\pi}(F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}), \tag{8-4-1}$$

故电磁真空爱因斯坦方程又可表为

$$G_{ab}\equiv R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=2\ (F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}), \tag{8-4-2}$$

其中 F_{ab} 要满足弯曲时空的无源麦氏方程

$$\nabla^a F_{ab}=0, \tag{8-4-3a}$$

$$\nabla_{[a}F_{bc]}=0, \tag{8-4-3b}$$

这里的 ∇_a 是同度规 g_{ab} 适配的导数算符，而 g_{ab} 又必须满足方程(8-4-2). 可见电磁真空时空由背景流形 M、度规场 g_{ab} 和电磁场 F_{ab} 三要素决定，其中 g_{ab} 和 F_{ab} 应是由式(8-4-2)和(8-4-3)构成的联立方程组的解. 此方程组叫**爱因斯坦-麦克斯韦方程组**. 由式(8-4-1)易证(习题)电磁场能动张量 T_{ab} 的迹 $T\equiv g^{ab}T_{ab}=0$，于是由爱因斯坦方程 $R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=8\pi T_{ab}$ 易见(习题)标量曲率 $R=0$，因此电磁真空的爱因斯

坦方程简化为

$$R_{ab} = 8\pi T_{ab}. \tag{8-4-4}$$

电磁场 F_{ab} 可按物理性质分为类光电磁场和非类光电磁场两大类. 定义复张量场

$$\Sigma_{ab} := F_{ab} + \mathrm{i}\,{}^*F_{ab}, \tag{8-4-5}$$

其中${}^*F_{ab}$是 F_{ab} 的对偶微分形式. F_{ab} 称为**类光电磁场**(null electromagnetic field), 若

$$\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} = 0, \tag{8-4-6}$$

否则称为**非类光电磁场**(nonnull electromagnetic field). 易证(习题)

$$\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} = 2\ (F_{ab}F^{ab} + \mathrm{i}\,F_{ab}{}^*F^{ab}), \tag{8-4-7}$$

因此电磁场的类光条件(8-4-6)等价于

$$F_{ab}F^{ab} = 0, \tag{8-4-8a}$$

和

$$F_{ab}{}^*F^{ab} = 0. \tag{8-4-8b}$$

p 点的瞬时观者(p, Z^a)测得的电场和磁场按定义为 $E_a := F_{ab}Z^b$ 和 $B_a := -{}^*F_{ab}Z^b$ (参见 6.6.1 小节), 由此可证(见第 6 章习题 15)

$$F_{ab}F^{ab} = 2\ (B^2 - E^2), \tag{8-4-9}$$

$$F_{ab}{}^*F^{ab} = 4\vec{E}\cdot\vec{B} \equiv 4g^{ab}E_aB_b. \tag{8-4-10}$$

可见, 虽然 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都与观者有关, $B^2 - E^2$ 和 $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 却是两个不变量(即标量场. 事实上, 能由 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 构造的独立的不变量只有这两个.). 上两式表明式(8-4-8)等价于

$$B^2 = E^2, \tag{8-4-11a}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0. \tag{8-4-11b}$$

上两式表明瞬时观者测得的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 长度相等而且彼此正交, 这两点正是闵氏时空的平面电场波的基本特征. 可以证明(见下册附录 D), 设任意时空中有类光电磁场 F_{ab}, 其能动张量为 T_{ab}, 则瞬时观者(p, Z^a)测 F_{ab} 所得的 4 动量密度 $W^a \equiv -T^a{}_bZ^b$ (见§6.4)是指向未来的类光矢量.

8.4.2 Reissner-Nordstrom 解

现在求解静态球对称带电星体的爱因斯坦-麦克斯韦方程组. 根据 8.3.1 小节的讨论, 在静态球对称情况下选择与度规的两个几何特性(静态性和球对称性)相适配的坐标系 $\{x^\mu\} \equiv \{t,\ r,\ \theta,\ \varphi\}$ 可把线元表为如下简单形式[即式(8-3-2)]:

$$\mathrm{d}s^2 = -\ \mathrm{e}^{2\alpha(r)}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\beta(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{8-4-12}$$

[原式(8-3-2)中的 $A(r)$及 $B(r)$现在易与 4 势 A 及磁场 B 混淆，故改记作$\alpha(r)$和$\beta(r)$.] 这一坐标系不但可简化线元，而且可简化电磁场分量. 静态球对称带电星体产生的电磁场 F_{ab} 也是静态球对称的，其电磁 4 势 A_a 的坐标分量 A_μ 与坐标 t, θ, φ 无关，且无切于轨道球面的分量，即 $A_2 = A_3 = 0$. A_a 有规范自由性：设χ为 r 的任意函数，则 $\tilde{A}_a \equiv A_a + \nabla_a \chi$ 与 A_a 对应于相同的 F_{ab}. 由上式得

$$\tilde{A}_1 = (\partial/\partial r)^a (A_a + \nabla_a \chi) = A_1 + \partial\chi/\partial r.$$

可见对任给的 A_a 总可选适当的$\chi(r)$使 $\tilde{A}_1 = 0$，故可认为 A_a 只有分量 A_0. 再由

$$F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

便知非零的 $F_{\mu\nu}$ 只有

$$-F_{01} = F_{10} = \partial_1 A_0 = \mathrm{d}A_0/\mathrm{d}r, \tag{8-4-13}$$

即 F_{ab} 只有一个独立分量 F_{10}，通过求解麦氏方程(8-4-3)可得其形式表达式. 方程(8-4-3b)由于用了 A_a 而自动满足. 方程(8-4-3a)的坐标分量形式为

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{8-4-14}$$

用推导式(3-4-26)的类似方法可得

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu}F^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right), \tag{8-4-15}$$

由式(8-4-13)、(8-4-12)可知非零的$\sqrt{-g}F^{\mu\nu}$ 只有$\sqrt{-g}\,F^{01} = -\sqrt{-g}\,F^{10} = r^2 F_{10} \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} \sin\theta$，于是式(8-4-14)在 $\nu = 1$，2，3 时给出恒等式，在 $\nu = 0$ 时给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2 F_{10}(r)\mathrm{e}^{-\alpha(r)-\beta(r)}] = 0,$$

其通解为

$$F_{10} = \frac{Q}{r^2}\mathrm{e}^{\alpha+\beta}, \qquad 其中\ Q = 常数. \tag{8-4-16}$$

至此，满足麦氏方程的电磁场 F_{ab} 有如下表达式：

$$F_{ab} = -\frac{Q}{r^2}\mathrm{e}^{\alpha+\beta}(\mathrm{d}t)_a \wedge (\mathrm{d}r)_b. \tag{8-4-17}$$

上式尚含待求函数$\alpha(r)$和$\beta(r)$，它们应由爱因斯坦方程(8-4-4)解出. 我们从一开始就有两组待求函数——$\{F_{\mu\nu}(r)\}$ 和$\{\alpha(r),\ \beta(r)\}$，不要以为前者只含于麦氏方程而后者只含于爱因斯坦方程从而可以分别求解. 事实上，两者都出现于两组方程中，可见爱-麦方程是耦合方程(“你中有我，我中有你.”). 现在求解爱因斯坦方程 $R_{ab} = 8\pi T_{ab}$. 为此先计算 F_{ab} 的能动张量 T_{ab}. 由式(8-4-1)和(8-4-12)可得 T_{ab} 的非零坐标分量为

$$T_{00} = F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2\beta}/8\pi, \qquad T_{11} = -F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha}/8\pi,$$
$$T_{22} = r^2 F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2(\alpha+\beta)}/8\pi, \qquad T_{33} = r^2 F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2(\alpha+\beta)}\sin^2\theta/8\pi. \tag{8-4-18}$$

另一方面，里奇张量 R_{ab} 的非零坐标分量 $R_{\mu\nu}$ 的表达式已由式(8-3-5)~(8-3-8)给出，于是爱因斯坦方程(8-4-4)的分量方程 $R_{00}=8\pi T_{00}$ 和 $R_{11}=8\pi T_{11}$ 分别等价于

$$-\mathrm{e}^{2(\alpha-\beta)}(-\alpha''+\alpha'\beta'-\alpha'^2-2r^{-1}\alpha')=F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2\beta}, \tag{8-4-19}$$

$$-\alpha''+\alpha'\beta'-\alpha'^2+2r^{-1}\beta'=-F_{10}{}^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha}. \tag{8-4-20}$$

由上两式易得 $\alpha'=-\beta'$，与施瓦西解的求解过程所得的式(8-3-12)一样，故也可通过重选 t 而得 $\alpha=-\beta$. 在此前提下，利用式(8-4-16)可知式(8-4-4)的其余两个分量方程 $R_{22}=8\pi T_{22}$ 和 $R_{33}=8\pi T_{33}$ 等价于

$$(r\mathrm{e}^{2\alpha})'=1-Q^2/r^2,$$

于是

$$\mathrm{e}^{2\alpha}=1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}, \tag{8-4-21}$$

从而

$$\mathrm{e}^{2\beta}=\left(1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}\right)^{-1}. \tag{8-4-22}$$

代入式(8-4-12)便得时空线元

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2), \tag{8-4-23}$$

把 $\alpha=-\beta$ 代入式(8-4-16)则得

$$F_{10}=\frac{Q}{r^2}. \tag{8-4-24}$$

当 r 足够大时，$Q^2/r^2\ll C/r$，故式(8-4-23)近似成为

$$\mathrm{d}s^2\cong-\left(1+\frac{C}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1+\frac{C}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{8-4-25}$$

从物理角度考虑，球对称带电恒星在 r 足够大处的引力场应近似服从牛顿引力论，时空度规应与施瓦西度规近似一样，可见 $C=-2M$. 另一方面，星球在 r 足够大时可视为点电荷，它产生的 F_{10} 应等于其电荷除以 r^2，故由式(8-4-24)可知常数 Q 的物理意义是星球的电荷. 于是式(8-4-23)最终可表为

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{8-4-26}$$

这称为 **Reissner-Nordstrom 线元**(简称 **RN 线元**)，描述质量为 M、电荷为 Q 的静态球对称恒星(物体)外部的时空几何，相应的电磁场 F_{ab} 和 4 势 A_a 则为

$$F_{ab}=-\frac{Q}{r^2}(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}r)_b,\qquad A_a=-\frac{Q}{r}(\mathrm{d}t)_a. \tag{8-4-27}$$

式(8-4-26)表述的度规 g_{ab} 配以式(8-4-27)表述的电磁场 F_{ab} 就构成爱-麦方程的

RN 解.

我们对RN解的电磁场再做一点讨论. 由式(8-4-27)易得 $F_{ab}F^{ab}=-2Q^2/r^4\neq 0$，可见 RN 时空的 F_{ab} 为非类光电磁场. 人们常说 RN 时空的电磁场是静电场. 要理解这一说法，应注意在谈到电场和磁场时要明确对什么观者而言. 下面证明静态观者 G 测 RN 解 F_{ab} 所得的电场和磁场分别是静电场和零. G 的 4 速为

$$Z^a=f^{-1/2}(\partial/\partial t)^a\quad [\text{其中 } f\equiv 1-(2M/r)+Q^2/r^2],$$

把对偶坐标基矢 $(\mathrm{d}r)_a$，$(\mathrm{d}\theta)_a$，$(\mathrm{d}\varphi)_a$ 归一化可得 G 的空间正交归一 3 标架：

$$(e^1)_a=f^{-1/2}(\mathrm{d}r)_a,\qquad (e^2)_a=r\,(\mathrm{d}\theta)_a,\qquad (e^3)_a=r\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a,$$

易证 (习题) G 测得的电场 $E_a\equiv F_{ab}Z^b$ 和磁场 $B_a\equiv -{}^*F_{ab}Z^b$ 为 $E_a=\dfrac{Q}{r^2}(e^1)_a$，$B_a=0$，或

$$E^a=\frac{Q}{r^2}(e_1)^a,\qquad B^a=0\qquad [\text{其中 } (e_1)^a\equiv f^{1/2}(\partial/\partial r)^a]. \tag{8-4-28}$$

可见 RN 时空的静态观者 G 测 F_{ab} 的结果是一个由点电荷 Q 激发的静电场而无磁场. 由此也可印证 F_{ab} 的非类光性. ①

如果事先不假定度规为静态，即一开始就把式(8-4-12)中的 $\alpha(r)$ 和 $\beta(r)$ 改为 $\alpha(t,\ r)$ 和 $\beta(t,\ r)$，则最终所得结果同上述结果一样. [推导过程可参见 Carmeli (1982)]. 这可看作 Birkhoff 定理的某种推广：爱因斯坦方程的电磁真空球对称解必为 RN 解.

§8.5　轴对称度规简介[选读]

许多星体都有自转. 由于自转，原本是球对称的星体的对称性就降格为轴对称性. 此外，轴对称的物质分布不论有无以对称轴为轴的自转都有轴对称性. 从数学上说，度规 g_{ab} 称为**轴对称的**(axisymmetric)，若存在单参等度规群，其轨道(不动点除外)为闭合类空曲线. 可见轴对称时空存在具有闭合积分曲线的类空 Killing 矢量场 ψ^a. 轴对称度规 g_{ab} 称为稳态轴对称的，如果它存在类时 Killing 场 ξ^a 而且 ξ^a 与代表轴对称性的类空 Killing 场 ψ^a 对易：

$$[\xi,\ \psi]^a=0. \tag{8-5-1}$$

利用这一对易性可选坐标系 $\{x^0\equiv t, x^1\equiv\varphi, x^2, x^3\}$ 使 $\xi^a=(\partial/\partial t)^a$，$\psi^a=(\partial/\partial\varphi)^a$. 设

① 下册将介绍电磁对偶变换，它只改变说法而不改变实质. 例如，既可说带电静态恒星有电荷无磁荷，也可说它有磁荷无电荷，还可说它既有电荷又有磁荷(且数量灵活，只要两者平方和不变.). 本节讨论 RN 解时采用最常见的说法，即恒星只有电荷而无磁荷，其相应的电磁场只有静电场而无磁场.

$g_{\mu\nu}$ 是 g_{ab} 在该系的分量，则由式(4-2-3)及 ξ^a 和 ψ^a 的 Killing 性得

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial t = (\mathscr{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial g_{\mu\nu}/\partial \varphi = (\mathscr{L}_\psi g)_{\mu\nu} = 0\,, \tag{8-5-2}$$

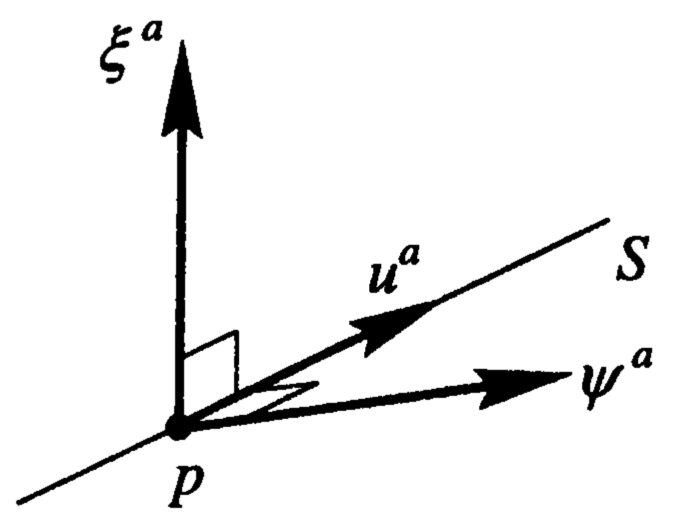


图 8-10　S 是与 ξ^a 和 ψ^a 都正交的两维面（图中压缩一维）

故 $g_{\mu\nu}$ 只能是 x^2，x^3 的函数．为进一步简化求解过程，我们只讨论满足如下条件的稳态轴对称度规：$\forall\, p\in M$，$\exists$ 过 p 的、与 $\xi^a|_p$ 和 $\psi^a|_p$ 都正交的 2 维面 S（就是说，对 p 点的任一切于 S 的矢量 u^a 有 $g_{ab}u^a\xi^b|_p = g_{ab}u^a\psi^b|_p = 0$．由于 4 维时空的 2 维面不是超曲面，它有不止一个线性独立的法矢，见图 8-10.)．许多重要的稳态轴对称度规都满足这一条件．在某正交面 S_0 上任选坐标系 $\{x^2, x^3\}$，用 ξ^a 和 ψ^a 的积分曲线把 x^2，x^3 携带至 S_0 面外的任一点(即令 x^2，x^3 在每一积分曲线上为常数)，并设定 Killing 参数 t 和 φ 的零点使 t，φ 在每一正交面 S 上为常数(由类似于命题 8-1-1 的命题可知这总可做到)，便得局部坐标系 $\{x^0\equiv t,\ x^1\equiv\varphi,\ x^2,\ x^3\}$，其 x^0 和 x^1 坐标线分别是 ξ^a 和 ψ^a 的积分曲线，x^2 和 x^3 坐标线躺在正交面 S 上．于是 g_{ab} 在此系的分量 $g_{\mu\nu}$ 满足

$$g_{02} = g_{20} = g_{ab}\xi^a(\partial/\partial x^2)^b = 0\,, \qquad g_{03} = g_{30} = g_{ab}\xi^a(\partial/\partial x^3)^b = 0\,,$$
$$g_{12} = g_{21} = g_{ab}\psi^a(\partial/\partial x^2)^b = 0\,, \qquad g_{13} = g_{31} = g_{ab}\psi^a(\partial/\partial x^3)^b = 0\,.$$

令 $V\equiv -g_{00} = -g_{ab}\xi^a\xi^b$，$W\equiv g_{01} = g_{ab}\xi^a\psi^b$，$X\equiv g_{11} = g_{ab}\psi^a\psi^b$，则线元可表为

$$ds^2 = -V dt^2 + X d\varphi^2 + 2W dt d\varphi + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + 2\,g_{23}dx^2dx^3\,. \tag{8-5-3}$$

由式(8-5-2)知 V，X，W，g_{22}，g_{33}，g_{23} 都只能是 x^2，x^3 的函数，因此爱因斯坦方程的求解归结为寻找这 6 个二元函数．然而问题还可进一步简化．用下式定义函数 ρ：

$$\rho^2 := VX + W^2\,, \tag{8-5-4}$$

V，X，W 不是 t，φ 的函数导致 $\xi^a\nabla_a\rho = \partial\rho/\partial t = 0$ 和 $\psi^a\nabla_a\rho = \partial\rho/\partial\varphi = 0$，即 $\nabla^a\rho$ 与 ξ^a 和 ψ^a 正交，因而切于各 S 面．在 S_0 面上做两件事：①选 ρ 为第二坐标 x^2，② 任取一等 ρ 线并在线上任意定义 1 维坐标 z，再用 $\nabla^a\rho$ 的积分曲线把 z 携带到 S_0 面的其他点．这样得到的 2 维坐标系 $\{x^2\equiv\rho,\ x^3\equiv z\}$[①] 的坐标基矢 $(\partial/\partial\rho)^a$ 正交于 $(\partial/\partial z)^a$，故 $g_{23}|_{S_0} = 0$．如上所述地用 ξ^a 和 ψ^a 的积分曲线把 x^2，x^3 携带至 S_0 面外，便得坐标系 $\{x^\mu\}$，其中 $x^0\equiv t$，$x^1\equiv\varphi$，$x^2\equiv\rho$，$x^3\equiv z$．应说明两点：① ρ 由式(8-5-4)定义，我们只在 S_0 面上定义 $x^2\equiv\rho$，再把 x^2 携带出面外．在面外为何也有 $x^2\equiv\rho$？

① 当 $\nabla_a\rho = 0$ 时这种定义失效，故坐标域不含 $\nabla_a\rho = 0$ 的点．

这是$\xi^a\nabla_a\rho=0$，$\xi^a\nabla_a x^2=0$(携带法的要求)[及相应的$\psi^a\nabla_a\rho=0$，$\psi^a\nabla_a x^2=0$]以及$(x^2-\rho)|_{S_0}=0$的联合结果. ②由$g_{23}|_{S_0}=0$，$\xi^c\nabla_c g_{23}=0$及$\psi^c\nabla_c g_{23}=0$易见$g_{23}=0$在全坐标域上成立，后两式的证明如下(仅以$\xi^c\nabla_c g_{23}=0$为例)

$$\xi^c\nabla_c g_{23}=\xi^c\nabla_c[g_{ab}(\partial/\partial x^2)^a(\partial/\partial x^3)^b]=\mathscr{L}_\xi[g_{ab}(\partial/\partial x^2)^a(\partial/\partial x^3)^b]$$
$$=g_{ab}[\mathscr{L}_\xi(\partial/\partial x^2)^a](\partial/\partial x^3)^b+g_{ab}(\partial/\partial x^2)^a\mathscr{L}_\xi(\partial/\partial x^3)^b=0,$$

其中最末一步用到$\mathscr{L}_\xi(\partial/\partial x^2)^a=[\xi,\partial/\partial x^2]^a=[\partial/\partial t,\partial/\partial x^2]^a=0$及$\mathscr{L}_\xi(\partial/\partial x^3)^a=0$.

现在令$\Omega^2\equiv g_{22}$，$\Lambda\equiv g_{33}/\Omega^2$，$w\equiv W/V$，则式(8-5-3)可改写为

$$ds^2=-V(dt-wd\varphi)^2+V^{-1}\rho^2d\varphi^2+\Omega^2(d\rho^2+\Lambda dz^2).\qquad(8\text{-}5\text{-}5)$$

于是决定度规分量的二元函数又从 6 个减为 4 个，即$V(\rho,z)$，$w(\rho,z)$，$\Omega(\rho,z)$，$\Lambda(\rho,z)$. 如果待求解的是真空爱因斯坦方程，则式(8-5-5)还可简化为[见 Wald(1984) P. 166]

$$ds^2=-V(dt-wd\varphi)^2+V^{-1}[\rho^2d\varphi^2+e^{2\gamma}(d\rho^2+dz^2)],\qquad\gamma\equiv\tfrac{1}{2}\ln(V\Omega^2).\qquad(8\text{-}5\text{-}6)$$

上式表明待求二元函数又从 4 个减为 3 个，即$V(\rho,z)$，$w(\rho,z)$和$\gamma(\rho,z)$. 上式在$V=1$，$w=\gamma=0$的特例下化为闵氏度规在柱坐标系(t,z,ρ,φ)的线元达表式

$$ds^2=-dt^2+\rho^2d\varphi^2+d\rho^2+dz^2.$$

对式(8-5-6)的求解感兴趣的读者可参阅 Kramer et al.(1980)第 18 章. 只想知道求解梗概和结论的读者则可参阅 Wald(1984) P. 166~168.

真空爱因斯坦方程稳态轴对称解的一个重要特例是 Kerr 解，它描述某类不带电的旋转星球的外部时空几何，详见第 13 章.

如果轴对称度规还具有沿对称轴的平移不变性，就称为**柱对称度规**(cylindrically symmetric metric). 准确地说，除了反映轴对称性的 Killing 矢量场$\psi^a=(\partial/\partial\varphi)^a$外，柱对称度规还存在一个反映“沿对称轴的平移不变性”的 Killing 矢量场η^a，满足①$[\eta,\psi]^a=0$；②η^a的积分曲线同胚于$\mathbb{R}$.

对柱对称度规有兴趣的读者可参阅 Kramer et al.(1980)第 20 章.

§8.6　平面对称度规简介[选读]

§8.2 在给出球对称度规的定义前讨论了 3 维欧氏空间中 2 维球面(S^2,h_{ab})的对称性. 与此相仿，在给出平面对称度规的定义前应先重温 2 维欧氏平面$(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$的对称性. §4.1 例(1)已用简单方法找到$(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$的全部(3 个)独立 Killing 矢量场，即反映平移对称性的$\xi_1{}^a\equiv(\partial/\partial x)^a$和$\xi_2{}^a\equiv(\partial/\partial y)^a$以及反映旋转对称性的

$\xi_3{}^a \equiv -y\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial y)^a$. 用$\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$可线性组合出无数 Killing 矢量场(注意，组合系数应为常数而不是$\mathbb{R}^2$上的函数)，它们对应的等度规映射构成一个 3 参数等度规群，称为**欧氏群**，记作 E(2) (详见 G.5.5 小节). 仿照球对称度规的定义(见§8.2 定义 1)，可给出平面对称度规的如下定义：

定义 1　时空度规 g_{ab} 称为**平面对称的**(plane symmetric)，若其等度规群含有一个与 E(2)同构的子群 G_3，且 G_3 的所有轨道都是 2 维平面.

Taub(1951)证明了如下定理：真空爱因斯坦方程的平面对称解必为静态度规，其线元形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{\sqrt{1+kZ}}(-\,\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}Z^2) + (1+kZ)\,(\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2)\,, \tag{8-6-1}$$

其中 k 为常数. $(-\,\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}Z^2)$ 的系数为正表明 T 和 Z 分别为类时和类空坐标. 度规分量不含 T 说明 $(\partial/\partial T)^a$ 是类时 Killing 场，因而度规为静态. Taub 文开始时只要求度规有平面对称性，即只要求有 3 个 Killing 矢量场 $(\partial/\partial X)^a$，$(\partial/\partial Y)^a$ 和 $-Y(\partial/\partial X)^a + X(\partial/\partial Y)^a$，由此就能证出必含第 4 个(额外的) Killing 矢量场 $(\partial/\partial T)^a$. 这与 Birkhoff 定理很像. 不但如此，而且 Taub 定理也犯了一个同 Birkhoff 定理类似的错误：在得出式(8-6-1)的过程中遗漏了与之平权的另一可能性. 事实上，由真空及平面对称性出发可证度规要么如式(8-6-1)，要么如下式：

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-1}{\sqrt{1+kZ}}(-\,\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}Z^2) + (1+kZ)\,(\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2)\,. \tag{8-6-2}$$

上式中 $(-\,\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}Z^2)$ 的系数为负，说明 Z 为类时坐标，T 为类空坐标，度规分量不含 T 说明 $(\partial/\partial T)^a$ 为类空 Killing 场，与其他两个类空 Killing 场 $(\partial/\partial X)^a$，$(\partial/\partial Y)^a$ 合起来表明时空是**空间均匀的**(spatially homogeneous)，因为它在空间的 3 个方向(由 T，X 和 Y 轴代表)上有平移不变性. 这个度规没有类时 Killing 矢量场，因而不是静态的. 可见 Taub 定理应修正为：真空爱因斯坦方程的平面对称解要么是静态的，要么是空间均匀的.

Taub 文的另一缺点是式(8-6-1)含有任意常数 k，容易使人误以为式(8-6-1)是一个单参度规族(误以为同施瓦西度规一样. 施瓦西度规的参数 M 的确表明它是一个单参族.). 在 $k\neq 0$ 情况下引入新坐标 $t = k^{-1/3}T$, $z = k^{-4/3}(1+kZ)$, $x = k^{2/3}X$, $y = k^{2/3}Y$，则式(8-6-1)和(8-6-2)变为

$$\mathrm{d}s^2 = z^{-1/2}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2) + z(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,, \tag{8-6-1$'$}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -z^{-1/2}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2) + z(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,. \tag{8-6-2$'$}$$

这说明在 $k\neq 0$ 情况下式(8-6-1)和(8-6-2)各代表一个度规而非一族度规，在这方面，Taub 度规与施瓦西度规很不一样.

对电磁真空爱因斯坦方程的平面对称解的研究最早可追溯至 1926 年. 但其通解的探求则始于 20 世纪 70 年代. Letelier and Tabensky(1974)在 Patnaik(1970)工作的基础上找到由平面对称电磁场产生的平面对称度规的通解[见 Kramer et al.(1980)]

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{2}Y'(z)\,(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2)+Y^2(z)\;(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\,,\tag{8-6-3}$$

其中 $Y'(z)\equiv \mathrm{d}Y/\mathrm{d}z$，而 $Y(z)$由下式隐给出：

$$(Y-A)^2+2\,A^2\ln(Y+A)=-Cz\;,\qquad A,C\text{ 为常数}.\tag{8-6-4}$$

与式(8-6-3)相应的电磁场 F_{ab} 为非类光无源电磁场，其坐标分量为(把 t, x, y, z 分别认定为 x^0，x^1，x^2，x^3)

$$F_{12}=C_1,\qquad F_{30}=C_2Y'Y^{-2}/2,\qquad A\equiv 4\pi\,(C_1{}^2+C_2{}^2)/C,\qquad C_1,C_2\text{ 为常数}.\tag{8-6-5}$$

当 $F_{ab}=0$ 时式(8-6-3)简化为式(8-6-1′)[对 $(\nabla_aY)\nabla^aY<0$]或(8-6-2′)[对 $(\nabla_aY)\nabla^aY>0$].

式(8-6-3)代表由平面对称电磁场 F_{ab} 产生的平面对称度规. 所谓平面对称电磁场是指

$$\mathscr{L}_{\xi_i}F_{ab}=0\,,\qquad i=1,\,2,\,3\,,\tag{8-6-6}$$

其中 $\xi_i{}^a$ 代表反映平面对称性的 3 个 Killing 矢量场，即

$$\xi_1{}^a\equiv(\partial/\partial x)^a\,,\qquad \xi_2{}^a\equiv(\partial/\partial y)^a\,,\qquad \xi_3{}^a\equiv -y\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial y)^a\,.\tag{8-6-7}$$

不难验证(习题)式(8-6-5)的 F_{ab} 满足式(8-6-6). 然而，平面对称度规也可由非平面对称的电磁场产生. 只有平移对称性而没有旋转对称性[即式(8-6-6)只对 $i=1$, 2 成立]的电磁场称为**半平面对称**(semi-plane symmetric)电磁场(改用“2/3 平面对称”会更贴切). 由这种电磁场产生的平面对称度规的个别特解散见于某些文献中. 李鉴增和梁灿彬 [Li and Liang(1985)]求得由这种半平面对称电磁场产生的平面对称度规的通解，分为以下两类:

A 类　$$\mathrm{d}s^2=\pm\frac{J(T+Z)}{\sqrt{T}}(-\mathrm{d}T^2+\mathrm{d}Z^2)+T\,(\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2)\,,\tag{8-6-8a}$$

B 类　$$\mathrm{d}s^2=\pm\frac{J(T+Z)}{\sqrt{T+Z}}(-\mathrm{d}T^2+\mathrm{d}Z^2)+(T+Z)\;(\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2)\,,\tag{8-6-8b}$$

其中 $J(T+Z)$ 是满足 $\dot{J}/J>0$ 的任意函数($\dot{J}\equiv\partial J/\partial T$).① 与式(8-6-8a)、(8-6-8b)相应的电磁场是半(2/3)平面对称类光无源电磁场. 通解(8-6-3)和(8-6-8)分别对应于非类光、平面对称和类光、半平面对称无源电磁场. 自然要问：由电磁场(不论其

---

① 两个不同函数 $J(T+Z)$按式(8-6-8a)或(8-6-8b)给出的线元可能只差一个坐标变换(即从一个出发通过坐标变换可得另一个)，这样两个线元代表相同几何，因此这样两个函数 $J(T+Z)$称为等价的. 要弄清式(8-6-8a)和(8-6-8b)描写的所有不同几何，就要找到判断任意两个函数 $J(T+Z)$是否等价的判据. 邝志全等找到了这一充要判据[Kuang, Li and Liang (1986)].

对称性如何)产生的平面对称度规除式(8-6-3)和(8-6-8)外还有没有其他？ 邝志全等证明[Kuang, Li and Liang(1987)]：①电磁场产生的平面对称度规只有式(8-6-3)和(8-6-8a)、(8-6-8b)等 3 类(及由它们出发经坐标变换而得的线元)；②平面对称度规(8-6-3)不能由有源电磁场产生；③平面对称度规(8-6-8a)、(8-6-8b)也可由有源电磁场产生，即 A 和 B 类的每一度规既可解释为由无源电磁场产生，也可解释为由有源电磁场产生[这两种解释称为互相对偶的解释(dual interpretation)，两者对应于同一能动张量 T_{ab}.[①]]，两者都是类光电磁场，前者是半(2/3)平面对称的(只有平移对称性而没有旋转对称性)，后者则与前者恰相反，只有旋转对称性而没有平移对称性(即 $\mathscr{L}_{\xi_3}F_{ab}=0$ ，$\mathscr{L}_{\xi_1}F_{ab}\neq 0$ ，$\mathscr{L}_{\xi_2}F_{ab}\neq 0$)，也可称为(另一类)半平面对称电磁场，更准确地说是 1/3 平面对称电磁场. 至此，由电磁场产生的平面对称度规终于得以穷尽.

半平面对称电磁场可以产生平面对称度规的事实表明电磁场的对称性可以弱于度规的对称性. 自然要问：度规的对称性可否弱于电磁场的对称性？例如，是否存在由平面对称电磁场产生的半平面对称度规？答案是肯定的：李鉴增和梁灿彬给出了一个具体例子(特解)，见 Li and Liang(1989). 但有关问题还有待进一步探讨.

顺便指出，反映球对称性的 3 个 Killing 场地位均等，不存在由半(2/3 或 1/3)球面对称电磁场产生的球对称度规. 由电磁场产生的球对称度规只能是 RN 度规，其电磁场只能是球对称的无源非类光电磁场.

§8.7 Newman-Penrose 形式(NP formalism)[选读]

除坐标基底法和正交归一标架法之外，相对论还经常用到第三种计算曲率的方法，就是 Newman 和 Penrose 提出的“类光标架法”[Newman and Penrose(1962)]，它可看作刚性标架法的一个变种：所用的不是正交归一标架而是复的[②]“类光标架”. 设 p 是 4 维时空(M,g_{ab})的一点，$\{(e_\mu)^a\}$是 p 的一个正交归一标架，定义点 p 的 4 个特殊矢量如下：

$$m^a := \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_1)^a - \mathrm{i}\,(e_2)^a], \qquad \bar{m}^a := \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_1)^a + \mathrm{i}\,(e_2)^a],$$

① 电磁场的源(尘埃)的能动张量 T'_{ab} 也应与电磁场的能动张量 T_{ab} 一样出现在爱因斯坦方程右边，这使问题变得相当复杂. 一种简化讨论是约定 $T'_{ab}=0$ ，其物理意义可参见 Tariq and Tupper(1976).

② 把§2.2 定义 2 中的$\mathbb{R}$改为全体复数的集合$\mathbb{C}$，则映射 v: $\mathscr{F}_M\to\mathbb{C}$ 称为 $p\in M$ 的复矢量，p 点的切空间 V_p 于是拓展为 n 维复矢量空间(用复数做数乘). 设 u 和 w 是 p 点的实矢量且 $v(f)=u(f)+\mathrm{i}w(f)$ ，$\forall f\in\mathscr{F}_M$ ，就说 $v=u+\mathrm{i}w$，并分别称 u，w 为 v 的实部和虚部. 仿此不难定义复张量及其实部和虚部.

$$l^a := \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_0)^a - (e_3)^a], \qquad k^a := \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_0)^a + (e_3)^a], \tag{8-7-1}$$

则 $g_{ab}m^a m^b = g_{ab}\bar{m}^a \bar{m}^b = g_{ab}l^a l^b = g_{ab}k^a k^b = 0$，即 4 个都是类光矢量. 请注意，$m^a$ 和 $\bar{m}^a$ 都是复矢量，而且互相共轭. 这 4 个矢量构成 p 点的一个基底，称为 p 点的一个**类光标架**(null tetrad). 为与其他标架相区别，本书以 $\{(\varepsilon_\mu)^a\}$ 代表类光标架，并规定其编号为[同 Kramer et al.(1980)一致]

$$(\varepsilon_1)^a \equiv m^a, \qquad (\varepsilon_2)^a \equiv \bar{m}^a, \qquad (\varepsilon_3)^a \equiv l^a, \qquad (\varepsilon_4)^a \equiv k^a. \tag{8-7-2}$$

相应的对偶基矢为

$$(\varepsilon^1)_a \equiv \bar{m}_a, \qquad (\varepsilon^2)_a \equiv m_a, \qquad (\varepsilon^3)_a \equiv -k_a, \qquad (\varepsilon^4)_a \equiv -l_a. \tag{8-7-2'}$$

$(\varepsilon_\mu)^a$ 可看作§5.7 开始时提及的任一基底场 $(e_\mu)^a$ 的特例，但式(8-7-1)的 $(e_\mu)^a$ 则专指正交归一标架，请勿混淆. 不难看出类光标架中任意两个基矢的内积只有以下两对非零：

$$m^a\bar{m}_a \equiv g_{ab}m^a\bar{m}^b = g_{12} = g_{21} = 1, \qquad l^a k_a \equiv g_{ab}l^a k^b = g_{34} = g_{43} = -1,$$

因此度规 g_{ab} 及其逆 g^{ab} 在该标架的分量 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 组成的矩阵为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (g^{\mu\nu}). \tag{8-7-3}$$

与§5.7 一样，$(\varepsilon_\mu)^a$ 和 $(\varepsilon^\mu)_a$ 的编号指标也可用 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 升降. 把式(5-7-5)用于类光标架得

$$\omega_{\mu}{}^{\nu}{}_a = (\varepsilon_\mu)^c \nabla_a (\varepsilon^\nu)_c, \tag{8-7-4}$$

相应的里奇旋转系数为

$$\omega_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho} = (\varepsilon_\mu)^b (\varepsilon_\rho)^a \nabla_a (\varepsilon^\nu)_b.$$

式 (8-7-3) 表 明 $\{(\varepsilon_\mu)^a\}$ 是 (复) 刚 性 标 架 ， 因 此 有 $\omega_{\mu\nu a} = (\varepsilon_\mu)_b \nabla_a (\varepsilon_\nu)^b$ 及 $\omega_{\mu\nu a} = -\omega_{\nu\mu a}$(即 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}$)，相应的里奇旋转系数

$$\omega_{\mu\nu\rho} = (\varepsilon_\mu)^b (\varepsilon_\rho)^a \nabla_a (\varepsilon_\nu)_b, \qquad \omega_{\mu\nu\rho} = -\omega_{\nu\mu\rho}. \tag{8-7-5}$$

由于类光标架指标的编号为 1，2，3，4 而非 0，1，2，3，相应的联络 1 形式的编号指标也改为 ω_{12}，ω_{13}，ω_{14}，ω_{23}，ω_{24}，ω_{34}. 请注意与类光标架相应的 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 是复数，而且服从如下命题：

命题 8-7-1 若把 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 下标中的所有 1 和 2 互换(保持 3、4 不变)，便得 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 的共轭复数 $\bar{\omega}_{\mu\nu\rho}$，例如 $\omega_{134} = \bar{\omega}_{234}$，$\omega_{342} = \bar{\omega}_{341}$，$\omega_{421} = \bar{\omega}_{412}$，$\omega_{122} = \bar{\omega}_{211}$，$\omega_{344} = \bar{\omega}_{344}$.

证明 由式(8-7-5)得 $\bar{\omega}_{\mu\nu\rho} = (\bar{\varepsilon}_\mu)^b (\bar{\varepsilon}_\rho)^a \nabla_a (\bar{\varepsilon}_\nu)_b$，用此式不难证明本命题. 例

如，

$$\bar{\omega}_{412}=(\bar{\varepsilon}_4)^b(\bar{\varepsilon}_2)^a\nabla_a(\bar{\varepsilon}_1)_b=(\varepsilon_4)^b(\varepsilon_1)^a\nabla_a(\varepsilon_2)_b=\omega_{421}.$$ □

命题 8-7-1 不但对 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 成立，而且对所有带有类光标架指标的量(包括张量)也成立，例如 $\boldsymbol{\omega}_{41}=\bar{\boldsymbol{\omega}}_{42}$，$\boldsymbol{\omega}_{21}=\bar{\boldsymbol{\omega}}_{12}$，$\boldsymbol{R}_{31}=\bar{\boldsymbol{R}}_{32}$，$\boldsymbol{R}_{12}=\bar{\boldsymbol{R}}_{21}$，$\boldsymbol{R}_{34}=\bar{\boldsymbol{R}}_{34}$.

用类光标架法求曲率张量的过程与用正交归一标架法类似，也是先求所选类光标架的全部联络 1 形式 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ 再求全部曲率 2 形式 $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$. 联络 1 形式的分量 $\omega_{\mu\nu\rho}$ 仍可由式(5-7-19)和(5-7-20)计算，其中的 $(e_\mu)^a$ 现在应理解为 $(\varepsilon_\mu)^a$. 求得全部 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ 后仍可用嘉当第二方程计算全部 $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$.

命题 8-7-2 嘉当第二结构方程(5-7-8)在类光标架下表现为

$$\boldsymbol{R}_{41}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{41}+\boldsymbol{\omega}_{41}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{43}),\tag{8-7-6a}$$

$$\boldsymbol{R}_{32}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{32}-\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{43}),\tag{8-7-6b}$$

$$\boldsymbol{R}_{21}+\boldsymbol{R}_{43}=\mathrm{d}\,(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{43})+2\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}.\tag{8-7-6c}$$

证明 嘉当第二方程(5-7-8)在有度规 g_{ab} 时可改写为

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}+\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\tau\wedge\boldsymbol{\omega}_{\tau\nu}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}+g^{\lambda\tau}\boldsymbol{\omega}_{\mu\lambda}\wedge\boldsymbol{\omega}_{\tau\nu},$$

其中 $g^{\lambda\tau}$ 是 g^{ab} 在类光标架的分量. 注意到非零的 $g^{\lambda\tau}$ 只有 $g^{12}=g^{21}=1$ 和 $g^{34}=g^{43}=-1$，便可写出 $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ 的全部(6 个)独立分量如下：

$$\boldsymbol{R}_{43}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{43}+\boldsymbol{\omega}_{41}\wedge\boldsymbol{\omega}_{23}+\boldsymbol{\omega}_{42}\wedge\boldsymbol{\omega}_{13},\tag{8-7-7a}$$

$$\boldsymbol{R}_{42}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{42}+\boldsymbol{\omega}_{42}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{12}+\boldsymbol{\omega}_{43}),\tag{8-7-7b}$$

$$\boldsymbol{R}_{41}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{41}+\boldsymbol{\omega}_{41}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{43}),\tag{8-7-7c}$$

$$\boldsymbol{R}_{32}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{32}+\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{12}+\boldsymbol{\omega}_{34}),\tag{8-7-7d}$$

$$\boldsymbol{R}_{31}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{31}+\boldsymbol{\omega}_{31}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{34}),\tag{8-7-7e}$$

$$\boldsymbol{R}_{21}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{21}-\boldsymbol{\omega}_{23}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}-\boldsymbol{\omega}_{24}\wedge\boldsymbol{\omega}_{31}.\tag{8-7-7f}$$

考虑到命题 8-7-1，这 6 个等式其实也不全独立，因为 $\boldsymbol{R}_{31}=\bar{\boldsymbol{R}}_{32}$ 及 $\boldsymbol{R}_{42}=\bar{\boldsymbol{R}}_{41}$ 分别使式(8-7-7e)及(8-7-7b)可由式(8-7-7d)及(8-7-7c)推出. 此外，式(8-7-7a)及(8-7-7f)可分别改写为

$$\boldsymbol{R}_{43}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{43}+\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}+\overline{\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{43}+2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}),\tag{8-7-7a$'$}$$

$$\boldsymbol{R}_{21}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}-\overline{\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{21}+2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\omega}_{32}\wedge\boldsymbol{\omega}_{41}),\tag{8-7-7f$'$}$$

上两式合起来等价于式(8-7-6c). 于是式(8-7-7a)~(8-7-7f)等价于(8-7-6a)~(8-7-6c).

□

Newman 和 Penrose 以类光标架为基础创立的整套方法称为 **Newman-Penrose 形式**，简称 **NP 形式**(NP formalism). NP 形式的基本做法是把各种浓缩方程[如方程(8-7-6)]拆开写成多个分量方程，自然出现大量带多个指标的量，如 $\omega_{\mu\nu\rho}$，$R_{\rho\sigma\mu\nu}$ 等. 为了简化方程的外观(以及其他目的)，NP 用各种不带或少带指标的专门符号

代表这些多指标量，分三点介绍如下：

(1) 由于有命题 8-7-1，在 24 个复$\omega_{\mu\nu\rho}$的线性组合中只有 12 个独立复数(与正交归一标架中共有 24 个独立的实$\omega_{\mu\nu\rho}$的事实对照，便会发现这是很自然的.). 以 12 个不带指标的希腊字母代表$\omega_{\mu\nu\rho}$的 12 个独立线性组合，它们是[其中用到式(8-7-5)]

$$\kappa \equiv -\omega_{144} = -m^a k^b \nabla_b k_a, \tag{8-7-8a}$$

$$\rho \equiv -\omega_{142} = -m^a \bar{m}^b \nabla_b k_a, \tag{8-7-8b}$$

$$\sigma \equiv -\omega_{141} = -m^a m^b \nabla_b k_a, \tag{8-7-8c}$$

$$\tau \equiv -\omega_{143} = -m^a l^b \nabla_b k_a, \tag{8-7-8d}$$

$$\nu \equiv \omega_{233} = \bar{m}^a l^b \nabla_b l_a, \tag{8-7-8e}$$

$$\mu \equiv \omega_{231} = \bar{m}^a m^b \nabla_b l_a, \tag{8-7-8f}$$

$$\lambda \equiv \omega_{232} = \bar{m}^a \bar{m}^b \nabla_b l_a, \tag{8-7-8g}$$

$$\pi \equiv \omega_{234} = \bar{m}^a k^b \nabla_b l_a, \tag{8-7-8h}$$

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}(\omega_{214} - \omega_{344}) = \frac{1}{2}(\bar{m}^a k^b \nabla_b m_a - l^a k^b \nabla_b k_a), \tag{8-7-8i}$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2}(\omega_{211} - \omega_{341}) = \frac{1}{2}(\bar{m}^a m^b \nabla_b m_a - l^a m^b \nabla_b k_a), \tag{8-7-8j}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}(\omega_{433} - \omega_{123}) = \frac{1}{2}(k^a l^b \nabla_b l_a - m^a l^b \nabla_b \bar{m}_a), \tag{8-7-8k}$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}(\omega_{432} - \omega_{122}) = \frac{1}{2}(k^a \bar{m}^b \nabla_b l_a - m^a \bar{m}^b \nabla_b \bar{m}_a). \tag{8-7-8l}$$

这 12 个希腊字母称为**自旋系数**(spin coefficients，简称**旋系数**.).

命题 8-7-3 24 个$\omega_{\mu\nu\rho}$可由 12 个旋系数表出如下：

$$\omega_{121} = \bar{\alpha} - \beta,\ \ \omega_{131} = \bar{\lambda},\ \ \omega_{141} = -\sigma,\ \ \omega_{231} = \mu,\ \ \omega_{241} = -\bar{\rho},\ \ \omega_{341} = -(\bar{\alpha} + \beta),$$

$$\omega_{122} = \bar{\beta} - \alpha,\ \ \omega_{132} = \bar{\mu},\ \ \omega_{142} = -\rho,\ \ \omega_{232} = \lambda;\ \ \omega_{242} = -\bar{\sigma},\ \ \omega_{342} = -(\alpha + \bar{\beta}),$$

$$\omega_{123} = \bar{\gamma} - \gamma,\ \ \omega_{133} = \bar{\nu},\ \ \omega_{143} = -\tau,\ \ \omega_{233} = \nu,\ \ \omega_{243} = -\bar{\tau},\ \ \omega_{343} = -(\gamma + \bar{\gamma}),$$

$$\omega_{124} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon,\ \ \omega_{134} = \bar{\pi},\ \ \omega_{144} = -\kappa,\ \ \omega_{234} = \pi,\ \ \omega_{244} = -\bar{\kappa},\ \ \omega_{344} = -(\varepsilon + \bar{\varepsilon}).$$

证明 待证的 24 个等式中只有 8 个需要证明(其他都可从旋系数的定义一望而知)，证明如下.

首先，因$(\varepsilon_3)^a$和$(\varepsilon_4)^a$为实矢量，故ω_{343}和ω_{344}为实数. 其次，由$\omega_{213} = -\omega_{123} = -\bar{\omega}_{213}$可得$\omega_{213} + \bar{\omega}_{213} = 0$，所以$\omega_{213}$为虚数. 同理可知$\omega_{214}$亦为虚数. 而$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}(\omega_{214} - \omega_{344}) = \frac{1}{2}(\omega_{434} + \omega_{214})$，故$\omega_{434} = 2\mathrm{Re}(\varepsilon) = \varepsilon + \bar{\varepsilon}$，$\omega_{214} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\varepsilon) = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$. 类

似地有 $\omega_{433}=\gamma+\bar{\gamma}$，$\omega_{213}=\gamma-\bar{\gamma}$. 此外，由$\beta$和$\alpha$的定义又得 $\beta=-\frac{1}{2}(\omega_{121}+\omega_{341})$，$\bar{\alpha}=\frac{1}{2}(\omega_{121}-\omega_{341})$，因而 $\omega_{341}=-(\bar{\alpha}+\beta)$，$\omega_{121}=\bar{\alpha}-\beta$，由此又易得 $\omega_{122}=\bar{\beta}-\alpha$，$\omega_{342}=-(\alpha+\bar{\beta})$. □

(2) 各种公式中经常出现旋系数沿 4 个基矢的导数，特引入以下 4 个求导符号：

$$\delta\equiv m^a\nabla_a,\qquad \bar{\delta}\equiv \bar{m}^a\nabla_a,\qquad \Delta\equiv l^a\nabla_a,\qquad \mathrm{D}\equiv k^a\nabla_a. \tag{8-7-9}$$

(3) 黎曼张量 $R_{abc}{}^d$ 的分量有 4 个指标，应设法用指标较少的符号代表. $R_{abc}{}^d$ 由其“无迹部分”(外尔张量)$C_{abc}{}^d$ 和“有迹部分”(里奇张量)R_{ab} 决定. 由于具有各种对称性，外尔张量只有 10 个实的独立分量，可用 5 个复数 Ψ_0，Ψ_1，Ψ_2，Ψ_3，Ψ_4 代表，定义为

$$\Psi_0:=C_{4141},\quad \Psi_1:=C_{4341},\quad \Psi_2:=\frac{1}{2}(C_{4343}-C_{4312}),\quad \Psi_3:=C_{3432},\quad \Psi_4:=C_{3232}, \tag{8-7-10}$$

其中 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 C_{abcd} 在类光标架的分量. 里奇张量 R_{ab} 由于对称性 $R_{ab}=R_{ba}$ 而只有 10 个实的独立分量，它在类光标架的 10 个独立分量 R_{44}，R_{43}，R_{42}，R_{41}，R_{33}，R_{32}，R_{31}，R_{22}，R_{21}，R_{11} 中有 6 个为复数，4 个为实数. R_{44}，R_{43}，R_{33} 的实数性是显见的，R_{21} 也是实数，因为 $R_{21}=R_{12}=\bar{R}_{21}$. 由这 4 个实数的线性组合可定义如下 4 个实数：

$$\Phi_{00}:=\frac{1}{2}R_{44},\quad \Phi_{11}:=\frac{1}{4}(R_{21}+R_{43}),\quad \Phi_{22}:=\frac{1}{2}R_{33},\quad R:=2(R_{21}-R_{43}). \tag{8-7-11a}$$

第四个实数 R 其实就是标量曲率[易证标量曲率的确等于 $2(R_{21}-R_{43})$]. 由 R_{ab} 的 6 个复分量 R_{42}，R_{41}，R_{32}，R_{31}，R_{22}，R_{11} 则可定义 6 个复数

$$\Phi_{01}:=\frac{1}{2}R_{41},\qquad \Phi_{10}:=\frac{1}{2}R_{42},\qquad \Phi_{02}:=\frac{1}{2}R_{11},\qquad \Phi_{20}:=\frac{1}{2}R_{22},$$

$$\Phi_{12}:=\frac{1}{2}R_{31},\qquad \Phi_{21}:=\frac{1}{2}R_{32}. \tag{8-7-11b}$$

以上 10 个数除 R 外可排成一个 3×3“共轭对称”矩阵$[\Phi_{\lambda\tau}]$(满足 $\Phi_{\lambda\tau}=\bar{\Phi}_{\tau\lambda}$，$\lambda,\tau=0,1,2$)：

	0	1	2
0	$\frac{1}{2}R_{44}$	$\frac{1}{2}R_{41}$	$\frac{1}{2}R_{11}$
1	$\frac{1}{2}R_{42}$	$\frac{1}{4}(R_{21}+R_{43})$	$\frac{1}{2}R_{31}$
2	$\frac{1}{2}R_{22}$	$\frac{1}{2}R_{32}$	$\frac{1}{2}R_{33}$

3 个独立的复对角元与 3 个实对角元及实数 R 合起来正好代表 R_{ab} 的 10 个实独立分量.

NP 形式中包含 3 个非常有用的方程组，即 (A)NP 方程组；(B)比安基恒等式；(C)对易关系式. 分别介绍如下.

(A) NP 方程组

以 Φ_{00}，⋯，Φ_{22}，R 等 10 个量以及 Ψ_0，Ψ_1，Ψ_2，Ψ_3，Ψ_4 表达 $\boldsymbol{R}_{41}$，$\boldsymbol{R}_{32}$，$\boldsymbol{R}_{21}$，$\boldsymbol{R}_{43}$，以 12 个旋系数表达 $\boldsymbol{\omega}_{41}$，$\boldsymbol{\omega}_{32}$，$\boldsymbol{\omega}_{21}$，$\boldsymbol{\omega}_{43}$，便可把式(8-7-6)重新表述为如下的 18 个方程，称为 NP **方程组**：

$$\mathrm{D}\rho-\bar{\delta}\kappa=(\rho^2+\sigma\bar{\sigma})+\rho(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)+\Phi_{00}, \tag{8-7-12a}$$

$$\mathrm{D}\sigma-\delta\kappa=\sigma(\rho+\bar{\rho})+\sigma(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})-\kappa(\tau-\bar{\pi}+\bar{\alpha}+3\beta)+\Psi_0, \tag{8-7-12b}$$

$$\mathrm{D}\tau-\Delta\kappa=\rho(\tau+\bar{\pi})+\sigma(\bar{\tau}+\pi)+\tau(\varepsilon-\bar{\varepsilon})-\kappa(3\gamma+\bar{\gamma})+\Psi_1+\Phi_{01}, \tag{8-7-12c}$$

$$\mathrm{D}\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=\alpha(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\kappa\lambda-\bar{\kappa}\gamma+\pi(\varepsilon+\rho)+\Phi_{10}, \tag{8-7-12d}$$

$$\mathrm{D}\beta-\delta\varepsilon=\sigma(\alpha+\pi)+\beta(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})-\kappa(\mu+\gamma)-\varepsilon(\bar{\alpha}-\bar{\pi})+\Psi_1, \tag{8-7-12e}$$

$$\mathrm{D}\gamma-\Delta\varepsilon=\alpha(\tau+\bar{\pi})+\beta(\bar{\tau}+\pi)-\gamma(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-\varepsilon(\gamma+\bar{\gamma})+\tau\pi-\nu\kappa+\Psi_2+\Phi_{11}-R/24, \tag{8-7-12f}$$

$$\mathrm{D}\lambda-\bar{\delta}\pi=(\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu)+\pi^2+\pi(\alpha-\bar{\beta})-\nu\bar{\kappa}-\lambda(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})+\Phi_{20}, \tag{8-7-12g}$$

$$\mathrm{D}\mu-\delta\pi=(\bar{\rho}\mu+\sigma\lambda)+\pi\bar{\pi}-\mu(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-\pi(\bar{\alpha}-\beta)-\nu\kappa+\Psi_2+R/12, \tag{8-7-12h}$$

$$\mathrm{D}\nu-\Delta\pi=\mu(\pi+\bar{\tau})+\lambda(\bar{\pi}+\tau)+\pi(\gamma-\bar{\gamma})-\nu(3\varepsilon+\bar{\varepsilon})+\Psi_3+\Phi_{21}, \tag{8-7-12i}$$

$$\Delta\lambda-\bar{\delta}\nu=-\lambda(\mu+\bar{\mu})-\lambda(3\gamma-\bar{\gamma})+\nu(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})-\Psi_4, \tag{8-7-12j}$$

$$\delta\rho-\bar{\delta}\sigma=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\sigma(3\alpha-\bar{\beta})+\tau(\rho-\bar{\rho})+\kappa(\mu-\bar{\mu})-\Psi_1+\Phi_{01}, \tag{8-7-12k}$$

$$\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=(\mu\rho-\lambda\sigma)+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\bar{\rho})+\varepsilon(\mu-\bar{\mu})-\Psi_2+\Phi_{11}+R/24, \tag{8-7-12l}$$

$$\delta\lambda-\bar{\delta}\mu=\nu(\rho-\bar{\rho})+\pi(\mu-\bar{\mu})+\mu(\alpha+\bar{\beta})+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\Psi_3+\Phi_{21}, \tag{8-7-12m}$$

$$\delta\nu-\Delta\mu=(\mu^2+\lambda\bar{\lambda})+\mu(\gamma+\bar{\gamma})-\bar{\nu}\pi+\nu(\tau-3\beta-\bar{\alpha})+\Phi_{22}, \tag{8-7-12n}$$

$$\delta\gamma-\Delta\beta=\gamma(\tau-\bar{\alpha}-\beta)+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\alpha\bar{\lambda}+\Phi_{12}, \tag{8-7-12o}$$

$$\delta\tau-\Delta\sigma=(\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho)+\tau(\tau+\beta-\bar{\alpha})-\sigma(3\gamma-\bar{\gamma})-\kappa\bar{\nu}+\Phi_{02}, \tag{8-7-12p}$$

$$\Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-(\rho\bar{\mu}+\sigma\lambda)+\tau(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})+\rho(\gamma+\bar{\gamma})+\nu\kappa-\Psi_2-R/12, \tag{8-7-12q}$$

$$\Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=\nu(\rho+\varepsilon)-\lambda(\tau+\beta)+\alpha(\bar{\gamma}-\bar{\mu})+\gamma(\bar{\beta}-\bar{\tau})-\Psi_3. \tag{8-7-12r}$$

注 1 嘉当第二方程(8-7-6)包含 3 个复的(0, 2)型反称张量方程，每个方程又相当于 6 个复的分量方程，改写为复的 NP 方程自然是 18 个.

下面举例说明 NP 方程的证明. 先以式(8-7-12a)为例，它其实是式(8-7-6a)的第四、二分量方程的重新表述. R_{abcd} 在类光标架的分量 R_{4241} 可表为

$$R_{4241}=(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_2)^b R_{ab41}=(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_2)^b[(\mathrm{d}\omega_{41})_{ab}+\omega_{41a}\wedge(\omega_{21b}+\omega_{43b})],$$

其中第二步用到式(8-7-6a). 因 $(\omega_{41})_b=\sigma(\varepsilon^1)_b+\rho(\varepsilon^2)_b+\tau(\varepsilon^3)_b+\kappa(\varepsilon^4)_b$，故

$$\begin{aligned}(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_2)^b(\mathrm{d}\omega_{41})_{ab}&=(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_2)^b(\nabla_a\omega_{41b}-\nabla_b\omega_{41a})\\&=-\sigma\bar{\sigma}+\rho(\varepsilon-\bar{\varepsilon})+\mathrm{D}\rho-\rho^2+\bar{\kappa}\tau-\kappa\pi+\kappa(\alpha+\bar{\beta})-\bar{\delta}\kappa.\end{aligned}$$

最末一步繁而不难，留作练习. 推算中经常用到 $\omega_\mu{}^\nu{}_\rho$ 的降指标运算，为此要借用 g^{ab} 在类光标架的分量 $g^{\nu\sigma}$ 的表达式(8-7-3). 由于式(8-7-3)的矩阵很简单，计算十分方便. 例如

$$\omega_4{}^1{}_2=g^{1\mu}\omega_{4\mu2}=g^{12}\omega_{422}=\omega_{422}.$$

此外，

$$(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_2)^b[\omega_{41a}\wedge(\omega_{21b}+\omega_{43b})]=\kappa(\omega_{212}+\omega_{432})-\rho(\omega_{214}+\omega_{434})=2\kappa\alpha-2\rho\varepsilon,$$

因而

$$R_{4241}=(\mathrm{D}\rho-\bar{\delta}\kappa)-(\rho^2+\sigma\bar{\sigma})-\rho(\varepsilon+\bar{\varepsilon})+\bar{\kappa}\tau+\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi).\qquad(8\text{-}7\text{-}13)$$

另一方面，由 Φ_{00} 的定义及 $R_{\mu\nu}=R_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma$ 得

$$\begin{aligned}\Phi_{00}&\equiv\frac{1}{2}R_{44}=\frac{1}{2}R_{4\mu4}{}^\mu=\frac{1}{2}(R_{414}{}^1+R_{424}{}^2+R_{434}{}^3)\\&=\frac{1}{2}(R_{4142}+R_{4241}-R_{4344})=R_{4241},\end{aligned}\qquad(8\text{-}7\text{-}14)$$

对比式(8-7-13)和(8-7-14)便得式(8-7-12a). 可见式(8-7-12a)无非是式(8-7-6a)的一个分量方程，只是由于把代表曲率分量的 Φ_{00} 写在右边而使初学者不易看出这一实质. 下面再以较复杂的式(8-7-12f)为例介绍推证过程. 它是式(8-7-6c)的第 4, 3 分量方程的重新表述. 首先，

$$R_{4321}+R_{4343}=(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_3)^b(R_{ab21}+R_{ab43})=(\varepsilon_4)^a(\varepsilon_3)^b[(\mathrm{d}\omega_{21})_{ab}+(\mathrm{d}\omega_{43})_{ab}+2\omega_{32a}\wedge\omega_{41b}],$$

其中第二步用到式(8-7-6c). 经冗长而直接的计算得

$$R_{4321}+R_{4343}=2[(\mathrm{D}\gamma-\Delta\varepsilon)-\alpha(\tau+\bar{\pi})-\beta(\bar{\tau}+\pi)+\gamma(\varepsilon+\bar{\varepsilon})+\varepsilon(\gamma+\bar{\gamma})-\tau\pi+\nu\kappa].$$

(8-7-15)

另一方面，由定义式(8-7-9)知 $\Psi_2=(C_{4343}-C_{4312})/2$. 把外尔张量的定义[式(3-4-14)]用于 $n=4$ 得

$$C_{abcd}=R_{abcd}-\frac{1}{2}[(g_{ac}R_{db}-g_{ad}R_{cb})-(g_{bc}R_{da}-g_{bd}R_{ca})]+\frac{1}{6}R(g_{ac}g_{db}-g_{ad}g_{cb}).$$

注意到式(8-7-3)，得 $C_{4343}=R_{4343}-R_{34}-R/6$，$C_{4312}=R_{4312}$，因而

$$\Psi_2=\frac{1}{2}(R_{4343}-R_{4312})-\frac{1}{2}R_{34}-\frac{1}{12}R.\qquad(8\text{-}7\text{-}16)$$

而从式(8-7-10)知 $\Phi_{11}=(R_{12}+R_{43})/4$ 及 $R=2(R_{12}-R_{34})$，故

$$2(\Psi_2+\Phi_{11}-R/24)=R_{4343}-R_{4312}=R_{4321}+R_{4343}.\qquad(8\text{-}7\text{-}17)$$

由式(8-7-17)和(8-7-15)可知式(8-7-12f)成立.

总之，18 个 NP 方程无非是嘉当第二结构方程在类光标架的具体体现，其特点是把浓缩的式(8-7-6)中的所有取和逐次写出，从而便于实际计算. NP 方程虽然个数众多，但所有方程都只涉及一阶导数，求解并不困难. 利用选择类光标架的自由性[有 6 个实参量可供选择，见 Kramer et al.(1980) P. 45] 还可使 NP 方程尽量简化.

(B) 比安基恒等式

第 3 章早已从黎曼张量 ${R_{abc}}^d$ 的定义证明了它满足比安基恒等式 $\nabla_{[a}{R_{bc]d}}^e = 0$. 为便于应用，可借 NP 类光标架把它表为分量方程组，见 Kramer et al.(1981) P. 86~87.

(C) 对易关系式

计算黎曼张量先要选定基底场 $\{(e_\mu)^a\}$. 若选坐标基底，则任意两个基矢场必然对易，即 $[\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu]^a = 0$. 然而非坐标基底却不如此简单. 基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 中的任意两个基矢场 $(e_\mu)^a$ 和 $(e_\nu)^a$ 的对易子可用式(3-1-13)表为

$$[e_\mu, e_\nu]^a = (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a , \tag{8-7-18}$$

其中 ∇_a 是任一无挠导数算符. 把计算黎曼张量时所指定的那个导数算符(联络)选做上式的 ∇_a，则由式(5-7-1)便得

$$[e_\mu, e_\nu]^a = -2\,{\gamma^\sigma}_{[\mu\nu]} (e_\sigma)^a , \tag{8-7-19}$$

其中 ${\gamma^\sigma}_{\mu\nu}$ 是由式(5-7-1)定义的联络系数，与联络 1 形式 ${\omega_\mu}^\nu{}_a$ 的关系由式(5-7-4)给出. 式(8-7-19)就是用标架法计算黎曼张量时的**对易关系**(commutation relation). 下面讨论它在 NP 形式中的具体表达式. 借用度规(之逆)在类光标架的分量 $g^{\mu\nu}$ 可把式(5-7-4)改写为

$$-{\gamma^\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\beta} \omega_{\mu\beta\nu} , \tag{8-7-20}$$

故式(8-7-19)用于类光标架成为

$$[\varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu]^a = g^{\sigma\beta} (\omega_{\mu\beta\nu} - \omega_{\nu\beta\mu}) (\varepsilon_\sigma)^a . \tag{8-7-21}$$

分别取 $\mu\nu$ 为 34，14，13，21，则上式在作用于实函数时具体化为如下 4 个对易关系式(若再取 $\mu\nu$ 为 24 和 23，所得结果分别是取 14 和 13 的结果的复数共轭，不独立.)：

$$\Delta \mathrm{D} - \mathrm{D}\Delta = (\gamma + \bar\gamma)\mathrm{D} + (\varepsilon + \bar\varepsilon)\Delta - (\tau + \bar\pi)\bar\delta - (\bar\tau + \pi)\delta , \tag{8-7-22a}$$

$$\delta \mathrm{D} - \mathrm{D}\delta = (\bar\alpha + \beta - \bar\pi)\mathrm{D} + \kappa\Delta - \sigma\bar\delta - (\bar\rho + \varepsilon - \bar\varepsilon)\delta , \tag{8-7-22b}$$

$$\delta\Delta - \Delta\delta = -\bar\nu \mathrm{D} + (\tau - \bar\alpha - \beta)\Delta + \bar\lambda\bar\delta + (\mu - \gamma + \bar\gamma)\delta , \tag{8-7-22c}$$

$$\bar\delta\delta - \delta\bar\delta = (\bar\mu - \mu)\mathrm{D} + (\bar\rho - \rho)\Delta - (\bar\alpha - \beta)\bar\delta - (\bar\beta - \alpha)\delta . \tag{8-7-22d}$$

作用于实函数 f 时，式(8-7-22a)给出一个实等式，(8-7-22d)给出一个虚等式，(8-7-22b)和(8-7-22c)各给出一个复等式，故式(8-7-22)相当于 6 个实等式. 为证式(8-7-22a)，只须证明它两边作用于任一(复)标量场 f 给出相同的标量场. 由式(8-7-9)得

$$
\begin{aligned}
(\Delta \mathrm{D}-\mathrm{D}\Delta)f &= (l^b\nabla_b k^a - k^b\nabla_b l^a)\nabla_a f = [l,k]^a\nabla_a f \\
&= [\varepsilon_3,\varepsilon_4]^a\nabla_a f = g^{\sigma\beta}(\omega_{3\beta4}-\omega_{4\beta3})(\varepsilon_\sigma)^a\nabla_a f \\
&= g^{\sigma\beta}(\omega_{3\beta4}-\omega_{4\beta3})(\varepsilon_\sigma)^a\nabla_a f \\
&= [g^{12}(\omega_{324}-\omega_{423})(\varepsilon_1)^a + g^{21}(\omega_{314}-\omega_{413})(\varepsilon_2)^a \\
&\quad + g^{34}(\omega_{344}-\omega_{443})(\varepsilon_3)^a + g^{43}(\omega_{334}-\omega_{433})(\varepsilon_4)^a]\nabla_a f \\
&= \{(-\pi-\bar{\tau})m^a + (-\bar{\pi}-\tau)\bar{m}^a - [-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-0]l^a - [0-(\gamma+\bar{\gamma})]k^a\}\nabla_a f \\
&= (\gamma+\bar{\gamma})\,\mathrm{D}f + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\,\Delta f - (\tau+\bar{\pi})\,\bar{\delta}f - (\bar{\tau}+\pi)\,\delta f\,,
\end{aligned}
$$

于是式(8-7-22a)得证. 其他 3 式的证明仿此.

为帮助初学者掌握用 NP 形式求解爱因斯坦方程的方法，本书给出两个求解实例，分别见 8.8.2 小节和选读 8-9-1.

§8.8 用 NP 形式求解爱因斯坦-麦克斯韦方程举例[选读]

8.8.1 NP 形式中的麦氏方程与爱因斯坦方程

由于有反称性，电磁场张量 F_{ab} 在类光标架的复分量中至多只有 6 个独立，不妨取为 F_{43}，F_{42}，F_{41}，F_{32}，F_{31}，F_{21}. 但它们还满足如下关系：

$$F_{43}=\bar{F}_{43}\,,\qquad F_{42}=\bar{F}_{41}\,,\qquad F_{32}=\bar{F}_{31}\,,\qquad F_{21}=-F_{12}=-\bar{F}_{21}\,,$$

可见 6 者中 F_{43} 和 F_{21} 各为实数和虚数(两者之和是个复数)，其他 4 者相当于两个独立复数(可取为 F_{41} 和 F_{23})，因此在 NP 形式中以 3 个复数 Φ_0，Φ_1 和 Φ_2 代表，其定义为

$$\Phi_0 := F_{41} = F_{ab}k^a m^b\,, \tag{8-8-1a}$$

$$\Phi_1 := \frac{1}{2}(F_{43}+F_{21}) = \frac{1}{2}F_{ab}(k^a l^b + \bar{m}^a m^b)\,, \tag{8-8-1b}$$

$$\Phi_2 := F_{23} = F_{ab}\bar{m}^a l^b\,. \tag{8-8-1c}$$

无源麦氏方程

$$\nabla^a F_{ab} = 0\,, \tag{8-8-2a}$$

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{8-8-2b}$$

在 NP 形式中具有如下表达式：

$$\mathrm{D}\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 = (\pi-2\alpha)\Phi_0 + 2\rho\Phi_1 - \kappa\Phi_2\,, \tag{8-8-3a}$$

$$D\Phi_2-\bar{\delta}\Phi_1=-\lambda\Phi_0+2\pi\Phi_1+(\rho-2\varepsilon)\Phi_2\,,\tag{8-8-3b}$$

$$\delta\Phi_1-\Delta\Phi_0=(\mu-2\gamma)\Phi_0+2\tau\Phi_1-\sigma\Phi_2\,,\tag{8-8-3c}$$

$$\delta\Phi_2-\Delta\Phi_1=-\nu\Phi_0+2\mu\Phi_1+(\tau-2\beta)\Phi_2\,.\tag{8-8-3d}$$

仅以式(8-8-3a)为例给出证明如下：

$$2D\Phi_1=k^c\nabla_c[F_{ab}(k^al^b+\bar{m}^am^b)]=F_{ab}k^ak^c\nabla_cl^b+F_{ab}l^bk^c\nabla_ck^a+k^al^bk^c\nabla_cF_{ab}$$
$$+F_{ab}\bar{m}^ak^c\nabla_cm^b+F_{ab}m^bk^c\nabla_c\bar{m}^a+\bar{m}^am^bk^c\nabla_cF_{ab}\,.\tag{8-8-4}$$

上式右边第一、二项分别为

$$F_{ab}k^ak^c\nabla_cl^b=F_{4\nu}(\varepsilon^\nu)_b(\varepsilon_4)^c\nabla_c(\varepsilon_3)^b=F_{4\nu}g^{\nu\mu}\omega_{\mu34}$$
$$=F_{41}g^{12}\omega_{234}+F_{42}g^{21}\omega_{134}+F_{43}g^{34}\omega_{434}=\pi\Phi_0+\bar{\pi}\bar{\Phi}_0+F_{43}\omega_{344}\,;$$

$$F_{ab}l^bk^c\nabla_ck^a=-\bar{\kappa}\bar{\Phi}_2-\kappa\Phi_2-F_{43}\omega_{344},$$

故式(8-8-4)右边一、二项之和为 $\pi\Phi_0+\bar{\pi}\bar{\Phi}_0-\kappa\Phi_2-\bar{\kappa}\bar{\Phi}_2$. 类似地，式(8-8-4)右边四、五项之和为 $-\kappa\Phi_2+\bar{\kappa}\bar{\Phi}_2-\bar{\pi}\bar{\Phi}_0+\pi\Phi_0$，因而

$$2D\Phi_1=2\,(\pi\Phi_0-\kappa\Phi_2)+k^al^bk^c\nabla_cF_{ab}+\bar{m}^am^bk^c\nabla_cF_{ab}\,.$$

用类似方法还可求得

$$\bar{\delta}\Phi_0=2\,(\alpha\Phi_0-\rho\Phi_1)+k^am^b\bar{m}^c\nabla_cF_{ab}\,.$$

故

$$D\Phi_1-\bar{\delta}\Phi_0=(\pi-2\alpha)\Phi_0+2\rho\Phi_1-\kappa\Phi_2+\frac{1}{2}(k^al^bk^c+\bar{m}^am^bk^c-2k^am^b\bar{m}^c)\nabla_cF_{ab}\,.\tag{8-8-5}$$

令 $G\equiv(k^al^bk^c+\bar{m}^am^bk^c-2k^am^b\bar{m}^c)\nabla_cF_{ab}$，则欲证式(8-8-3a)只须证 $G=0$. 为此当然要用麦氏方程. 由式(8-7-3)可知

$$g^{ac}=m^a\bar{m}^c+\bar{m}^am^c-l^ak^c-k^al^c,\tag{8-8-6}$$

故麦氏方程 $\nabla^aF_{ab}=0$ 可表为 $(m^a\bar{m}^c+\bar{m}^am^c-l^ak^c-k^al^c)\nabla_cF_{ab}=0$，与 k^b 缩并得

$$0=[m^ak^b\bar{m}^c+\bar{m}^ak^bm^c-(l^ak^bk^c+k^ak^bl^c)]\nabla_cF_{ab}$$
$$=[m^ak^b\bar{m}^c-(m^a\bar{m}^bk^c+k^am^b\bar{m}^c)+k^al^bk^c)]\nabla_cF_{ab}$$
$$=[-m^bk^a\bar{m}^c-(-m^b\bar{m}^ak^c+k^am^b\bar{m}^c)+k^al^bk^c)]\nabla_cF_{ab}=G,$$

其中第二步是因为 $\nabla_{[c}F_{ab]}=0$ 导致 $\bar{m}^{[a}k^bm^{c]}\nabla_cF_{ab}=0$ 和 $l^{[a}k^bk^{c]}\nabla_cF_{ab}=0$，第三步来自 $F_{ab}=-F_{ba}$. 式(8-8-3)的其他 3 个方程仿此得证.

由式(7-2-6)得(习题)

$$T_{11}=\frac{1}{2\pi}\Phi_0\bar{\Phi}_2,\quad T_{12}=T_{21}=\frac{1}{2\pi}\Phi_1\bar{\Phi}_1,\quad T_{13}=T_{31}=\frac{1}{2\pi}\bar{\Phi}_2\Phi_1,$$

$$T_{14}=T_{41}=\frac{1}{2\pi}\Phi_0\bar{\Phi}_1,\quad T_{22}=\frac{1}{2\pi}\Phi_2\bar{\Phi}_0,\quad T_{23}=T_{32}=\frac{1}{2\pi}\Phi_2\bar{\Phi}_1,\tag{8-8-7}$$

$$T_{24}=T_{42}=\frac{1}{2\pi}\bar{\Phi}_0\Phi_1,\quad T_{33}=\frac{1}{2\pi}\Phi_2\bar{\Phi}_2,\quad T_{34}=T_{43}=\frac{1}{2\pi}\Phi_1\bar{\Phi}_1,\quad T_{44}=\frac{1}{2\pi}\Phi_0\bar{\Phi}_0.$$

再由爱因斯坦方程的分量形式$R_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$及式(8-7-11a)和(8-7-11b)便得曲率张量的代表量Φ_{00}，…，Φ_{22}和电磁场张量的代表量Φ_0，Φ_1，Φ_2的如下简明关系：

$$\begin{aligned}&\Phi_{00}=2\Phi_0\bar{\Phi}_0,\qquad \Phi_{01}=2\Phi_0\bar{\Phi}_1,\qquad \Phi_{02}=2\Phi_0\bar{\Phi}_2,\\&\Phi_{11}=2\Phi_1\bar{\Phi}_1,\qquad \Phi_{12}=2\Phi_1\bar{\Phi}_2,\qquad \Phi_{22}=2\Phi_2\bar{\Phi}_2.\end{aligned}\tag{8-8-8}$$

这就是电磁真空时空的爱因斯坦方程在 NP 形式中的表达式，可统一表为如下的代数方程组：

$$\Phi_{\lambda\tau}=2\Phi_\lambda\bar{\Phi}_\tau,\qquad \lambda,\ \tau=0,\ 1,\ 2.\tag{8-8-9}$$

8.4.1 小节曾引入复量Σ以定义类光电磁场. 不难证明(习题)$\Sigma_{ab}\Sigma^{ab}$可用类光标架中的电磁场分量Φ_0，Φ_1，Φ_2按下式表述：

$$\Sigma_{ab}\Sigma^{ab}=16(\Phi_0\Phi_2-\Phi_1{}^2),\tag{8-8-10}$$

于是电磁场的类光条件又可等价地表为

$$\Phi_0\Phi_2-\Phi_1{}^2=0.\tag{8-8-11}$$

8.8.2 柱对称条件下爱因斯坦-麦克斯韦方程求解一例

本小节以具体例子介绍用 Newman-Penrose 形式求解爱因斯坦-麦克斯韦方程的全过程[见 Liang(1995)]. 设所求度规在某坐标系$\{t, z, \varphi, \rho\}$中的线元取如下形式：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^\xi(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\rho^2)+\mathrm{e}^\eta\mathrm{d}z^2+\mathrm{e}^{\eta+\chi}\mathrm{d}\varphi^2,\tag{8-8-12}$$

其中ξ, η和χ是 t 和ρ的待定函数而与 z, φ 无关. 由上式显见$(\partial/\partial z)^a$和$(\partial/\partial\varphi)^a$是互相对易的 Killing 矢量场. 设$(\partial/\partial\varphi)^a$有闭合积分曲线，则式(8-8-12)代表柱对称度规，见§8.5.

令$v=t+\rho$, $u=t-\rho$，则式(8-8-12)变为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^\xi\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{e}^\eta\mathrm{d}z^2+\mathrm{e}^{\eta+\chi}\mathrm{d}\varphi^2,\tag{8-8-13}$$

上式中的ξ, η和χ应看作新坐标 u 和 v 的函数. 把正交的坐标基底场

$$\{(\partial/\partial t)^a,\ (\partial/\partial\rho)^a,\ (\partial/\partial z)^a,\ (\partial/\partial\varphi)^a\}$$

归一化可得正交归一标架场

$$\begin{aligned}&(e_0)^a=\mathrm{e}^{-\xi/2}(\partial/\partial t)^a,\qquad (e_3)^a=\mathrm{e}^{-\xi/2}(\partial/\partial\rho)^a,\\&(e_1)^a=\mathrm{e}^{-\eta/2}(\partial/\partial z)^a,\qquad (e_2)^a=\mathrm{e}^{-(\eta+\chi)/2}(\partial/\partial\varphi)^a.\end{aligned}\tag{8-8-14}$$

从上述正交归一标架场出发借助于式(8-7-1)可方便地构成类光标架场

$$m^a=\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{e}^{-\eta/2}(\partial/\partial z)^a-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-(\eta+\chi)/2}(\partial/\partial\varphi)^a],\tag{8-8-15a}$$

$$\bar{m}^a=\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{e}^{-\eta/2}(\partial/\partial z)^a+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-(\eta+\chi)/2}(\partial/\partial\varphi)^a],\tag{8-8-15b}$$

$$l^a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{e}^{-\xi/2}[(\partial/\partial t)^a-(\partial/\partial\rho)^a]=\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-\xi/2}(\partial/\partial u)^a,\tag{8-8-15c}$$

$$k^a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{e}^{-\xi/2}[(\partial/\partial t)^a+(\partial/\partial\rho)^a]=\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-\xi/2}(\partial/\partial v)^a.\tag{8-8-15d}$$

用式(5-7-19)[式中的$(e_\mu)^a$应理解为$(\varepsilon_\mu)^a$]和(5-7-20)或其他方法算出全部$\omega_{\rho\mu\nu}$，便可由式(8-7-8)求得全部(12 个)复的旋系数如下：

$$\kappa=\tau=\nu=\pi=\beta=\alpha=0,\tag{8-8-16a}$$

$$\rho=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\left(2\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\right),\tag{8-8-16b}$$

$$\mu=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\left(2\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\right),\tag{8-8-16c}$$

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\frac{\partial\xi}{\partial v},\tag{8-8-16d}$$

$$\sigma=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\frac{\partial\chi}{\partial v},\tag{8-8-16e}$$

$$\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\frac{\partial\chi}{\partial u},\tag{8-8-16f}$$

$$\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}\frac{\partial\xi}{\partial u}.\tag{8-8-16g}$$

求解爱因斯坦-麦克斯韦方程本身就是默认电磁场是唯一的物质场(“电磁真空”). 电磁场能动张量T_{ab}的无迹性导致标量曲率R为零，注意到式(8-8-16a)，便知 NP 方程取如下形式：

$$\mathrm{D}\rho=\rho(\rho+2\varepsilon)+\sigma^2+\Phi_{00},\tag{8-8-17a}$$

$$\mathrm{D}\sigma=2\sigma(\rho+\varepsilon)+\Psi_0,\tag{8-8-17b}$$

$$0=\Psi_1+\Phi_{01},\tag{8-8-17c}$$

$$0=\Phi_{10},\tag{8-8-17d}$$

$$0=\Psi_1,\tag{8-8-17e}$$

$$\mathrm{D}\gamma-\Delta\varepsilon=-4\varepsilon\gamma+\Psi_2+\Phi_{11},\tag{8-8-17f}$$

$$\mathrm{D}\lambda=\lambda(\rho-2\varepsilon)+\sigma\mu+\Phi_{20},\tag{8-8-17g}$$

$$\mathrm{D}\mu=\mu(\rho-2\varepsilon)+\sigma\lambda+\Psi_2,\tag{8-8-17h}$$

$$0=\Psi_3+\Phi_{21},\tag{8-8-17i}$$

$$\Delta\lambda=-2\lambda(\mu+\gamma)-\Psi_4,\tag{8-8-17j}$$

$$0=-\Psi_1+\Phi_{01}, \tag{8-8-17k}$$
$$0=\mu\rho-\lambda\sigma-\Psi_2+\Phi_{11}, \tag{8-8-17l}$$
$$0=-\Psi_3+\Phi_{21}, \tag{8-8-17m}$$
$$-\Delta\mu=\mu(\mu+2\gamma)+\lambda^2+\Phi_{22}, \tag{8-8-17n}$$
$$0=\Phi_{12}, \tag{8-8-17o}$$
$$-\Delta\sigma=\sigma(\mu-2\gamma)+\lambda\rho+\Phi_{02}, \tag{8-8-17p}$$
$$\Delta\rho=\rho(2\gamma-\mu)-\sigma\lambda-\Psi_2, \tag{8-8-17q}$$
$$0=-\Psi_3. \tag{8-8-17r}$$

我们只限于讨论无源电磁场的情况，故麦氏方程在式(8-8-16a)成立时取如下形式：

$$\mathrm{D}\Phi_1-\bar{\delta}\Phi_0=2\rho\Phi_1, \tag{8-8-18a}$$
$$\mathrm{D}\Phi_2-\bar{\delta}\Phi_1=-\lambda\Phi_0+(\rho-2\varepsilon)\Phi_2, \tag{8-8-18b}$$
$$\delta\Phi_1-\Delta\Phi_0=(\mu-2\gamma)\Phi_0-\sigma\Phi_2, \tag{8-8-18c}$$
$$\delta\Phi_2-\Delta\Phi_1=2\mu\Phi_1. \tag{8-8-18d}$$

注意到爱因斯坦方程组(8-8-9)，可知式(8-8-17d)和(8-8-17o)导致$\Phi_1=0$ 或$\Phi_0=\Phi_2=0$. 由电磁场的类光性条件$\Phi_0\Phi_2-\Phi_1{}^2=0$可知，$\Phi_0=\Phi_2=0$ 的电磁场只能为非类光电磁场，而$\Phi_1=0$ 的电磁场则既可类光又可非类光. 此处只讨论$\Phi_1=0$ 的非类光电磁场，就是说，我们只限于寻求$\Phi_1=0$ 的非类光电磁场解(这时必有$\Phi_0\neq 0$ 和$\Phi_2\neq 0$)，麦氏方程(8-8-18)在此情况下简化为

$$\bar{\delta}\Phi_0=0, \tag{8-8-19a}$$
$$\mathrm{D}\Phi_2=-\lambda\Phi_0+(\rho-2\varepsilon)\Phi_2, \tag{8-8-19b}$$
$$-\Delta\Phi_0=(\mu-2\gamma)\Phi_0-\sigma\Phi_2, \tag{8-8-19c}$$
$$\delta\Phi_2=0. \tag{8-8-19d}$$

所谓求解爱-麦方程组，就是求出满足该方程组的度规函数$\xi(t,\rho)$，$\eta(t,\rho)$，$\chi(t,\rho)$及电磁场函数Φ_0和Φ_2的函数形式. 它们出现在下列 3 组方程中(互相耦合)：①麦氏方程(8-8-19)；②爱因斯坦方程$\Phi_{\lambda\tau}=2\Phi_\lambda\bar{\Phi}_\tau$ (λ, $\tau=0, 1, 2$)；③ NP 方程(8-8-17). 以下是求解过程.

式(8-8-19d)导致

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\chi/2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}=0, \tag{8-8-20}$$

但由此还不能说$\partial\Phi_2/\partial z=\partial\Phi_2/\partial\varphi=0$，因为$\Phi_2$为复值函数. 设$\Phi_2=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中$C$和$\theta$为实值函数，则

$$\Phi_{22}=2\Phi_2\bar{\Phi}_2=2C^2. \tag{8-8-21}$$

因为μ, γ, λ都同z和φ无关，式(8-8-17n)表明C同z, φ无关，于是式(8-8-20)给出

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\chi/2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=0,$$

从而

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=0,$$

即Φ_2的确与 z, φ无关．类似地可由式(8-8-19a)、(8-8-17a)和爱因斯坦方程$\Phi_{00}=2\Phi_0\bar{\Phi}_0$得知$\Phi_0$也与 z, φ 无关．另一方面，式(8-8-19b)和(8-8-19c)可表为

$$-4\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}=\left(2\frac{\partial\xi}{\partial v}+2\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)\Phi_2-\frac{\partial\chi}{\partial u}\Phi_0, \tag{8-8-22}$$

$$-4\frac{\partial\Phi_0}{\partial u}=\left(2\frac{\partial\xi}{\partial u}+2\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)\Phi_0-\frac{\partial\chi}{\partial v}\Phi_2. \tag{8-8-23}$$

为易于求解，只讨论$\partial\chi/\partial u=0$的情况．只要在这一简化条件下有解，我们便求得一个精确解．当然事先无法肯定这种情况一定有解，因此这是一种试探性求解法．这时只须关心$\partial\chi/\partial v\neq 0$的情况，因为$\partial\chi/\partial u=\partial\chi/\partial v=0$将使线元式(8-8-13)局部看来与平面对称线元无异，而由“半平面对称”(局部看来就是柱对称)的电磁场产生的平面对称度规已被李鉴增和梁灿彬所穷尽[Li and Liang(1985)]．条件$\partial\chi/\partial u=0$带来许多简化，例如它导致$\lambda=0$，而且方程(8-8-22)现在可被积分而得

$$\Phi_2(u,\ v)=a(u)\ \mathrm{e}^{-(2\xi+2\eta+\chi)/4}, \tag{8-8-24}$$

其中 $a(u)$是 u 的任意复值函数，且$a(u)\neq 0$(否则$\Phi_2=0$，与讨论前提相悖.)，于是由爱因斯坦方程$\Phi_{22}=2\Phi_2\bar{\Phi}_2$得

$$\Phi_{22}(u,\ v)=2|a(u)|^2\ \mathrm{e}^{-(2\xi+2\eta+\chi)/2}. \tag{8-8-25}$$

待解的麦氏方程现在只余一个，即式(8-8-23)，且被简化为

$$-4\frac{\partial\Phi_0}{\partial u}=2\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)\Phi_0-\chi' a(u)\ \mathrm{e}^{-(2\xi+2\eta+\chi)/4}, \tag{8-8-26}$$

其中 ′代表对一元函数求导(对上式便是$\chi'\equiv \mathrm{d}\chi/\mathrm{d}v$)．条件$\partial\chi/\partial u=0$也使 NP 方程得以简化，例如方程(8-8-17g)现在成为

$$-\Phi_{20}=\frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\xi}\chi'\frac{\partial\eta}{\partial u}, \tag{8-8-27}$$

这说明Φ_{20}为实数，因而$\Phi_{02}=\Phi_{20}$．注意到$a(u)\neq 0$(否则电磁场为零)，式(8-8-27)和(8-8-9)、(8-8-24)结合便得

$$\Phi_0(u,\ v)=-\frac{1}{8\bar{a}(u)}\chi'\frac{\partial\eta}{\partial u}\mathrm{e}^{(-2\xi+2\eta+\chi)/4}. \tag{8-8-28}$$

上式对 u 求偏导并代入式(8-8-26)得

$$-2|a|^2=\left[-\bar{a}^{-1}\bar{a}'\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{e}^{\eta+\chi/2}. \tag{8-8-29}$$

现在再看 NP 方程组(8-8-17). 方程(g)已经用掉. 借用式(8-8-16)和(8-8-27)不难验证方程(p)已自动满足. $\Phi_1=0$ 的假定导致 $\Phi_{01}=\Phi_{10}=\Phi_{12}=\Phi_{21}=\Phi_{11}=0$，于是方程(d)和(o)成为恒等式，方程(c)变得与(k)等价而且等价于(e)，它们无非表明时空的外尔张量的分量

$$\Psi_1=0. \tag{8-8-30}$$

同理，方程(i)、(m)和(r)等价且给出

$$\Psi_3=0. \tag{8-8-31}$$

$\lambda=0$ 则使方程(j)和(l)大为简化并分别给出

$$\Psi_4=0, \tag{8-8-32}$$

和

$$\Psi_2=\mu\rho. \tag{8-8-33}$$

把方程(l)[即式(8-8-33)]和(b)留到最后确定 Ψ_2 和 Ψ_0(无须求解)，则 NP 方程组(8-8-17)的待解方程只余(a)、(f)、(h)、(n)和(q) 5 个，注意到 $\Phi_{11}=0$，$\lambda=0$ 和式(8-8-33)，它们取如下形式：

$$\mathrm{D}\rho=\rho(\rho+2\varepsilon)+\sigma^2+\Phi_{00}, \tag{8-8-34}$$

$$\mathrm{D}\gamma-\Delta\varepsilon=-4\varepsilon\gamma+\mu\rho, \tag{8-8-35}$$

$$\mathrm{D}\mu=2\mu(\rho-\varepsilon), \tag{8-8-36}$$

$$-\Delta\mu=\mu(\mu+2\gamma)+\Phi_{22}, \tag{8-8-37}$$

$$\Delta\rho=2\rho(\gamma-\mu). \tag{8-8-38}$$

方程(8-8-36)与(8-8-38)等价并等价于

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v}=-\frac{\partial\eta}{\partial u}\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{1}{2}\chi'\right),$$

它可被积分而得

$$\eta(u,\ v)=-\frac{1}{2}\chi+\ln[g(v)-f(u)], \tag{8-8-39}$$

其中 $g(v)$和 $f(u)$是任意函数. 于是方程(8-8-35)成为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}=-\frac{1}{2}(g-f)^{-2}f'g',$$

它可被积分而得

$$\xi(u,\ v)=-\frac{1}{2}\ln(g-f)+F(u)+G(v), \tag{8-8-40}$$

其中 $F(u)$和 $G(v)$是任意函数. 把式(8-8-39)和(8-8-40)代入式(8-8-13)得

$$\mathrm{d}s^2=-(g-f)^{-1/2}\mathrm{e}^{F+G}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+(g-f)\ (\mathrm{e}^{-\chi/2}\mathrm{d}z^2+\mathrm{e}^{\chi/2}\mathrm{d}\varphi^2). \tag{8-8-41}$$

用下式定义新坐标 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$：$\mathrm{d}\tilde{u}=\mathrm{e}^{F(u)}\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}\tilde{v}=\mathrm{e}^{G(v)}\mathrm{d}v$，则

$$\mathrm{d}s^2=-(g-f)^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}+(g-f)\ (\mathrm{e}^{-\chi/2}\mathrm{d}z^2+\mathrm{e}^{\chi/2}\mathrm{d}\varphi^2), \tag{8-8-42}$$

若取 $F(u)=G(v)=0$，则由式(8-8-41)可知

$$ds^2 = -(g-f)^{-1/2}dudv + (g-f)\,(e^{-\chi/2}dz^2 + e^{\chi/2}d\varphi^2). \tag{8-8-42'}$$

式(8-8-42)和(8-8-42′)代表同一线元(两者的差别只是坐标记号由 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ 改为 u, v, 是非实质性差别.)，可见取 $F(u)=G(v)=0$ 不会丢解. 今后就用这一选择，即以式(8-8-42′)为线元.

现在尚余 3 个待解方程，即式(8-8-29)、(8-8-34)和(8-8-37)，待定函数则是 $g(v)$，$f(u)$，$\chi(v)$和 $a(u)$. 方程(8-8-37)等价于

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2 + 2|a|^2 e^{-(\eta+\chi/2)} = 0. \tag{8-8-43}$$

借助于式(8-8-39)和(8-8-40)(其中 $F=U=0$)可把上式改写为

$$f'' = 2|a(u)|^2. \tag{8-8-44}$$

式(8-8-39)则使方程(8-8-29)成为

$$\bar{a}^{-1}\bar{a}'f' = f'' - 2|a|^2 = 0, \tag{8-8-45}$$

其中第二步用到式(8-8-44). 上式表明要么 $a'=0$ 要么 $f'=0$，但由式(8-8-44)知后者导致 $a=0$，这不允许，故只有 $a'=0$，即 $a=$常数. 于是式(8-8-44)可被积分而得

$$f' = 2A^2u + c_1,\quad f = A^2u^2 + c_1u + c_2,\quad \text{其中 } A\equiv|a|,\quad c_1,\ c_2 \text{为积分常实数}. \tag{8-8-46}$$

现在考虑最后一个待解麦氏方程,即式(8-8-34). 由式(8-8-28)、(8-8-39)、(8-8-40)和(8-8-9)得

$$\Phi_{00} = (32|a|^2)^{-1}(g-f)^{-1/2}\chi'^2 f'^2, \tag{8-8-47}$$

代入式(8-8-34)，经计算可知式(8-8-34)等价于

$$8g''(v)\chi'^{-2}(v) + g(v) = f(u) - (4|a|^2)^{-1}f'^2(u). \tag{8-8-48}$$

上式左边不是 u 的函数，右边不是 v 的函数，因而左右两边等于常数，记作 K，即

$$8g''(v)\chi'^{-2}(v) + g(v) = K, \tag{8-8-49}$$

$$f(u) - (4A^2)^{-1}f'^2(u) = K. \tag{8-8-50}$$

把式(8-8-44)代入式(8-8-50)得

$$K = c_2 - (4A^2)^{-1}c_1, \tag{8-8-51}$$

于是线元式(8-8-42′)可以表为

$$\begin{aligned} ds^2 = &-[g(v) - A^2u^2 - c_1u - c_2]^{-1/2}dudv \\ &+[g(v) - A^2u^2 - c_1u - c_2](e^{-\chi(v)/2}dz^2 + e^{\chi(v)/2}d\varphi^2), \end{aligned} \tag{8-8-52}$$

其中 A，c_1 和 c_2 为任意常数，$g(v)$和$\chi(v)$是两个颇为任意的函数，但两者之间的关系满足式(8-8-48)，其中的 K 以式(8-8-51)的形式依赖于所选常数 A，c_1 和 c_2.

结论：选定常数 A，c_1 和 c_2 后，任一满足式(8-8-49)的实函数对$(g(v),\ \chi(v))$通过式(8-8-52)决定一个柱对称度规，其相应的物质场是由满足式(8-8-28)和(8-8-24)的复值函数对$(\varPhi_0, \varPhi_2)$所描写的柱对称非类光电磁场．满足式(8-8-49)的实函数对$(g(v),\ \chi(v))$很多，例如在选 c_1 和 c_2 为零后 $K=0$，以下 3 个函数对都满足 $K=0$ 时的式(8-8-49)：

(1) $g(v)=\sin v,\quad \chi(v)=2\sqrt{2}\,v$.

(2) $g(v)=\ln v,\quad \chi(v)=4\sqrt{2}\,(\ln v)^{1/2}$.

(3) $g(v)=v^{1/\alpha},\quad \chi(v)=(2/\alpha)\sqrt{2(\alpha-1)}\ln v$，其中 $\alpha\in(1,\ \infty)$．本例构成爱因斯坦-麦克斯韦方程的柱对称解族的一个单参子族(以 α 为参数)，其中最简单的一个成员是由 $\alpha=2$ 刻画的解，即 $g(v)=v^{1/2},\quad \chi(v)=\sqrt{2}\ln v$.

由满足式(8-8-28)和(8-8-24)的复值函数对$(\varPhi_0, \varPhi_2)$描写的电磁场 F_{ab} 也可用其在坐标基底$\{(\partial/\partial t)^a,\ (\partial/\partial\rho)^a,\ (\partial/\partial z)^a,\ (\partial/\partial\varphi)^a\}$的非零分量表出：

$$F_{tz}=-F_{zt}=-a_1 e^{-\chi/4}(1-\frac{1}{4}u\chi'),\tag{8-8-53a}$$

$$F_{\rho z}=-F_{z\rho}=a_1 e^{-\chi/4}(1+\frac{1}{4}u\chi'),\tag{8-8-53b}$$

$$F_{t\varphi}=-F_{\varphi t}=-a_2 e^{\chi/4}(1+\frac{1}{4}u\chi'),\tag{8-8-53c}$$

$$F_{\rho\varphi}=-F_{\varphi\rho}=a_2 e^{\chi/4}(1-\frac{1}{4}u\chi'),\tag{8-8-53d}$$

其中 $F_{tz}\equiv F_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial z)^b$，其他类似；$a_1,\ a_2\in\mathbb{R}$ 分别是复数 a 的实、虚部．不难验证由式(8-8-53)构成的 F_{ab} 满足无源麦氏方程 $\nabla^a F_{ab}=0$ 和 $\nabla_{[a}F_{bc]}=0$，且由 F_{ab} 按式(8-4-1)构成的能动张量 T_{ab} 满足爱因斯坦方程 $T_{ab}=R_{ab}/8\pi$，其中 R_{ab} 是度规(8-8-52)的里奇张量．

§8.9 Vaidya 度规和 Kinnersley 度规

8.9.1 从施瓦西度规到 Vaidya 度规

施瓦西真空解在施瓦西坐标系$\{t, r, \theta, \varphi\}$的线元为

$$ds^2(施)=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)\quad (r>2M).$$

从施瓦西坐标系$\{t, r, \theta, \varphi\}$出发作坐标变换$\{t, r, \theta, \varphi\}\mapsto\{u, r, \theta, \varphi\}$，其中

$$u\equiv t-r_*,\qquad r_*\equiv r+2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)\quad [r_* 称为**乌龟**(tortoise)**坐标**],\tag{8-9-1}$$

则施瓦西线元变为如下形式：

$$\begin{aligned}ds^2(\text{施}) &= -(1-2Mr^{-1})\,du^2 - 2du\,dr + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)\\ &= [-du^2 - 2du\,dr + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)] + 2Mr^{-1}du^2 .\end{aligned} \tag{8-9-2}$$

上式右边方括号内又可改写为 $-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)$，这无非是平直线元，故

$$ds^2(\text{施}) = ds^2(\text{平}) + 2Mr^{-1}du^2 . \tag{8-9-3}$$

只要将上式的常数 M 换成坐标 u 的函数 $m(u)$，就得到如下的新线元[称为 **Vaidya(外狄亚)线元**]：

$$\begin{aligned}ds^2(\text{Vai}) &= ds^2(\text{平}) + 2m(u)\,r^{-1}du^2\\ &= -[1-2m(u)r^{-1}]\,du^2 - 2du\,dr + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) .\end{aligned} \tag{8-9-4}$$

以 g_{ab} 代表 Vaidya 度规，则由上式可读出它在 $\{u, r, \theta, \varphi\}$ 系的全部非零分量

$$g_{uu} = -[1-2m(u)r^{-1}] ,\quad g_{ur} = g_{ru} = -1 ,\quad g_{\theta\theta} = r^2 ,\quad g_{\varphi\varphi} \triangleq r^2\sin^2\theta , \tag{8-9-5}$$

故由 $g_{ab} = g_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b$ 得 Vaidya 度规的抽象指标表达式

$$\begin{aligned}g_{ab} = &-[1-2m(u)r^{-1}](du)_a(du)_b - (du)_a(dr)_b - (dr)_a(du)_b\\ &+r^2(d\theta)_a(d\theta)_b + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)_a(d\varphi)_b .\end{aligned} \tag{8-9-6}$$

不难验证 g_{ab} 之逆为

$$\begin{aligned}g^{ab} = &-\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^b - \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^b + \left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^b\\ &+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^b + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^b .\end{aligned} \tag{8-9-7}$$

有了度规就可计算其爱因斯坦张量 $G_{ab} \equiv R_{ab} - Rg_{ab}/2$，从而由爱因斯坦方程 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 求得其能动张量 T_{ab}，以便看清这一度规与什么物质场相伴随. Vaidya 度规的非零分量已由式(8-9-5)表出，其逆矩阵的非零分量则为

$$g^{rr} = 1-2m(u)r^{-1},\quad g^{ur} = g^{ru} = -1,\quad g^{\theta\theta} = r^{-2},\quad g^{\varphi\varphi} = (r\sin\theta)^{-2}, \tag{8-9-8}$$

代入式(3-2-10′)得非零克氏符为

$$\begin{aligned}&\Gamma^u{}_{uu} = -mr^{-2},\qquad \Gamma^u{}_{\theta\theta} = r,\qquad \Gamma^u{}_{\varphi\varphi} = r\sin^2\theta ,\\ &\Gamma^r{}_{uu} = -\dot{m}r^{-1} + mr^{-3}(r-2m),\qquad \Gamma^r{}_{ur} = \Gamma^r{}_{ru} = mr^{-2},\\ &\Gamma^r{}_{\theta\theta} = 2m - r,\qquad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = (2m-r)\sin^2\theta ,\\ &\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = r^{-1},\qquad \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta ,\\ &\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = r^{-1},\qquad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot\theta ,\end{aligned} \tag{8-9-9}$$

其中 $\dot{m} \equiv dm(u)/du$. 代入式(3-4-21)便知里奇张量 R_{ab} 的非零分量只有一个，即

$$R_{uu} = -2\dot{m}r^{-2}, \tag{8-9-10}$$

故
$$R_{ab} = -2\dot{m}r^{-2}(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b \, . \tag{8-9-11}$$
由上式又得 $R = g^{uu}R_{uu} = 0$，故 $G_{ab} = R_{ab}$，于是由爱因斯坦方程 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 得
$$T_{ab} = -\frac{\dot{m}}{4\pi r^2}(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b \, . \tag{8-9-12}$$
令
$$k_a \equiv -(\mathrm{d}u)_a, \qquad k^a \equiv g^{ab}k_b = -g^{ab}(\mathrm{d}u)_b \, , \tag{8-9-13}$$
则由式(8-9-7)易见
$$k^a = (\partial/\partial r)^a \, , \tag{8-9-14}$$
故 $k^a k_a = 0$，可见 k^a 是类光矢量场. 现在式(8-9-12)又可表为
$$T_{ab} = -\frac{\dot{m}}{4\pi r^2}k_a k_b \, . \tag{8-9-12$'$}$$
上式在 $\dot{m} < 0$ 时可看作如下形式的能动张量的特例：
$$T_{ab} = \Phi^2 k_a k_b \quad (\Phi^2\text{是一个正定函数}). \tag{8-9-15}$$
什么物质场才有上式所示的能动张量？可以证明(见下册附录 D)，无源类光电磁场(满足 $F_{ab}F^{ab} = 0$)的能动张量可以表为式(8-9-15)的形式，其中
$$\Phi^2 \equiv E^2/2\pi \quad (E\text{ 为某正交归一标架测得的电场}). \tag{8-9-16}$$
类光电磁场可看作许多沿类光方向 k^a 运动的光子组成的物质场. 此外，其他静质量为零的沿 k^a 向运动的粒子(例如无质量标量粒子以及中微子①)组成的物质场也有式(8-9-15)的能动张量形式. 这类物质场称为**纯辐射场**(pure radiation field). 总之，能动张量可表为式(8-9-15)的物质场分为两类：①无源类光电磁场；②纯辐射场. 两者的区别在于前者存在 2 形式场 F_{ab}，满足无源麦氏方程及 $T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c/4\pi$. 可以证明(见选读 8-9-1)与式(8-9-12′)相应的物质场不服从无源麦氏方程，因此 Vaidya 度规的物质场是纯辐射场而非类光电磁场.

与施瓦西度规相比较，Vaidya 度规主要有以下三点不同. ①前者的质量参数 M 为常数而后者的 m 是 u 的函数. ②前者是真空爱因斯坦方程 $G_{ab} = 0$ 的解而后者是有源爱因斯坦方程 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 的解，其中 T_{ab} 代表纯辐射场. ③通过对 Killing 方程求通解可以证明，前者有 4 个独立 Killing 矢量场，其中一个类时，因而是稳态度规；后者只有 3 个独立 Killing 矢量场(就是反映球对称性的那 3 个)，由于缺少类时 Killing 场，Vaidya 解不是稳态度规. Vaidya 度规的上述 3 个特点之间存在密切联系. 如果把 m 仍解释为球对称恒星的质量，把 u 解释为它的固有时(8.9.3 小节将看到这种解释的合理性)，那么 m 是 u 的函数(特点①)就表明恒星的质量随时间以变化率 $\dot{m}$ 改变. 为什么变？因为它不断向外发射零质量粒子 (特点②) (为方

---

① 过去认为中微子静质量为零，故有此说. 现在比较普遍地相信中微子的静质量非零，若按此信念，则中微子不再被纳入本例.

便起见也称为“光子”，虽然它们不是电磁场的量子)，从而不断带走能量. 计算(见选读 8-9-2)表明，单位时间内流到无限远的能量正好等于 $-\dot{m}$，即等于恒星能(质)量 m 的减小率(默认 $\dot{m}<0$ ①)，符合能量守恒律. 正是 m 随时间而变的特征才使得 Vaidya 度规不是稳态度规(特点③. 鉴于上述特点，Vaidya 本人把这种恒星称为“发光星(shining star)”，虽然所发的“光”不是光子而是静质量非零的其他粒子. 自然要问：施瓦西度规所描述的静态恒星难道就不发光？恒星当然要发光，问题是，为了求解简单，施瓦西把恒星所发出的(因而自身浸泡于其中的)光子的能动张量加以忽略(当作真空)，这才有众所周知的、简单异常而又用途广大的施瓦西真空解. 可见“施瓦西真空解描述静态球对称恒星外部度规场”这一熟知的物理解释也不过是一种近似的说法.

[选读 8-9-1]

作为 NP 形式的另一个应用实例，我们用类光标架再次计算 Vaidya 度规的黎曼张量. 第一步是选择适当的类光标架 $\{(\varepsilon_\mu)^a\}$. Vaidya 度规 g_{ab} 的表达式(8-9-6)亦可表为

$$\begin{aligned}g_{ab}=&-h(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b-(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}r)_b-(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}u)_b\\&+r^2(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b,\end{aligned}\tag{8-9-17}$$

其中

$$h\equiv1-\frac{2m(u)}{r}.\tag{8-9-18}$$

对上式做如下改写将带来重要启发：

$$\begin{aligned}g_{ab}=&-(\mathrm{d}u)_a\left[\frac{1}{2}h(\mathrm{d}u)_b+(\mathrm{d}r)_b\right]-\left[\frac{1}{2}h(\mathrm{d}u)_a+(\mathrm{d}r)_a\right](\mathrm{d}u)_b\\&+\{r[(\mathrm{d}\theta)_a-\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a]/\sqrt{2}\}\{r[(\mathrm{d}\theta)_b+\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_b]/\sqrt{2}\}\\&+\{r[(\mathrm{d}\theta)_a+\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a]/\sqrt{2}\}\{r[(\mathrm{d}\theta)_b-\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_b]/\sqrt{2}\}.\end{aligned}\tag{8-9-19}$$

与类光标架 $\{(\varepsilon_\mu)^a\}$ 的一般表达式

$$g_{ab}=g_{\mu\nu}(\varepsilon^\mu)_a(\varepsilon^\nu)_b=-k_al_b-l_ak_b+\bar{m}_am_b+m_a\bar{m}_b\tag{8-9-20}$$

对比可以“读出” m_a，$\bar{m}_a$，l_a 和 k_a 如下：

$$\begin{aligned}&k_a=-(\mathrm{d}u)_a,\qquad l_a=-\frac{1}{2}h\,(\mathrm{d}u)_a-(\mathrm{d}r)_a,\\&m_a=\frac{r}{\sqrt{2}}[(\mathrm{d}\theta)_a-\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a]\,,\qquad \bar{m}_a=\frac{r}{\sqrt{2}}[(\mathrm{d}\theta)_a+\mathrm{i}\sin\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a]\,,\end{aligned}\tag{8-9-21}$$

---

① 作为爱因斯坦方程的解，参数 $m(u)$ 的导数可正可负(当然还可为零)，但为使这个解在物理上能被解释为某种可接受的物质场[满足式(8-9-15)]相应的度规，就得要求 $\dot{m}<0$.

相应的 m^a，$\bar{m}^a$，l^a 和 k^a 为

$$k^a=(\partial/\partial r)^a,\qquad l^a=(\partial/\partial u)^a-\frac{1}{2}h\,(\partial/\partial r)^a,$$

$$m^a=\frac{1}{\sqrt{2}r}[(\partial/\partial\theta)^a-\mathrm{i}\sin^{-1}\theta\,(\partial/\partial\varphi)^a],\quad \bar{m}^a=\frac{1}{\sqrt{2}r}[(\partial/\partial\theta)^a+\mathrm{i}\sin^{-1}\theta\,(\partial/\partial\varphi)^a].\tag{8-9-21$'$}$$

请读者验证这一类光标架的确满足

$$g_{ab}m^am^b=g_{ab}\bar{m}^a\bar{m}^b=g_{ab}l^al^b=g_{ab}k^ak^b=0,\quad g_{ab}m^a\bar{m}^b=1,\quad g_{ab}l^ak^b=-1.$$

由式(5-7-19)[式中的 $(e_\mu)^a$ 应理解为 $(\varepsilon_\mu)^a$]和(5-7-20)或其他方法算出全部 $\omega_{\rho\mu\nu}$，便可由式(8-7-8)求得全部(12 个)旋系数如下：

$$\kappa=\sigma=\nu=\tau=\lambda=\pi=\varepsilon=0,\tag{8-9-22a}$$

$$\rho=-\frac{1}{r},\quad \mu=-\frac{1}{2r}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right],\quad \gamma=\frac{m}{2r^2},\quad \beta=-\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}\,r}\cot\theta.\tag{8-9-22b}$$

利用式(8-9-22a)可把 NP 方程简化为如下形式：

$$\mathrm{D}\rho=\rho^2+\Phi_{00},\tag{8-9-23a}$$

$$0=\Psi_0,\tag{8-9-23b}$$

$$0=\Psi_1+\Phi_{01},\tag{8-9-23c}$$

$$\mathrm{D}\alpha=\alpha\rho+\Phi_{10},\tag{8-9-23d}$$

$$\mathrm{D}\beta=\beta\bar{\rho}+\Psi_1,\tag{8-9-23e}$$

$$\mathrm{D}\gamma=\Psi_2+\Phi_{11}-R/24,\tag{8-9-23f}$$

$$0=\Phi_{20},\tag{8-9-23g}$$

$$\mathrm{D}\mu=\bar{\rho}\mu+\Psi_2+R/12,\tag{8-9-23h}$$

$$0=\Psi_3+\Phi_{21},\tag{8-9-23i}$$

$$0=-\Psi_4,\tag{8-9-23j}$$

$$\delta\rho=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\Psi_1+\Phi_{01},\tag{8-9-23k}$$

$$\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=\mu\rho+(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta)-\Psi_2+\Phi_{11}+R/24,\tag{8-9-23l}$$

$$-\bar{\delta}\mu=-\Psi_3+\Phi_{21},\tag{8-9-23m}$$

$$-\Delta\mu=\mu^2+\mu(\gamma+\bar{\gamma})+\Phi_{22},\tag{8-9-23n}$$

$$-\Delta\beta=\gamma(-\bar{\alpha}-\beta)-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\Phi_{12},\tag{8-9-23o}$$

$$0=\Phi_{02},\tag{8-9-23p}$$

$$\Delta\rho=-\rho\bar{\mu}+\rho(\gamma+\bar{\gamma})-\Psi_2-R/12,\tag{8-9-23q}$$

$$\Delta\alpha=\alpha(\bar{\gamma}-\bar{\mu})+\gamma\bar{\beta}-\Psi_3.\tag{8-9-23r}$$

用式(8-9-22b)代入方程组(8-9-23)便可容易地解得代表外尔张量的 5 个复数 $\Psi_0\sim\Psi_4$ 以及代表里奇张量的 4 个实数 Φ_{00}，Φ_{11}，Φ_{22}，R 和 3 个独立复数 Φ_{01}，Φ_{02}，Φ_{12}，

其中非零者只有两个：

$$\Psi_2 = -m(u)/r^3, \tag{8-9-24}$$

$$\Phi_{22} = -\dot{m}(u)/r^2. \tag{8-9-25}$$

注意到式(8-7-11a)，特别是其中的$\Phi_{22} = R_{33}/2$，可知 Vaidya 度规的里奇张量为

$$R_{ab} = R_{33}(\varepsilon^3)_a(\varepsilon^3)_b = R_{33}(-k_a)(-k_b) = 2\Phi_{22}k_a k_b = -2\dot{m}(u)\, r^{-2}(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b, \tag{8-9-26}$$

与用坐标基底法[式(3-4-21)]求得的 R_{ab}[见式(8-9-11)]一致.

利用上述结果还可补证 Vaidya 度规相应的物质场不是电磁场. 电磁场 F_{ab} 在 NP 形式中由复数Φ_0，Φ_1，Φ_2代表，它们与里奇张量的代表量$\Phi_{00},\cdots$，Φ_{22} 的关系是式(8-8-8). 因为$\Phi_{00},\cdots$，Φ_{22} 中只有Φ_{22} 非零，式(8-8-8)给出

$$\Phi_0 = \Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \tag{8-9-27}$$

其中 $A \equiv \sqrt{-\dot{m}(u)/2}\, r^{-1}$，$\alpha$ 是坐标的实函数. 代入无源麦氏方程(8-8-3)，发现其中的式(a)、(c)为恒等式，(b)、(d)则分别导致

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r} = 0, \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} - \mathrm{i}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = \cot\theta. \tag{8-9-28}$$

第一式表明 $\alpha = \alpha(u, \theta, \varphi)$，第二式的虚、实部分别给出 $\partial\alpha/\partial\theta = 0$ [因而 $\alpha = \alpha(u, \varphi)$] 和 $\partial\alpha/\partial\varphi = \cos\theta$，两者互相矛盾. 可见 Vaidya 度规的物质场不是电磁场，从而只能是纯辐射场.

[选读 8-9-1 完]

8.9.2 Kinnersley(金纳斯里)度规

Vaidya 度规是施瓦西度规的推广，而 Kinnersley(1969)定义的新度规则是 Vaidya 度规的推广. 下面介绍这一度规. 设 $L(u)$是 4 维闵氏时空($\mathbb{R}^4$, η_{ab})中的任意光滑类时曲线(想像为某个火箭的世界线)，u 是固有时(此处用 u 而不是τ代表固有时，用意将自明.). 仿照 Kinnersley，以λ^a(而不是本书惯用的U^a)代表$L(u)$的 4 速，即 $\lambda^a \equiv (\partial/\partial u)^a$. 设 p 是 $\mathbb{R}^4$ 的任一点，则 p 的过去光锥面与 L 有且仅有一个交点，① 记作 q (见图 8-11). 以$\{X^\mu\}$代表闵氏时空的任一惯

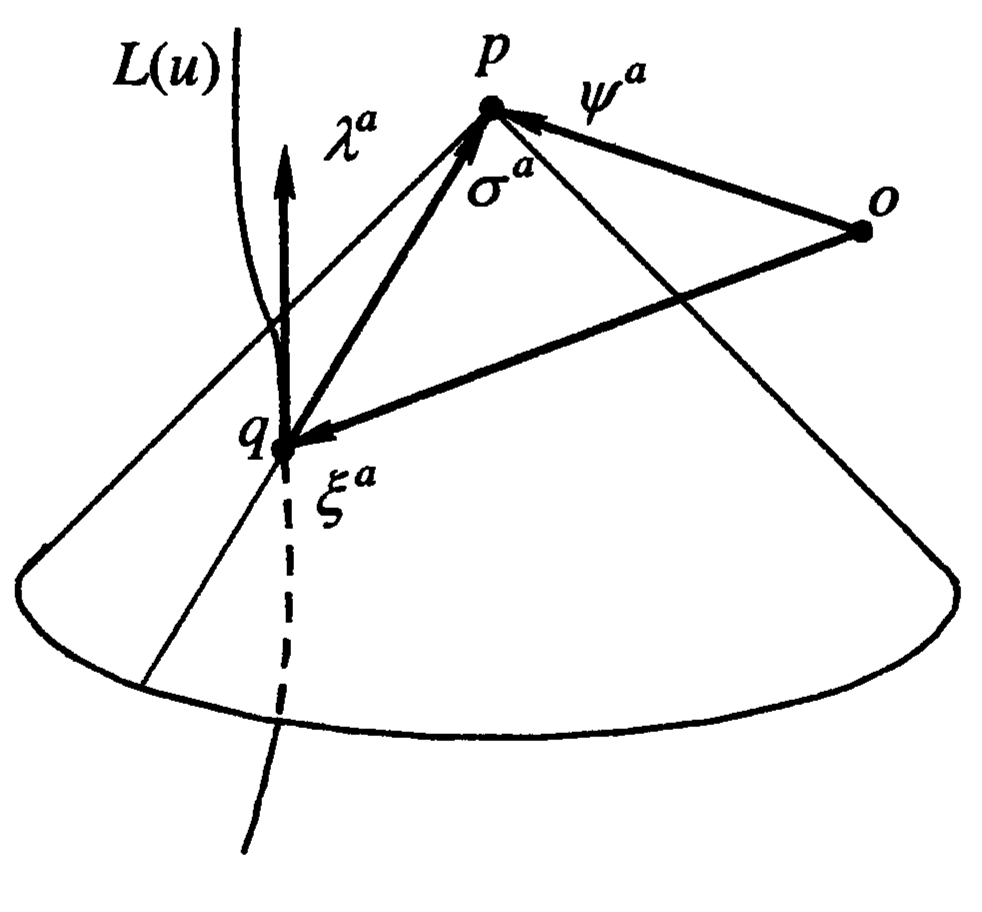


图 8-11　每一时空点 p 在类时线 $L(u)$ 上确定一点 q

① 当 $L(u)$渐近类光(例如第 6 章习题 13 中的双曲线)时例外. Kinnersley(1969)不讨论这一例外情形.

性坐标系，λ^μ 代表 λ^a 在该系的分量，ψ^a，ξ^a 代表 p，q 点在该系的位矢，即 $\psi^a \equiv \psi^\mu (\partial/\partial X^\mu)^a|_p$，$\xi^a \equiv \xi^\mu (\partial/\partial X^\mu)^a|_q$，其中 $\psi^\mu \equiv X^\mu(p)$，$\xi^\mu \equiv X^\mu(q)$. u 和 λ^a 本来只是定义在 $L(u)$ 上的标量场和矢量场，但其定义域可自然延拓至全 $\mathbb{R}^4$：$\forall p \in \mathbb{R}^4$，有唯一的 $q \in L$，因而可定义 $u(p) := u(q)$，$\lambda^\mu(p) := \lambda^\mu(q)$ [通过定义 $\lambda^a|_p$ 的坐标分量 $\lambda^\mu(p)$ 来定义 $\lambda^a|_p$，即 $\lambda^a|_p := \lambda^\mu(q)(\partial/\partial X^\mu)^a|_p$.]. 由此可知矢量场 λ^a 的每条积分曲线 $C(u)$ 在坐标系 $\{X^\mu\}$ 的参数式为

$$X^\mu(u) = \xi^\mu(u) + \sigma^\mu \quad (\text{常数}\,\sigma^\mu\,\text{满足}\,\eta_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu = 0). \tag{8-9-29}$$

[因为上式代表的曲线的切矢在 $\{X^\mu\}$ 系的分量 $\mathrm{d}X^\mu(u)/\mathrm{d}u = \mathrm{d}\xi^\mu(u)/\mathrm{d}u = \lambda^\mu$. 当 $\sigma^\mu = 0$ 时上式退化为 $L(u)$ 的参数式 $X^\mu(u) = \xi^\mu$.] 这表明任一点 p 的 λ^a 都满足

$$\lambda^a \partial_a u = (\partial/\partial u)^a \partial_a u = 1. \tag{8-9-30}$$

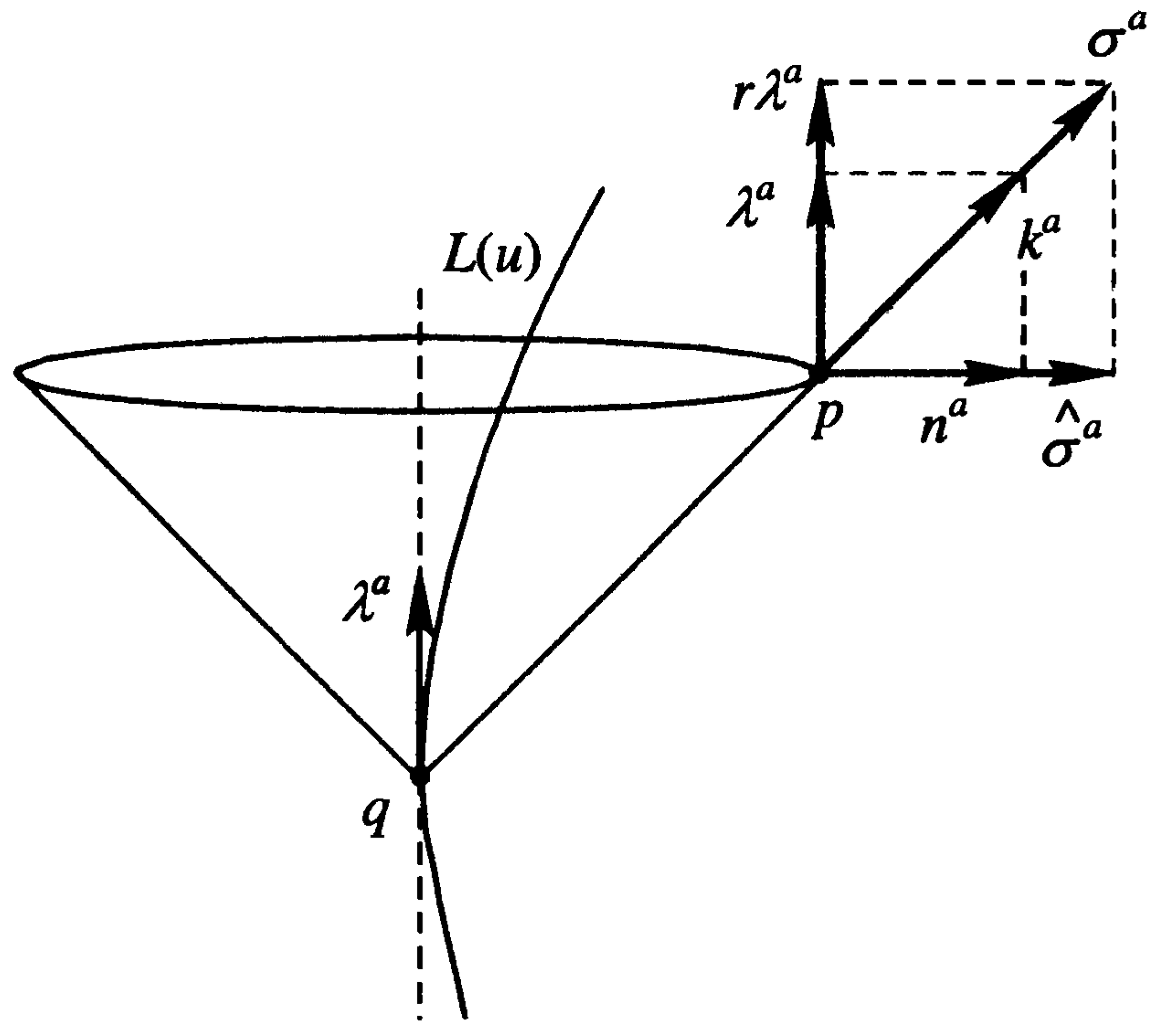


图 8-12　p 点的类光矢量 σ^a (和 k^a) 的“3 + 1 分解”

对 p 点定义矢量 $\sigma^a|_p := \psi^a - \xi^a$，由图 8-11 可知 $\sigma^a|_p$ 类光，故 σ^a 构成类光矢量场，它是类光超曲面族(以 L 上各点为锥顶的未来光锥面形成的族)的法矢场.

既然每点 p 都有类时矢量 $\lambda^a|_p$ 和类光矢量 $\sigma^a|_p$，就可把 $\sigma^a|_p$ 以 $\lambda^a|_p$ 为“时间”方向做“3 + 1 分解”，就是说，把 σ^a 分解为一个与 λ^a 平行的分量(记作 $r\lambda^a$)和一个与 λ^a 垂直的分量(记作 $\hat\sigma^a$)之和，即(见图 8-12)

$$\sigma^a = r\lambda^a + \hat\sigma^a. \tag{8-9-31}$$

以 $\lambda_a \equiv \eta_{ab}\lambda^b$ 缩并上式两边，注意到 $\lambda^a\lambda_a = -1$ 以及 $\hat\sigma^a$ 与 λ^a 正交，便得

$$r = -\lambda_a\sigma^a. \tag{8-9-32}$$

再令

$$k^a \equiv r^{-1}\sigma^a, \qquad n^a \equiv r^{-1}\hat\sigma^a, \tag{8-9-33}$$

则

$$(a)\ k^a = \lambda^a + n^a, \qquad (b)\ \lambda_a k^a = -1, \qquad (c)\ \eta_{ab}n^a n^b = 1. \tag{8-9-34}$$

k^a 可看作 σ^a 的某种“归一化”：k^a 的时间分量 λ^a 和空间分量 n^a 的长度都为 1.

既然 σ^a (因而 k^a)是以 L 上各点为锥顶的各个未来光锥面的法矢场，$k_a \equiv \eta_{ab}k^b$ 就是这些超曲面的法余矢. 另一方面，这些超曲面是等 u 面又表明 $\partial_a u$ 是它们的法余矢，于是 k_a 与 $\partial_a u$ 最多只差一个因子，即 $k_a = \alpha\,\partial_a u$，与式(8-9-34b)及(8-9-30)结合得 $\alpha = -1$，故

$$k_a = -(\mathrm{d}u)_a. \tag{8-9-35}$$

基于以上讨论，Kinnersley 就在 $\mathbb{R}^4$ 上定义了后来以其姓氏命名的度规. 这一度规可用抽象指标表为

$$g_{ab} := \eta_{ab} + 2m(u)\, r^{-1} k_a k_b = \eta_{ab} + 2m(u)\, r^{-1} (\mathrm{d}u)_a (\mathrm{d}u)_b, \qquad (8\text{-}9\text{-}36)$$

其中 $m(u)$是 u 的函数. 由于现在 $\mathbb{R}^4$[抠掉 $L(u)$]上有两个度规(η_{ab}和 g_{ab})，对指标升降问题(以及其他涉及度规的问题)就要格外留意. λ^a，σ^a，k^a 等原来就是作为矢量(有上指标)定义的，意义明确. 我们约定，凡由指标升降获得的张量(如λ_a，σ_a，k_a)一律都是用η_{ab}升降的结果. 凡涉及用 g_{ab} 升降的张量将明确地把 g_{ab} 写出，例如 $g_{ab}\lambda^b$，它不等于 $\lambda_a (\cong \eta_{ab}\lambda^b)$①.

先讨论 $L(u)$是η_{ab} 的测地线(简记作η 测地线)的简单情况. 这时 Kinnersley 度规(8-9-36)归结为 Vaidya 度规($\dot{m} \neq 0$时)或施瓦西度规($\dot{m} = 0$时). 为看出这点，只须选适当坐标系$\{u, r, \theta, \varphi\}$写出 g_{ab} 的线元并与式(8-9-4)比较. 把每点本来就有的 u 和 r 选作$\{u, r, \theta, \varphi\}$系的前两个坐标，坐标$\theta$和$\varphi$则尚待定义. 设$\{T, X, Y, Z\}$是$\eta_{ab}$ 的惯性坐标系，其空间坐标原点$(X = Y = Z = 0)$ 的世界线与测地线 $L(u)$重合，则λ^a 在该系的分量为$\lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (见图 8-13)，故式(8-9-32)的 r 满足

$$r = -\eta_{\mu\nu}\sigma^\mu\lambda^\nu = -\eta_{00}\sigma^0\lambda^0 = \sigma^0 .$$

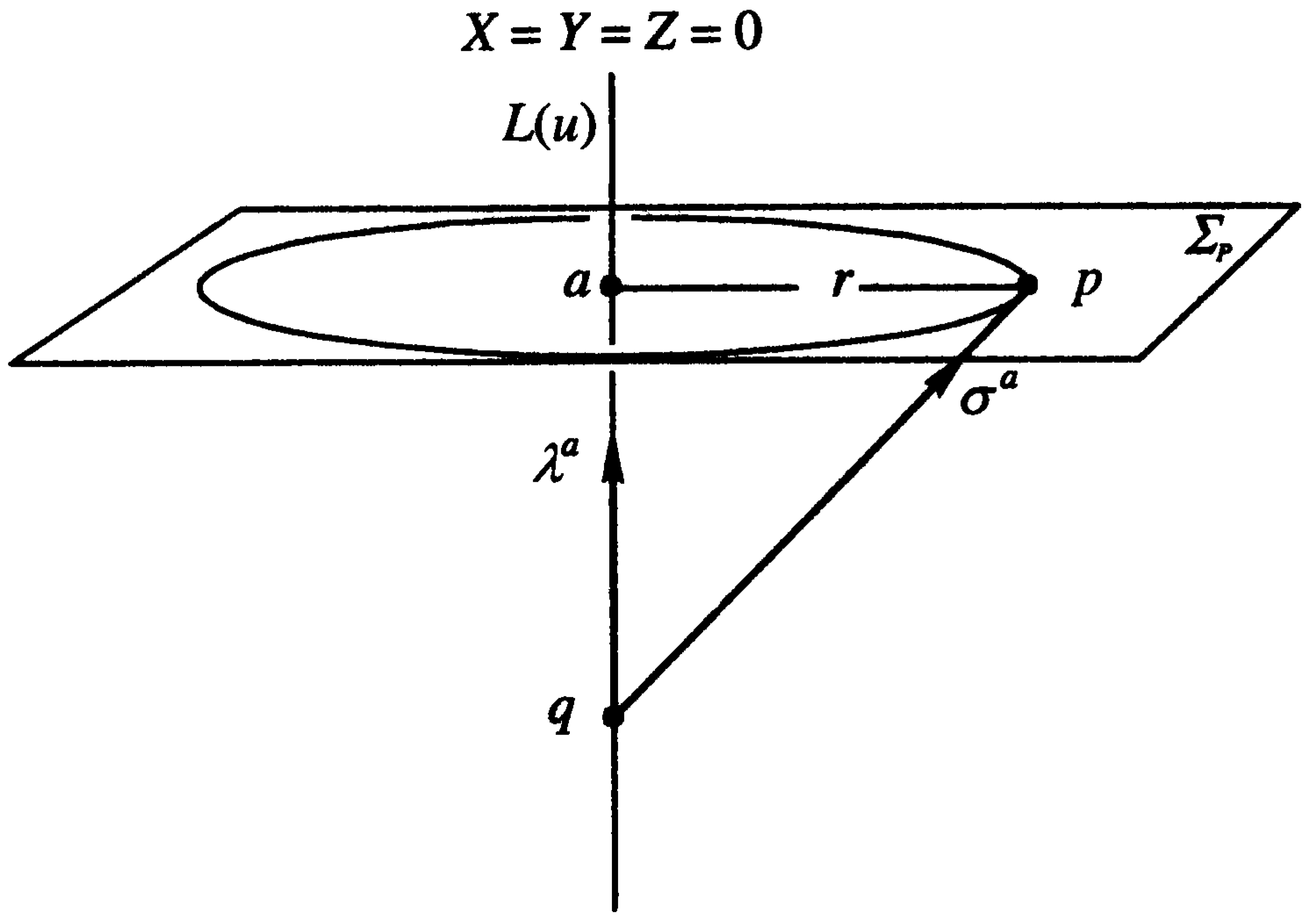


图 8-13　选测地线 $L(u)$为惯性系$\{T, X, Y, Z\}$空间坐标原点的世界线

另一方面，图 8-13 的 3 维平面 Σ_p 可看作时刻 p 的全空间，由图可知

σ^0 = 直线段 qa 之长 = 直线段 ap 之长，

所以 $r = \sigma^0$ 表明 p 点的 r 值就是 p 与测地线 $L(u)$的空间距离. 在Σ_p上以 a 为原点、r 为径向坐标建立球坐标系$\{r, \theta, \varphi\}$，其中θ, φ 由下式定义：

$$X = r\sin\theta\cos\varphi , \qquad Y = r\sin\theta\sin\varphi , \qquad Z = r\cos\theta .$$

此$\{r, \theta, \varphi\}$与 u 结合便得到所要的 4 维坐标系$\{u, r, \theta, \varphi\}$. 此系的 u, r 与$\{T, X, Y, Z\}$系的 T 有如下关系：$T = u + r$，故 η_{ab} 在此系的线元为 $-\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2)$，因此 Kinnersley 度规 g_{ab}的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -[1 - 2m(u) r^{-1}]\, \mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2) , \qquad (8\text{-}9\text{-}37)$$

与式(8-9-4)形式一样. 可见 Kinnersley 度规(8-9-36)在 $L(u)$是η 测地线的情况下归结为 Vaidya 度规($\dot{m} \neq 0$时)或施瓦西度规($\dot{m} = 0$时). Kinnersley 的真正推广是在

---

① 但 $g_{ab}k^b$ 却等于 $k_a(= \eta_{ab}k^b)$，因为由式(8-9-36)得 $g_{ab}k^b = \eta_{ab}k^b + 2mr^{-1}(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b k^b$，而 $k^b(\mathrm{d}u)_b = k^b\partial_b u = 0$ (按照 u 的定义，在 k^b的积分曲线上 u 为常数).

$L(u)$不是η测地线的情况，下面详加讨论.

8.9.3 Kinnersley 度规(详细讨论)

当 $L(u)$不是η测地线时 $L(u)$的 4 加速$\lambda^b\partial_b\lambda^a$非零($\partial_b$是与$\eta_{ab}$适配的导数算符),并与4速$\lambda^a$正交. 仿照Kinnersley,以$\dot{\lambda}^a$代表4加速$\lambda^b\partial_b\lambda^a$,则$\eta_{ab}\lambda^a\dot{\lambda}^b=0$. 我们仍想选择适当坐标系$\{u, r, \theta, \varphi\}$表示 Kinnerslay 度规. u, r的定义与$L(u)$是测地线时一样，只是 r 的几何意义现在略有不同. 设p是任一时空点,则它决定$L(u)$上的唯一q点. 过q作切于$L(u)$的η测地线 G_q，它所决定的惯性参考系记作$\mathscr{R}_q$. 以Σ_p和Σ_q代表$\mathscr{R}_q$系的两张同时面，它们分别含p和q. 仿照 8.9.2 小节的讨论可知由式(8-9-32)确定的r代表p点与G_q的空间距离(见图 8-14). 以G_p代表$\mathscr{R}_q$系中过p的惯性观者，则r亦可看作G_p与$L(u)$在时刻Σ_q的空间距离(即图中p'与q的距离). 在电动力学中称Σ_q为与Σ_p相应的“推迟时刻”(retarded time)(请注意，Σ_p其实“迟于”Σ_q，但习惯上称Σ_q为推迟时刻.)，故r所代表的是G_p与$L(u)$的推迟距离.

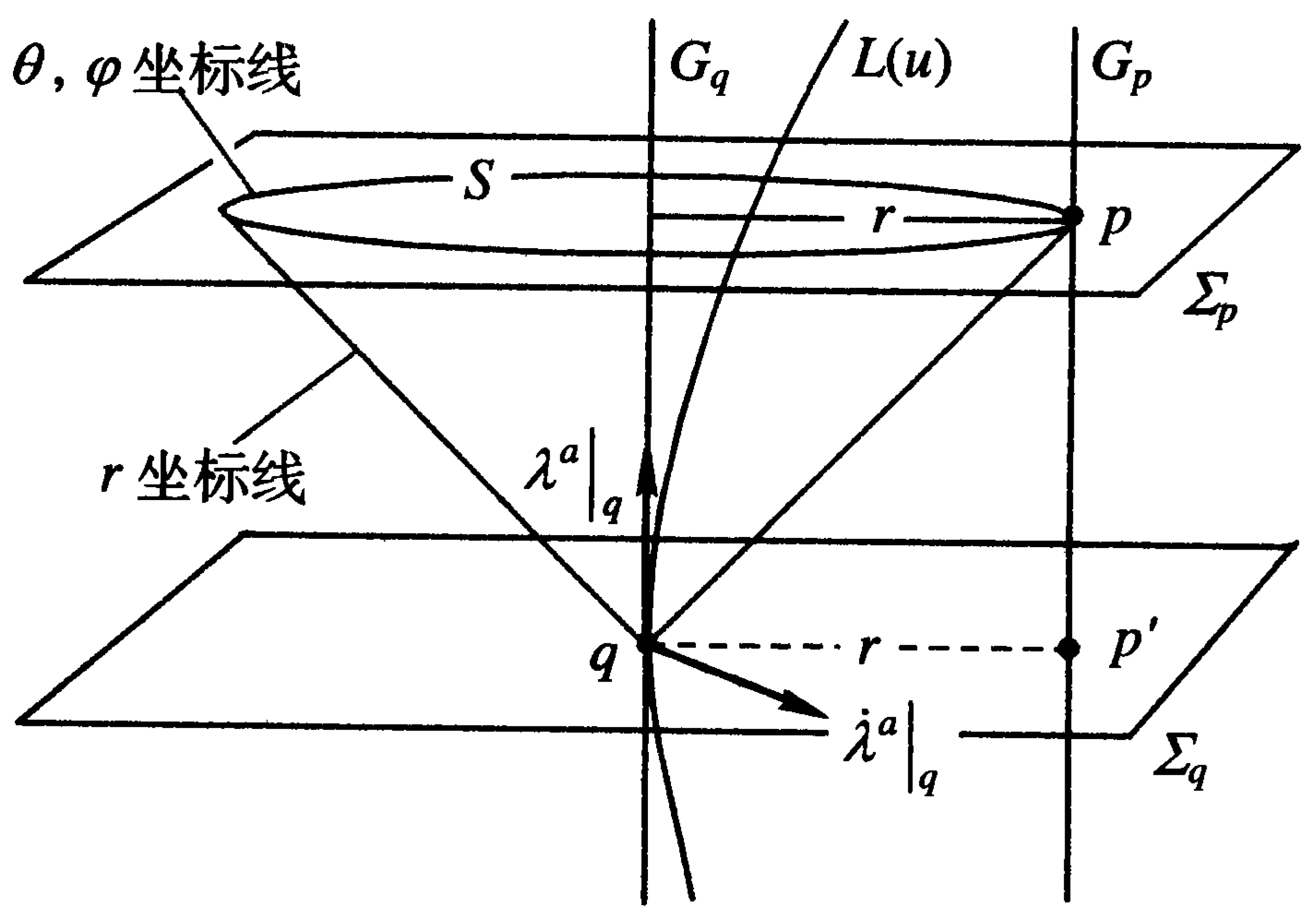


图 8-14　p点的r值代表观者G_p与火箭$L(u)$的推迟距离

下面介绍$\{u, r, \theta, \varphi\}$系中$\theta$和$\varphi$坐标的定义. L上任一点q决定一个瞬时静止惯性观者G_q和一个瞬时静止惯性参考系$\mathscr{R}_q$. 按下列要求在$\mathscr{R}_q$内定义一个瞬时静止惯性坐标系$\{X^\mu\}\equiv\{T, X, Y, Z\}$：①以$G_q$为空间坐标原点($X=Y=Z=0$)的世界线，②以$q$为线上$T=0$的点，③$Z$轴与$\dot{\lambda}^a|_q$同向($X$轴方向仍有任意性). 以此系的$Z$轴为极轴在$q$点的未来光锥面(含$p$点)上用下式定义$\theta$和$\varphi$坐标：

$$X=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad Y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad Z=r\cos\theta. \tag{8-9-38}$$

因为 4 加速$\dot{\lambda}^a$的方向随q点沿L线的移动而连续变化，所以在定义θ和φ时要不断旋转指向北极的方向，以保证它在任何时刻都与$\dot{\lambda}^a$保持一致.

在此基础上经一番计算(详见选读 8-9-2)便可求得 Kinnerslay 度规g_{ab}在$\{u, r, \theta, \varphi\}$系的全体非零分量：

$$g_{uu}=-1-2a(u)\,r\cos\theta+r^2(f^2+g^2\sin^2\theta)+2m(u)\,r^{-1},\quad g_{ur}=g_{ru}=-1,$$
$$g_{u\theta}=g_{\theta u}=-r^2 f,\quad g_{u\varphi}=g_{\varphi u}=-r^2 g\sin^2\theta,\quad g_{\theta\theta}=r^2,\quad g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta, \tag{8-9-39a}$$

式中

$$f \equiv a(u)\sin\theta + b(u)\sin\varphi - c(u)\cos\varphi\,, \qquad g \equiv [b(u)\cos\varphi + c(u)\sin\varphi]\cot\theta\,, \tag{8-9-39b}$$

其中的

$$a(u) \equiv |\dot{\lambda}^a(u)| \equiv [\eta_{ab}\dot{\lambda}^a(u)\dot{\lambda}^b(u)]^{1/2} \text{①} \tag{8-9-39c}$$

是 $L(u)$的 4 加速的大小，b 和 c 描写 $\dot{\lambda}^a$ 的方向随时间(指 u)的变化率，详见选读 8-9-2. 若 $L(u)$有一段为类时双曲线(见第 6 章习题 13)，则该段内 $a=$ 常数，$b=c=0$.

计算还给出 Kinnersley 度规的里奇张量 R_{ab} 和标量曲率 R，分别为

$$R_{ab} = -2r^{-2}(\dot{m} + 3ma\cos\theta)\,k_a k_b\,, \qquad R = 0, \tag{8-9-40}$$

故其相应的 T_{ab} 为

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi r^2}(\dot{m} + 3ma\cos\theta)\,k_a k_b\,. \tag{8-9-41}$$

与式(8-9-12′)类似，上式对应的物质场也是纯辐射场而不是电磁场，它由非光子的零质量粒子组成，但为方便起见也称之为“光子”.

如前说述，当 $L(u)$是 η 测地线及 $\dot{m} \neq 0$ 时 Kinnersley 度规归结为 Vaidya 度规. 借助于 $L(u)$还可对 Vaidya 度规的物理意义做更形象的解释. 解释时要注意一点：$\mathbb{R}^4$ 上有度规场 η_{ab} 和 g_{ab}(Vai)，前面谈及测地线、4 加速、……时都用 η_{ab} 及其适配导数算符 ∂_a 判断. 不妨这样想像：某恒星在闵氏时空中以 $L(u)$为世界线作测地运动(惯性运动). 由于不断发射粒子，自身质(能)量不断减小($\dot{m}<0$). 恒星的 4 动量以及周围辐射场的能动张量 T_{ab} 共同激发引力场，使时空变得弯曲，时空几何由 g_{ab}(Vai) 描述[但不能问及“世界线用 g_{ab}(Vai) 判断是否测地线”一类的问题，因为 g_{ab}(Vai) 在线上无定义($r=0$).]. 由于测地线 $L(u)$“不偏不倚”(各向同性)，g_{ab}(Vai) 有球对称性，但 $\dot{m} \neq 0$ 使它失去稳态性. 这一形象的物理解释还可推广到 Kinnersley 度规 g_{ab}(Kin). 现在 $L(u)$不是 η 测地线，其辐射不再各向同性，因而不宜再看作恒星的世界线，于是把恒星改为火箭. 这一火箭以非各向同性的方式不断向外发射“光子”(一定程度上类似于真实火箭不断喷气)，因此文献中称之为光子火箭(photon rocket). 火箭因发射“光子”而受到的反冲(recoil)使自身的能量和 3 动量不断变化，前者体现为 $\dot{m}<0$，后者使 3 动量的时变率非零. 改用 4 维语言，以 P^a 代表火箭的 4 动量，则 $P^a = m\lambda^a$，故其时变率为 $\dot{P}^a = \dot{m}\lambda^a + m\dot{\lambda}^a$，其中 $\dot{P}^a \equiv \lambda^b\partial_b P^a$，第一、二项分别代表能量、3 动量的时变率. 上式在 q 点的瞬时静止惯性系 $\{X^\mu\}$ 的分量式为

$$\dot{P}^\mu = \dot{m}\lambda^\mu + m\dot{\lambda}^\mu\,, \tag{8-9-42}$$

因为对 q 点有

① 请注意本书的 $a(u)$从定义起就与 Kinnersley (1969)及 Bonnor(1994)差一负号.

$$\lambda^\mu=(1,0,0,0)\,,\qquad \dot{\lambda}^\mu=(0,0,0,a)\quad(\text{因 }Z\text{ 轴与 }\dot{\lambda}^a\text{ 同向}),\tag{8-9-43}$$

所以

$$\text{火箭能量的增加率}=\dot{P}^0=\dot{m}\lambda^0=\dot{m}\,,\tag{8-9-44a}$$

$$\text{火箭动量的 }i\text{ 分量的增加率}=\dot{P}^i=m\dot{\lambda}^i=(0,0,ma)\,.\tag{8-9-44b}$$

现在证明这种由反冲导致的火箭能、动量增加率恰好等于火箭发射的“光子”在单位时间内带到无限远的能、动量乘以−1. 为此应计算从图 8-14 中的球面 S 流出去的能、动量. 设 $\{X^\mu\}$ 是 q 点的瞬时静止惯性系，则 $\{(e_\mu)^a\}\equiv\{(\partial/\partial X^\mu)^a\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的正交归一 4 标架场. §6.4 指出 $T^{0j}(=-T_{0j})$ 是能流密度的 j 分量，故 $T^{0j}(e_j)^a$ 是能流密度矢量，所以

$$\text{单位时间流出 }S\text{ 面的能量}=\int_S T^{0j}(e_j)^a n_a \mathrm{d}S=\int_S T^{0j}n_j\mathrm{d}S\,,\tag{8-9-45}$$

其中 $n_a\equiv\eta_{ab}n^b$，而 n^b 则是球面 S 的外向单位法矢，即式(8-9-33)的 n^a. 再者，§6.4 还指出 $T^{ij}(e_i)^a(e_j)^b$ 是 3 动量流密度张量，它与任一空间单位矢缩并就给出沿该向的 3 动量流密度矢量，所以

$$\text{单位时间流出 }S\text{ 面的 3 动量}=\int_S T^{ij}(e_i)^a(e_j)^b n_b\mathrm{d}S=\int_S T^{ij}(e_i)^a n_j\mathrm{d}S\,,\tag{8-9-46}$$

$$\text{单位时间流出 }S\text{ 面的 3 动量的 }i\text{ 分量}=\int_S T^{ij}n_j\mathrm{d}S\,.\tag{8-9-47}$$

式(8-9-45)和(8-9-47)可综合表为

$$\text{单位时间流出 }S\text{ 面的 4 动量的}\mu\text{ 分量}=\int_S T^{\mu\nu}n_\nu\mathrm{d}S\,.\tag{8-9-48}$$

由 q 的瞬时静止惯性系 $\{X^\mu\}$ 以及坐标 θ, φ 的定义可知对 S 面上任一点有(参见图 8-14 和 8-12)

$$\lambda^\mu=(1,0,0,0)\quad\text{及}\quad n^\mu=(0,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\,,\tag{8-9-49}$$

代入 $k^a=\lambda^a+n^a$ 得

$$k^\mu=(1,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\,,\tag{8-9-50}$$

所以 $k^\mu n_\mu=1$，与式(8-9-41)结合便得

$$T^{\mu\nu}n_\nu=-\frac{1}{4\pi r^2}(\dot{m}+3ma\cos\theta)\,k^\mu k^\nu n_\nu=-\frac{1}{4\pi r^2}(\dot{m}+3ma\cos\theta)\,k^\mu\,,\tag{8-9-51}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{单位时间流出 }S\text{ 面的能量}&=-\frac{1}{4\pi r^2}\int_S(\dot{m}+3ma\cos\theta)\,k^0\mathrm{d}S\\&=-\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\dot{m}+3ma\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\dot{m}\,,\end{aligned}\tag{8-9-52a}$$

$$\text{单位时间流出 } S \text{ 面的 3 动量的第 3 分量} = -\frac{1}{4\pi r^2}\int_S (\dot{m}+3ma\cos\theta)\,k^3 \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\dot{m}+3ma\cos\theta)\cos\theta\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -ma\,. \qquad (8\text{-}9\text{-}52\text{b})$$

类似可得

$$\text{单位时间流出 } S \text{ 面的动量的第 1, 2 分量} = 0. \qquad (8\text{-}9\text{-}52\text{c})$$

式(8-9-52)在 $r\to\infty$ 时照样成立，与式(8-9-44)比较便证明了待证结论，即火箭的能、动量增加率恰好等于它发射的“光子”在单位时间内带到无限远的能、动量乘以−1.

基于以上物理解释，不妨称 Kinnersley 解为“任意加速质点解”[Kramer et al. (1980)]，或说 Kinnersley 度规代表“任意加速质点的引力场”. 不过应该注意：①“加速质点”是指火箭的 4 加速 $\dot{\lambda}^a \equiv \lambda^b\partial_b\lambda^a$ 非零($a\neq 0$)，而这 4 加速是以 η_{ab} 衡量的. 为何不用 g_{ab} 衡量？答案是：火箭世界线的 $r=0$，g_{ab} 在线上失去意义(奇异)，根本不能用它衡量火箭世界线上的任何量. ②这“加速质点的引力场”是由质点(火箭)及其所发出的“光子”共同激发的，g_{ab} 对应的 T_{ab} 是火箭外部纯辐射场的能动张量.

以上关于 Kinnersley 度规的讨论还存在若干微妙问题，兹列出以下三个：

(1) 在计算流出球面 S 的能量和动量时，凡涉及度规之处都是默默地用 η_{ab} 进行的，而 Kinnersley 时空的度规应是 Kinnersley 度规 g_{ab}，上述计算的合法性自然应该受到质疑. Bonnor(1994)对此曾给出如下回答(大意而非直译)：g_{ab} 与 η_{ab} 的差别仅在于含 mr^{-1} 的一项. 添加此项将对式(8-9-51)中的 n_ν 的归一化产生影响，但这对积分的贡献在 S 趋于无限大时趋于零. 所以，忽略含 mr^{-1} 的项看来不会影响计算结果.

(2) 在物理学家所知道的物质场中，任何观者在任何时刻测得的能量密度 T_{00} 都不小于零(这称为弱能量条件，详见附录 D). 设 (p, Z^a) 为任一瞬时观者，则由式(8-9-45)得

$$T_{00} = T_{ab}Z^aZ^b = -\frac{1}{4\pi r^2}(k_aZ^a)^2(\dot{m}+3ma\cos\theta)\,.$$

当 $a=0$ 时(Vaidya)，只须令 $\dot{m}<0$ 便可保证 $T_{00}>0$. 但 $a\neq 0$ 的情况却不如此简单，关键是 $\cos\theta$ 可正可负. 不过，只要默认 $m>0$，就不难看出 $T_{00}\geqslant 0$ 等价于 $-\dot{m}/3m \geqslant a\cos\theta$. 因此，为使 T_{00} 对任何 θ 值都非负，除要求 $\dot{m}<0$ 外还应要求 $a\leqslant -\dot{m}/3m$. 可以认为这是能量条件对 Kinnersley 度规的两个参数 m 和 a 的关系的某种限制.

(3) Bonnor(1994)指出，既然火箭做加速运动，它应该发射引力波，而引力波将携带能、动量至无限远. 然而前已证明，在不考虑引力波的前提下，单由“光

子”带到无限远的能、动量已经恰好满足平衡要求，即恰好等于火箭的能、动量增加率乘以−1．这暗示引力波带到无限远的能、动量为零．于是出现一个佯谬：Kinnersley 时空到底有无引力辐射？针对这一问题，Damour et al.(1994)及 Dain et al.(2002)用非常不同的手法对 Kinnersley 时空的引力辐射做了研究，基本结论是：点状加速火箭及其周围的“光子”都发射引力辐射，两者带到无限远的能、动量互相抵消，总体说来 Kinnersley 时空没有引力辐射(由引力波带到无限远的能、动量为零).

[选读 8-9-2]

现在给出式(8-9-39)的详细推导过程．由式(8-9-36)可知 g_{ab} 和 η_{ab} 在 $\{u, r, \theta, \varphi\}$ 系的全部分量中只有 uu 分量不同．具体说，若分别以 $g_{uu}, g_{ur}, \cdots, g_{\varphi\varphi}$ 和 ${}^0g_{uu}, {}^0g_{ur}, \cdots, {}^0g_{\varphi\varphi}$ 代表 g_{ab} 和 η_{ab} 在 $\{u, r, \theta, \varphi\}$ 系的分量，则

$$
\begin{aligned}
&g_{uu} = {}^0g_{uu} + 2mr^{-1},\quad g_{ur} = {}^0g_{ur},\quad g_{u\theta} = {}^0g_{u\theta},\quad g_{u\varphi} = {}^0g_{u\varphi},\\
&g_{rr} = {}^0g_{rr},\ g_{r\theta} = {}^0g_{r\theta},\ g_{r\varphi} = {}^0g_{r\varphi},\ g_{\theta\theta} = {}^0g_{\theta\theta},\ g_{\theta\varphi} = {}^0g_{\theta\varphi},\ g_{\varphi\varphi} = {}^0g_{\varphi\varphi},
\end{aligned}
\tag{8-9-53}
$$

因此只须计算 ${}^0g_{uu}, {}^0g_{ur}, \cdots, {}^0g_{\varphi\varphi}$.

我们来对 $\mathbb{R}^4$ 的任一点 p 计算 ${}^0g_{uu}|_p, {}^0g_{ur}|_p, \cdots, {}^0g_{\varphi\varphi}|_p$．$p$ 点在 L 线上决定一点 q，正文已借 q 定义了一个瞬时静止惯性坐标系 $\{X^\mu\} \equiv \{T, X, Y, Z\}$．把 $\sigma^\mu = \psi^\mu - \xi^\mu$ 中的 ψ^μ 改记作 X^μ 得 $X^\mu = \sigma^\mu + \xi^\mu$，再利用式(8-9-33)便得两系的坐标变换关系

$$
X^\mu = \sigma^\mu + \xi^\mu = rk^\mu(u, \theta, \varphi) + \xi^\mu(u),
\tag{8-9-54}
$$

其中 k^μ 代表 k^a 在 $\{X^\mu\}$ 系的分量[凡以 $\mu, \nu, \ldots$ 或 $0, 1, \cdots$ 为指标的量都代表某张量在 $\{X^\mu\}$ 系(而非 $\{u, r, \theta, \varphi\}$ 系)的分量.] 因为 $\{X^\mu\}$ 是惯性坐标系，η_{ab} 在 $\{X^\mu\}$ 系的分量自然等于 $\eta_{\mu\nu}$，利用坐标变换式(8-9-54)便可写出 η_{ab} 在 $\{u, r, \theta, \varphi\}$ 系的各分量的表达式．首先

$$
\begin{aligned}
{}^0g_{uu} &= \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial u}\frac{\partial X^\nu}{\partial u} = \eta_{\mu\nu}(r\dot{k}^\mu + \dot{\xi}^\mu)(r\dot{k}^\nu + \dot{\xi}^\nu)\\
&= r^2\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu\dot{k}^\nu + 2r\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu\dot{\xi}^\nu + \eta_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu,
\end{aligned}
$$

其中顶上加点代表对 u 的导数(或偏导数)，例如 $\dot{\xi}^0 \equiv \mathrm{d}\xi^0/\mathrm{d}u$，$\dot{k}^1 \equiv \partial k^1/\partial u$．因为曲线 $L(u)$ 的参数式是 $X^\mu(u) = \xi^\mu(u)$，所以 $\dot{\xi}^\mu \equiv \mathrm{d}\xi^\mu/\mathrm{d}u$ 等于 $L(u)$的切矢 λ^a 在 $\{X^\mu\}$ 系的分量 λ^μ，注意到 $\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = -1$ 便得

$$
{}^0g_{uu} = -1 + 2r\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu\lambda^\nu + r^2\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu\dot{k}^\nu .
\tag{8-9-55a}
$$

其次

$$^0g_{ur}=\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial u}\frac{\partial X^\nu}{\partial r}=\eta_{\mu\nu}(r\dot{k}^\mu+\dot{\xi}^\mu)\,k^\nu=r\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu k^\nu+\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\nu=-1\,, \tag{8-9-55b}$$

其中$\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu k^\nu=0$可由$\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu=0$推出，$\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\nu=-1$则来自$\lambda_a k^a=-1$．用类似方法可求得$\eta_{ab}$在$\{u,r,\theta,\varphi\}$系的其他分量的表达式：

$$^0g_{u\theta}=r^2\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu k^\nu{}_{,\theta}+r\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\nu{}_{,\theta}\,, \tag{8-9-55c}$$

$$^0g_{u\varphi}=r^2\eta_{\mu\nu}\dot{k}^\mu k^\nu{}_{,\varphi}+r\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\nu{}_{,\varphi}\,, \tag{8-9-55d}$$

$$^0g_{rr}=\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu=0\,, \tag{8-9-55e}$$

$$^0g_{r\theta}=r\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu{}_{,\theta}=0\quad(\text{第二个等号来自}\ \eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu=0), \tag{8-9-55f}$$

$$^0g_{r\varphi}=r\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu{}_{,\varphi}=0\,(\text{同上理}), \tag{8-9-55g}$$

$$^0g_{\theta\theta}=r^2\eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\theta}\,k^\nu{}_{,\theta}\,, \tag{8-9-55h}$$

$$^0g_{\theta\varphi}=r^2\eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\theta}\,k^\nu{}_{,\varphi}\,, \tag{8-9-55i}$$

$$^0g_{\varphi\varphi}=r^2\eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\varphi}\,k^\nu{}_{,\varphi}\,, \tag{8-9-55j}$$

欲求以上各式的最终形式，必须计算k^μ对 u，θ和φ的偏导数，即$\dot{k}^\mu$，$k^\mu{}_{,\theta}$和$k^\mu{}_{,\varphi}$．为求$k^\mu{}_{,\theta}$和$k^\mu{}_{,\varphi}$只须关心以固定的q点为顶点的未来光锥面($u=$常数)上的k^μ，这时式(8-9-50)成立，再次列出如下(并赋予新式号)：

$$k^\mu=(1,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\,, \tag{8-9-56a}$$

于是

$$k^\mu{}_{,\theta}=(0,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)\,, \tag{8-9-56b}$$

$$k^\mu{}_{,\varphi}=(0,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,0)\,, \tag{8-9-56c}$$

因而

$$\eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\theta}k^\nu{}_{,\theta}=1\,,\quad \eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\theta}k^\nu{}_{,\varphi}=0\,,\quad \eta_{\mu\nu}k^\mu{}_{,\varphi}k^\nu{}_{,\varphi}=\sin^2\theta\,. \tag{8-9-56d}$$

此外，$\lambda^\mu=(1,0,0,0)$还导致

$$\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\mu{}_{,\theta}=\eta_{\mu\nu}\lambda^\mu k^\mu{}_{,\varphi}=0\,. \tag{8-9-56e}$$

现在剩下最复杂的一步，即计算$\dot{k}^\mu$．

设p，$\tilde{p}$是两个相邻时空点，它们的r，θ，φ值对应相等，u值依次为u和$u+\mathrm{d}u$．以q，$\tilde{q}$分别代表p，$\tilde{p}$在$L(u)$线上对应的点，则$k^a|_p$从q指向p，$k^a|_{\tilde{p}}$从$\tilde{q}$指向$\tilde{p}$．记$k^a\equiv k^a|_p$，$\chi^a\equiv k^a|_{\tilde{p}}$，则

$$\dot{k}^\mu|_p=\lim_{\mathrm{d}u\to 0}\frac{\chi^\mu-k^\mu}{\mathrm{d}u}\,, \tag{8-9-57}$$

其中k^μ和χ^μ分别是k^a和χ^a在q点的瞬时静止惯性坐标系$\{X^\mu\}\equiv\{T,X,Y,Z\}$的分量．$k^\mu$已表为式(8-9-56a)，关键是如何求$\chi^\mu$．以$\{\tilde{X}^\mu\}\equiv\{\tilde{T},\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\}$代表$\tilde{q}$点

的瞬时静止惯性坐标系[按式(8-9-38)所在段的要求定义，只须改 q 为 $\tilde{q}$.]，则 χ^a 在 $\{\tilde{X}^\mu\}$ 系的分量为

$$\tilde{\chi}^\mu = (1,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta). \tag{8-9-58}$$

欲从 $\tilde{\chi}^\mu$ 求得 χ^μ，应先弄清 $\{\tilde{X}^\mu\}$ 系与 $\{X^\mu\}$ 系的关系. 根据要求，$\{X^\mu\}$ 系的 Z 轴应与 $\dot{\lambda}^a|_q$ 同向，$\{\tilde{X}^\mu\}$ 系的 $\tilde{Z}$ 轴应与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 同向. 请注意，$\{\tilde{X}^\mu\}$ 与 $\{X^\mu\}$ 是两个不同惯性参考系 $\mathscr{R}_{\tilde{q}}$ 和 $\mathscr{R}_q$ 内的惯性坐标系，因为 T 坐标线 G_q 与 $\tilde{T}$ 坐标线 $G_{\tilde{q}}$ [过 $\tilde{q}$ 切于 $L(u)$ 线的 η 测地线]一般不平行. 但既然都是惯性坐标系，总可通过适当的平移和洛伦兹变换把一个变到另一个. 这一变换可由以下 3 步组成：①用一个平移把 $\{X^\mu\}$ 系的原点(指 $T=X=Y=Z=0$ 的点)从 q 移至 $\tilde{q}$，得坐标系 $\{X'^\mu\}$. ②用 $T'\sim Z'$ 面内的一个伪转动把 $\{X'^\mu\}$ 系变为 $\{\hat{X}^\mu\}$ 系(其中 $\hat{T}$ 轴与 $\tilde{T}$ 轴平行)，它与 $\{\tilde{X}^\mu\}$ 系一样是惯性参考系 $\mathscr{R}_{\tilde{q}}$ 内的惯性坐标系，只是 $\hat{Z}$ 轴一般与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 不同向，这正是它与 $\{\tilde{X}^\mu\}$ 系的关键区别. ③对 $\{\hat{X}^\mu\}$ 系施行一个空间转动 R 使之变到 $\{\tilde{X}^\mu\}$，其中 $\tilde{Z}$ 轴与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 同向. 此 R 又可看作两个转动 R_1 和 R_2 的相继作用(复合映射)，其中 R_1 是绕 $\hat{X}$ 轴的转动，结果是 $\hat{Z}$ 轴转到一个新位置(记作 $\tilde{\hat{Z}}$，见图 8-15)，它是以 $\hat{Y}$ 为轴、以 $\tilde{Z}$ 为母线的圆锥与 $\hat{Y}\sim\hat{Z}$ 面的交线，设为此要转的角度为 $b\mathrm{d}u$；R_2 是绕 $\hat{Y}$ 轴的转动，结果是 $\tilde{\hat{Z}}$ 轴转到与 $\tilde{Z}$ 轴重合，设为此要转的角度为 $c\mathrm{d}u$.① 这三步过程可以表为

$$\{T,X,Y,Z\}\xrightarrow{\text{平移}}\{T',X',Y',Z'\}\xrightarrow{\text{伪转动}}\{\hat{T},\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}\}\xrightarrow{\text{空间转动}R}\{\tilde{T},\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\}. \tag{8-9-59}$$

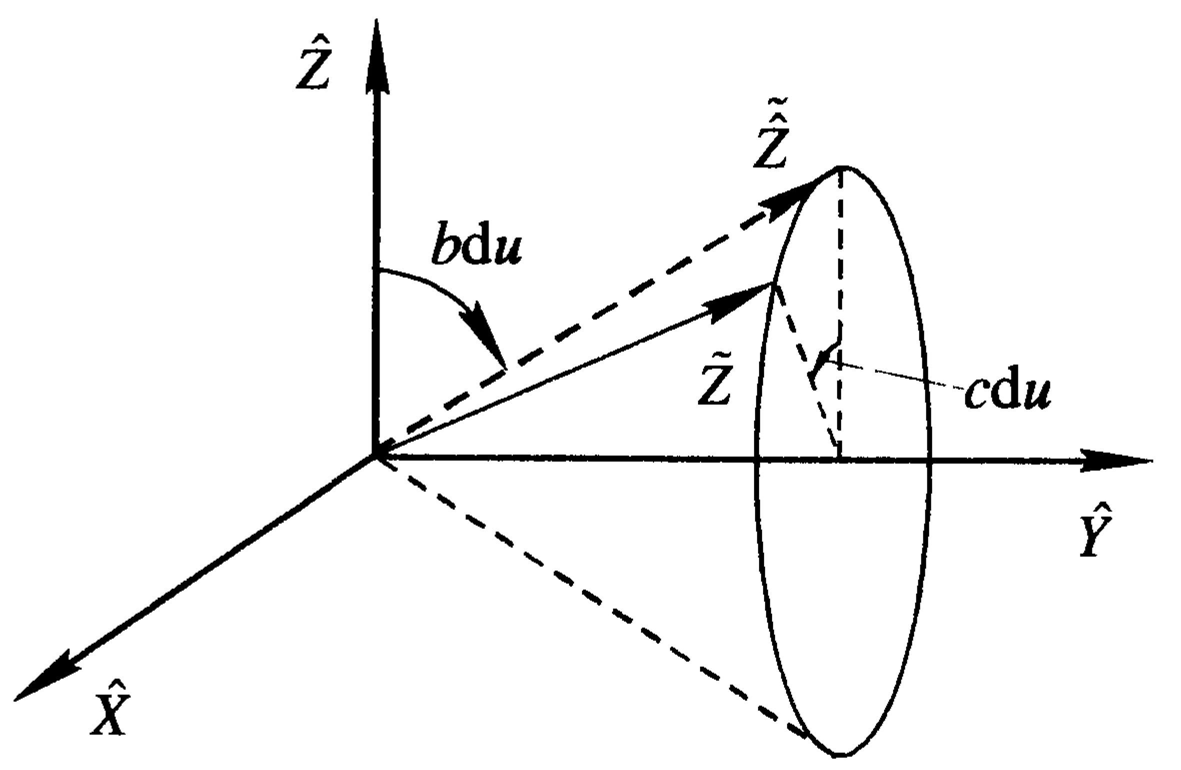


图 8-15 先绕 $\hat{X}$ 轴转 $b\mathrm{d}u$，再绕 $\hat{Y}$ 轴转 $c\mathrm{d}u$，就把 $\hat{Z}$ 轴转到 $\tilde{Z}$ 轴

空间转动 R 的必要性来自我们要求 θ,φ 的极轴(Z 轴)总与 $\dot{\lambda}^a$ 同向. 若 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 与 $\dot{\lambda}^a|_q$ 平行(意味着 $\dot{\lambda}^a$ 的方向在这 $\mathrm{d}u$ 时间内无变化)，则因 $T'\sim Z'$ 面内的伪转动保持 X'，Y'，Z' 轴的方向，故伪转动后无须再做空间转动就能保证 $\hat{Z}$ 轴与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 同向，因此 $b=c=0$. 反之，只要 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 与 $\dot{\lambda}^a|_q$ 不平行，则 $\hat{Z}$ 轴便不与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 同向，故必须转动适当角度 $b\mathrm{d}u$ 和 $c\mathrm{d}u$ 以达到 $\tilde{Z}$ 轴与 $\dot{\lambda}^a|_{\tilde{q}}$ 同向的要求. 可见 b 和 c 的确反映了 4 加速 $\dot{\lambda}^a$ 的

① 经两步转动后的 X 轴仍未必与 $\tilde{X}$ 轴重合，但这不成问题，因为各点的瞬时静止惯性系的 X 轴的选法本来就存在灵活性，当初就应有这种“先见之明”，即按照转后的 X 轴来选 $\tilde{X}$ 轴.

方向的变化率.

有了以上认识就可从 $\tilde{\chi}^\mu$ 的表达式(8-9-58)出发计算 χ^μ，从而代入式(8-9-57)以求得 $\dot{k}^\mu$. 既然空间坐标系 $\{\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}\}$ 与 $\{\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\}$ 以空间转动 R 相联系，就可把 χ^a 在两系的分量 $\hat{\chi}^i$ 及 $\tilde{\chi}^i$ 表为列矩阵并写出如下等式：

$$\begin{bmatrix}\hat{\chi}^1\\ \hat{\chi}^2\\ \hat{\chi}^3\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}\tilde{\chi}^1\\ \tilde{\chi}^2\\ \tilde{\chi}^3\end{bmatrix}, \tag{8-9-60}$$

其中 $R=R_2R_1$ 是由转角 $b\mathrm{d}u$ 和 $c\mathrm{d}u$ 描述的 3×3 矩阵. 由图 8-15 及附录 G 得

$$R=R_2R_1=\begin{bmatrix}\cos(c\mathrm{d}u) & 0 & \sin(c\mathrm{d}u)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(c\mathrm{d}u) & 0 & \cos(c\mathrm{d}u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(b\mathrm{d}u) & -\sin(b\mathrm{d}u)\\ 0 & \sin(b\mathrm{d}u) & \cos(b\mathrm{d}u)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(c\mathrm{d}u) & \sin(b\mathrm{d}u)\sin(c\mathrm{d}u) & \cos(b\mathrm{d}u)\sin(c\mathrm{d}u)\\ 0 & \cos(b\mathrm{d}u) & -\sin(b\mathrm{d}u)\\ -\sin(c\mathrm{d}u) & \sin(b\mathrm{d}u)\cos(c\mathrm{d}u) & \cos(b\mathrm{d}u)\cos(c\mathrm{d}u)\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathrm{d}u$ 最终要趋于零，可取 $\cos(b\mathrm{d}u)\cong\cos(c\mathrm{d}u)\cong 1$， $\sin(b\mathrm{d}u)\cong b\mathrm{d}u$， $\sin(c\mathrm{d}u)\cong c\mathrm{d}u$，再略去含 $(\mathrm{d}u)^2$ 的 2 阶小项，得

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & c\mathrm{d}u\\ 0 & 1 & -b\mathrm{d}u\\ -c\mathrm{d}u & b\mathrm{d}u & 1\end{bmatrix}. \tag{8-9-61}$$

把上式及由式(8-9-58)给出的 $\tilde{\chi}^i$ 代入式(8-9-60)得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{\chi}^1\\ \hat{\chi}^2\\ \hat{\chi}^3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1 & 0 & c\mathrm{d}u\\ 0 & 1 & -b\mathrm{d}u\\ -c\mathrm{d}u & b\mathrm{d}u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi+c\mathrm{d}u\cos\theta\\ \sin\theta\sin\varphi-b\mathrm{d}u\cos\theta\\ -c\mathrm{d}u\sin\theta\cos\varphi+b\mathrm{d}u\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{8-9-62a}$$

由于空间转动不影响 4 矢量的 0 分量，故

$$\hat{\chi}^0=\tilde{\chi}^0=1\quad[\text{第二步用到式(8-9-58)}], \tag{8-9-62b}$$

与式(8-9-62a)结合便有全部 $\hat{\chi}^\mu$. 然而式(8-9-57)所要的是 χ^μ. 由式(8-9-59)可知 $\{\hat{X}^\mu\}$ 系与 $\{X^\mu\}$ 系以一个平移和一个伪转动相联系，而平移不会改变 4 矢量的分量，故只须考虑伪转动的影响. 因为 $\{\hat{X}^\mu\}$ 系相对于 $\{X^\mu\}$ 系以速率 $v\equiv a\mathrm{d}u$ 沿 Z 轴正向平动，而 $\mathrm{d}u\to 0$ 保证 $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}\to 1$，故由 $\gamma\cong 1$ 的洛伦兹变换得

$$\chi^0 = \hat{\chi}^0 + (a\mathrm{d}u)\hat{\chi}^3,\quad \chi^1 = \hat{\chi}^1,\quad \chi^2 = \hat{\chi}^2,\quad \chi^3 = \hat{\chi}^3 + (a\mathrm{d}u)\hat{\chi}^0. \tag{8-9-63}$$

把式(8-9-62)的 $\hat{\chi}^\mu$ 代入上式给出

$$\begin{aligned}
&\chi^0 = 1 + (a\mathrm{d}u)\,(-c\mathrm{d}u\sin\theta\cos\varphi + b\mathrm{d}u\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta) \cong 1 + a\mathrm{d}u\cos\theta\,,\\
&\chi^1 = \sin\theta\cos\varphi + c\mathrm{d}u\cos\theta,\quad \chi^2 = \sin\theta\sin\varphi - b\mathrm{d}u\cos\theta\,, \qquad (8\text{-}9\text{-}64)\\
&\chi^3 = (-c\mathrm{d}u\sin\theta\cos\varphi + b\mathrm{d}u\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta) - a\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

把上式及式(8-9-56a)代入(8-9-57)便得(写成行矩阵以省篇幅)

$$\dot{k}^\mu = (a\cos\theta,\ c\cos\theta,\ -b\cos\theta,\ -c\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + a)\,. \tag{8-9-65}$$

最后，把式(8-9-56b,c)及上式代入式(8-9-55)以求得 η_{ab} 在 $\{u,\ r,\ \theta,\ \varphi\}$ 系的全部分量，再代入式(8-9-53)便得 Kinnersley 度规 g_{ab} 在 $\{u,\ r,\ \theta,\ \varphi\}$ 系的全部分量，结果便是式(8-9-39)，它们与 Kinnersley(1969)的式(13)、(14)实质一致，某些正负号的区别来自两个原因：①本书号差与该文不同；②本书的 a 和 c 分别对应于该文的 $-a$ 和 $-c$.

[选读 8-9-2 完]

§8.10 坐标条件，广义相对论的规范自由性

8.10.1 坐标条件

真空爱因斯坦方程

$$G_{ab} = 0 \tag{8-10-1}$$

是张量方程. 为了求解，可选择适当坐标系并改写为分量方程组

$$G_{\mu\nu}(x) = 0\,,\qquad \mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{8-10-2}$$

其中 $G_{\mu\nu}(x)$ 的 x 表明每个 $G_{\mu\nu}$ 都是 4 个坐标的函数. 因

$$G_{\mu\nu}(x) = R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}R(x)g_{\mu\nu}(x)\,,$$

而 $R_{\mu\nu}(x)$ 和 $R(x)$ 可由 $g_{\mu\nu}(x)$ 及其偏导数表出，故式(8-10-2)可看作关于未知函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 的偏微分方程组. 又因 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$，故 $g_{\mu\nu}(x)$ 中只含 10 个独立待定函数. 另一方面，由于式(8-10-2)对 $\mu,\ \nu$ 有对称性，它也只含10个代数上独立的偏微分方程. 在适当的边界条件下，由10个独立方程决定10个独立函数是合理的. 然而事情并非如此简单. 曲率张量 $R_{abc}{}^d$ 满足比安基恒等式 $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0$，由它可得 $\nabla_a G^a{}_b = 0$[式(3-4-17)]，写成分量后相当于 4 个关于函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 的微分恒等式

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0\,, \tag{8-10-3}$$

因此独立方程只有 10 − 4 = 6 个. 10 个待定函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 只须满足 6 个独立微分方

程，它们岂非太自由了吗？事实的确如此. 关键在于式(8-10-2)是张量方程 $G_{ab}=0$ 的分量方程组，待求函数组 $g_{\mu\nu}(x)$ 是度规张量 g_{ab} 的坐标分量，若函数组 $g_{\mu\nu}(x)$ 是方程组(8-10-2)的解，则它配以坐标基矢所得的张量 g_{ab} 满足张量方程 $G_{ab}=0$，所以由 $g_{\mu\nu}(x)$ 出发按张量分量变换律求得的新函数组 $g'_{\mu\nu}(x')$ 也是方程组(8-10-2)的解. $g_{\mu\nu}$ (作为 x 的函数)和 $g'_{\mu\nu}$ (作为 x' 的函数)一般说来有不同的函数形式，因此 $g_{\mu\nu}(x)$ 与 $g'_{\mu\nu}(x')$ 是方程组(8-10-2)的两组不同解. 可见，边界条件只能把方程组(8-10-2)的解确定到“差一个坐标变换”的程度，就是说，能确定唯一的时空几何，但不能确定到使用哪个坐标系(这是很合理的：坐标系的选择本来就有任意性，如果连用哪个坐标系也能确定，那倒是奇怪了.). 例如，施瓦西解(8-3-18)由以下 10 个函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 构成：

$$g_{00}(r)=-(1-2M/r),\quad g_{11}(r)=(1-2M/r)^{-1},\quad g_{22}(r)=r^2,\quad g_{33}(r)=r^2\sin^2\theta,$$
$$g_{01}=g_{02}=g_{03}=g_{12}=g_{13}=g_{23}=0. \tag{8-10-4}$$

用下式定义新的坐标系(**各向同性坐标系**)$\{t',\ r',\ \theta',\ \varphi'\}$：

$$t=t',\qquad r=r'(1+M/2r')^2,\qquad \theta=\theta',\qquad \varphi=\varphi', \tag{8-10-5}$$

则式(8-3-18)成为

$$\begin{aligned} ds^2=&-[(1-M/2r')/(1+M/2r')]^2 dt'^2\\ &+(1+M/2r')^4[dr'^2+r'^2(d\theta'^2+\sin^2\theta' d\varphi'^2)], \end{aligned} \tag{8-10-6}$$

它代表的 10 个函数 $g'_{\mu\nu}(x')$ 与式(8-10-4)不同，例如 $g'_{00}(r')=-[(1-M/2r')/(1+M/2r')]^2$ 对自变量 r' 的依赖关系显然有别于 $g_{00}(r)$ 对自变量 r 的依赖关系. 但由 $g'_{\mu\nu}(x')$ 求得的 $R'_{\mu\nu}$ 也为零，可见式(8-10-6)和(8-3-18)都是真空爱因斯坦方程 $G_{\mu\nu}=0$ 满足相同边界条件(球对称)的解，代表相同几何. 这就是“边界条件不足以决定唯一解，但可确定唯一几何”的一个例子.

由于坐标变换涉及(由老坐标表达新坐标的) 4 个任意函数，可以说广义协变性为方程组(8-10-2)提供了 4 个“自由度”. 如果要去掉这种不确定性，就得指定某个具体坐标系，即对函数组 $g_{\mu\nu}(x)$指定 4 个附加方程，这 4 个方程合称**坐标条件**(coordinate condition). 下列 4 个方程就是坐标条件的一个例子：

$$g_{00}=-1,\qquad g_{0i}=0\qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{8-10-7}$$

满足这一条件的坐标叫高斯法坐标(详见选读 8-10-1). 坐标条件的另一例子是要求坐标 x^σ 满足如下的 4 个方程：

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b x^\sigma=0\quad (\sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8-10-8}$$

计算表明[见温伯格(1972)中译本 P. 183~185]上列方程等价于如下 4 个方程：

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0 \quad (\lambda=0,1,2,3). \tag{8-10-8'}$$

式(8-10-8)或(8-10-8′)称为**谐和坐标条件**，因为满足 $g^{ab}\nabla_a\nabla_b f=0$ 的函数 f 称为谐和函数(harmonic function). 式(8-10-8′)更清楚地表明这一坐标条件的确是关于函数组 $g_{\mu\nu}(x)$ 的附加方程.

坐标条件显然不是广义协变方程，因为它的任务正是挑选特殊坐标系以消除由爱因斯坦方程的广义协变性导致的 $g_{\mu\nu}(x)$ 的不确定性. 坐标条件还应满足如下要求：从任一组函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 出发，总可通过坐标变换使所得的 $g'_{\mu\nu}(x')$ 满足坐标条件.

[选读 8-10-1]

高斯法坐标系是借用测地线定义的坐标系. 设 Σ 是时空 (M, g_{ab}) 中的任一类空超曲面，n^a 是 Σ 上的单位法矢场，$\{x^i\}$ 是 Σ 上某一开域 $U\subset\Sigma$ 的任一 3 维坐标系. U 中任一点 p 及其单位法矢 $n^a|_p$ (法于 Σ)决定唯一的测地线 $\gamma(t)$ [约定 $t(p)=0$]，它同 Σ 正交. 虽然 U 中各点发出的这些测地线有可能相交(见图 8-16)或出现其他不理想情况，但可证明，只要 U 取得合适，则 M 中必有含 U 的开子集 N，对其中任一点 q 存在唯一的 $p\in U$ 使 q 位于从 p 发出的测地线 $\gamma(t)$ 上. 定义 $x^i|_q\equiv x^i|_p$ 并把 $\gamma(t)$ 在 q 的参数值 $t(q)$ 选作 q 的第零坐标，则坐标系 $\{t, x^i\}$(以 N 为坐标域)称为**高斯法坐标系**(Gaussian normal coordinate system). 下面证明高斯法坐标满足式(8-10-7). 注意到测地线 $\gamma(t)$ 是 t 坐标线，其切矢 $(\partial/\partial t)^a$ 是第零坐标基矢，便有

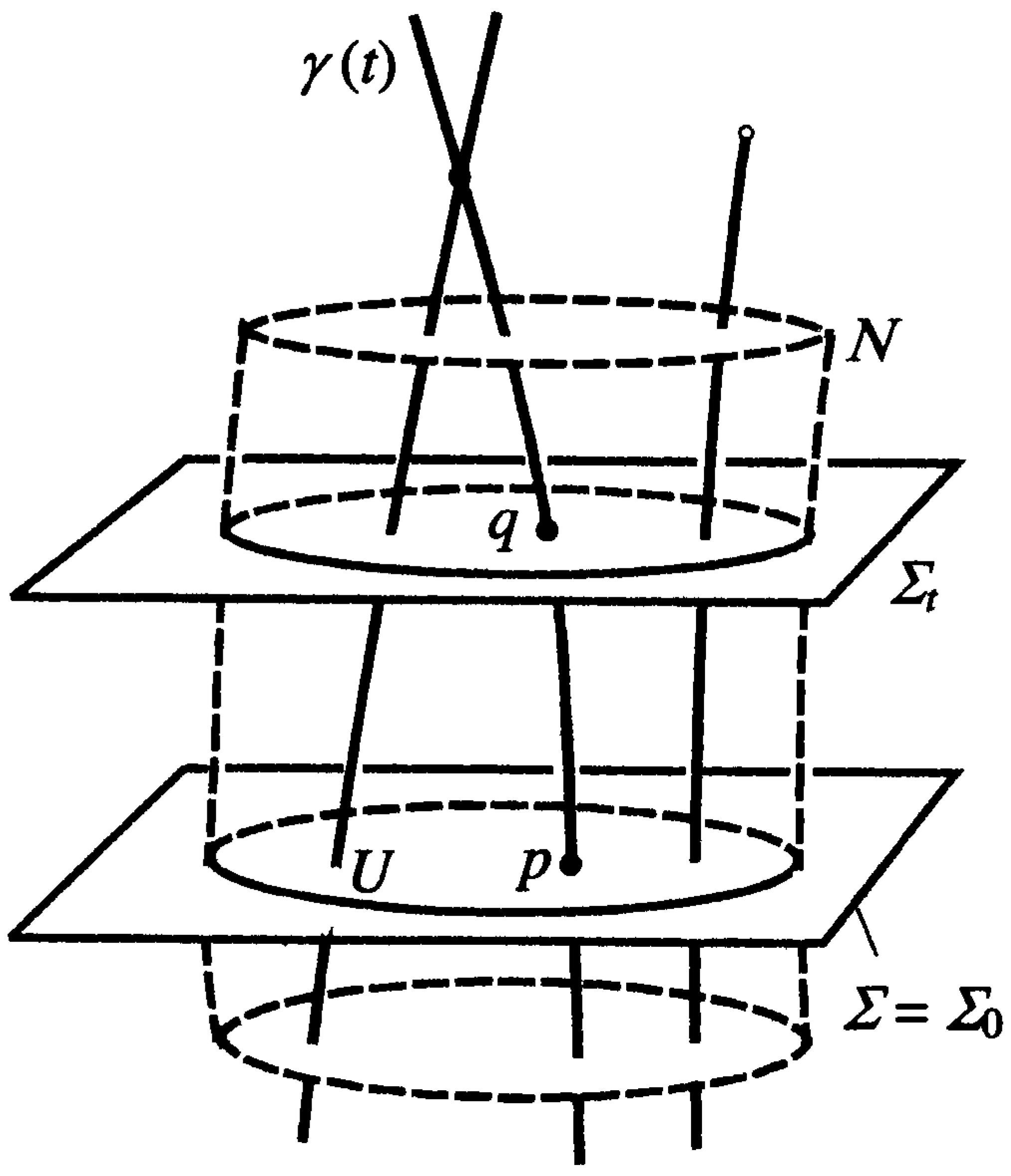


图 8-16　由 Σ 出发构造高斯法坐标系，其坐标域为 N

$$g_{00}=g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b.$$

又因 $(\partial/\partial t)^a|_p=n^a|_p$，故 $g_{00}|_p=(n_a n^a)|_p=-1$. 因为切矢 $(\partial/\partial t)^a$ 沿测地线 $\gamma(t)$ 平移，而平移保内积，所以

$$g_{00}|_q=[(\partial/\partial t)_a(\partial/\partial t)^a]_q=[(\partial/\partial t)_a(\partial/\partial t)^a]_p=-1, \qquad \forall q\in N. \tag{8-10-9}$$

以 Σ_t 代表 t 为常数的超曲面，则 x^i 坐标线由于 t 为常数而躺在 Σ_t 上，故 3 个空间坐标基矢 $(\partial/\partial x^i)^a$ 处处切于 Σ_t. 因为 $g_{0i}=g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial x^i)^b$，欲证 $g_{0i}=0\ (i=1,2,3)$ 只须证明测地线 $\gamma(t)$ 与任一 Σ_t 正交. 由 $\gamma(t)$ 的构造可知这对 $\Sigma_0\equiv\Sigma$ 无疑正确，即 $g_{0i}|_p=0$，因此只须证明 $g_{0i}\equiv(\partial/\partial t)_a(\partial/\partial x^i)^a$ 沿 $\gamma(t)$ 为常数，而下式表明的确如此：

$$\begin{aligned}(\partial/\partial t)^b\nabla_b[(\partial/\partial t)_a(\partial/\partial x^i)^a] &= (\partial/\partial t)_a(\partial/\partial t)^b\nabla_b(\partial/\partial x^i)^a \\ &= (\partial/\partial t)_a(\partial/\partial x^i)^b\nabla_b(\partial/\partial t)^a \\ &= \frac{1}{2}(\partial/\partial x^i)^b\nabla_b[(\partial/\partial t)_a(\partial/\partial t)^a] \\ &= \frac{1}{2}(\partial/\partial x^i)^b\nabla_b g_{00} = 0,\end{aligned}$$

其中第一步用到测地线方程，第二步用到坐标基矢的对易性，第三步用到莱布尼茨律，最末一步用到式(8-10-9).

[选读 8-10-1 完]

下面讨论有源爱因斯坦方程. 以尘埃为例，设其 4 速场和固有密度场分别为 U^a 和 ρ，则其能动张量 $T_{ab} = \rho U_a U_b = \rho g_{ac}U^c g_{bd}U^d$ ，故爱因斯坦方程为

$$G_{ab} = 8\pi\rho g_{ac}U^c g_{bd}U^d , \tag{8-10-10}$$

其在任一坐标系的分量方程则为

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\rho g_{\mu\sigma}U^\sigma g_{\nu\rho}U^\rho, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{8-10-11}$$

如前所述(见§7.7)，应把 $g_{\mu\nu}$，U^μ，ρ 作为 $10+4+1=15$ 个未知函数求解. 式(8-10-11)含有 10 个独立方程(比安基恒等式现在由于“孤掌难鸣”而不再使独立方程数减少，详见选读 8-10-2.)，加上一个 4 速类时归一条件 $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ 和 4 个坐标条件，共有 $10+1+4=15$ 个独立方程，正好用以确定上述 15 个待求函数 [见 Synge(1960) P. 187~188]. 9.3.1 小节将为本讨论提供一个具体例子.

[选读 8-10-2]

似乎可提出另一看法：能动张量满足 $\nabla^a T_{ab} = 0$，对尘埃就是 $\nabla^a(\rho U_a U_b) = 0$，与比安基恒等式 $\nabla^a G_{ab} = 0$ 结合便可由式(8-10-10)得 $\nabla^a(G_{ab} - 8\pi\rho U_a U_b) = 0$，其分量方程为

$$G^\mu{}_{\nu\,;\mu} - 8\pi\ (\rho U^\mu U_\nu)_{;\mu} = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{8-10-12}$$

这 4 个恒等式使式(8-10-11)的 10 个方程中只有 6 个独立. 加上 4 个坐标条件便是 10 个独立方程. 只要把 ρ 和 U^a 看作已知量，则 10 个待求函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 恰可由这 10 个方程决定. 这种看法的关键问题是“把 ρ 和 U^a 看作已知量”是意义含糊的. 作为尘埃的 4 速场，U^a 不能是任一矢量场，它首先要类时且归一，而在没有度规时类时和归一都无意义；其次，指定 U^a 和 ρ 时应满足 $\nabla_a(\rho U^a U_b) = 0$，这既涉及 $U_b(\equiv g_{bc}U^c)$ 又涉及 ∇_a (应满足 $\nabla_a g_{bc} = 0$)，而这两者在没有度规时都无意义. 可见，所谓“事先给定尘埃的 ρ 和 U^a ”是说不清楚的. 说得清楚的做法是把 ρ 和 U^a 与 g_{ab} 一同看作待求量联立求解. 既然如此，事先就没有 $\nabla^a(\rho U_a U_b) = 0$，因此没

有式(8-10-12). 由于"孤掌难鸣"，只用$G^{\mu}{}_{\nu;\mu}=0$不足以使式(8-10-11)的方程数减少. 如果事先坚持ρ和U^a要满足$\nabla^a(\rho U_a U_b)=0$，固然可以构造出用以"冲掉"4个方程的恒等式(8-10-12)，然而$\nabla^a(\rho U_a U_b)=0$本身又对应于4个限制待定函数的方程，这样一加一减，最终独立方程仍是15个.

[选读 8-10-2 完]

8.10.2 广义相对论的规范自由性

以上讨论也可改用几何语言陈述，即不谈分量方程组$G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$而讨论张量方程$G_{ab}=8\pi T_{ab}$. 以真空场方程$G_{ab}=0$为例. 可以证明如下命题(见稍后)：设$\phi: M\to M$是微分同胚，$R_{ab}[g]$是度规$g_{ab}$的里奇张量，则

$$\phi_*(R_{ab}[g])=R_{ab}[\phi_* g]. \tag{8-10-13}$$

由此易得$G_{ab}[g]=0\Leftrightarrow G_{ab}[\phi_* g]=0$. 这表明$g_{ab}$是$G_{ab}=0$的解当且仅当$\phi_* g_{ab}$也是. 可见边界条件只能把爱因斯坦方程的解$g_{ab}$确定到差一个微分同胚的程度. 这其实是前面关于边界条件只能把$g_{\mu\nu}$确定到"差一个坐标变换"这一被动提法的等价主动提法(参阅选读 4-1-1). 在被动提法中，同一度规场g_{ab}在不同坐标系的分量$g_{\mu\nu}$和$g'_{\mu\nu}$代表相同的(局域)几何；在主动提法中，设$\phi: M\to M$是微分同胚，则g_{ab}和$\tilde{g}_{ab}\equiv\phi_* g_{ab}$代表相同几何. 为避免误解，先考虑两个流形$M$和$\tilde{M}$. 若存在微分同胚映射$\phi: M\to\tilde{M}$，则$M$与$\tilde{M}$就"像得不能再像". 再考虑两个时空(更一般地，两个广义黎曼空间)(M,g_{ab})和$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$. 如果存在微分同胚映射$\phi: M\to\tilde{M}$且$\phi_* g_{ab}=\tilde{g}_{ab}$，则这两个时空也就"像得不能再像"，即它们有相同几何，用(M,g_{ab})能描述的现象都可用$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$做等价描述. 例如，设$M$中$p$点有两个矢量$u^a$和$v^b$，则$\tilde{M}$中$\phi(p)$点也有两个相应的矢量$\phi_* u^a$和$\phi_* v^b$，而且$\phi_* u^a$与$\phi_* v^b$的内积$\tilde{g}_{ab}|_{\phi(p)}(\phi_* u)^a(\phi_* v)^b$等于$u^a$与$v^b$的内积$g_{ab}|_p u^a v^b$，因为

$$g_{ab}|_p u^a v^b=(\phi^*\tilde{g})_{ab}|_p u^a v^b=\tilde{g}_{ab}|_{\phi(p)}(\phi_* u)^a(\phi_* v)^b.$$

还可证明$\phi_* u^a$与$\phi_* v^b$的张量积对应于u^a与v^b的张量积，即$(\phi_* u^a)(\phi_* v^b)=\phi_*(u^a v^b)$，等等. 总之，"$p$点有什么，$\phi(p)$点就有什么；在$p$能做什么，在$\phi(p)$也能做什么，而且结果一样(在$\phi_*$下对应). "不妨通俗地说"$\phi_*$能把$(M,g_{ab})$中的任一台戏搬到$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$去唱"("易地唱戏"). 这一讨论也适用于$\tilde{M}=M$的情况. 设$M$有度规场$g_{ab}$及微分同胚$\phi: M\to M$，则根据$(M,g_{ab})$与$(\tilde{M},\phi_* g_{ab})$"像得不能再像"的讨论，可知$(M,g_{ab})$与$(M,\phi_* g_{ab})$在几何上等价. 然而应该注意，这时$M$中一点$p$有两个度规$g_{ab}|_p$和$\phi_* g_{ab}|_p$，设$u^a$，$v^a$为点$p$的矢量，所谓$(M,g_{ab})$

与$(M,\phi_* g_{ab})$等价并非指$g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi_* g)_{ab}|_p u^a v^b$(这只当$\phi$为等度规映射时成立)，而是指$g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi_* g)_{ab}|_{\phi(p)} (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b$，即“把$p$点的整台戏搬到$\phi(p)$去唱”．举一个应用例子．以$R_{abc}{}^d$和$\tilde{R}_{abc}{}^d$分别代表$g_{ab}$和$\tilde{g}_{ab}$的黎曼张量场，假定已知$R_{abc}{}^d|_p$而欲求$\tilde{R}_{abc}{}^d|_{\phi(p)}$．如果懂得“易地唱戏”，只须用$\phi_*$把$R_{abc}{}^d|_p$推前到$\phi(p)$．说得细致些就是，在计算$R_{abc}{}^d|_p$时我们已做了如下操作：先求出与$g_{ab}$适配的$\nabla_a$，再由$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d$求得$R_{abc}{}^d|_p$．这一操作好比“唱了一台戏”．为求$\tilde{R}_{abc}{}^d|_{\phi(p)}$，本来也要做类似操作：先求出与$\tilde{g}_{ab}$适配的$\tilde{\nabla}_a$，再由$(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a)\omega_c = \tilde{R}_{abc}{}^d\omega_d$求得$\tilde{R}_{abc}{}^d|_{\phi(p)}$．但事实上不必这样再做一遍，因为我们相信，只要用$\phi_*$把在$p$点对$g_{ab}$(及其派生量)的操作结果推前到$\phi(p)$点，一定等于在$\phi(p)$点对$\tilde{g}_{ab}$(及其派生量)的操作结果，即相信

$$\phi_*(R_{abc}{}^d|_p) = \tilde{R}_{abc}{}^d|_{\phi(p)}. \tag{8-10-14}$$

对R_{ab}，R，G_{ab}，……等一切由g_{ab}决定的量(全部几何量)都有类似关系，可见前面的式(8-10-13)成立．如果愿意，读者也可用直接计算验证式(8-10-14)，提示：先验证与$\tilde{g}_{ab}$适配的$\tilde{\nabla}_a$满足

$$\tilde{\nabla}_a(\phi_* T) = \phi_*(\nabla_a T) \quad (\text{其中 } T \text{ 为任意型张量场}). \tag{8-10-15}$$

总之，在上述“易地唱戏”的意义上可以说M上度规场g_{ab}与$\phi_* g_{ab}$(当ϕ为微分同胚时)描述相同几何，或说g_{ab}与$\phi_* g_{ab}$等价．可见度规场与几何之间并非一一对应，而是一种几何对应于度规场的一个等价类$\{g_{ab}\}$．这与电磁理论中 4 势A_a的规范变换不改变电磁场F_{ab}类似，因此把“g_{ab}变为$\phi_* g_{ab}$不改变几何”的这一性质称为广义相对论的**规范自由性**(gauge freedom)．具有规范自由性是广义相对论的一个重要特点，可以说这一物理理论天生就有规范自由性(正如用 4 势表述的电磁理论天生就有规范自由性那样)．这一规范自由性在深入学习广义相对论时有重要意义．例如，见下册第 14, 15 章．“规范变换”和“规范不变性”等概念最早来自电磁理论，后来逐渐成为理论物理中非常重要的概念．大致说来，不改变实质的变换都可称为规范变换(gauge transformation)，相应的不变性(自由性)则称为规范不变性(自由性)．为便于处理，讨论具体问题时也可选定某种规范，这种做法称为“规范固定(gauge fixing)”．对广义相对论而言，选定坐标系就是一种规范固定．可见坐标条件的指定无非是一种规范固定．本书至今涉及的规范变换除电磁 4 势的变换外主要的还有两种：①线性引力论中的规范变换[式(7-8-14)]，②广义相对论中的规范变换(在主动语言中是指微分同胚变换ϕ: $M \to M$，在被动语言中是指坐标变换.)．其实①不过是②的一种无限小形式，理由如下．线性引力论中的规范变换是指

$$\gamma_{ab} \mapsto \tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \quad \text{(其中}\xi^a\text{是“无限小”矢量场)},$$

变换前后的度规 $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ 和 $\tilde{g}_{ab} = \eta_{ab} + \tilde{\gamma}_{ab}$ 的差别为

$$\tilde{g}_{ab} - g_{ab} = \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a . \tag{8-10-16}$$

引进矢量场 λ^a 和实数 t 以便把 ξ^a 表为 $\xi^a = t\lambda^a$(其中 t 为与 ξ^a 同阶的小量,即一阶小量)，则由李导数公式得 $\mathscr{L}_\lambda \eta_{ab} = \partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a$ ，而

$$\mathscr{L}_\lambda \eta_{ab} = \mathscr{L}_\lambda (g_{ab} - \gamma_{ab}) \cong \mathscr{L}_\lambda g_{ab} \quad \text{(第二项因是二阶小而被略去)},$$

故

$$\partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a \cong \mathscr{L}_\lambda g_{ab} \cong (\phi_t^* g_{ab} - g_{ab})/t . \tag{8-10-17}$$

与式(8-10-16)对比得 $\phi_t^* g_{ab} - g_{ab} \cong \tilde{g}_{ab} - g_{ab}$ ，故 $\tilde{g}_{ab} \cong \phi_t^* g_{ab}$ ，可见变换后的新度规 $\tilde{g}_{ab}$ 与原度规 g_{ab} 在一级近似下只差到一个微分同胚.

我们关心的当然不仅是时空几何，而且还有物理. 以下是一般结论：设物理理论由流形 M 及其上若干个张量场 $T^{(i)}$ 描述(例如，对电磁真空时空，$T^{(i)}$ 至少包括 g_{ab} 和 F_{ab} .)，则 $(M, T^{(i)})$ 与 $(M, \tilde{T}^{(i)})$ 描述相同物理当且仅当存在微分同胚 $\phi: M \to M$ 使 $\tilde{T}^{(i)} = \phi_* T^{(i)}$.

习　题

~1. 试证命题 8-1-1.

~2. 设 $\gamma(r)$ 是图 8-6 中 Σ_t 上从 p_1 到 p_2 的、θ 和 φ 都为常数的曲线(以径向坐标 r 为曲线参数)，试证 $\gamma(r)$ 是(非仿射参数化的)测地线. 提示：用式(5-7-2).

~3. 设 ξ^a 是稳态时空的类时 Killing 矢量场，$\chi \equiv (-g_{ab}\xi^a\xi^b)^{1/2}$.

(a) 试证 χ 在 ξ^a 的积分曲线上为常数；

(b) 试证稳态观者的 4 加速 $A^a = \nabla^a(\ln \chi)$. 提示：利用 Killing 方程 $\nabla^{(a}\xi^{b)} = 0$ 和(a)的结果.

~4. 试证：(a) 电磁场能动张量的迹为零，即 $T \equiv g^{ab}T_{ab} = 0$ ；(b) 电磁真空时空的标量曲率 $R = 0$.

~5. 试证式(8-4-7)和(8-4-28).

6. 设 F_{ab} 是任意时空中的 2 形式场，${}^*F_{ab}$ 是 F_{ab} 的对偶 2 形式场，$\alpha \in [0, 2\pi]$ 为常实数，则 $F'_{ab} \equiv F_{ab}\cos\alpha - {}^*F_{ab}\sin\alpha$ 称为 F_{ab} 的、角度为 α 的一个**对偶转动**(duality rotation).

(a) 试证 F_{ab} 为无源电磁场当且仅当 F'_{ab} 为无源电磁场[证明很易. 若用麦氏方程的外微分表达式(7-2-7′)和(7-2-8′)甚至一望便知.].

(b) 试证电磁场 F_{ab} 和 F'_{ab} 有相同能动张量. 提示：用 T_{ab} 的对称表示式(6-6-24′)可简化证明.

(c) 令 $M \equiv 2F_{ab}F^{ab}$, $N \equiv 2F_{ab}{}^*F^{ab}$, $M' \equiv 2F'_{ab}F'^{ab}$, $N' \equiv 2F'_{ab}{}^*F'^{ab}$ ，试证

$$M' = M\cos 2\alpha - N\sin 2\alpha, \qquad N' = M\sin 2\alpha + N\cos 2\alpha .$$

(d) 令 $\Sigma_{ab} \equiv F_{ab} + \mathrm{i}\,{}^*F_{ab}$, $\Sigma_{ab} \equiv F'_{ab} + \mathrm{i}\,{}^*F'_{ab}$ ，则 $K \equiv \Sigma_{ab}\Sigma^{ab}$ 和 $K' \equiv \Sigma'_{ab}\Sigma'^{ab}$ 为复标量场，故在每一时空点的 K 和 K' 相当于复平面上的两个矢量. 试用(c)的结果证明矢量 K' 是矢量 K 逆时针转 2α 角的结果(即 $|K| = |K'|$, K' 与 K 的辐角差为 2α.).

(e) 设 $(\vec{E}, \vec{B})$ 和 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 是瞬时观者分别测 F_{ab} 和 F'_{ab} 所得的电场和磁场，试证

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha, \qquad \vec{B}' = -\vec{E}\sin\alpha + \vec{B}\cos\alpha .$$

注：对偶转动的进一步物理意义见本书下册及 Jackson(1975).

7. n 维时空称为**爱因斯坦时空**，若 $R_{ab}=Rg_{ab}/2$，其中 g_{ab}，R_{ab} 和 R 分别为度规、里奇张量和标量曲率. 试证电磁真空时空(其中电磁场非零)不是爱因斯坦时空. 注：由第 3 章习题 17 可知任意 2 维时空必为爱因斯坦时空.

8. 考虑 Taub 的平面对称真空解(8-6-1′).

(a) 写出静态观者的 4 速用坐标基矢的表达式；

(b) 设两静态观者的空间坐标分别为(x, y, z_1)和(x, y, z_2)，求他们间的空间距离.

9. 试证式(8-6-5)的 F_{ab} 有平面对称性，即 $\mathscr{L}_{\xi_i}F_{ab}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$，其中 $\xi_1{}^a\equiv(\partial/\partial x)^a$，$\xi_2{}^a\equiv(\partial/\partial y)^a$，$\xi_3{}^a\equiv-y(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial y)^a$ 是反映度规(8-6-3)平面对称性的 Killing 场.

*10. 推出有源麦氏方程在 NP 形式中的表达式. 答案：在式(8-8-3)的每式右边各加一项，依次为 $-4\pi J_4$，$-4\pi J_2$，$-4\pi J_1$，$-4\pi J_3$ $(J_1, J_2, J_3, J_4$ 是 J_a 在类光标架的分量).

*11. 试证式(8-8-7)和(8-8-10).

第 9 章　施瓦西时空

第 8 章前 3 节已对静态球对称度规及施瓦西真空解做过讨论，该章的重点在于求解. 鉴于施瓦西解的非常重要性，本章拟对与之关系密切的若干问题做进一步讨论：第 1 节讨论施瓦西时空的类时和类光测地线；第 2 节介绍爱因斯坦早年用施瓦西真空解提出的对广义相对论的三大实验验证，即引力红移、水星近日点进动和星光在太阳引力场中的偏折；第 3 节讨论球对称恒星内部的时空几何、物理状态以及球对称恒星的演化；第 4 节详细分析施瓦西时空的延拓理论.

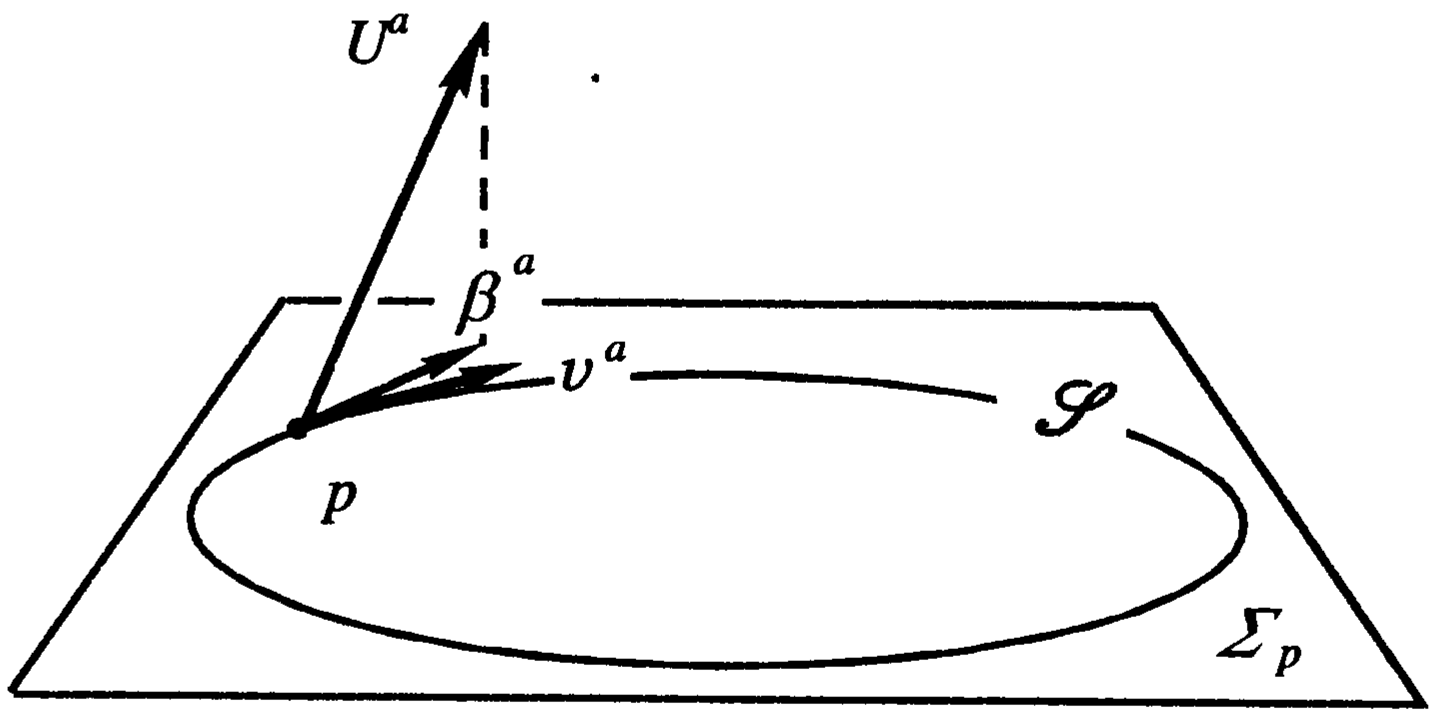
§9.1　施瓦西时空的测地线

以 $\gamma(\tau)$表示类时(光)测地线. 对类时测地线，τ 代表固有时；对类光测地线，τ 代表某一选定仿射参数. 欲求 $\gamma(\tau)$的参数表达式 $x^\mu(\tau)$，一般应求解如下微分方程组：

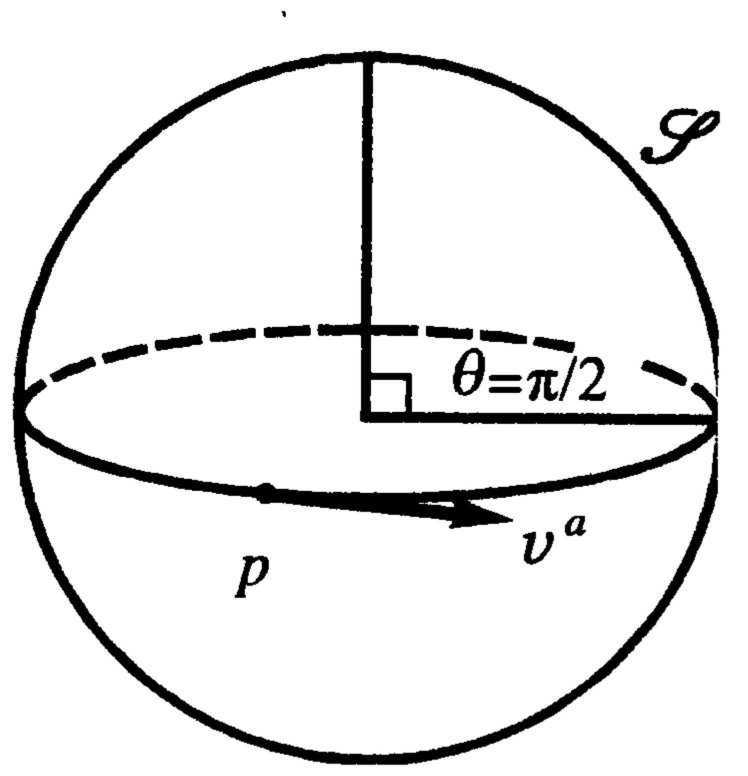
$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}=0, \qquad \mu=0, 1, 2, 3. \tag{9-1-1}$$

由于各未知函数 $x^\mu(\tau)$及其导数在各方程中互相耦合，求解一般并不简单. 但若时空有数量足够的 Killing 矢量场，就可利用定理 4-3-3 巧妙地求得 $x^\mu(\tau)$. 施瓦西时空就是一例. 在应用这一定理前，还可利用施瓦西时空的球对称性对所讨论的测地线的坐标表示作一简化.

命题 9-1-1　设 $\gamma(\tau)$是施瓦西时空的一条类时或类光测地线，则总可这样选择施瓦西坐标，使 $\gamma(\tau)$的 θ 值永为 $\pi/2$，换句话说，使 $\gamma(\tau)$永在“赤道面”内.



(a) β^a 是测地线 $\gamma(\tau)$在 p 点的 4 速 U^a 的投影. v^a 是 β^a 切于轨道球面的分量



(b) 轨道球面 $\mathscr{S}$ 上 p 点及矢量 v^a 决定唯一测地线(大圆)

图 9-1　命题 9-1-1 证明用图

证明　$\forall p\in\gamma(\tau)$，过 p 的轨道球面 $\mathscr{S}$ (见§ 8.2 定义 1)必躺在过 p 的等 t 面 Σ_p

上[图 9-1(a)]. 施瓦西系的 θ, φ 坐标的选择存在相当任意性，如能这样选 θ, φ, 使某点 $p\in\gamma(\tau)$ 的 θ 值为 $\pi/2$ 且 p 的 4 速 $U^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 的 θ 分量为零，注意到施瓦西线元式(8-3-18)在变换 $\theta\mapsto\pi-\theta$ 下的不变性保证南北半球关于赤道的对称性，便知整条 $\gamma(\tau)$线有 $\theta(p)=\pi/2$. 因此只须证明对 θ, φ 的这种选法确实可以做到. 因测地线与等 t 面不总是正交(否则成为静态观者世界线，就不是测地线)，故总可在 $\gamma(\tau)$上取点 p，其 U^a 在 Σ_p 上的投影 $\beta^a\neq 0$. 过 p 的轨道球面 $\mathscr{S}\subset\Sigma_p$. 若 β^a 有切于 $\mathscr{S}$ 的分量 v^a，则 (p,v^a) 决定 $\mathscr{S}$ 上的唯一测地线，即大圆[见图 9-1(b)]，就以此大圆为赤道定义 $\mathscr{S}$ 上的坐标 θ, φ；若 β^a 没有切于 $\mathscr{S}$ 的分量 v^a [即 $\gamma(\tau)$是径向测地线]，则选 $\mathscr{S}$ 上的任一过 p 的大圆为赤道. 用 § 8.3 的“携带”法将 $\mathscr{S}$ 上的 θ, φ 坐标携带出去所得的施瓦西坐标系$\{t, r, \theta, \varphi\}$便满足刚才的要求，即① $\theta(p)=\pi/2$；② $(\partial/\partial\tau)^a|_p$ 在坐标基矢 $(\partial/\partial\theta)^a|_p$ 的分量 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau|_p$ 为零. □

关于一点 $p\in\gamma(\tau)$ 满足①、②保证全线必有 $\theta(p)=\pi/2$ 的结论也可做如下的定量证明：由施瓦西线元的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ 表达式(8-3-20)可知式(9-1-1)中 $\mu=2$ 的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=0\,. \tag{9-1-2}$$

因为测地线 $\gamma(\tau)$事先给定，选定坐标系后其 $t(\tau)$, $r(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\varphi(\tau)$就都是确定的函数. 为证明全线有 $\theta(p)=\pi/2$，只须注意式(9-1-2)是关于 $\theta(\tau)$的 2 阶常微分方程，而 $\theta(\tau)=\pi/2$ 是满足初始条件 $\theta(p)=\pi/2$ 和 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau|_p=0$ 的唯一解.

根据命题 9-1-1，总可选施瓦西坐标使所论测地线 $\gamma(\tau)$的参数表达式为

$$t=t(\tau),\qquad r=r(\tau),\qquad \theta=\pi/2,\qquad \varphi=\varphi(\tau)\,.$$

设 $U^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 为 $\gamma(\tau)$的切矢，定义 $\kappa:=-g_{ab}U^aU^b$，则 $\kappa=\begin{cases}1\ (\text{对类时测地线})\\0\ (\text{对类光测地线})\end{cases}$,

且

$$\begin{aligned}-\kappa&=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b=g_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+g_{11}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+g_{22}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+g_{33}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\\&=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2,\end{aligned} \tag{9-1-3}$$

其中最后一步用到 $\theta=\pi/2$. 注意到 $(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial\varphi)^a$ 是 Killing 矢量场，可先利用定理 4-3-3 定义测地线 $\gamma(\tau)$上的两个常量

$$E:=-g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b=-g_{00}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \tag{9-1-4}$$

$$L := g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = g_{33}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}, \tag{9-1-5}$$

再把式(9-1-4)、(9-1-5)代入式(9-1-3)得

$$-\kappa = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}. \tag{9-1-6}$$

这方程只含未知函数 $r(\tau)$及其 1 阶导数，原则上可以求解．把求得的 $r(\tau)$代入方程(9-1-4)、(9-1-5)，原则上便可解出未知函数 $t(\tau)$和 $\varphi(\tau)$，从而得到 $\gamma(\tau)$的参数表达式．

下面讨论两个常量 E 和 L 的物理意义．设 $\gamma(\tau)$为类时测地线，则它代表自由质点的世界线．设质点的质量为 m，则 $U^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$ 及 $P^a \equiv mU^a$ 分别是它的 4 速和 4 动量．设 p 为 $\gamma(\tau)$上一点，G 为过 p 点的静态观者，G 在 p 的 4 速为 Z^a(见图 9-2)，$\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ 为静态 Killing 矢量场，则由 $Z^aZ_a = -1$ 可知

$$Z^a = \chi^{-1}\xi^a, \tag{9-1-7}$$

其中 $\chi \equiv (-\xi^b\xi_b)^{1/2}$．由式(6-3-17)可知 $-Z_aP^a$ 是观者 G 对质点做当时当地观测(local measurement)得到的能量值，过去记作 E，现在为避免混淆改记作 $E_{当}$．式(9-1-4)定义的 E 可改写为

$$E = -\xi_aU^a = -\frac{1}{m}\xi_aP^a = -\frac{\chi}{m}Z_aP^a = \frac{\chi}{m}E_{当}, \tag{9-1-8}$$

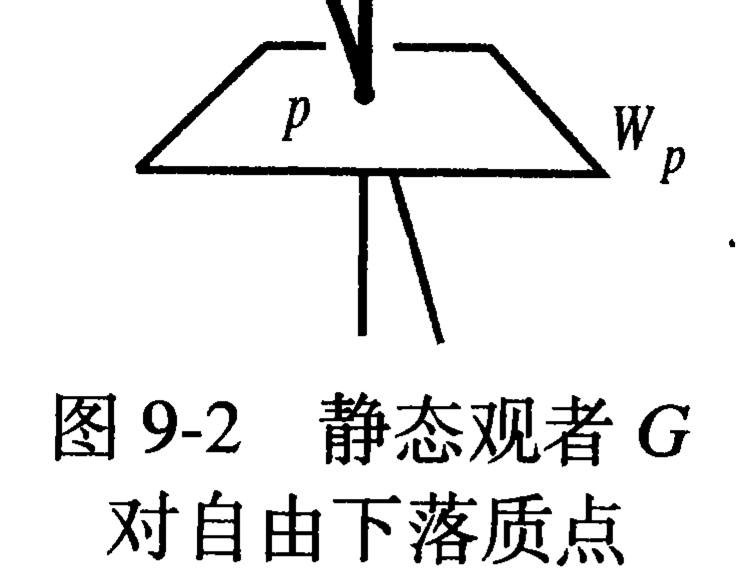


图 9-2　静态观者 G 对自由下落质点 $\gamma(\tau)$的当时当地测量

可见 $E \neq E_{当}$．如果测地线 $\gamma(\tau)$伸向无限远，则因 $r\to\infty$ 时 $E\to E_{当}/m$，故 E 可解释为无限远的静态观者对该质点做当时当地测量所得的单位质量的能量．既然 E 在 $\gamma(\tau)$上为常量，$E_{当}$在 $\gamma(\tau)$上就不是常量，即在自由质点运动过程中守恒的是 E 而不是 $E_{当}$．于是可物理地把 E 解释为自由质点每单位质量所具有的总能量(包括引力势能)．反之，$E_{当}$是静态观者 G 做当时当地测量所得的能量，它不包括引力势能，沿测地线并非守恒量．这可做如下物理解释：自由质点虽然除引力外不受力，但在运动过程中引力对它做了功，故不考虑引力势能的能量 $E_{当}$不是常量．类似地，若 $\gamma(\tau)$是类光测地线，则 E 可解释为光子的总能量乘以 $\hbar^{-1}$．

[选读 9-1-1]

对于不伸向无限远的类时测地线 $\gamma(\tau)$(例如绕日转动的地球)，E 当然仍是常量，但已找不到与无限远观者的直接联系．虽然有些文献仍称之为无限远观者测得的能量，但本书作者更倾向于如下看法："某观者测得的某量"中"测得"一词的

最清晰的含义是当时当地测量，而这要求观者与质点(世界线)相交. 当质点世界线不伸到无限远时，若要附加“无限远观者测得的”之类的定语，就应明确约定一个间接测量方案(例如借助于发到无限远的光). 但在不少情况下难以找到一种自然的间接测量方案，不伸向无限远的类时测地线的 E 也许就是一例. 我们倾向于把 E 就称为以该测地线为世界线的质点的**能量**而不加定语[见 Wald(1984)]. 它有能量的量纲，甚至在物理上可以被解释为 $E_{当}$ 与引力势能之和，因此对能量一词当之无愧. 但它不是哪个观者测得的能量，“无限远观者测得的”之类的定语是否有蛇足之嫌?

[选读 9-1-1 完]

再讨论常量 L 的物理意义. 设 p 为类时测地线 $\gamma(\tau)$上任一点，Z^a 是 p 点的静态观者的 4 速，把 p 点的坐标基矢归一化便得 p 点切空间 V_p 的一个正交归一 4 标架：

$$(e_0)^a \equiv (1-2M/r)^{-1/2}(\partial/\partial t)^a = Z^a\,, \qquad (e_1)^a \equiv (1-2M/r)^{1/2}(\partial/\partial r)^a\,,$$
$$(e_2)^a \equiv r^{-1}(\partial/\partial\theta)^a\,, \qquad (e_3)^a \equiv r^{-1}(\partial/\partial\varphi)^a\,,$$

其对偶标架为

$$(e^0)_a = (1-2M/r)^{1/2}(\mathrm{d}t)_a\,, \qquad (e^1)_a = (1-2M/r)^{-1/2}(\mathrm{d}r)_a\,,$$
$$(e^2)_a = r(\mathrm{d}\theta)_a\,, \qquad (e^3)_a = r(\mathrm{d}\varphi)_a\,.$$

以 W_p 代表 V_p 中与 Z^a 正交的 3 维子空间，则以上两式中的$\{(e_1)^a, (e_2)^a, (e_3)^a\}$和$\{(e^1)_a, (e^2)_a, (e^3)_a\}$分别是 W_p 的正交归一 3 标架及其对偶标架. 以下的 3 维语言都相对于静态参考系而言. 设 U^a 为自由质点 $\gamma(\tau)$在 p 点的 4 速，$u^a \in W_p$是其 3 速，则其 3 动量为 $p^a \equiv \gamma m u^a$，其中 m 为质点的质量，$\gamma \equiv -U^a Z_a$. 仿照欧氏空间中质点角动量 $\vec{j}$ 的定义 $\vec{j} := \vec{r}\times\vec{p}$，把 $\gamma(\tau)$代表的自由质点的角动量定义为 $j^a := \varepsilon^a{}_{bc}\gamma m r^b u^c$,其中 $r^b \equiv r(e_1)^b$. 我们来证明由式(9-1-5)定义的 $|L|$ 就是 $\gamma(\tau)$代表的单位质量自由质点的角动量的大小. 注意到 r^b沿径向，可知 u^c 的径向分量对 j^a 无贡献，因此

$$j_a = \gamma m\varepsilon_{abc} r^b u^3 (e_3)^c = \gamma m\varepsilon_{213}\, r u^3 (e^2)_a = -\gamma m r u^3 (e^2)_a\,,$$
$$|j| = |\gamma m r u^3| = |\gamma m r u^a (e^3)_a| = |\gamma m r^2 u^a (\mathrm{d}\varphi)_a| = |m r^2 U^a (\mathrm{d}\varphi)_a|$$
$$= |m r^2 (\partial/\partial\tau)^a (\mathrm{d}\varphi)_a| = m\,|r^2 \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau| = m\,|L|\,, \qquad (9\text{-}1\text{-}9)$$

其中第四步用到 U^a 的分解式$U^a = \gamma(Z^a + u^a)$ 及 $Z^a(e^3)_a = 0$，最后一步用到式(9-1-5). 可见 L (的绝对值)是单位质量自由质点相对于静态参考系的 3 角动量的大小，简称单位质量的角动量. 类似地，若 $\gamma(\tau)$是类光测地线，则 L 是光子的角动量乘以$\hbar^{-1}$.

§ 9.2 广义相对论的经典实验验证

爱因斯坦创立广义相对论的原始动机基本上是纯理论的. 然而，任何物理理论问世后都要面对实验验证的问题. 爱因斯坦很早就从广义相对论出发借助于施瓦西真空解做了三个有可能与实验对比的重要预言(后人称为三大经典验证). 最早的一个(1907 年)是光波的引力红移，其他两个分别是水星近日点的进动和星光在太阳引力场中的偏折. 近日点进动的计算结果与早已存在的观测数据吻合，星光偏折的预言很快也取得观测的支持. 然而，由于缺乏精度足够的实验技术测量极端微弱的广义相对论效应(包括引力红移)，广义相对论的实验研究从 20 世纪 10 年代末期起的 45 年中进展缓慢，几乎止步不前. 从 20 世纪 60 年代开始，由于科技的进步及天文观测的新发现，广义相对论的实验验证进入全盛时期，既有对星光偏折和引力红移的精度更高的验证，又有一系列全新的实验. 可以说，广义相对论通过了迄今的所有实验检验，虽然精度和难度更高的许多实验还有待进行. 本节只讨论爱因斯坦提出的三个经典实验验证. 关于相对论引力理论的实验验证的过去、现在和未来，可参阅 Ni Wei tou (倪维斗)(2005).

9.2.1 引力红移

本小节先讨论稳态时空的引力红移，再把施瓦西时空作为特例得出红移具体表达式. 在几何光学近似下可认为光信号沿类光测地线传播(见 § 7.2 末)，且 4 波矢为 K^a 的光子相对于 4 速为 Z^a 的观者的角频率为[见式(7-2-11)] $\omega = -K_a Z^a$.

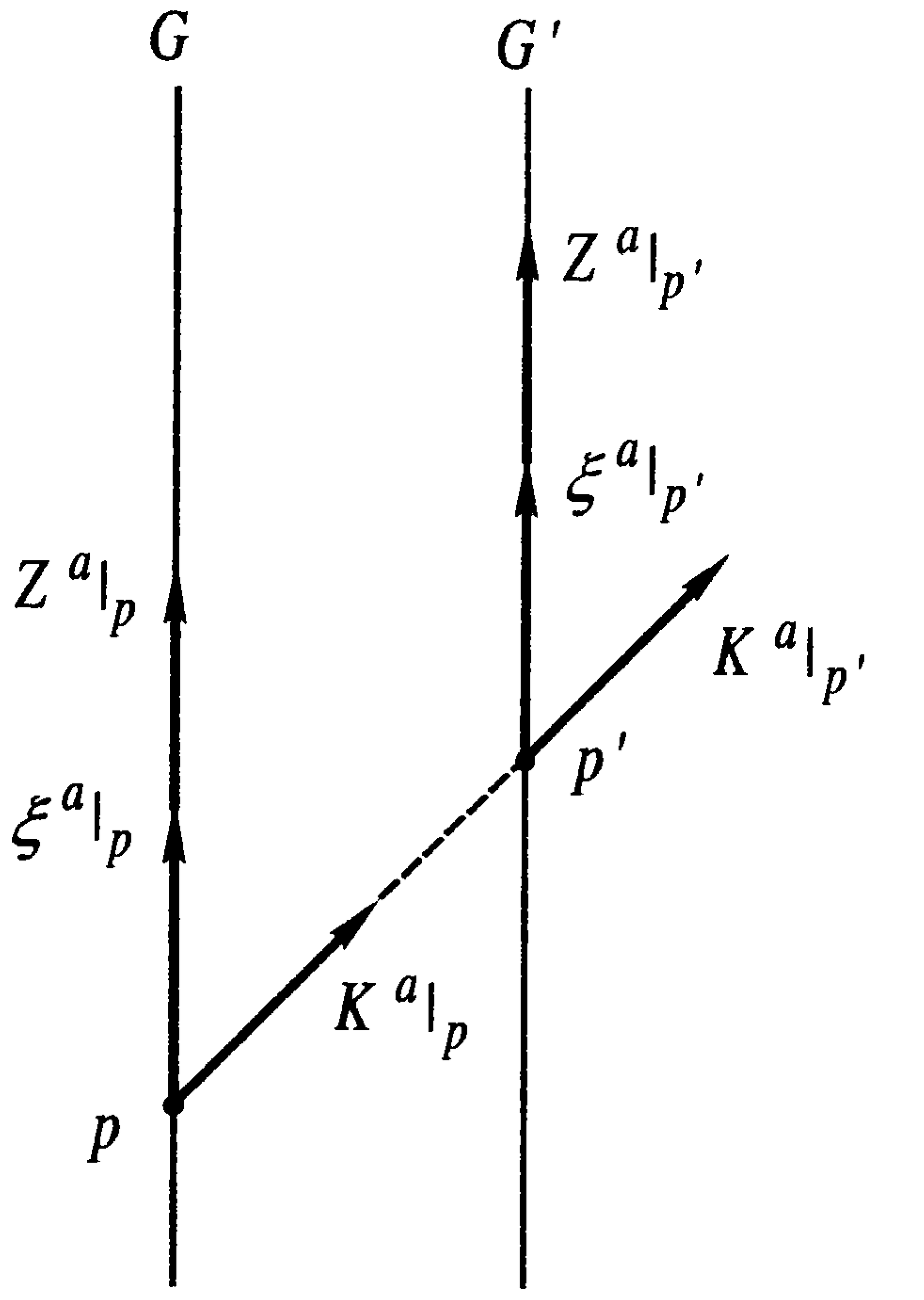


图 9-3 稳态时空引力红移的推导. G 和 G'是稳态观者

设 G 和 G'是任意稳态时空中任意稳态参考系的两个观者，G 在 p 时发出的光子在 p'时到达 G' (见图 9-3). 以 Z^a 代表观者的 4 速，K^a 代表光子的 4 波矢，则光子在 p 和 p'时相对于稳态观者的角频率分别为

$$\omega = -(K_a Z^a)|_p , \qquad \omega' = -(K_a Z^a)|_{p'} . \qquad (9\text{-}2\text{-}1)$$

稳态观者世界线重合于 Killing 场 ξ^a 的积分曲线，故 $\xi^a = \chi Z^a$，χ 可由 $Z^a Z_a = -1$ 求得为 $\chi \equiv (-\xi^b \xi_b)^{1/2}$，于是式 (9-2-1) 成为 $\omega = [(-K_a \xi^a)\chi^{-1}]|_p$ 和 $\omega' = [(-K_a \xi^a)\chi^{-1}]|_{p'}$. 注意到光子世界线为测地线，其切矢为 K^a，而 ξ^a 是 Killing 场，由定理 4-3-3 可知 $K_a \xi^a$ 在线上为常数，即 $(K_a \xi^a)|_p = (K_a \xi^a)|_{p'}$. 于是由

式(9-2-1)得①

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\chi}{\chi'} \quad 或 \quad \frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\chi'}{\chi}, \tag{9-2-2}$$

其中λ和λ'分别是与ω和ω'对应的波长，$\chi' \equiv (-\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{p'}$. 下面以施瓦西时空的静态观者为特例给出定量结果. 设$\{t, r, \theta, \varphi\}$为施瓦西坐标，则反映静态性的类时 Killing 场为$\xi^a = (\partial/\partial t)^a$，故

$$\chi^2 = -\xi^b \xi_b = -g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = -g_{00} = 1-\frac{2M}{r},$$

代入式(9-2-2)得

$$\lambda'/\lambda = (1-2M/r')^{1/2}(1-2M/r)^{-1/2}. \tag{9-2-3}$$

当$r'>r$(即光源比接收者靠近恒星)时，有$\lambda'>\lambda$，可见接收者接到的光波波长比发射时要长，这就是红移. 可以认为两个稳态观者G和G'之间没有相对运动，所以可把这红移解释为纯粹起因于引力场(时空弯曲)，故称**引力红移**(gravitational redshift)，$\chi \equiv (-\xi^b \xi_b)^{1/2}$因而称为(引力)**红移因子**.

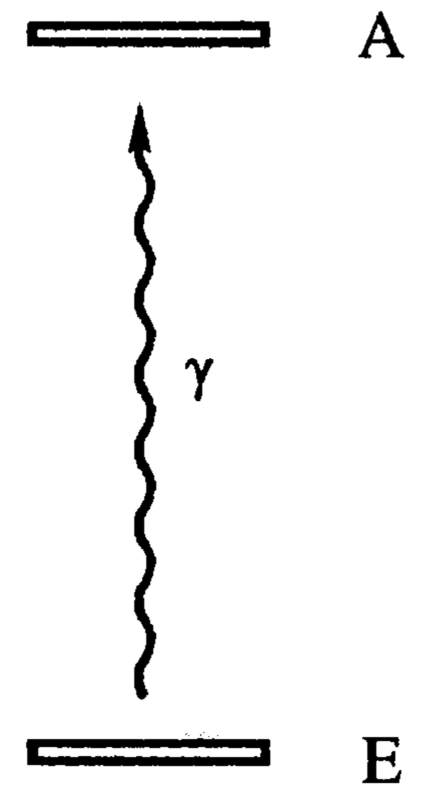


图 9-4　用穆斯堡尔效应测量地面附近的引力红移

红移的程度可用相对红移量(简称**红移**)$z \equiv (\lambda'-\lambda)/\lambda$描写. 计算表明，从太阳表面发出的光到达地球时(把太阳作为引力场源)，相对红移量约只有2×10^{-6}. 为了加大红移，可测量从白矮星发来的光. 白矮星是一种密度比普通恒星高得多的星体(详见 9.3.2 小节)，由于密度高，其周围的引力场比太阳周围引力场强得多. 白矮星来光的红移可达太阳来光红移的几十倍. 在广义相对论发表后，人们曾几次测过白矮星来光的红移，但结果还不足以确证理论的预言. 第一次成功的高精度引力红移实验是 Pound 和 Rebka 等在 1960 年利用穆斯堡尔效应完成的. 穆斯堡尔在 1960 年发现，某些原子核(如 ^{57}Fe)在特定条件下可以发出谱线宽度很窄(很尖锐)的γ射线，含有这种原子核的晶体又能对这种频率的γ射线做选择性甚高的共振吸收. 假定这种γ射线的频率不论由于什么原因而有微小变化，它被这种晶体吸收的程度就显著降低. 这就为测出由地球引力场造成的极其微弱的引力红移提供了强有力的手段. 把两块这样的晶体分置于地球表面的不同高度处，较低的一块(图 9-4 中的 E)作为发射体，较高的一块(见图中的 A)作为接收体. 虽然根据两者高度差(12.5m)算得的红移只有1.36×10^{-15}，但 A 对 E 所发γ射线的吸收率仍然由于γ射线的微弱引力红移而有所下降. 为了确认这一下降并测出下降的数量，可令 A 以某一常速率向 E 运动，利用由于多普勒效应出现的“蓝移”(波长

---

① 稳态时空中的两点p, p'之间可有不止一条类光测地线[见Sachs and Wu(1977)习题 7.3.2]. 式(9-2-2)表明红移只取决于p, p'点而与类光测地线无关.

减小)抵消引力红移. 当速率调至某一适当值时(仅为$3\times10^{-7}\,\mathrm{m/s}$), 吸收率达到最大值. 由此便可测得引力红移的数值. 本实验的精确度很高(相对不确定度约为1%), 所得结果同理论值符合得很好. 后来还有更精确的实验验证[可参阅Will(1993)].

9.2.2 水星近日点进动

按照牛顿力学, 行星的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 然而观测结果与此略有歧离. 以最靠近太阳的水星为例, 虽然它在每一周期中的轨道很接近椭圆, 但两个相邻周期的两个"椭圆"的长轴并不重合, 表现在它的近日点(perihelion)的微小改变上. 随着时间的推移, 由于积累效应, "椭圆"的长轴(因而近日点)绕太阳的缓慢转动变得可以观测. 这现象叫近日点的**进动**(precession). 在广义相对论问世前, 早已测得水星近日点的进动率约为每世纪 5600″ (″ 代表弧秒). 人们对此曾深入研究并找出许多可能原因(包括其他行星的影响), 发现所有这些因素造成的进动率为每世纪 5557″, 还有每世纪 43″无法解释. 这就是著名的"43秒问题". 爱因斯坦根据广义相对论认为水星是在由太阳造成的弯曲时空中的自由质点, 通过对施瓦西时空的类时测地线的近似计算自然导出水星的轨道不是闭合曲线、其近日点的进动率恰为每世纪 43″的结论. 这一结果大大加强了人们对广义相对论的信心. 下面介绍广义相对论对近日点进动的推证.

设太阳系只有太阳和水星并略去水星的引力场, 即只讨论水星在太阳引力场(外引力场)作用下的运动. 先用牛顿引力论讨论. 令太阳和水星的质量分别为 M 和 m, 则水星的引力势能为

$$U(r)=-Mm/r \quad (\text{本书用几何单位制, 其中 } G=1.). \tag{9-2-4}$$

取球坐标系使水星轨道在赤道面上($\theta=\pi/2$, 这总可做到, 见§ 9.1.), 则水星的速度$\vec{u}$ 只有径向分量 $u_r=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 和切向分量$u_\varphi=r\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, 故动能为$m\left(u_r{}^2+u_\varphi{}^2\right)/2$. 由机械能守恒律有

$$\frac{1}{2}m(u_r{}^2+u_\varphi{}^2)+U(r)=A, \tag{9-2-5}$$

其中常数A 为总机械能. 设水星单位质量角动量大小为$|L|$, 则

$$L=ru_\varphi=r^2\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t, \tag{9-2-6}$$

由式(9-2-4)、(9-2-5)、(9-2-6)出发经计算得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+r^2=\frac{2Mr^3}{L^2}+\frac{2Ar^4}{mL^2}. \tag{9-2-7}$$

令$\mu\equiv r^{-1}$, 则$\mu\neq0$, 故上式成为

$$\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2+\mu^2=\frac{2A}{mL^2}+\frac{2M}{L^2}\mu\,. \tag{9-2-8}$$

对 φ 求导得 $\frac{d\mu}{d\varphi}\left(\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu-\frac{M}{L^2}\right)=0$，因此要么 $\frac{d\mu}{d\varphi}=0$ (圆轨道)；要么

$$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu=\frac{M}{L^2}\,. \tag{9-2-9}$$

上式的解为

$$\mu(\varphi)=\frac{M}{L^2}[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]\,, \tag{9-2-10}$$

其中 e 和 φ_0 为积分常数. 不失一般性，取 $\varphi_0=0$，则

$$\mu(\varphi)=\frac{M}{L^2}(1+e\cos\varphi)\,. \tag{9-2-11}$$

这是圆锥截线方程，e 是偏心率，把式(9-2-11)及其导数代回式(9-2-8)便得

$$e^2=1+2AL^2/mM^2\,. \tag{9-2-12}$$

当 $0\leqslant e<1$ 时为椭圆，$d\mu/d\varphi=0$ (圆轨道)已作为 $e=0$ 的特例含于其中.

然而广义相对论却给出略微不同的结果. 令 $\kappa=1$ (类时测地线)，将式(9-1-6)除以 $(d\varphi/d\tau)^2$，利用式(9-1-5)经计算得

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-\frac{E^2r^4}{L^2}+r^2\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)=0\,. \tag{9-2-13}$$

仍设 $\mu\equiv r^{-1}$，则上式化为

$$\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2+\mu^2=\frac{1}{L^2}(E^2-1)+\frac{2M}{L^2}\mu+2M\mu^3\,. \tag{9-2-14}$$

对 φ 求导得

$$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu=\frac{M}{L^2}+3M\mu^2\,, \tag{9-2-15}$$

与式(9-2-9)对比发现净多一项 $3M\mu^2$ (广义相对论修正项)，因而难于求解. 幸好水星的 r 比太阳的 M 大得多，即 $M/r\ll 1$，故修正项 $3M\mu^2=(3M/r)\mu\ll\mu$，① 可设法求近似解. 牛顿引力论中的解式(9-2-11)可看作零级近似，为明确起见记作 $\mu_0(\varphi)$，即

$$\mu_0(\varphi)=\frac{M}{L^2}(1+e\cos\varphi)\,, \tag{9-2-16}$$

把这零级近似解代入式(9-2-15)右边第二项后所得方程可看作一级近似解 $\mu_1(\varphi)$ 应

---

① 做数量计算时最好改回国际单位制，即补上物理常数 G 和 c. 由附录 A 可知 M/r 实为 $(GM/c^2)/r$. 太阳质量 M 对应的 $GM/c^2\cong 1.5\text{km}$，水星近日点与太阳的距离则约为 $5\times10^7\,\text{km}$，故 $(GM/c^2)/r\ll 1$.

满足的方程，即

$$\frac{d^2\mu_1}{d\varphi^2}+\mu_1=\frac{M}{L^2}+3M\mu_0^2=\frac{M}{L^2}+\frac{3M^3}{L^4}(1+2e\cos\varphi+e^2\cos^2\varphi). \qquad (9\text{-}2\text{-}17)$$

不难验证其解为

$$\mu_1(\varphi)=\mu_0(\varphi)+\frac{3M^3}{L^4}\left[1+e\varphi\sin\varphi+e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2\varphi\right)\right]. \qquad (9\text{-}2\text{-}18)$$

我们关心的是近日点. 对$\mu_0(\varphi)$而言，近日点的φ值为$0, 2\pi, \cdots$. $\mu_1(\varphi)$的表达式虽与$\mu_0(\varphi)$有诸多不同，但如果没有$e\varphi\sin\varphi$项，近日点的φ值并无改变. 只有$e\varphi\sin\varphi$项能使水星偏离闭合轨道，从而出现近日点的进动，而且进动角随φ值的增加而增加(有积累效应). 于是在只关心近日点进动时可略去式(9-2-18)方括号中除$e\varphi\sin\varphi$外的各项而写为[其中$\mu_0(\varphi)$已用式(9-2-16)代入]

$$\mu_1(\varphi)=\frac{M}{L^2}\left[1+e\left(\cos\varphi+\frac{3M^2}{L^2}\varphi\sin\varphi\right)\right], \qquad (9\text{-}2\text{-}19)$$

因$M/L^2\sim\mu$ [见式(9-2-16)]，故$M^2/L^2\sim M\mu=M/r\ll 1$. 令

$$\varepsilon\equiv 3M^2/L^2, \qquad (9\text{-}2\text{-}20)$$

则$\cos\varepsilon\varphi\cong 1$，$\sin\varepsilon\varphi\cong\varepsilon\varphi$，于是由式(9-2-19)得

$$\frac{1}{r(\varphi)}\cong\mu_1(\varphi)\cong\frac{M}{L^2}[1+e\cos(\varphi-\varepsilon\varphi)]. \qquad (9\text{-}2\text{-}21)$$

这表明水星的轨道近似为椭圆. 式(9-2-21)右边虽仍是周期函数，但周期已不像式(9-2-16)那样为2π. 近日点是r最小的点，即$\cos(\varphi-\varepsilon\varphi)=1$的点. $\varphi=0$当然是近日点；但当$\varphi=2\pi$时

$$\cos(\varphi-\varepsilon\varphi)=\cos(2\pi-2\pi\varepsilon)\neq 1.$$

设$\hat\varphi$为满足$\cos(\hat\varphi-\varepsilon\hat\varphi)=1$而又最接近$2\pi$的$\varphi$值，则不难验证(略去高阶小量$2\pi\varepsilon^2$)

$$\hat\varphi\cong 2\pi+2\pi\varepsilon. \qquad (9\text{-}2\text{-}22)$$

可见水星近日点在每周期内的进动角为(见图 9-5)

$$\Delta\varphi_P\cong 2\pi\varepsilon=6\pi M^2/L^2. \qquad (9\text{-}2\text{-}23)$$

以上讨论其实对任何行星都适用. 代入具体数据可得水星近日点的进动率为43″/世纪.

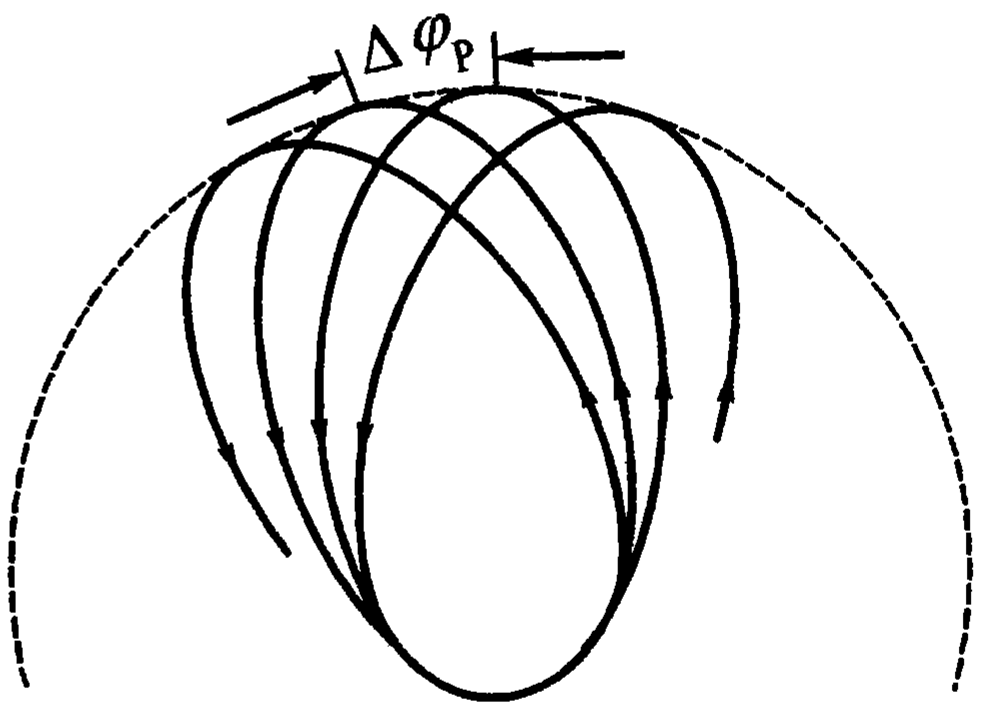


图 9-5　水星近(远)日点每周期进动角$\Delta\varphi_P$(明显夸大)

9.2.3　星光偏折

远方恒星射到地面的光线经过太阳附近时要受太阳引力场影响而弯曲，这是广义相对论的一个重要预言. 本小节介绍这一预言的导出. 在 4 维语言中，光子的世界线是类光测地线. 令式(9-1-6)的$\kappa=0$，用类似于式(9-2-13)的推导方法，

不难推出

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-\frac{E^2r^4}{L^2}+r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)=0\,. \tag{9-2-24}$$

仍设 $\mu\equiv r^{-1}$，则上式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\mu^2=\frac{E^2}{L^2}+2M\mu^3\,. \tag{9-2-25}$$

对 φ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}\varphi^2}+\mu=3M\mu^2\,. \tag{9-2-26}$$

当 $M=0$ 时(平直时空)，方程(9-2-26)的通解为

$$\mu(\varphi)=\frac{1}{l}\sin(\varphi+\alpha)\,, \tag{9-2-27}$$

其中 l 和 α 为积分常数. 设 $\varphi=0$ 时光子在无限远，即 $\mu(0)=1/r(0)=0$，则 $\alpha=0$，故

$$\mu(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi\,. \tag{9-2-28}$$

这是 2 维欧氏空间中用极坐标$\{r,\ \varphi\}$表示的直线方程. 要看出这点，取 $r=0$ 为笛卡儿坐标系$\{x,\ y\}$的原点，则

$$x=r\cos\varphi\,, \tag{9-2-29}$$

$$y=r\sin\varphi=\frac{1}{\mu}\sin\varphi=l=\text{常数}, \tag{9-2-30}$$

其中第三步用到式(9-2-28). 可见光子的空间轨迹是与原点距离为 l 的直线(见图 9-6). 注意，r 和 φ 沿该直线都在变化(不变的是 y). 由于 r 的取值范围为 $(0,\ \infty)$，式(9-2-29)表明 x 的取值范围是 $(-\infty,\ \infty)$. 要讨论星光偏折当然不能取 $M=0$. 但因 $M/r\ll 1$，求一级近似解 $\mu_1(\varphi)$便足够. 把式(9-2-28)的 $\mu(\varphi)$看作零级近似解 $\mu_0(\varphi)$代入式(9-2-26)右边便得 $\mu_1(\varphi)$满足的微分方程

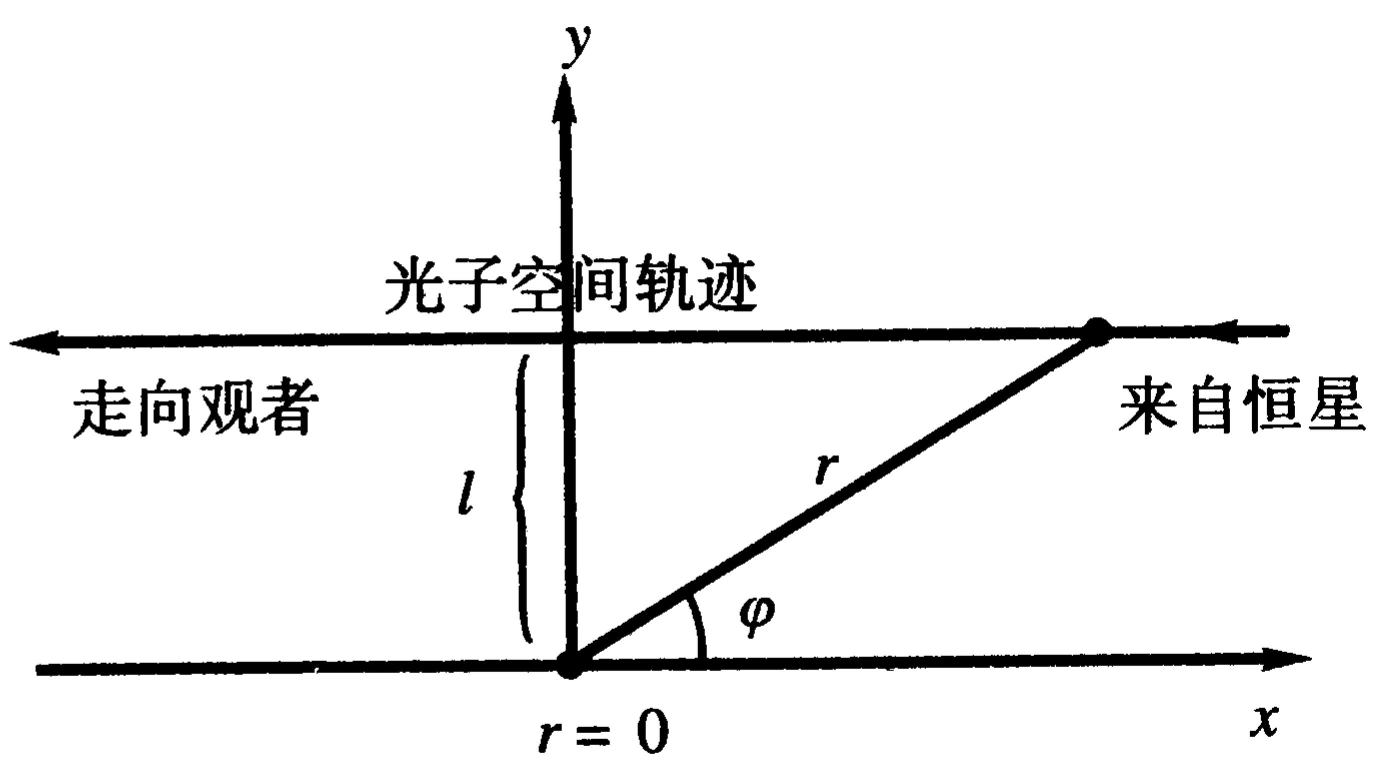


图 9-6　平直时空中光子的空间轨迹

$$\frac{\mathrm{d}^2\mu_1}{\mathrm{d}\varphi^2}+\mu_1(\varphi)=\frac{3M}{l^2}\sin^2\varphi\,. \tag{9-2-31}$$

不难验证下式是方程(9-2-31)的解

$$\mu_1(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi+\frac{M}{l^2}(1-\cos\varphi)^2\,. \tag{9-2-32}$$

由上式知 $\mu_1(0)=0$，即 $r(0)=\infty$，说明光子的 φ 坐标为零时离太阳无限远(远方恒星的 r 可看作∞)，但式(9-2-32)与(9-2-28)的不同表明光子经过太阳附近又离太阳而去时的“去向”不同：由式(9-2-28)知 $\mu(\pi)=0$，表明光子远离“太阳”(这“太阳”的 $M=0$)而去时 φ 坐标为 π；而由式(9-2-32)却有 $\mu_1(\pi)\neq 0$，我们预期它沿一个与 π 略有差别的方向 $\pi+\beta$ 远离太阳而去(见图 9-7)，即 $\mu_1(\pi+\beta)=0$. 为求偏折角 β，把 $\varphi=\pi+\beta$ 代入式(9-2-32)并利用 $\mu_1(\pi+\beta)=0$ 得

$$0=\mu_1(\pi+\beta)=\frac{1}{l}\sin(\pi+\beta)+\frac{M}{l^2}[1-\cos(\pi+\beta)]^2\,.$$

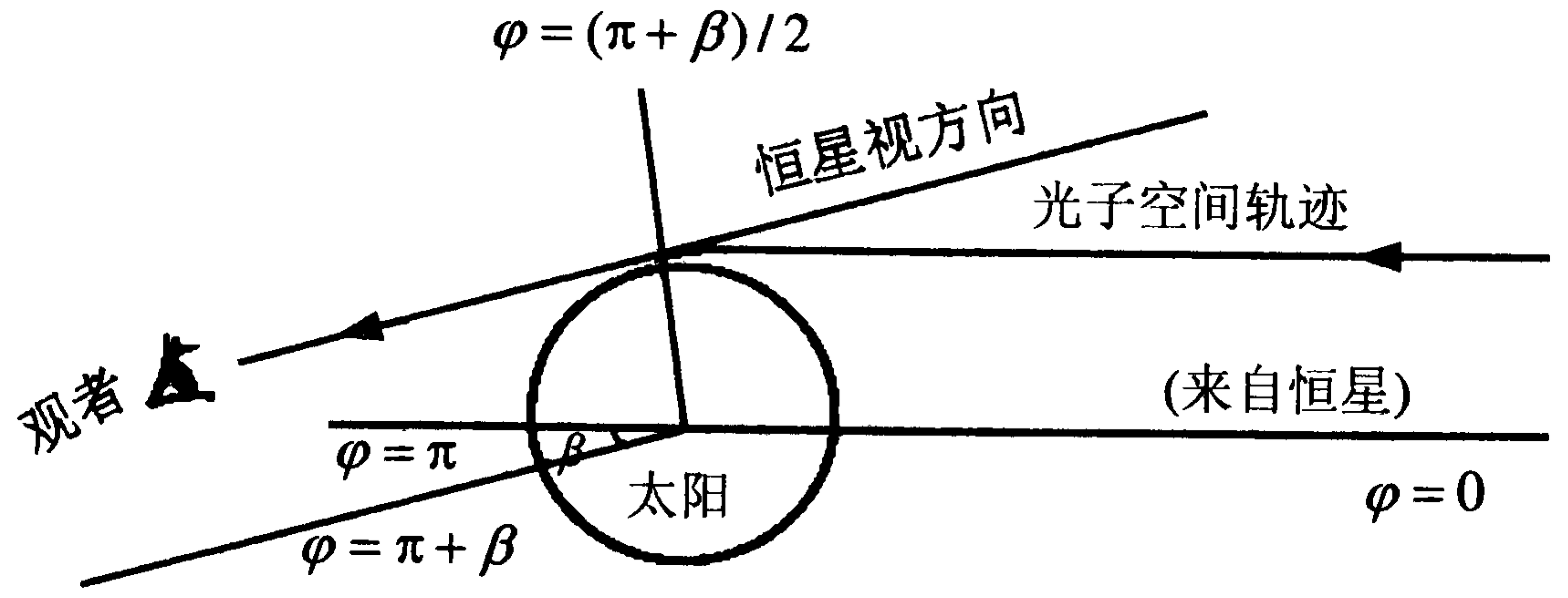


图 9-7　太阳使时空弯曲，星光的空间轨迹受偏折，偏折角β明显夸大

β很小导致 $\sin(\pi+\beta)\cong-\beta$，$\cos(\pi+\beta)\cong-1$，代入上式便得

$$\beta\cong 4M/l\,. \tag{9-2-33}$$

上式表明偏折角 β 随 l 的减小而增大. l 的最小值等于太阳半径. 以此为 l 值代入式(9-2-33) [补上物理常数 G 和 c 后的式(9-2-33)成为 $\beta\cong 4GM/lc^2$] 求得 $\beta=1.75''$. 这就是广义相对论对星光偏折角的定量预言. 为了用观测验证这一预言，可设法拍摄当星光被太阳偏折时恒星的视位置，并与半年前(或后)当地球转到太阳另一侧时摄得的恒星真实位置比较. 然而观测恒星的视位置并不容易，因为太阳离地球比所要观测的恒星近得多，在太阳的光芒中根本无法看见星光(“大白天看星星”!). 于是想到利用日全食. 日全食时，阳光被位于太阳与地球之间的月球所遮挡，但远方星体的光却可以“绕过”太阳到达地球. 在第一次世界大战后不久，就有两支考察队从英国出发分别到巴西和非洲对 1919 年 3 月 29 日的日全食进行观测，两队观测的结果分别是理论预期值的 1.13±0.07 倍和 0.92±0.17 倍. 这被认为是对理论的重要支持，它们在多数欧美报纸的公布引起了对战争厌倦的公众的注意，并使爱因斯坦名声显赫. 但爱因斯坦对此反应平静. 他对自己的理论是如此相信(基于其优雅性和内部自洽性)，以致曾说过“如果观测结果竟与理论背

离，我将对全能的上帝感到遗憾.”一类的话. 然而，后来对巴西考察队结果的独立分析认为观测值只是理论值的 1.0 至 1.3 倍，不如原来乐观. 后来又有多次对日全食的观测，但仍不能认为是对广义相对论的完全肯定的支持. 关键在于用牛顿引力论也能预言星光被太阳偏折，只是偏折角约为广义相对论预言值之半，因此还很难说观测结果对广义相对论还是对牛顿引力论更有利[详见 Will(1993)].

§ 9.3　球对称恒星及其演化

9.3.1　静态球对称恒星内部解

本小节讨论静态球对称星体的内部时空度规和内部状态. 星内物质场可相当精确地看作理想流体，其能动张量为

$$T_{ab}=(\rho+p)U_aU_b+pg_{ab}\,. \tag{9-3-1}$$

星体为静态意味着星内每一随动观者都可看作静态观者，其 4 速 U^a 与静态 Killing 矢量场 $\xi^a=(\partial/\partial t)^a$ 平行. 仍选用施瓦西坐标系，则线元仍可用式(8-3-2)表示. 由 $U^aU_a=-1$ 及 $\xi^a\xi_a=g_{00}=-\mathrm{e}^{2A}$ 得

$$U^a=\mathrm{e}^{-A}(\partial/\partial t)^a \qquad 及 \qquad U_a=-\mathrm{e}^{A}(\mathrm{d}t)_a\,, \tag{9-3-2}$$

故由式(9-3-1)可得 T_{ab} 的非零坐标分量如下：

$$T_{00}=T_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b=\rho\mathrm{e}^{2A}\,,\qquad T_{11}=T_{ab}(\partial/\partial r)^a(\partial/\partial r)^b=p\mathrm{e}^{2B}\,,$$

$$T_{22}=T_{ab}(\partial/\partial\theta)^a(\partial/\partial\theta)^b=pr^2\,,\qquad T_{33}=T_{ab}(\partial/\partial\varphi)^a(\partial/\partial\varphi)^b=pr^2\sin^2\theta\,,$$

爱因斯坦方程组 $R_{\mu\nu}-Rg_{\mu\nu}/2=8\pi T_{\mu\nu}$ 可改写为 $R^\mu{}_\nu-R\delta^\mu{}_\nu/2=8\pi T^\mu{}_\nu$，注意到 $g^{\mu\nu}$ 只有对角分量，得

$$T^0{}_0=g^{00}T_{00}=-\rho,\quad T^1{}_1=g^{11}T_{11}=p,\quad T^2{}_2=g^{22}T_{22}=p,\quad T^3{}_3=g^{33}T_{33}=p\,. \tag{9-3-3}$$

另一方面，由式(8-3-5)~(8-3-8)的非零 $R_{\mu\nu}$ 出发可求得

$$R=2\mathrm{e}^{-2B}[-A''+A'B'-A'^2+2r^{-1}(B'-A')-r^{-2}]+2r^{-2}\,,$$

进而求得非零的 $R^\mu{}_\nu-R\delta^\mu{}_\nu/2$ 如下：

$$R^0{}_0-\frac{1}{2}R\delta^0{}_0=-\mathrm{e}^{-2B}(2B'r^{-1}-r^{-2})-r^{-2}\,,$$

$$R^1{}_1-\frac{1}{2}R\delta^1{}_1=\mathrm{e}^{-2B}(2A'r^{-1}+r^{-2})-r^{-2}\,,$$

$$R^2{}_2-\frac{1}{2}R\delta^2{}_2=\mathrm{e}^{-2B}[A''-A'B'+A'^2+(A'-B')r^{-1}]\,,$$

$$R^3{}_3-\frac{1}{2}R\delta^3{}_3=\mathrm{e}^{-2B}[A''-A'B'+A'^2+(A'-B')r^{-1}]\,,$$

与式(9-3-3)一同代入 $R^{\mu}{}_{\nu}-R\delta^{\mu}{}_{\nu}/2=8\pi T^{\mu}{}_{\nu}$，便知它只含如下 3 个独立方程：

$$-8\pi\rho=-e^{-2B}(2B'r^{-1}-r^{-2})-r^{-2}, \tag{9-3-4}$$

$$8\pi p=e^{-2B}(2A'r^{-1}+r^{-2})-r^{-2}, \tag{9-3-5}$$

$$8\pi p=e^{-2B}[A''-A'B'+A'^2+(A'-B')r^{-1}]. \tag{9-3-6}$$

方程(9-3-4)可改写为

$$8\pi\rho r^2=2r e^{-2B}B'-e^{-2B}+1=1-\frac{d}{dr}(re^{-2B}),$$

故可积分得

$$re^{-2B(r)}=r-2m(r)+C, \tag{9-3-7}$$

其中 C 为积分常数，函数 $m(r)$ 定义为

$$m(r):=4\pi\int_0^r \rho(x)x^2 dx. \tag{9-3-8}$$

若 $C\neq 0$，则由式(9-3-7)和(9-3-8)可知 $r\to 0$ 时 $e^{-2B}\to\infty$，但 $e^{-2B}=g^{11}$，在星体中心$(r=0)$ $g^{11}=\infty$ 不合理，故 $C=0$. 于是由式(9-3-7)知

$$g_{11}(r)=e^{2B(r)}=\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}. \tag{9-3-9}$$

设星体半径为 R，则当 $r>R$ 时度规应为施瓦西真空解[见式(8-3-18)]. 内、外度规在星体表面$(r=R)$应该连续，把 $r=R$ 代入式(9-3-9)得

$$g_{11}(R)=\left[1-\frac{2m(R)}{R}\right]^{-1},$$

另一方面，由施瓦西真空解得

$$g_{11}(R)=\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1},$$

两式对比并利用式(9-3-8)得

$$M=m(R)=4\pi\int_0^R \rho(r)r^2 dr. \tag{9-3-10}$$

[选读 9-3-1]

式(9-3-10)表面看来与牛顿力学中星体质量 M 与密度 $\rho(r)$ 的关系一样. 然而问题并非如此简单. 由于静态参考系在时刻 t 的空间 Σ_t 有非欧几何 h_{ab}(类似于 8.3.2 小节末的讨论)，其 3 维固有体元(即与 h_{ab} 相适配的体元)为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sqrt{h}\,dr\wedge d\theta\wedge d\varphi=\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1/2} r^2\sin\theta\;dr\wedge d\theta\wedge d\varphi,$$

因此计算积分时不能像在 3 维欧氏空间那样用 $r^2\sin\theta\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi$ 作体元. 而式

(9-3-10)中的 M 却正是以 $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ 为体元对 $\rho(r)$ 求积分的结果. 从数学角度看，在 3 维非欧空间 (Σ_t, h_{ab}) 中以 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ 为体元求得的积分(9-3-10)有点不伦不类，然而这并不意味着式(9-3-10)中的 M 是个不伦不类的量. 实际上，作为施瓦西解的唯一参数，M 的物理意义非常明确：它是施瓦西时空的总质量(总能量)，包括引力势能(详见第 12 章). 然而，$\rho(r)$是星内静态观者做当时当地观测所得的能量密度，包含星内每一粒子(主要是核子)的静能密度和星体的内能(热能、压缩能，等等)密度，唯独不含引力势能. 这同§9.1 关于 E 和 $E_{当}$ 的差别的讨论类似：观者的当时当地测量结果不包含引力场对能量的贡献. 因此包含引力势能的 M 本来就不应等于不包含引力场的贡献的 $\rho(r)$的积分 $\int\rho(r)\,\boldsymbol{\varepsilon}$. 请特别注意

$$
\begin{aligned}
\int\rho(r)\,\boldsymbol{\varepsilon} &= \int\rho(r)\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1/2} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi\int_0^R \rho(r)\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1/2} r^2\mathrm{d}r \\
&\overset{!!!}{\neq} 4\pi\int_0^R \rho(r)\ r^2\mathrm{d}r = M\,.
\end{aligned}
$$

$\rho(r)$不含引力场贡献的事实与另一事实——引力场能的非定域性——有密切关系. 所谓引力场能的非定域性，简单说就是引力场能密度没有意义：不存在这样一个量，它可以被合理地解释为引力场的能量密度(注意与以下事实对比：电磁场能密度意义明确并有具体表达式.)，详见第 12 章. 然而，引力场能非定域性的结论不表明引力场本身没有能量. 长期、曲折的努力的一个重要结果是：对渐近平直时空(物理上对应于孤立引力体系)可以定义总能量的概念，它包含连同引力场在内的一切能量的贡献. 把这一定义用于参数为 M 的施瓦西时空，发现 M 正是该时空(作为渐近平直时空)的总能量.

[选读 9-3-1 完]

把式(9-3-9)代入方程(9-3-5)得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=\frac{m(r)+4\pi pr^3}{r\ [r-2m(r)]}\,. \tag{9-3-11}$$

在牛顿近似下，①静态参考系的 3 维空间可近似看作欧氏空间，有 $1\cong g_{11}=[1-2m(r)/r]^{-1}$，故 $m(r)\ll r$；② $p\ll\rho$ 导致 $pr^3\ll\rho r^3\sim m(r)$，因而式(9-3-11)近似为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\cong\frac{m(r)}{r^2}\,. \tag{9-3-12}$$

而球对称情况下的牛顿引力势 ϕ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}=\frac{m(r)}{r^2}, \tag{9-3-13}$$

可见 A 是牛顿引力势在静态球对称弯曲时空中的(某种意义上的)对应量. 式(9-3-13)其实是牛顿引力论的泊松方程 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ 在球对称情况下的表现. 球对称时 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ 成为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)=4\pi\rho\,,$$

积分得
$$r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}=4\pi\int_0^r\rho(x)\,x^2\mathrm{d}x=m(r)\,,$$

此即式(9-3-13).

至此, 待解的 3 个方程中只剩方程(9-3-6)尚未触及. 把式(9-3-9)、(9-3-11)代入式(9-3-6), 原则上便可求解, 但运算颇为复杂. 借用如下事实(证明见选读 9-3-2)可简化运算: 在方程(9-3-4)、(9-3-5)已满足的前提下, 方程(9-3-6)等价于

$$(\partial/\partial r)^b\nabla^aT_{ab}=0\,. \tag{9-3-6$'$}$$

由式(9-3-1)得

$$\nabla^aT_{ab}=U_aU_b\nabla^a(\rho+p)+(\rho+p)\,(U^a\nabla_aU_b+U_b\nabla_aU^a)+\nabla_bp\,.$$

注意到 $(\partial/\partial r)^b$ 同 U^b 正交, 可知式(9-3-6′)等价于

$$0=(\partial/\partial r)^b\nabla^aT_{ab}=(\rho+p)\,(\partial/\partial r)^bU_a\nabla^aU_b+(\partial/\partial r)^b\nabla_bp\,, \tag{9-3-14}$$

而
$$(\partial/\partial r)^b\nabla_bp=\mathrm{d}p/\mathrm{d}r\,, \tag{9-3-15}$$

$$\begin{aligned}(\partial/\partial r)^bU_a\nabla^aU_b&=-U_bU^a\nabla_a(\partial/\partial r)^b=\mathrm{e}^A(\mathrm{d}t)_b\mathrm{e}^{-A}(\partial/\partial t)^a\nabla_a(\partial/\partial r)^b\\&=(\mathrm{d}t)_b\Gamma^\sigma{}_{10}(\partial/\partial x^\sigma)^b=\Gamma^0{}_{10}=\mathrm{d}A/\mathrm{d}r\,,\end{aligned}$$

其中第三步用到式(5-7-2)(克氏符的等价定义), 第五步用到式(8-3-4). 把上式和式(9-3-15)代入式(9-3-14)便得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-(p+\rho)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\,. \tag{9-3-16}$$

再用式(9-3-11)得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\,(\rho+p)\,\frac{m(r)+4\pi pr^3}{r\,[r-2m(r)]}\,. \tag{9-3-17}$$

这就是著名的 **OV 流体静力学平衡方程**(Oppenheimer-Volkoff equation), 其牛顿近似为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\cong-\frac{\rho m(r)}{r^2}, \tag{9-3-18}$$

其中用到 $p\ll\rho$, $m(r)\ll r$ 及 $pr^3\ll\rho r^3\sim m(r)$. 上式是牛顿力学中熟知的流体静

力学平衡方程，可借助图 9-8 简单导出. 由于球对称性，薄球层中任一体元 dV 所受的来自星球的引力(自引力)指向球心. 另一方面，dV 又受到来自压强梯度 dp/d$r<0$ 的外向力，当它与自引力相等[满足式(9-3-18)]时星球处于流体静力学平衡.

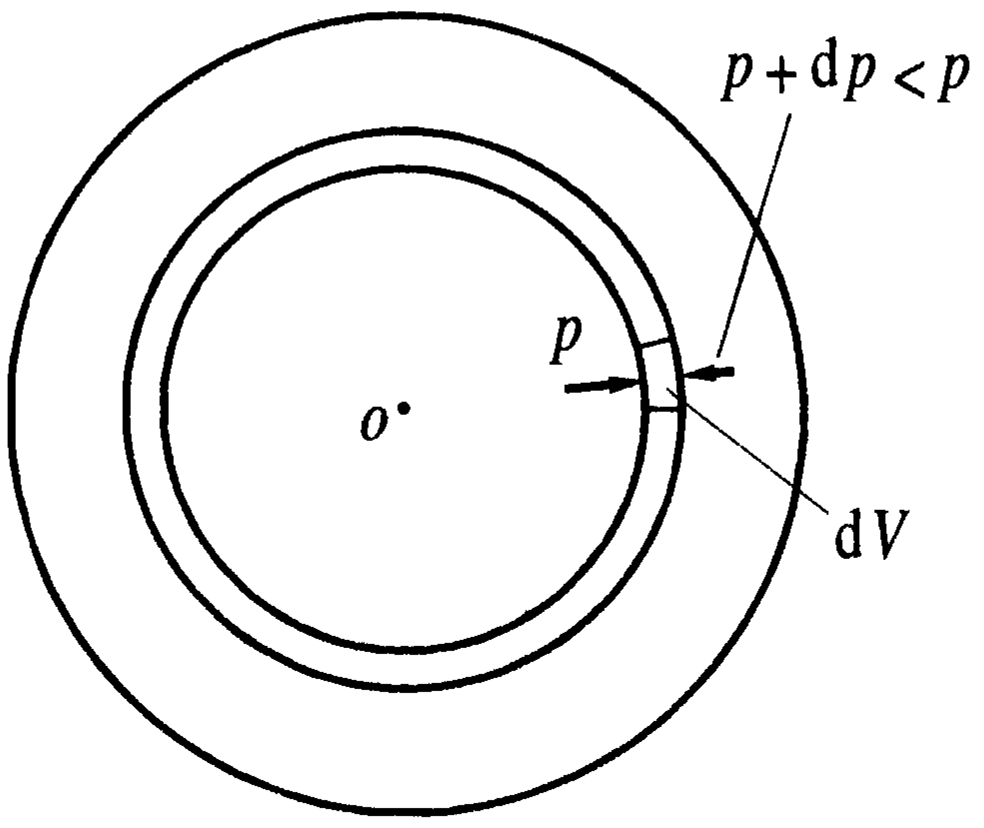


图 9-8 压强梯度使体元 dV 受力与自引力平衡，由此可推出式(9-3-18)

综上所述，静态球对称星体内部的时空度规为

$$ds^2=-\ e^{2A(r)}dt^2+\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\ d\varphi^2), \qquad (9\text{-}3\text{-}19)$$

其中函数 $m(r)$由式(9-3-8)定义，函数 $A(r)$要满足方程(9-3-11). 流体静力学平衡的充要条件是式(9-3-17).

球对称星体的内部状态由 $A(r)$, $m(r)$, $p(r)$和 $\rho(r)$等 4 个函数决定，它们必须满足的方程只有(9-3-8)、(9-3-11)和(9-3-17)三个. 要确定星体内部状态还须指定第 4 个方程，称为物态方程，简单说就是能量密度 ρ 和压强 p 的关系 $f(p,\rho)=0$ (其中 f 代表某个函数关系)[①] 指定物态方程后就只剩 3 个待定函数 $A(r)$, $m(r)$和 $p(r)$，它们必须满足微分方程(9-3-11)、(9-3-17)以及来自式(9-3-8)的

$$\frac{dm(r)}{dr}=4\pi\rho(r)r^2. \qquad (9\text{-}3\text{-}20)$$

这 3 个方程都是 1 阶常微分方程，一旦知道初始条件 $A(0)$, $m(0)$和 $p(0)$后便有确定解. 由式(9-3-8)可知 $m(0)=0$，所以 $m(0)$ 不用(也不能任意)指定. 指定 $A(0)$ (后面还要调整)和 $p_0\equiv p(0)$后，对上述 3 个微分方程从 $r=0$ 起积分，直至 $p=0$ 为止[只要物态方程满足如下合理要求：对所有 $p\geqslant 0$ 有 $\rho\geqslant 0$，则 OV 方程(9-3-17)自动保证压强 p 由里向外单调下降.]，$p=0$ 处就是星球表面，相应的 r 值就是星球半径 R，而 $m(R)$就是星球总质(能)量 M (包括引力势能!). 有了 R 后还要反过来修改 $A(0)$

① 一般地说，压强 p 不但是密度 ρ 的函数，而且依赖于星体的比熵(即每个核子的平均熵)和化学组成. 只当比熵和化学组成在星体内部处处相同时 p 才只是 ρ 的函数，物态方程才可表为 $f(p,\rho)=0$. 普通恒星(包括太阳)的比熵并非处处相同. 然而，后面要讨论的白矮星和中子星内可认为比熵处处为零，正文的讨论有助于对这些“非普通星体”的研究.

值(加一常数)以保证在星球表面与球外真空解的联结条件得到满足，即

$$e^{2A(R)}=1-2M/R\,, \tag{9-3-21}$$

因此，一个指定的 p_0 值就决定一组函数 $A(r)$，$m(r)$和 $p(r)$，星体的内部状态和度规就全盘定局. 对于真实的物态方程，式(9-3-17)等难于求得精确解，因此需要数值解法. 然而，对理想化的物态方程却可解析地求得积分. 最简单也最有用的一种理想化是如下的物态方程：$\rho=$ 常数. 这是很特别的物态方程——能量密度 ρ 与压强无关. 这虽然不是一个很好的恒星模型，但仍不失为压强不太大的小恒星的一级近似. 这时式(9-3-8)成为

$$m(r)=4\pi\rho\, r^3/3\,. \tag{9-3-22}$$

上式对广义相对论及牛顿引力论都成立. 对牛顿引力论，方程(9-3-18)在 ρ 为常数时简化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{4\pi}{3}\rho^2 r$，在初值 p_0 指定后的唯一解为 $p(r)=-\dfrac{2}{3}\pi\rho^2 r^2+p_0$，恒星半径 R 则可由 $p(R)=0$ 确定：

$$0=p(R)=-\frac{2}{3}\pi\rho^2R^2+p_0\,,$$

于是 p_0 又可用 R 表出：

$$p_0=\frac{2}{3}\pi\rho^2R^2\,, \tag{9-3-23}$$

故 $p(r)$亦可用 R 表为

$$p(r)=\frac{2}{3}\pi\rho^2(R^2-r^2)\,. \tag{9-3-24}$$

在牛顿引力论不成立时，就要求解 OV 方程(9-3-17). 施瓦西于 1916 年求得其解为(因此均匀密度星内度规叫**施瓦西内解**)

$$p(r)=\rho\,\frac{(1-2M/R)^{1/2}-(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}}{(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}-3\,(1-2M/R)^{1/2}}\,, \tag{9-3-25}$$

相应的中心压强为

$$p_0=p(0)=\rho\,\frac{1-(1-2M/R)^{1/2}}{3\,(1-2M/R)^{1/2}-1}\,. \tag{9-3-26}$$

不难证明(习题)，当 $R\gg M$ 时式(9-3-26)近似回到牛顿引力论的式(9-3-23).

令 $Y\equiv(1-2M/R)^{1/2}$，则式(9-3-26)成为

$$p_0=\frac{\rho\,(1-Y)}{3Y-1}\,, \tag{9-3-27}$$

由 $\mathrm{d}p_0/\mathrm{d}Y<0$ 可知 p_0 随 M/R 增大而增大. 这是容易理解的，因为 M 越大时自引力越强，为抗衡自引力所需的压强梯度越大，在 R 一定时中心压强 p_0 就要越大. 反之，若 M 一定而 R 变小，则为了产生所需压强梯度也要有更大的 p_0. 当 M/R 大到

使 $Y=1/3$ 时 $p_0 \to \infty$，这表明无论中心压强多大也无法维持平衡，可见静态均匀密度星的 M/R 有一上限，由 $Y=1/3$ 知此上限为

$$(M/R)_{\max} = 4/9. \qquad (9\text{-}3\text{-}28)$$

当然，普通恒星的 M/R 远小于这一上限. 为了做数值估算，宜对 M 补上常数 G/c^2，即用 GM/c^2 代替 M. 以太阳为例，$GM_\odot/c^2 \cong 1.5\ \text{km}$，$R_\odot \cong 7\times10^5\text{km}$，故

$$\frac{GM_\odot/c^2}{R_\odot} \cong 2\times10^{-6} \ll \frac{4}{9}.$$

由式(9-3-22)得 $M = 4\pi\rho R^3/3$，与式(9-3-28)联立消去 R 后得

$$M_{\max} = \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt{3\pi\rho}}. \qquad (9\text{-}3\text{-}29)$$

这就是密度为 ρ 的均匀密度星的最大允许质量(请注意，在牛顿引力论中不存在最大允许质量这一问题). 广义相对论中质量上限的存在并非均匀密度星的特有结论. 可以证明，只要假定 $\rho(r)\geqslant 0$ 及 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r\leqslant 0$，则任何半径为 R 的球对称静态星的质量都不能超过 $4R/9$.

顺便一提，§8.10 曾强调指出，在求解有源爱因斯坦方程时，应把反映物质场的函数同度规分量合在一起联立求解. 该节曾以尘埃作为特例，指出共有 15 个待求函数 $g_{\mu\nu}(x)$，$\rho(x)$，$U^\mu(x)$ 和 15 个待解方程. 如果物质场为 $p\neq0$ 的理想流体，则还有第 16 个待求函数 $p(x)$，为此需要指定物态方程作为第 16 个方程. 本节的讨论为该节的讲法提供了一个实例.

[选读 9-3-2]

令 $H_{ab} \equiv 8\pi T_{ab} - G_{ab}$，则 H_{ab} 在坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 中只有对角分量. 方程(9-3-4)、(9-3-5)成立等价于 $H_{00}=H_{11}=0$. 下面证明在方程(9-3-4)、(9-3-5)成立的前提下方程(9-3-6)同方程(9-3-6′)等价. 注意到 $\nabla^a G_{ab}=0$，有

$$8\pi(\partial/\partial r)^b\nabla^a T_{ab} = (\partial/\partial r)^b\nabla^a H_{ab} = \nabla^a[(\partial/\partial r)^b H_{ab}] - H_{ab}\nabla^a(\partial/\partial r)^b. \qquad (9\text{-}3\text{-}30)$$

因为 $(\partial/\partial r)^b H_{ab} = H_{a1} = H_{11}(\mathrm{d}r)_a = 0$，上式右边第一项为零. 令 ∂_a 为坐标系 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 的普通导数算符，则上式成为

$$8\pi(\partial/\partial r)^b\nabla^a T_{ab} = -H^a{}_b\left[\partial_a\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^b + \Gamma^b{}_{ac}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^c\right] = -H^a{}_b\Gamma^b{}_{a1}$$

$$= -\ (H^2{}_2\Gamma^2{}_{21} + H^3{}_3\Gamma^3{}_{31}) = -2H^2{}_2/r,$$

其中最后一步用到 $H^2{}_2 = H^3{}_3$ 及 $\Gamma^2{}_{21} = \Gamma^3{}_{31} = 1/r$. 可见 $H^2{}_2 = 0$ [即式(9-3-6)]等价于 $(\partial/\partial r)^b\nabla^a T_{ab} = 0$.　　**[选读 9-3-2 完]**

9.3.2　恒星演化

本小节介绍球对称恒星的形成和演化过程. 当密度不十分高时，引力场不十分强，牛顿引力论近似适用. 广义相对论只在本小节的最后部分才是不可或缺的. 恒星的前身是一团密度不匀的气体(主要是氢). 密度较大处有较强引力，吸引来更多气体，逐渐形成一个球对称气团. 气团中任一薄球层(见图 9-8)内的任一体元所受的来自气团的引力(自引力)都指向球心，因此整个气团在自引力作用下收缩. 这是引力势能转化为热能的过程，因此温度 T 不断升高. 根据经典理想气体的压强公式

$$p = knT \quad (k \text{ 为玻尔兹曼常数，} n \text{ 为数密度.}), \tag{9-3-31}$$

气团中的压强 p 随 T 不断增大,因此任一薄球层由于压强梯度 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ [见式(9-3-18)]导致的外向力也越大，看来当温度足够高时有可能遏止收缩. 然而在没有能源的情况下这是不可能的：由于气团温度比周围高，它不断向外辐射能量. 如果收缩停止，温度(因而压强)就要下降，薄球层内外的压强差也就抗衡不了自引力. 从能量角度看它也必须不断收缩，以使引力势能(的一部分)不断转化为辐射出去的能量. 经过一段时间的缓慢收缩，气团中心的温度和密度终于高到足以点燃热核反应的程度. 中心附近(一个称为星核的中心球)的氢经热核聚变而成氦(与氢弹爆炸的反应相同)，同时释放巨大能量，使由于辐射而损失的能量得以补充(无须再依靠引力势能转化而来)，气团就不再收缩而达到平衡. 这时的气团开始成为一颗恒星. 气团内任一点的压强梯度值 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ 满足稳定平衡条件(9-3-18). 太阳就是普通恒星的一例. 它已在这种靠星核内部烧氢变氦而维持的稳定状态中度过了约 45 亿年，大约还能保持这种状态 50 亿年. 总有一天星核内的氢全部变为氦，只有周围的一薄层氢仍在燃烧，星体内部的情况可由图 9-9 粗略表示. 当星核的温度尚未达到点燃氦的核聚变的程度时，情况与先前的星核尚未达到点燃氢的情况类似：氦球在自引力作用下再次收缩，同时变热. 这使周围薄层的氢燃烧加剧，从而导致星球外部膨胀和冷却，变成一颗**红巨星**(red giant). “红”是由于表面温度降低，“巨”则因膨胀得名. 氦球收缩导致的高温高密可能达到点燃氦的聚变反应(烧氦变碳或氧)的程度，所释放的能量再次使星核达到稳定平衡. 这种靠氦燃烧维持的平衡的持续期远短于氢燃烧的持续期. 当氦烧成碳(或氧)时星核再度收缩. 恒星的晚年命运因质量而异. 对于质量较小的恒星(包括太阳)，星核的收缩不能提供足够温度使碳发生核聚变，靠核能维持平衡已不再可能. 还有没有什么力量足以抗衡自引力？经典物理学中不存在这样的力量. 遏

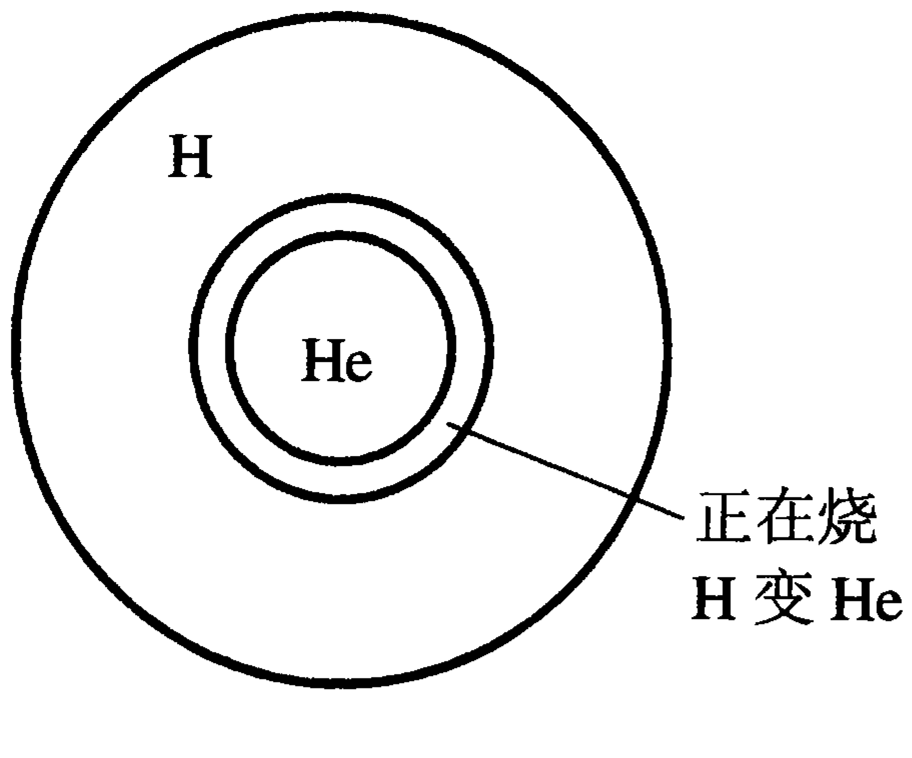


图 9-9　星核内部氢烧完后略况

止自引力收缩必须有足够的压强梯度[在牛顿引力论中体现为式(9-3-18)，在广义相对论中为式(9-3-17)]．星体由氢、氦及其他元素组成．星内的高温使这些元素的原子处于电离状态．按照经典物理学，这一离子和电子的组合可看作理想气体，由式(9-3-31)可知，在给定密度下要获得高压就要有高温，由于星体不断辐射能量，除核反应外没有任何机制可以提供能量以维持高温．然而，根据量子物理学，即使是绝对零度下的系统也有可能存在可观的压强．以电子气为例．在经典物理学中，电子的平均动能为 $3kT/2$，$T=0$ 时平均动能为零，所有电子都处于能量为零的状态．然而，根据量子物理学，电子服从泡利不相容原理，一个能级至多可被两个电子占据(它们的自旋反向，故为两种不同状态.)．因此，在 $T=0$ 时，电子一方面要“挤”进能量尽可能低的状态；另一方面，由于每一能态只许存在两个电子，众多电子必须占满由能量为零开始直至能量为某值 E_F 的所有状态(只有能量大于 E_F 的态全部空着)．E_F 叫**费米能**(fermi energy)，其值随密度的增加而增大．这就表明，即使处于绝对零度，电子气中的电子也不像经典物理断言的那样完全没有运动，它们具有并非起因于热运动(而是起因于不相容原理)的动能，这种动能对压强和能量密度都有贡献．$T=0$ 的电子气叫(完全)**简并电子气**(degenerate electron gas)，由上述原因引起的压强叫**电子简并压**(electron degenerate pressure)．在普通密度下，费米能 E_F 很小(例如常见金属中电子气的 E_F 只有几个电子伏)，相应的电子简并压微不足道．但简并压在高密情况下的作用却很可观．星核在氢、氦烧完后的再次收缩造成的高密度使电子具有很高的费米能 E_F．虽然星核内的温度 T 用通常标准衡量很高，但因 E_F 很大，有 $kT \ll E_F$，因此电子由于热运动对压强 p 的贡献远小于电子由于不相容原理和高 E_F 而具有的动能对 p 的贡献．在这个意义上与 $T=0$ 的情况没有太大差别．所以这时星内的电子可看作简并电子气，其简并压有可能抵消自引力，使星体保持平衡，永不收缩．这种靠电子简并压支撑的稳定星体称为**白矮星**(white dwarf)．“矮”是指比普通恒星小得多，“白”则由表面温度很高得名．一个孤立的星体一旦演化为白矮星就不再有重要的演化过程．因为温度比外界高，它将不断辐射能量．由于没有能源，辐射导致温度下降，直至与周围温度相等，因而再也不被看见(许多文献称此为“黑矮星”，即“black dwarf”.)．白矮星的存在性早已为天文观测所证实，天狼星 B 是人类发现的第一颗白矮星．直观地想，质量越大的星体自引力越强，只有质量足够小的星体才能靠电子简并压支撑而成白矮星．钱德拉塞卡最先求得白矮星的质量上限 $M_{Ch} \cong 1.3M_\odot$ [参见 Chandrasekhar(1939)]．这一工作以及他一生对天体物理学的贡献使他于 1983 年获得诺贝尔物理奖．选读 9-3-3 将简介钱氏质量上限的推导过程．

星体在演化过程中会因抛出物质而使质量减小．当说到白矮星满足 $M < M_{Ch}$ 时，M 是指剩余质量．据估算，初始质量小于 $6 \sim 8M_\odot$ 的星体都将经过红巨星阶

段并抛出大量物质而成为质量约为 $0.5\sim0.6M_\odot$ 的白矮星.

如果 $M>M_{\rm Ch}$，则电子简并压不足以维持星体平衡，星核内部的核聚变反应将一级级继续，直至烧成铁和镍. 这是结合得最紧的原子核(核子的平均结合能最大)，不可能因核聚变而放能. 于是星核在自引力作用下急剧收缩，密度和温度急剧增大. 这时自引力很强，牛顿近似[式(9-3-18)]不再适用，必须使用广义相对论的式(9-3-17). 对给定的 $\rho(r)>0$，式(9-3-17)右边总大于式(9-3-18)右边(指绝对值)，因此在广义相对论中为达到平衡所需的中心压强更大，平衡更难实现. 在如此高温高密下，高能光子可将铁-镍原子核打碎成中子、质子或轻核(光分裂)，电子也将同质子反应(逆 β 衰变)而成中子和中微子(后者溢出星体). 于是中子在星核内占了绝大部分. 中子也是费米子，也服从泡利不相容原理. 在达到核密度($\sim10^{17}\,\rm kg\cdot m^{-3}$)时中子的费米能 $E_{\rm F}$ (除以玻尔兹曼常数 k)大大高于星内温度 T，① 因而可以看作简并中子气(即认为 $T\cong0$)，其简并压也有可能抵消自引力，使星体达到稳定平衡. 这种靠中子简并压支撑的稳定星体称为**中子星**(neutron star). 由于中子星内的密度达到甚至超过核密度，人们对这种条件下的物态方程的了解远不如在较低密度时确切，这给中子星质量上限的计算带来困难. 不同文献给出不同结果，只能大概说中子星的质量上限为 $2M_\odot$(或 $2\sim3M_\odot$). 由于达到核密度，不妨认为中子星是一个"超大型原子核". 中子星比白矮星小得多，典型中子星半径只有 10km 的量级，而白矮星的半径约在 3 千至 2 万公里之间. 中子星是一种非常特别(且复杂)的天体，它有各种"极端"(超常)表现：高达核密度的密度、异乎寻常的强磁场(高达 10^{12} 高斯)、甚高速的旋转(频率从 1 Hz 至近 1000Hz)、离光速不远的高声速、超流的内部……. 人们至今还难于对它了解得很透彻.

中子星的第一个理论模型是 Oppenheimer 和 Volkoff 于 1939 年发表的. 由于文章没有给出可观测的物理效应，对中子星的研究冷落了 28 年. 中子星的存在从 1967 年发现脉冲星开始得到证实. 脉冲星是一种在地球上测到的周期性电磁脉冲信号的信号源，周期约为 1s 或更小，其唯一可信的解释是：这是一颗旋转着的中子星，其表面的强磁场导致磁偶极辐射，辐射的方向性同中子星的旋转的结合使地球收到电磁脉冲信号 (1967 年发现的脉冲星的电磁脉冲是射电脉冲). 只有中子星(半径很小且表面引力很强)才能在如此高角速的旋转中免于"散架".

星核在形成中子星之前的收缩非常急剧，所以称为**引力坍缩**(gravitational collapse). 正在急剧坍缩的星核一旦达到足够的密度并被中子简并压所遏制，其强大的能量将表现为向外的冲击波并迫使外层物质向四周飞出，形成能量极大的**超新星爆发**(supernova explosion). 著名的两个超新星遗址——蟹状星云和船帆状星云——中都发现了脉冲星，这对上述理论是重要支持. 我国古代文献对超新星

① 更准确的说法是：由于放出大量高能中微子，在中子星形成几秒钟后有 $E_{\rm F}\gg kT$.

爆发事件有过极其丰富的记录，其中宋史志卷九关于公元 1054 年(北宋期间)观测到的超新星(SN1054)的记录特别受到现代国际同行的重视[其中一页的照片可在 Misner et al.(1973)的扉页中找到]. 蟹状星云正是 SN1054 的遗迹. 地球上最近一次观测到的肉眼可见的超新星爆发是在 1987 年(SN1987a). 该超新星位于银河系的近邻星系——大麦哲伦云，距地球约为 16 万光年. 超新星爆发的详细机制仍是一个正在深入研究的课题.

如果球对称恒星在抛出物质后的质量仍高于中子星质量上限($\sim 2M_\odot$)，就没有任何力量可以阻止它的引力坍缩，它将无限制地缩为密度和曲率都无限大的"奇点"，并形成施瓦西黑洞(见 § 9.4).

[选读 9-3-3]

本选读介绍电子简并压公式及白矮星质量上限的推导. 先讨论电子简并压. 设 x, y, z 是电子的空间坐标，k_x, k_y, k_z 是电子动量的 3 个坐标分量，则 $\{x, y, z; k_x, k_y, k_z\}$ 是 6 维相空间的坐标. 相空间可分为许多量子相格 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z$ (每个相格相当于一个能级)，相格的体积为 h^3(h 为普朗克常数). 故

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z = h^3 . \tag{9-3-32}$$

令 $k \equiv (k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2)^{1/2}$，则动量空间中 k 值在(k, $k+\mathrm{d}k$)范围内的点组成一个体积为 $4\pi k^2\mathrm{d}k$ 的球壳，位置在 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 内、k 值在(k, $k+\mathrm{d}k$)内的状态在相空间中的代表点则组成体积为 $4\pi k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的壳层. 既然每个量子相格体积为 h^3，壳层内就有 $4\pi k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/h^3$ 个相格. 因为每个相格对应于一个能级，而每个能级至多由两个电子占领，壳层内的电子数不会超过 $8\pi k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/h^3$. 对 $T=0$ 的完全简并电子气，$E \leqslant E_\mathrm{F}$ 的每一能级有两个电子，$E > E_\mathrm{F}$ 的所有能级全都空着，因此

$$\text{单位体积中 } k \text{ 值在 } (k,\ k+\mathrm{d}k) \text{ 内的电子数 } f(k)\mathrm{d}k = \begin{cases} 8\pi k^2\mathrm{d}k/h^3, & k < k_\mathrm{F} \\ 0\quad, & k > k_\mathrm{F} \end{cases}, \tag{9-3-33}$$

其中 k_F 是同 E_F 相应的**费米动量**. 于是电子的数密度(单位体积中不论什么动量的电子数)

$$n_\mathrm{e} = \int_0^{k_\mathrm{F}} \frac{8\pi k^2\mathrm{d}k}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} k_\mathrm{F}{}^3 . \tag{9-3-34}$$

星内的质量密度 ρ 主要来自核子的贡献. 设核子的数密度和质量分别为 n_N 和 m_N，则 $\rho = n_\mathrm{N}m_\mathrm{N}$. 令 $\mu \equiv n_\mathrm{N}/n_\mathrm{e}$ (对于氢已烧完的星体，$\mu \cong 2.$)，则

$$\rho = \mu n_\mathrm{e} m_\mathrm{N} , \tag{9-3-35}$$

其中 n_e 由式(9-3-34)表出. 欲得物态方程还须计算简并压强 $p_{\text{简}}$. 压强是单位面积上

的压力，即该面的左侧物质对右侧物质的力，亦即两侧之间在单位时间内交换的动量(力的定义就是动量变化率 $d\vec{k}/dt$). 这动量交换是由从左侧穿过该面进入右侧以及从右侧穿过该面进入左侧的电子所导致(每个电子带有一定动量). 因此，压强等于单位时间内通过单位面积的电子的动量的矢量和. 设 $d\sigma$ 是星内空间的一个面元，法矢为 $\vec{n}$ (见图 9-10). 先考虑动量为 $\vec{k}$ 的电子，相应速度为 $\vec{u}$，即 $\vec{k}=(1-u^2)^{-1/2}m_e\vec{u}$ (其中 $u^2\equiv\vec{u}\cdot\vec{u}$). 以 $d\sigma$ 为底、u 为母线长作一斜柱体，母线与 $\vec{k}$ 平行. 设 θ 为 $\vec{n}$ 与 $\vec{k}$ 的夹角，则柱体的体积等于 $u\cos\theta d\sigma$，由式(9-3-33)可知位于柱体内部、k 值在$(k, k+dk)$内的电子数为 $f(k)u\cos\theta d\sigma dk$. 至今尚未涉及 $\vec{k}$ 的方向. 以面元 $d\sigma$ 中一点 q 为球心作一球面，把右半球面分为许多面元，每个面元对应于一个元立体角，其中以 $\vec{k}$ 为轴的一个记作 $d\Omega_{\vec{k}}$. 由于整个球面对应的立体角为 4π，位于柱体内、动量大小在$(k, k+dk)$内且方向限于 $d\Omega_{\vec{k}}$ 内的电子数只有 $f(k)u\cos\theta\, d\sigma dk d\Omega_{\vec{k}}/4\pi$. 这些电子(带着动量)在单位时间内穿过 $d\sigma$，因此单位时间内穿过 $d\sigma$ 的、满足上述条件[①大小在$(k, k+dk)$内；②方向在 $d\Omega_{\vec{k}}$ 内]的电子总动量的法向分量为

$$[f(k)u\cos\theta\, d\sigma dk d\Omega_{\vec{k}}/4\pi]\; k\cos\theta = f(k)uk\cos^2\theta\, d\sigma dk d\Omega_{\vec{k}}/4\pi\,.$$

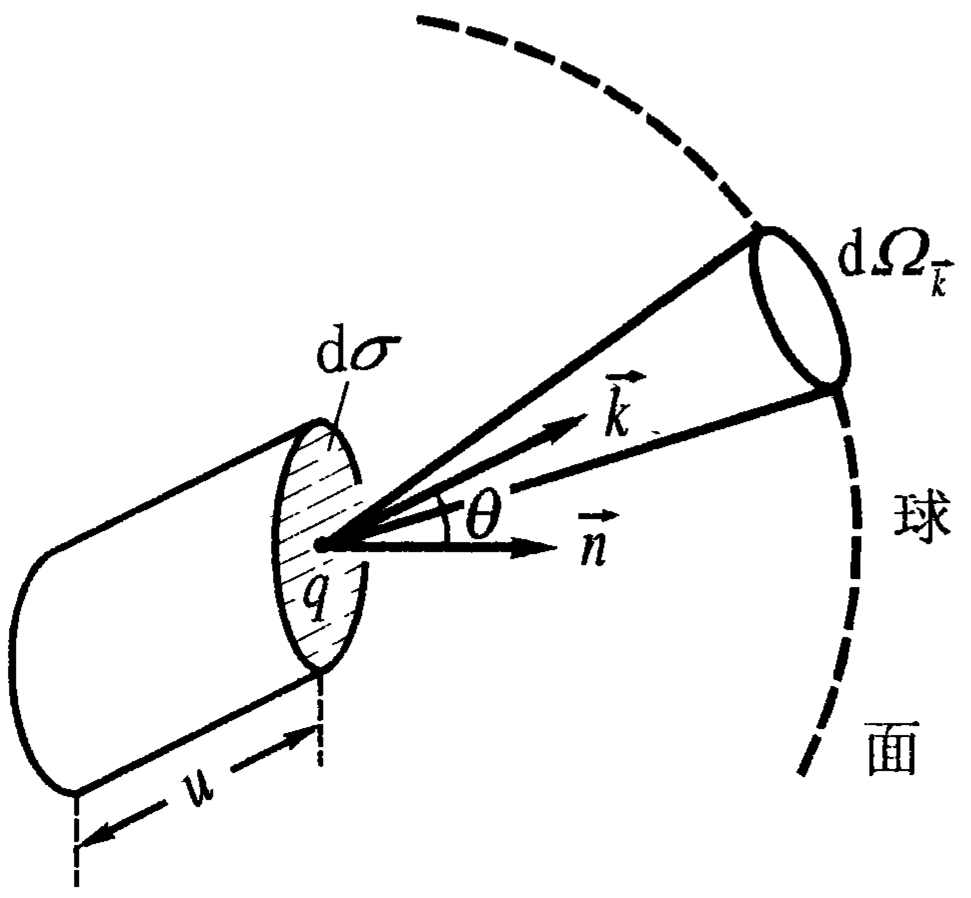


图 9-10　位于斜柱体内的电子在单位时间内穿过面元 $d\sigma$，由此可计算 $d\sigma$ 所在处的压强

于是单位时间内流过单位面积的所有电子(不论其 $\vec{k}$ 的大小和方向如何)的总动量，亦即 $d\sigma$ 所在处的简并压强为

$$p_{简}=\frac{1}{4\pi}\int_{球面}\cos^2\theta\, d\Omega_{\vec{k}}\int_0^\infty f(k)u(k)k dk=\frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{k_F}k^3u(k)dk\,, \qquad (9\text{-}3\text{-}36)$$

其中第二步用到式(9-3-33). 利用 $k=(1-u^2)^{-1/2}m_e u$ 可把式(9-3-36)改写为

$$p_{简}=\frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{k_F}\frac{k^4 dk}{(k^2+m_e{}^2)^{1/2}}\,. \qquad (9\text{-}3\text{-}37)$$

再用式(9-3-34)把式(9-3-35)改写为

$$k_{\mathrm{F}} = h\left(\frac{3\rho}{8\pi\mu m_{\mathrm{N}}}\right)^{1/3}, \tag{9-3-38}$$

代入式(9-3-37)便可求得物态方程的显表达式. 这个方程颇为复杂，但可通过对两个极端情况的讨论而得到有用的结论. 当 $m_{\mathrm{e}} >> k_{\mathrm{F}}$ 时 $u_{\mathrm{F}} << 1$，电子运动可用牛顿力学描述，这称为非相对论情况；当 $m_{\mathrm{e}} << k_{\mathrm{F}}$ 时 $u_{\mathrm{F}} \cong 1$，电子运动必须用狭义相对论描述，这称为极端(狭义)相对论情况. 非相对论条件 $m_{\mathrm{e}} >> k_{\mathrm{F}}$ 和极端相对论条件 $m_{\mathrm{e}} << k_{\mathrm{F}}$ 又可分别表为 $\rho << \rho_{\mathrm{C}}$ 和 $\rho >> \rho_{\mathrm{C}}$，其中**临界密度** ρ_{C} 由 $m_{\mathrm{e}} = k_{\mathrm{F}}$ 定义，可用式(9-3-38)求得为

$$\rho_{\mathrm{C}} = 8\pi\mu m_{\mathrm{N}} m_{\mathrm{e}}^{3} / (3h^{3}). \tag{9-3-39}$$

改写为国际制形式(补 c^3)并代入具体数值(取 $\mu = 2$)得

$$\rho_{\mathrm{C}} = 8\pi\mu m_{\mathrm{N}} m_{\mathrm{e}}^{3} c^{3} / (3h^{3}) \cong 2\times10^{9}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}},$$

可见临界密度 ρ_{C} 约为水密度的 2×10^{6} 倍. 对 $\rho << \rho_{\mathrm{C}}$ (非相对论情况)，式(9-3-37)近似给出

$$p_{简} = \frac{8\pi k_{\mathrm{F}}^{5}}{15h^{3}m_{\mathrm{e}}}, \tag{9-3-40}$$

以式(9-3-38)代入并代入国际制具体数值得

$$p_{简} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^{2}}{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{N}}^{5/3}}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{5/3} = 10^{7}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{5/3} \quad (国际制). \tag{9-3-41}$$

在极端相对论情况下式(9-3-37)近似给出

$$p_{简} = \frac{2\pi k_{\mathrm{F}}^{4}}{3h^{3}}, \tag{9-3-42}$$

以式(9-3-38)代入上式，改写为国际制形式(补 c)并代入具体数值得

$$p_{简} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{hc}{8m_{\mathrm{N}}^{4/3}}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{4/3} = 1.24\times10^{10}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{4/3} \quad (国际制). \tag{9-3-43}$$

式(9-3-41)和(9-3-43)可统一表为

$$p_{简} = K\rho^{\gamma}, \qquad K = 常数, \qquad \gamma = 常数. \tag{9-3-44}$$

物态方程为(9-3-44)的天体叫**多层球**(polytrope). 由简并电子气组成的星体在两种极端情况下都是多层球(但在两种极端情况之间则不是)，其中，对非相对论情况有 $\gamma = 5/3$；对极端相对论情况有 $\gamma = 4/3$. 设星体为多层球，用式(9-3-8)把流体静力学平衡条件式(9-3-18)改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r^{2}}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r}\right] = -\,4\pi\rho(r)\,r^{2}, \tag{9-3-45}$$

由此出发利用纯计算技巧可得 [见温伯格(1972)中译本 P.356~358] 星体半径 R 和质量 M 对中心密度 ρ_0 的依赖关系

$$R = a_\gamma \rho_0^{(\gamma-2)/2}, \tag{9-3-46}$$

$$M = b_\gamma \rho_0^{(3\gamma-4)/2}, \tag{9-3-47}$$

其中常数 a_γ 和 b_γ 同 γ 有关，对 $\gamma = 5/3$ 和 $\gamma = 4/3$ 分别为

$$\begin{aligned} a_{5/3} &= 6.3\times 10^8 \mu^{-5/6}, \qquad b_{5/3} = 1.7\times 10^{26}\mu^{-5/2}; \\ a_{4/3} &= 5.3\times 10^{10} \mu^{-2/3}, \qquad b_{4/3} = 11.6\times 10^{30}\mu^{-2}. \end{aligned} \tag{9-3-48}$$

在此基础上就可进一步讨论白矮星. 当星体质量 M 足够小时，$\rho_0 << \rho_C$，式(9-3-41)对星内处处适用，整个星球内的电子气组成 $\gamma = 5/3$ 的多层球. 当中心简并压等于为保持平衡所需的中心压强时星体平衡. 平衡时的半径 R 与质量 M 的关系可由式(9-3-46)、(9-3-47) (取 $\gamma = 5/3$)和(9-3-48)看出

$$R \propto M^{-1/3}. \tag{9-3-49}$$

可见 $\gamma = 5/3$ 的白矮星的半径随质量增大而减小. 这与生活经验以及由行星得来的经验相悖，稍后将对此做一粗略解释. 若式(9-3-49)恒成立，则电子简并压可支持任何质量的星体，因为只要把 M 值代入式(9-3-49)便可求得一个平衡的星体半径 R. 然而，当质量 M 足够大时中心压强将大到电子的(狭义)相对论效应非考虑不可的程度，星体不可再看作 $\gamma = 5/3$ 的多层球，式(9-3-49)不再成立. 事实上，由于 ρ_0 随 M 增加而增加，中心附近的电子首先达到极端相对论性的程度，星内出现一个可看作 $\gamma = 4/3$ 的多层球的核心球，进而逐渐扩大到整个星体. 由式(9-3-47)①可知当 $\gamma = 4/3$ 时 M 同 ρ_0 无关，与 $\gamma = 5/3$ 的情况十分不同. 当整个星体可看作 $\gamma = 4/3$ 的多层球时，由式(9-3-48)可知这个同 ρ_0 无关的 M 值(记作 M_{Ch})为

$$M_{Ch} = b_{4/3} = 5.8\times(2\times 10^{30})\,\mu^{-2} \quad (\text{国际制}).$$

注意到在国际制中 $M_\odot = 2\times 10^{30}$，有

$$M_{Ch} = \frac{5.8}{\mu^2} M_\odot. \tag{9-3-50}$$

式(9-3-47)是在流体静力学平衡的条件下导出的，如果质量大于 M_{Ch}，星体就不能平衡. 事实上，由式(9-3-49)和(9-3-44)可知上述结论可以如下理解：作为粗略计算，假定星内密度均匀，则由式(9-3-23)可知为保持平衡所需的中心压强

$$p_{\text{引}} \propto M^2 R^{-4}, \tag{9-3-51}$$

把 p_0 改记为 $p_{\text{引}}$ 旨在强调这是为抗衡自引力所需的中心压强. 由式(9-3-44)知简并电子气所能提供的简并压强 $p_{\text{简}} \propto M^\gamma R^{-3\gamma}$，于是

① 这时仍有 $p << \rho$ 和 $m(r) << r$，因此牛顿公式(9-3-18)以及由它导出的式(9-3-45)~(9-3-48)仍适用.

$$P_{引}/p_{简} \propto M^{2-\gamma}R^{3\gamma-4} = \begin{cases} M^{1/3}R, & 对\ \gamma = 5/3 \quad (a) \\ M^{2/3}, & 对\ \gamma = 4/3 \quad (b) \end{cases} \quad . \tag{9-3-52}$$

设星体内的电子气处于非相对论情况($\gamma = 5/3$)且 $M < M_{Ch}$，则由式(9-3-52a)知存在 R 值使 $p_{引}/p_{简}=1$，星体半径等于此 R 值时平衡. 若 M 略有增大，则 $p_{引}/p_{简}>1$，自引力略大于简并压力，星体将收缩至较小半径而重获平衡(这可看作对“质量越大的白矮星半径越小”这一结论的具体解释). 然而，如果 M 大到使全星球为 $\gamma = 4/3$，则由式(9-3-52b)可知 $p_{引}/p_{简}$ 同 R 无关. 在这种极端情况下只有 M 等于某一适当值 M_{Ch} 时才能平衡. 若 $M < M_{Ch}$，则 $p_{引}/p_{简}<1$，即简并压大于自引力，R 将变大直至退出极端相对论情况. 反之，若 $M > M_{Ch}$，则 $p_{引}/p_{简}>1$，星体将收缩，越缩越使 γ 更精确地等于 4/3，$p_{引}/p_{简}$就不因 R 变小而改变，于是星体只能继续收缩而不能在电子简并压支撑下平衡. 可见 M_{Ch} 的确是白矮星(其特点就是靠电子简并压支撑而达平衡)的质量上限. 由于白矮星内部一般为氦、碳或氧，可取 $\mu = 2$，代入式(9-3-50)便得 $M_{Ch} = 1.45M_{\odot}$. 以上仅是简化的讨论. 更准确的讨论和计算给出略小于此值的 M_{Ch}，例如 $M_{Ch} = 1.3M_{\odot}$.　　**[选读 9-3-3 完]**

§ 9.4 Kruskal 延拓和施瓦西黑洞

施瓦西真空度规在施瓦西坐标系的线元为

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{9-4-1}$$

当 $r = 2M$ 时，$g_{11} = \infty$(无意义)；当 $r = 0$ 时，g_{00} 和 g_{11} 都无意义. 人们称这些能使 $g_{\mu\nu}$ 变得无意义(或退化)的点为**奇点**(singularity)，并说 $g_{\mu\nu}$ 在奇点处存在**奇性**. 英语文献中奇点和奇性是同一个词，即 singularity. 但在汉语陈述中往往愿意把“奇性”这一性质与奇性出现的“地点”相区别，于是要用奇性和奇点两个词. ① 奇点的出现有两个原因：①度规张量 g_{ab} 在该点表现良好，只是由于坐标系选择不当而使 g_{ab} 在该系的某些分量在该点表现不好，这叫**坐标奇点**(coordinate singularity)，可通过选择适当坐标系消除；②度规张量 g_{ab} 本身在该点表现不好(是奇异的)，这叫**真奇点**(true singularity)或**时空奇点**(spacetime singularity)，是真正棘手的问题，也是广义相对论的老大难问题. 后面将看到，$r = 2M$ 处的奇性只是坐标奇性，时空奇性只在 $r = 0$ 处存在. 令 $r_S \equiv 2M$ (叫**施瓦西半径**)并把常数 G 和 c 补上，得

---

① 然而“奇点”的“点”字有时会引起误解，因为 $r = 0$(或 $r = 2M$)在 4 维语言中代表一张超曲面而不是一个点.

$$r_S = 2GM/c^2 \cong 3M/M_\odot \quad \text{(km)} .$$

太阳的 $r_S \cong 3\text{km}$，远小于太阳半径，而施瓦西外解不适用于太阳内部，故对太阳(以及普通星体)根本没有奇性问题. 然而，对于经历引力坍缩成为黑洞的球对称星体(Birkhoff 定理保证其外部时空几何由施瓦西度规描述)，奇性问题却有重要意义.

9.4.1 时空奇点(奇性)的定义

奇点(奇性)概念与物理量的发散性有密切联系，它在广义相对论问世前早已存在，然而广义相对论的时空奇性问题却比任何其他物理理论的奇点问题困难得多(从定义起就困难). 关键在于，在任何非广义相对论的理论中，背景时空是早已给定的(例如闵氏时空)，只要所关心的物理场在某时空点发散(或无意义)，就说该点是该物理场的奇点. 例如，在 3 维语言中，点电荷的静电场强 $\vec{E} = Q\,\vec{r}/4\pi r^3$ 在 $r=0$ 处没有意义(或说 $r \to 0$ 时 $E \to \infty$)，所以就说这个点是静电场 $\vec{E}$ 的奇点，或说 $\vec{E}$ 在 $r=0$ 点有奇性. 然而广义相对论则不同. 我们关心的是时空奇性，即度规**场的奇性**，于是度规场在这个问题上身兼背景场和物理场的双重角色(既是舞台又是演员). 仿照静电场奇点的定义方法，似乎可对时空奇点给出如下定义："时空(M, g_{ab})叫奇异的，若 $\exists\, p \in M$ 使 g_{ab} 在 p 点无意义(或发散)，p 点叫时空奇点. " 然而，时空本身按定义就是一个配以洛伦兹度规的 4 维流形 M，度规 g_{ab} 在 M 的各点不但应有意义，而且要表现良好，如连续或若干阶可微等. 如果 M 中存在点 p 使 $g_{ab}|_p$ 无意义，p 点本来就不属于时空(不是合格的时空点)，所以真正的时空应是(M', g_{ab})，其中 M' 是把 p 点开除后的结果，即 $M' \equiv M - \{p\}$. 例如，若以(M, g_{ab})代表施瓦西时空，则应明确所有 $r=0$ 的点都不属于 M. 看来时空奇性的定义可修改为："时空叫奇异的，若其中某些区域已被删去. " 但是问题在于如何判断"某些区域已被删去". 下面介绍一个巧法. 以闵氏时空为例. 设 $\gamma(\lambda)$是($\mathbb{R}^4$, η_{ab})中不可延伸的任一测地线(指已延伸到向两端都不可再延伸的程度)，则其仿射参数 λ 总可从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 取值[指 $\gamma(\lambda) \in \mathbb{R}^4$，$\forall \lambda \in (-\infty, \infty)$]. 但若删去 $\gamma(\lambda)$的一点 p，就会在 $\mathbb{R}^4$ 中留下一个"洞"，成为 $M' \equiv \mathbb{R}^4 - \{p\}$，导致 $\gamma(\lambda)$分裂为两条测地线 $\gamma'(\lambda)$ 和 $\gamma''(\lambda)$，其仿射参数 λ 的取值范围[即曲线映射 γ' 和 γ'' 的定义域]分别是 $(-\infty, \lambda_p)$ 和 (λ_p, ∞)，我们说 $\gamma'(\lambda)$ 和 $\gamma''(\lambda)$ 都是不完备的测地线. 一般地说，(M, g_{ab})中一条不可延伸的测地线称为**不完备测地线**(incomplete geodesic)，若其仿射参数的取值范围不等于 $(-\infty, \infty)$. 不完备测地线的存在在很大程度上可以看作是时空某些区域被删去(因而有"洞")的标志. 于是可考虑这样的定义："若时空存在一条(或一条以上)不完备测地线，就称它为奇异时空. " 然而这个定义有个严重的缺点，就是"打击面"过宽. 一个本来并不奇异的时空，如果人为地挖去一点，按上述定义就成了奇异时空，这是不希望的. 克服这个缺点的办法是在定义

中加上一个限制：所讨论的时空必须是不可延拓的，即不能通过添加某些点使它变得更大．① 人为挖去若干点的时空不是不可延拓的，所以不满足这个定义．再从物理上是否奇异的角度审查上述定义．如果不可延拓时空中存在一条不完备类时测地线，从物理上看的确非常奇异：它代表的自由下落观者在有限时间内(根据自己的标准钟)竟会在时空中消失(或在有限时间的过去不曾在时空中存在过)! 类似地，不完备类光测地线在物理上也是奇异的，因为类光测地线代表光子的世界线．然而，类空测地线不是任何粒子的世界线，似乎没有理由认为只存在不完备类空测地线的时空是物理上奇异的．于是改用如下定义[见 Hawking and Ellis(1973)]：

定义 1　若不可延拓时空中存在一条(或一条以上)不完备的类时或类光测地线，就称它为**奇异时空**(singular spacetime)，或说它有**奇点**(**奇性**).

然而定义 1 仍有缺点．例如，存在这样的时空[见 Geroch(1968)]，它没有任何不完备测地线，但却有一条奇怪的(已做了最大延拓的)非测地类时线，其线长有限，其 4 加速(的大小)有界．这表明飞船内沿此曲线旅行的观者经有限时间后竟会在时空中消失(线长有限和 4 加速有界保证飞船只需有限燃料就可走完这条曲线，而这样的飞船原则上存在．)! 这样的时空在物理上是奇怪得足以称为奇异时空的，可惜按定义 1 它却不是．这说明该定义存在“打击面”过窄的缺点．定义 1 的另一缺点是时空有“洞”的直观说法与存在不完备测地线并不总一致．例如，存在这样的测地不完备时空(含有不完备的类时、类光、类空测地线)，其背景流形是紧致的，因而是无“洞”的(根据定理 1-3-9，紧致流形中任何点序列都有聚点，因而流形无“洞”．)，见 Wald(1984)．虽然定义 1 存在这样那样的缺点，但仍不失为首选定义．Hawking 和 Penrose 的奇性定理(1965~1970 年)的证明中用的就是这个定义(下册附录对奇性定理将有粗浅介绍)．后面将看到做了最大延拓的施瓦西时空仍存在许多不完备的类时和类光测地线(其存在性都与删去 $r=0$ 有关)，因此施瓦西时空是奇异时空，$r=0$ 处存在时空奇性(因而 $r=0$ 的点都不属于施瓦西时空).

许多奇异时空在沿不完备测地线趋于奇点时都有“曲率发散性”．曲率是张量，其分量同基底有关，正常的张量在不好的基底下的分量也会发散，因此在谈及曲率发散性时先要给出明确且有实质性意义的定义．首先可考虑由 $R_{abc}{}^d$，g_{ab} 及 ∇_a 构成的各种标量[例如 R，$R_{ab}R^{ab}$，$R_{abcd}R^{abcd}$，$R_{abcd}R^{cdef}R_{ef}{}^{ab}$，$(\nabla^c R^{ab})\nabla_c R_{ab}$]及其多项式．如果这些量中有一个沿不完备测地线发散，就说时空存在 **s.p.曲率奇性**(s.p.curvature singularity)，其中 s. p. 是 scalar polynomial(标量多项式)的缩写．然而

① 准确的数学定义是：时空(M, g_{ab})叫不可延拓的，若不存在时空 (M', g'_{ab}) 使(M, g_{ab})与 (M', g'_{ab}) 的真子集之间存在等度规映射.

也存在这样的时空，其标量多项式全部为零但 $R_{abc}{}^{d} \neq 0$(类似于类光矢量自我缩并为零而矢量自身非零). 因此还应考虑曲率发散性的另一种定义：若 $R_{abc}{}^{d}$ 及其协变导数在沿测地线平移的任一标架场的分量中至少有一个发散，就说时空存在 **p.p. 曲率奇性**，其中 p. p. 代表 parallelly propagated basis (平移基底). s. p. 曲率奇性蕴含 p. p. 曲率奇性，反之不然. 在肯定时空存在至少一条不完备的类时或类光测地线后，就可说时空是奇异的，然后再检查沿这些不完备测地线有无曲率发散性，这有三种可能：①有 s. p. 曲率奇性；②没有 s. p. 曲率奇性却有 p. p. 曲率奇性；③没有曲率奇性(没有曲率发散性). Taub-NUT 时空就是没有曲率奇性的奇异时空的例子[见 Hawking and Ellis(1973) § 5.8 和 P.261]. 另一方面，某些时空虽然存在曲率发散性，但只当"趋于无限远"时才发散，这种时空不应视为奇异时空. 可见，不用测地不完备性而只用曲率发散性定义时空奇性不妥.

9.4.2 Rindler 度规的坐标奇点

如果你能找到一个坐标系使施瓦西度规在该系的分量在 $r=2M$ 处表现正常，便可断定 $r=2M$ 只是坐标奇性. 这是判断坐标奇点的充分性判据. 可惜在一般情况下寻找这种"好"坐标系并非易事，不存在"旱涝保收"的方法. 幸好施瓦西度规在 $r=2M$ 的奇性只涉及 4 维线元中的前两维，而在 2 维时空中寻找"好"坐标系的问题远比 4 维时空容易. 本小节先介绍一个虽然简单却很有启发性的例子. 考虑 2 维 **Rindler 时空**，其度规在坐标系 $\{t,x\}$ 中的线元表达式为

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 . \tag{9-4-2}$$

度规分量的行列式 $g=-x^2$ 在 $x=0$ 处为零，因此矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 无逆(退化)，可见 $g_{\mu\nu}$ 在 $x=0$ 处存在奇性. 欲证这是坐标奇性. 首先，注意 x 的取值范围不应包含 $x=0$. 相对论有个基本约定，即背景流形必须为连通流形，因此 x 的范围既可取 $x>0$ 也可取 $x<0$，但不可取二者的结合. 不失一般性，取 $x>0$，即限定 t，x 的取值范围为

$$-\infty < t < \infty, \qquad 0 < x < \infty . \tag{9-4-3}$$

寻找"好"坐标系以断定 $x=0$ 处的奇性是坐标奇性的方法基于以下事实：2 维时空中每点只有两个类光方向(而 4 维时空则有无数)，因此(局域地看)过每点只有两条类光测地线，于是全时空的类光测地线可分为两族. 如果发现某些类光测地线不完备，就说明所给时空被删去某些区域. 如能证明这些被删区域可以补上，即所给时空可以延拓，且 $x=0$ 是延拓后的时空中的一点，便可断定 $x=0$ 处的奇性只是坐标奇性. 下面是具体做法.

设 $\eta(\lambda)$ 是 Rindler 时空的一条类光测地线，λ 为仿射参数，则其切矢

$$(\partial/\partial\lambda)^a = (\partial/\partial t)^a dt/d\lambda + (\partial/\partial x)^a dx/d\lambda$$

满足

$$0 = g_{ab}(\partial/\partial\lambda)^a(\partial/\partial\lambda)^b = g_{00}(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda)^2 + g_{11}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)^2 = -x^2(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)^2,$$

因而对 $\eta(\lambda)$ 有

$$\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \pm 1/x, \qquad t = \pm\ln x + c \quad (c\ 为积分常数), \tag{9-4-4}$$

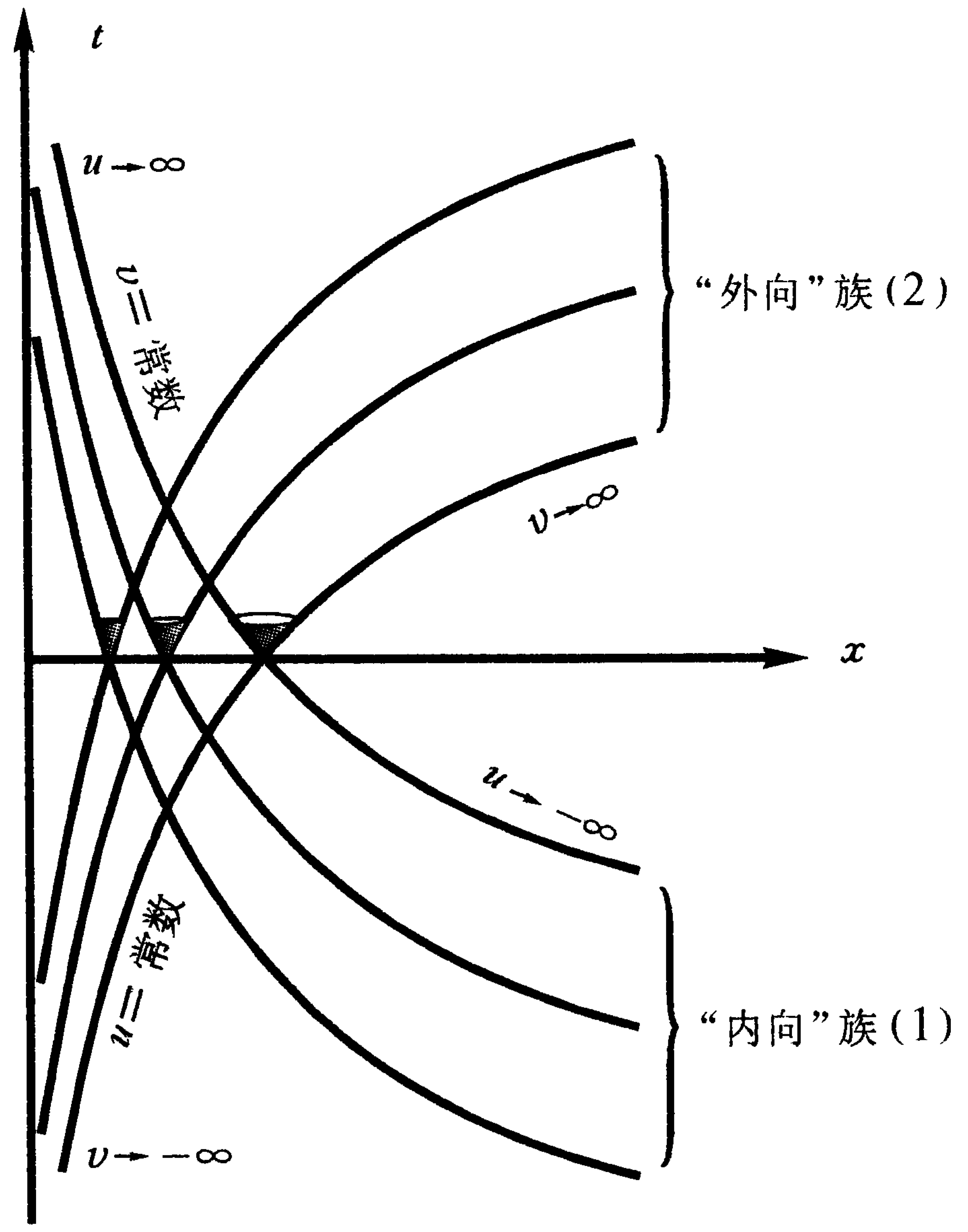


图 9-11　2 维 Rindler 时空中类光测地线的“内向”族 (1) 和“外向”族 (2) 在坐标系 $\{t, x\}$ 的表现

其中正号和负号分别代表“外向”族和“内向”族类光测地线(此处的“外向”和“内向”只为陈述方便引入，可任选一族为外向，另一族为内向.)，而不同 c 值则用以区分同一族中的不同线. 于是 $t+\ln x$ 和 $t-\ln x$ 分别在每一“内向”和“外向”类光测地线上为常数. 用下式定义坐标 v 和 u：

$$v := t + \ln x, \qquad u := t - \ln x, \tag{9-4-5}$$

则 v 在每一“内向”类光测地线上为常数，u 在每一“外向”类光测地线上为常数. 由式(9-4-5)得

$$t = \frac{1}{2}(v+u), \qquad x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(v-u)}, \tag{9-4-6}$$

微分后代入式(9-4-2)得

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{v-u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u. \tag{9-4-7}$$

可见 $0 = g_{vv} = g_{ab}(\partial/\partial v)^a(\partial/\partial v)^b$，这表明坐标基矢 $(\partial/\partial v)^a$ 为类光矢量. 同理，$(\partial/\partial u)^a$ 也是类光矢量. 因此称 v, u 为类光坐标. 坐标 t 和 x 的取值范围[见式(9-4-3)]

对应于v和u的下列取值范围(见图 9-11):

$$-\infty<v<\infty, \qquad -\infty<u<\infty . \tag{9-4-8}$$

这似乎表明所有类光测地线都是完备的，其实不然，因为v和u并非仿射参数. 仿射参数可借类时 Killing 矢量场$(\partial/\partial t)^a$求得. 根据定理 4-3-3，下面定义的E沿任一类光测地线$\eta(\lambda)$为常数

$$E := -g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial\lambda)^b = -g_{00}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda = x^2\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda , \tag{9-4-9}$$

其中λ为仿射参数. 注意到u在任一“外向”类光测地线上为常数，把式(9-4-6)代入式(9-4-9)得

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2E}\mathrm{e}^{v}\mathrm{d}v, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2E}\int \mathrm{e}^{v}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2E}\mathrm{e}^{v}+c_1, \qquad c_1 = 常数. \tag{9-4-10}$$

定义

$$V := \mathrm{e}^{v} . \tag{9-4-11}$$

因$\mathrm{e}^{-u}/2E$及c_1为常数，λ为仿射参数，式(9-4-10)表明$V\equiv \mathrm{e}^{v}$也是“外向”类光测地线的仿射参数(见定理 3-3-3). 由式(9-4-8)和$V\equiv \mathrm{e}^{v}$可知V的取值范围是$(0,\infty)$，可见“外向”类光测地线是不完备的. 同理，对“内向”类光测地线，

$$U := -\mathrm{e}^{-u} \tag{9-4-12}$$

是仿射参数. 由式(9-4-8)、(9-4-12)知U的取值范围是$(-\infty, 0)$，故“内向”类光测地线也是不完备的. 这是否表明 Rindler 时空是奇异时空、$x=0$处存在时空奇性? 不，关键在于 Rindler 时空并非不可延拓时空而是某个更大时空删去某些区域的结果. 要确信这一结论，先由式(9-4-11)、(9-4-12)导出

$$\mathrm{d}V\mathrm{d}U = \mathrm{e}^{v-u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u , \tag{9-4-13}$$

再代入式(9-4-7)得

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}V\mathrm{d}U . \tag{9-4-14}$$

新坐标V，U的取值范围

$$0<V<\infty, \qquad -\infty<U<0 \tag{9-4-15}$$

是由原始坐标x的取值范围$0<x<\infty$导出的，然而现在没有必要死守这一范围，因为由式(9-4-14)可知度规在坐标系$\{V, U\}$中的唯一非零分量$g_{VU}=-1/2$十分正常，即使V，U取值超出式(9-4-15)的范围，线元式(9-4-14)照样表现良好，根本不存在什么奇点. 假如一开始就把线元式(9-4-14)放你面前而不提及以前的所有内容，你自然认为其V，U取值毫无约束，即可在$(-\infty,\infty)$内任意取值. 这样，我们通过引入新坐标V，U而实现了对 Rindler 度规的定义域的延拓. $x=0$代表的是延拓后的定义域中的点(V轴的正半轴，见图 9-12.)，度规在这些点表现正常，只是度规在原始坐标系$\{t, x\}$中的分量在这些点表现不好. 其实这也很自然，$x=0$本来就不属于原始坐标系的坐标域(“擦边在外”)，当初称$x=0$处有奇性只不过是把原始坐标系不适当地用到了坐标域之外. 所以$x=0$处的奇性只是坐标奇性. 如果进一

步用下式定义坐标 T，X：

$$T := (V+U)/2\ ,\qquad X := (V-U)/2\ , \tag{9-4-16}$$

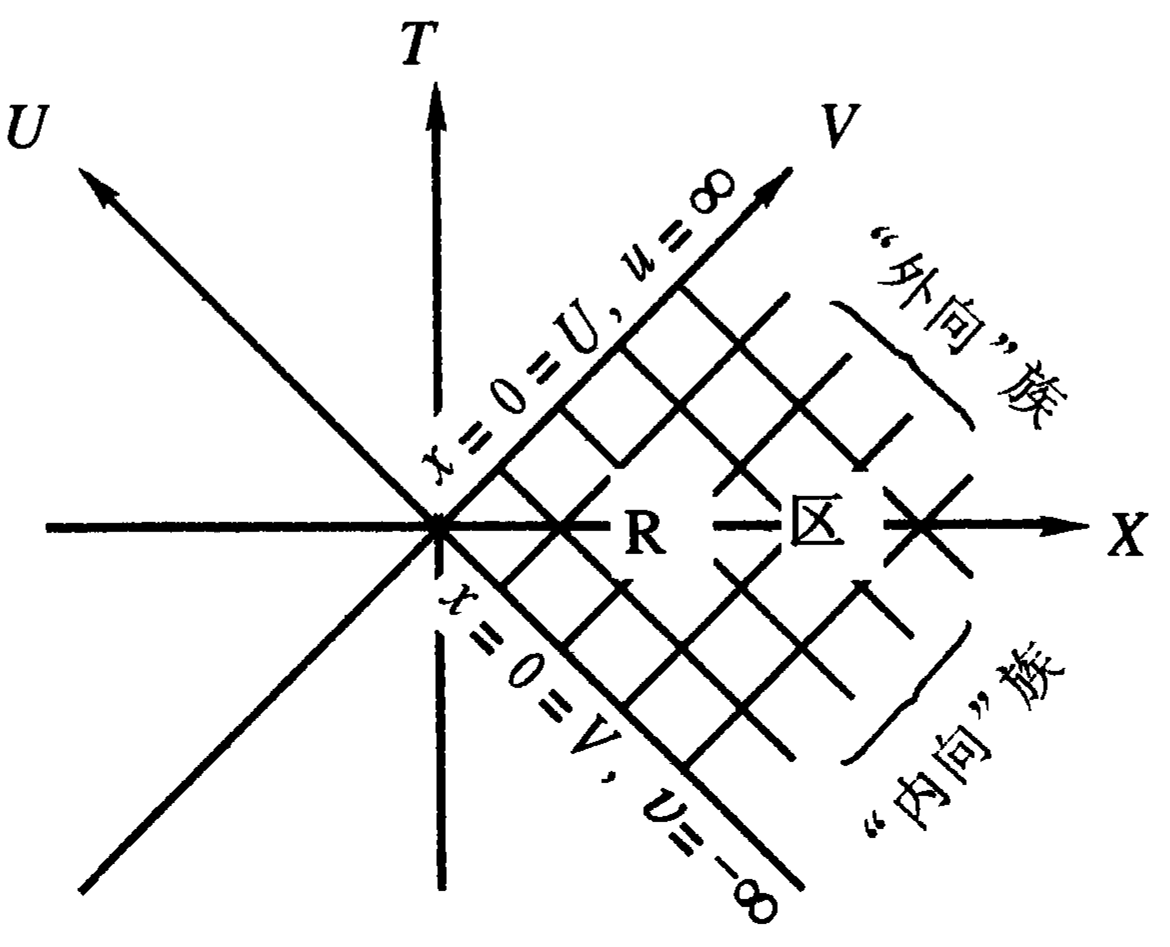


图 9-12　2 维 Rindler 时空是 2 维闵氏时空的一个子时空(R 区)

则由式(9-4-14)得 $ds^2=-dT^2+dX^2$，可见 Rindler 度规其实是平直度规，① 只是其真面目被原始坐标 t，x 所遮盖. 由式(9-4-2)定义的 Rindler 时空无非是 2 维闵氏时空的一个子时空[一个由式(9-4-15)定义的象限，见图 9-12 的R 区]. 图 9-12 的闵氏时空是图 9-11 的 Rindler 时空的最大延拓. 由 $x^2=e^{v-u}=-VU$ 可知图 9-12 中 $V=0$ 及 $U=0$ 的两条直线都对应于 $x=0$，这正是前面所讲的"$x=0$ 不属于原始坐标域(擦边在外)"的具体表现. 虽然图 9-11 中的两族类光测地线与图 9-12 中 R 区的两族类光测地线外观不同，但本质一样. 这再次说明，对同一时空，由于所用坐标系不同，时空图可以千差万别.

9.4.3 施瓦西时空的 Kruskal 延拓

作为微分方程，爱因斯坦方程是局域性的(给定流形一点及其任一邻域就可谈及微分方程). 方程的每个解代表一个度规，至于该度规定义在怎样一个流形上(这是个整体问题)，则只能在求解后讨论. 以原始施瓦西线元式(9-4-1)为例. 前已指出该线元在 $r=0$ 和 $r=2M$ 处存在奇性. 由于背景流形必须连通，r 的范围既可取 $r>2M$ 也可取 $0<r<2M$，但不可取二者之并. 不妨取定 $r>2M$，再设法证明 $r=2M$ 是坐标奇点. 证明的方法与 Rindler 情况十分类似. Rindler 线元式(9-4-2)不但是 2 维的，而且存在类时 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$，即度规分量不含 t，这进一步使寻求"好"坐标系的任务大为简化. 不妨把完成任务的方法归结为如下的程序：

$$ds^2=-x^2dt^2+dx^2=x^2(-dt^2+x^{-2}dx^2)\,.$$

定义 x 的函数 $x_*(x)$ 使满足 $dx_*=x^{-1}dx$，则 $ds^2=x^2(-dt^2+dx_*{}^2)$. 令 $v:=t+x_*$，

① 与闵氏度规最多只差到一个微分同胚，因而等价(有相同几何，见 8.10.2. 小节).

$u := t - x_*$，即 $t = (v+u)/2$，$x_* = (v-u)/2$，则 $-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_*{}^2 = -\mathrm{d}v\mathrm{d}u$．故

$$\mathrm{d}s^2 = -x^2\mathrm{d}v\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{v-u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = -\mathrm{d}V\mathrm{d}U,$$

其中 $V = \mathrm{e}^v$，$U := -\mathrm{e}^{-u}$．施瓦西度规也有 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$，等价地，其线元式(9-4-1)前两维(记作 $\mathrm{d}\hat{s}^2$)的系数也不含 t，所以上述程序同样适用：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{s}^2 &= -(1-2M/r)\mathrm{d}t^2 + (1-2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &= (1-2M/r)\,[-\mathrm{d}t^2 + (1-2M/r)^{-2}\mathrm{d}r^2] = (1-2M/r)\,(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r_*{}^2),\end{aligned} \tag{9-4-17}$$

其中

$$\mathrm{d}r_* := (1-2M/r)^{-1}\mathrm{d}r, \tag{9-4-18}$$

取

$$r_* := r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \tag{9-4-19}$$

r_* 就是式(8-9-1)的乌龟坐标．令

$$v := t + r_*,\qquad u := t - r_*\qquad 或\ t = (v+u)/2,\qquad r_* = (v-u)/2, \tag{9-4-20}$$

则 v 和 u 的取值范围是

$$-\infty < v, u < \infty. \tag{9-4-21}$$

由式(9-4-20)得 $-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r_*{}^2 = -\mathrm{d}v\mathrm{d}u$，故

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = -(1-2M/r)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u. \tag{9-4-22}$$

令

$$V := \mathrm{e}^{\beta v},\qquad U := -\mathrm{e}^{-\beta u}\quad (\beta\ 为待定常数), \tag{9-4-23}$$

则 V 和 U 的取值范围是

$$0 < V < \infty,\qquad -\infty < U < 0, \tag{9-4-24}$$

且

$$\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \beta^{-2}\mathrm{e}^{\beta(u-v)}\mathrm{d}V\mathrm{d}U,$$

故

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = -\beta^{-2}\left(\frac{r-2M}{r}\right)\mathrm{e}^{\beta(u-v)}\mathrm{d}V\mathrm{d}U.$$

上式右边的因子 $\mathrm{e}^{\beta(u-v)}$ 可用式(9-4-20)表为 $\mathrm{e}^{\beta(u-v)} = \mathrm{e}^{-2\beta r_*}$，用式(9-4-19)表出 $-2\beta r_*$，代入整理得

$$\mathrm{e}^{\beta(u-v)} = \mathrm{e}^{-2\beta r}\left(\frac{2M}{r-2M}\right)^{4\beta M}.$$

故

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = -\beta^{-2}\left(\frac{r-2M}{r}\right)\mathrm{e}^{-2\beta r}\left(\frac{2M}{r-2M}\right)^{4\beta M}\mathrm{d}V\mathrm{d}U.$$

有可能使上式奇异的情况是 $r=0$ 和 $r-2M=0$，后者可通过选

$$\beta = 1/4M \tag{9-4-25}$$

而消除：

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = -\beta^{-2}\frac{2M}{r}\mathrm{e}^{-2\beta r}\mathrm{d}V\mathrm{d}U = -\frac{32M^3}{r}\mathrm{e}^{-r/2M}\mathrm{d}V\mathrm{d}U. \tag{9-4-26}$$

上式表明度规分量在 $r=2M$ 处不再奇异，故可把 V，U 的取值范围延拓至 $V \leqslant 0$

和 $U \geqslant 0$ 的区域. 与 Rindler 情况不同的是，式(9-4-26)表明 $r = 0$ 仍是奇点，故 r 的范围只能限于 $r > 0$，可见 V 和 U 的取值并非毫无限制，它们的搭配必须满足 $r > 0$ 的条件. 再令

$$T := \frac{1}{2}(V + U), \qquad X := \frac{1}{2}(V - U), \tag{9-4-27}$$

并补上后两维，便得施瓦西度规在 Kruskal 坐标系 $\{T, X, \theta, \varphi\}$ 中的线元表达式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32M^3}{r}\mathrm{e}^{-r/2M}(-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2) + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2). \tag{9-4-28}$$

上式表明施瓦西度规可以定义在一个比原来定义域($r > 2M$)大得多的流形上. 一般地说，时空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 称为时空 (M, g_{ab}) 的一个**延拓**(extension)，若 $M \subset \tilde{M}$ 且 $\tilde{g}_{ab}|_p = g_{ab}|_p$，$\forall p \in M$. 现在所得到的原始施瓦西时空的延拓称为 **Kruskal 延拓** [Kruskal(1960)]. 在这一延拓中，坐标 T，X 可取遍 $r > 0$ 所允许的一切值. 线元式(9-4-28)中的 r 应看作坐标 T 和 X 的函数，此函数由下式定义(不难由新旧坐标的关系证明)：

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\mathrm{e}^{r/2M} = X^2 - T^2. \tag{9-4-29}$$

由于有球对称性，可以只画前两维的时空图(见图 9-13)，把图中的每点想像为一个 S^2(2 维球面)就得到 4 维时空. 式(9-4-28)的因子 $-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2$ 表明，在以 T，X 为坐标轴的 2 维施瓦西时空图中，(径向)类光曲线都是 $\pm 45°$ 斜直线. 这为讨论提供很大方便.

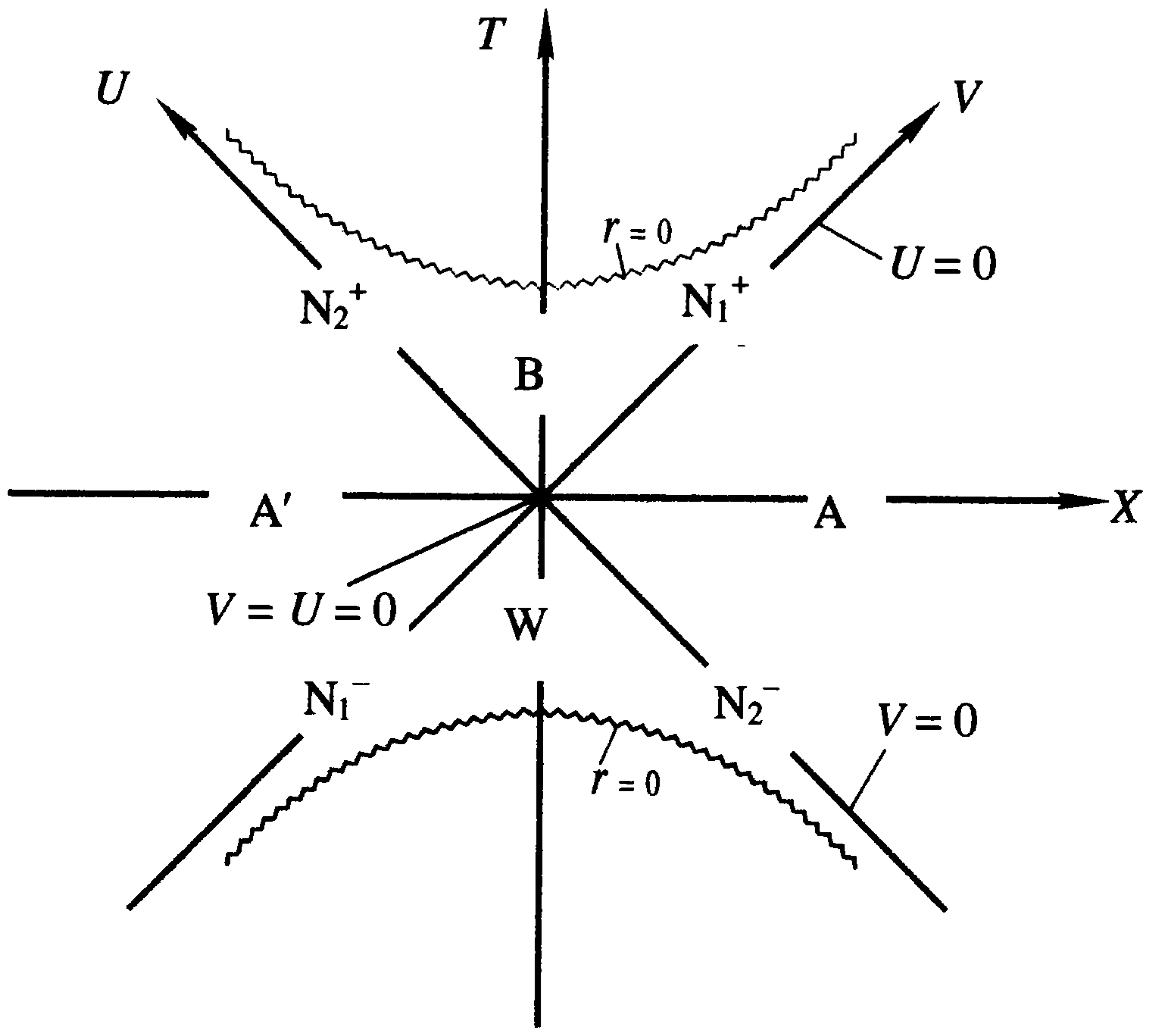
由式(9-4-29)可知 $r =$ 常数　对应于 $X^2 - T^2 =$ 常数，即 T~X 面中的双曲线($r = 2M$ 时为一对斜直线)，补上后两维就是旋转双曲面(4 维流形中的超曲面)，其中两个特例很重要：

(1) $r = 0$ 对应于 $X^2 - T^2 = -1$. 可见 Kruskal 延拓的限制范围 $r > 0$ 也可用坐标表为

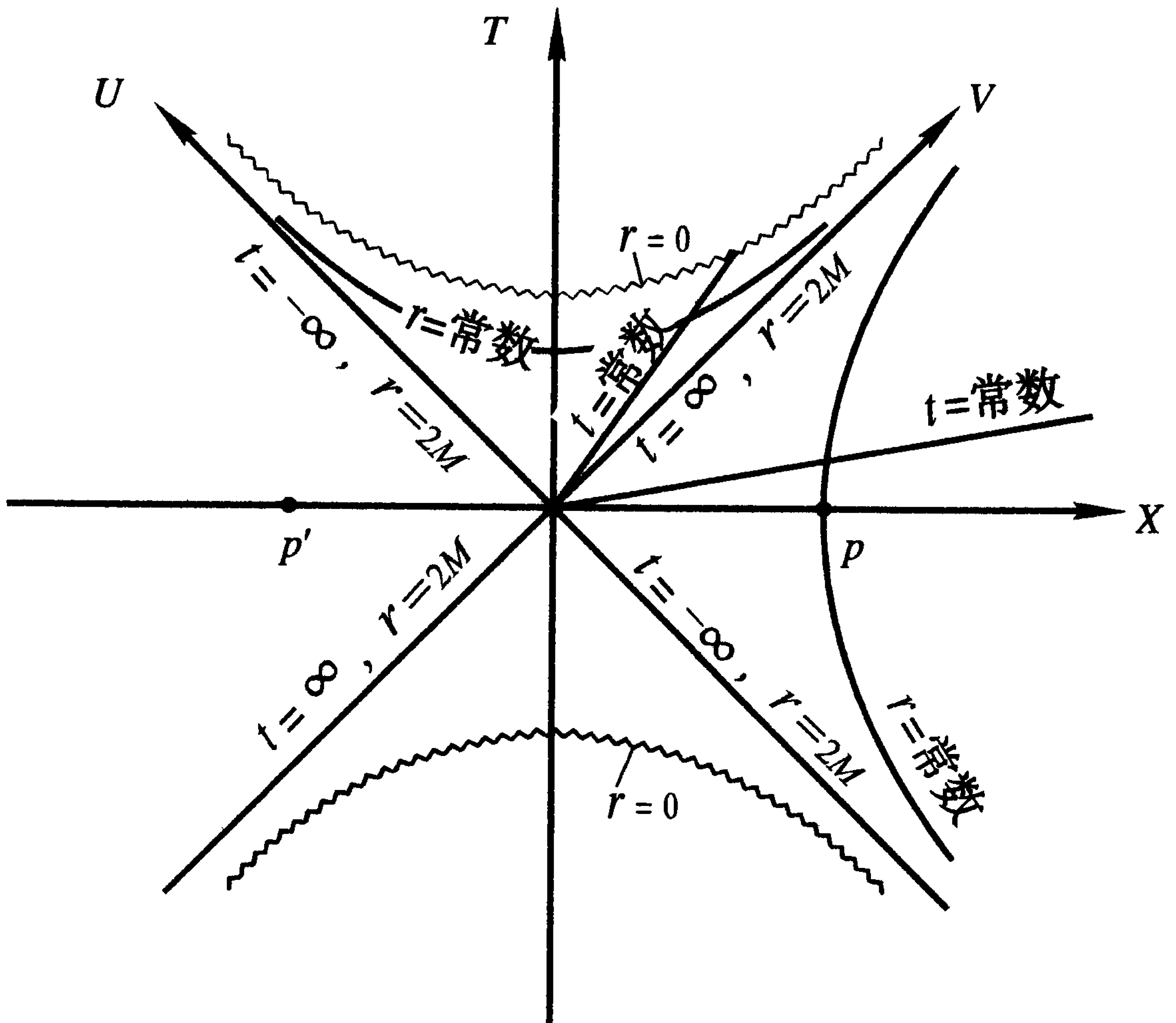
$$X^2 - T^2 > -1. \tag{9-4-30}$$

不难证明任一 $r \to 0$ 的径向类光或类时测地线都不完备. 由计算又知标量场 $R_{abcd}R^{abcd}$ 在这些测地线上的值当 $r \to 0$ 时趋于 ∞ (与 $r \to 2M$ 时 $R_{abcd}R^{abcd}$ 趋于有限值明显不同)，因而存在 s.p.曲率奇性，这暗示时空不能再延拓至 $r = 0$ 及其以外($r < 0$)，说明 $r = 0$ 是时空奇点，Kruskal 延拓是施瓦西时空的**最大延拓**(maximal extension). 图 9-13(a)的阴影部分对应于 $r < 0$，不属于延拓后的时空. 两条锯齿状双曲线代表时空奇性 $r = 0$ 所在处("奇点"在 4 维时空中不是一个点). 图中的时空范围是 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集，同胚于 $\mathbb{R}^2$，而 2 维球面的拓扑结构是 S^2，所以最大延拓的 4 维施瓦西时空的拓扑结构是 $\mathbb{R}^2 \times S^2$. 请特别注意图 9-13 中阴影区外每个点都代表一个 S^2，两个不同的点代表两个不同的 S^2，尤其是，例如 p 和 p' 点，它

们并非是同一 S^2 上的两点，亦非代表同一个 S^2，而是每点各代表一个 S^2.



(a) A 和 A′代表两个无因果联系的渐近平直区．B 为黑洞区，W 为白洞区．N_1^+ 和 N_2^+ 是黑洞的事件视界．锯齿状曲线代表奇性所在处(不属于时空)



(b) 双曲线上 r = 常数，过原点直线上 t = 常数，两条过原点的 45°斜直线上 $r = 2M, t = \pm\infty$.

图 9-13　施瓦西时空的 Kruskal 最大延拓

(2) $r = 2M$ 对应于 $X^2 - T^2 = 0$，即 $T = \pm X$，在 2 维图中代表两条过原点的 45°斜直线[图 9-13(a)的 N_1 和 N_2]，在 4 维时空中是两个 3 维面(类光超曲面)，它们把时空分成 4 个开区域：A 区由 $X > 0$ 及 $X^2 > T^2$ (即 $V > 0$, $U < 0$)表征，由式(9-4-29)可知 A 区相当于 $r > 2M$ 的时空区，是原始的$\{t, r\}$坐标系的坐标域，也是 Kruskal 延拓的出发区(“根据地”)．把图 9-13(a)的流形看作前面关于延拓时空的一般定义中的 $\tilde{M}$ ，其度规 $\tilde{g}_{ab}$ 由线元式(9-4-28)描述；把 A 区看作流形 M，其度规 g_{ab} 由

线元式(9-4-1)描述. 线元式(9-4-28)无非是式(9-4-1)做坐标变换的结果，两者在 A 区内代表相同度规场 g_{ab}，故 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 的确是(A, g_{ab}) (原始的施瓦西时空)的一个延拓. B，W 和 A′ 三区都是从 A 区出发做延拓的产物. A 区的边界点满足 $V=0$ 或 $U=0$，而由式(9-4-20)及 V，U 的定义又得 $t=2M[\ln V-\ln(-U)]$，可见 A 区的点在趋于边界时 $t\to\pm\infty$ [见图 9-13(b)]，说明 t 在两条斜直线上没有定义，这正是施瓦西线元(9-4-1)在 $r=2M$ 处表现奇异的原因(两线不属于坐标系$\{t, r\}$的坐标域，恰恰是擦边在外.).

坐标 t，r 在 B，W 和 A′ 三区尚未定义. 注意到 A 区中坐标 V，U 与坐标 t，r_*的关系

$$V=\exp[(r_*+t)/4M], \qquad U=-\exp[(r_*-t)/4M], \tag{9-4-31}$$

可反过来用 V，U 依以下关系定义其他三区的 t，r 坐标：

B 区　$V=\exp[(r_*+t)/4M], \quad U=\exp[(r_*-t)/4M]$；

W 区　$V=-\exp[(r_*+t)/4M], \quad U=-\exp[(r_*-t)/4M]$；　(9-4-31′)

A′区　$V=-\exp[(r_*+t)/4M], \quad U=\exp[(r_*-t)/4M]$；

其中

$$r_*\equiv r+2M\ln|r/2M-1|. \tag{9-4-32}$$

把线元式(9-4-28)用于 B，W，A′ 区并借式(9-4-31′)、(9-4-32)改写为以 t，r 表出的线元，结果仍为式(9-4-1)，其中 r 的范围对 B，W 区为 $0<r<2M$，对 A′ 区为 $r>2M$. 可见 A，A′ 区和 B，W 区的度规就是原始施瓦西线元式(9-4-1)分别限于 $r>2M$ 和 $0<r<2M$ 的结果. 4 个区中坐标 T，X 与 t，r 的关系如下：

A 区
$$T=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{sh}(t/4M),$$
$$X=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{ch}(t/4M); \tag{9-4-33}$$

B 区
$$T=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{ch}(t/4M),$$
$$X=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{sh}(t/4M); \tag{9-4-34}$$

W 区
$$T=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{ch}(t/4M),$$
$$X=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{sh}(t/4M); \tag{9-4-35}$$

A′ 区
$$T=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{sh}(t/4M),$$
$$X=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\operatorname{ch}(t/4M); \tag{9-4-36}$$

逆变换为

A，B，W，A′ 区
$$(r/2M-1)\,e^{r/2M}=X^2-T^2, \tag{9-4-37}$$

A，A′ 区
$$t/2M=2\operatorname{th}^{-1}(T/X), \tag{9-4-38}$$

B、W 区
$$t/2M=2\operatorname{th}^{-1}(X/T). \tag{9-4-39}$$

本小节开始时讲过，根据式(9-4-1)，一方面不允许取 $r=2M$，另一方面也不允许既取 $r>2M$ 又取 $0<r<2M$ (否则不连通). 但有了 Kruskal 延拓就不同. 这一

延拓表明施瓦西度规在 A，B 区及其交界 N_1^+(在其上 $r=2M$，$t=\infty$)都有定义，$A\cup N_1^+\cup B$ 是一个连通流形．由 A 区中任一点出发的“内向”(指 r 值不断减小)的、指向未来的类光或类时曲线将不可避免地穿越 N_1^+ 进入 B 区．反之，B 区中任一点发出的指向未来的类时或类光曲线都不可能穿越 N_1^+ 进入 A 区，它们的必然归宿是掉进奇点(奇点不属于时空，“掉进奇点”的准确含义是指该世界线的 r 值越来越小，无限逼近于 0. 对类时测地线，掉进奇点意味着它所代表的自由下落观者从固有时达到某值开始从时空中消失，这实在奇得不可思议．)．这表明 N_1^+ 是个“有进无出”的“单向膜”，A 区中的任何物体(连同光子)一旦穿过它而进入 B 区就永远不能回到 A 区(只能掉进奇点)．因此 B 区叫**黑洞**(black hole)，N_1^+ 叫**事件视界**(event horizon)．考虑到图 9-13 中的每点代表一个 2 维球面，可知黑洞是个 4 维时空区域，而事件视界则是个(3 维)类光超曲面(事件视界是类光超曲面的证明留作习题．见习题11的提示．)．A′ 区由 $X<0$ 及 $X^2>T^2$ 表征，它也有 $r>2M$，事实上它与 A 区有完全一样的性质，包括它与黑洞 B 的关系也类似于 A 区与 B 区的关系，故 N_2^+ 是 A′ 区的事件视界．但 A′ 与 A 区之间没有任何因果联系：从 A 出发的任一类时或类光曲线都不能进入 A′ 区，反之亦然．在这个意义上也常把 A 与 A′ 区称为两个(互相不关联的)“宇宙”．W 区由 $T<0$ 及 $X^2<T^2$ 表征，它也有 $r<2M$. W 区与 A(或 A′)区也只有“一膜之隔”，这“膜”就是类光超曲面 N_2^-(或 N_1^-)．N_2^- 和 N_1^- 都是“有出无进”的“单向膜”，W 区中任一指向未来的类时或类光曲线都将穿越 N_2^-(或 N_1^-)而进入 A(或 A′)区．既然 B 区叫黑洞，W 区自然叫**白洞**(white hole).

以上是在全时空为真空的前提下得到的施瓦西最大延拓．虽然这一延拓包含了黑洞、白洞、事件视界以及两个全同“宇宙”等诱人术语，其物理存在性(真实性)却还须另做讨论．从初值问题的角度考虑，整个时空存在的可能性很小，但其中的一部分(包括 A，B 区及其间的事件视界的一部分)却很有意义，详见 9.4.6 小节．

作为本小节的结束，我们讨论最大延拓施瓦西时空的 Killing 矢量场．延拓前的时空有 4 个独立的 Killing 矢量场，其中 3 个反映球对称性，见 § 8.2 的 $\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$；第 4 个反映静态性，即 $\xi^a=(\partial/\partial t)^a$. $\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$ 对最大延拓的施瓦西时空仍是反映球对称性的 Killing 场．由于坐标 t 在 A，A′，B，W 四区中都有定义，且在每区用坐标 t，r 写出的线元都是原始施瓦西形式，故各区的 $\xi^a=(\partial/\partial t)^a$ 仍是 Killing 场. 注意，ξ^a 在 B 和 W 区不是类时而是类空，因为由线元式(9-4-1)知 $r<2M$ 导致 $g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b>0$. 除 $\xi_1{}^a$，$\xi_2{}^a$，$\xi_3{}^a$ 和 ξ^a 外不存在其他独立的 Killing 矢量

场，故 B 和 W 区不是静态时空区. $(\partial/\partial t)^a$ 在类光超曲面 N_1 和 N_2 上无意义，因坐标 t 在其上无意义($t=\pm\infty$). 然而可用坐标基矢 $(\partial/\partial V)^a$ 和 $(\partial/\partial U)^a$ 在 A 区把 ξ^a 表为

$$\xi^a=(\partial/\partial t)^a=\frac{1}{4M}[V(\partial/\partial V)^a-U(\partial/\partial U)^a], \tag{9-4-40}$$

由于 $(\partial/\partial V)^a$ 和 $(\partial/\partial U)^a$ 在 N_1 和 N_2 上有定义，可用上式定义 N_1 和 N_2 上的矢量场 ξ^a，并验证它是类光 Killing 矢量场. 于是在全流形上有第 4 个 C^∞ 的 Killing 矢量场 ξ^a，而且它同其他 3 个独立 Killing 矢量场正交. 可见最大延拓的施瓦西时空的对称性由 4 个 Killing 场描写，前 3 个反映球对称性，第 4 个(指 ξ^a)在 A 和 A′ 区为类时，在 B 和 W 区为类空，而在 N_1 和 N_2 上为类光. 由此可知 Birkhoff 定理的原始提法“真空爱因斯坦方程的球对称解必为静态度规”中的“静态”改为“施瓦西”的必要性(见 8.3.3 小节)：施瓦西度规不一定是静态度规. 从几何角度看，Birkhoff 定理的实质是：若度规满足真空爱因斯坦方程且具有反映球对称性的 3 个 Killing 场，则它必有第 4 个(额外的，并非事先指定的)Killing 矢量场 ξ^a，它既可为类时，也可为类空甚至类光，视所论时空点而定.

9.4.4 施瓦西时空的无限红移面

设事件视界以外的静态观者 G 和 G' 的径向坐标分别为 r 和 $r'(>r)$，G 向 G' 发光，由式(9-2-3)便可求得红移 $z\equiv(\lambda'-\lambda)/\lambda$. 若把 r' 固定，则 z 是 r 的函数，满足 $\mathrm{d}z(r)/\mathrm{d}r<0$ 以及 $\lim\limits_{r\to 2M} z(r)=\infty$. 因此超曲面 $r=2M$ 亦称**无限红移面**(surface of infinite redshift). 然而，不应说“无限红移面所发的光到达观者 G' 时有无限红移”，因为超曲面 $r=2M$ (事件视界) 上任一点发出的外向类光测地线都只能躺在视界上而不能到达 G'.

施瓦西时空(指 A 区)只有一个静态参考系(只有一个超曲面正交的 Killing 矢量场，即 ξ^a.)，然而却有无限多个稳态参考系. 这是因为 ξ^a 和类空 Killing 场 $(\partial/\partial\varphi)^a$ 的线性组合 $\tilde{\xi}^a\equiv\xi^a+\beta(\partial/\partial\varphi)^a$(其中 β 为常数)仍是 Killing 场，$\tilde{\xi}^a$ 在其为类时的区域就对应于稳态参考系. 式(9-2-2)对任一稳态参考系都适用，只须把式中的 ξ^a 理解为 $\tilde{\xi}^a$. 无限红移面对应于 $-\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}_a=0$，因此依赖于所涉及的稳态参考系. 事实上，如果愿意，连闵氏时空也可找到存在无限红移面的稳态参考系. 由于施瓦西时空中静态参考系是唯一的，不加说明时的无限红移面就是指 $-\xi^a\xi_a=0$ 的面(与事件视界重合)，“红移因子”就是指

$$\chi=(-\xi^a\xi_a)^{1/2}=(1-2M/r)^{1/2}.$$

9.4.5 嵌入图[选读]

不少文献、教材和科普著作喜欢用嵌入图(见图 9-14)来直观描述施瓦西黑洞. 本小节对嵌入图做一介绍. 为了由浅入深,先讨论静态球对称恒星的嵌入图. 式(9-3-19)代表静态球对称恒星内部的度规，它在任一等 t 面 Σ_t 上的诱导线元为

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\varphi^2) . \qquad (9\text{-}4\text{-}41)$$

以 R 代表恒星半径，若令 $m(r)$在 $r \geqslant R$ 时取常值 $M \equiv m(R)$，则上式对恒星内外都适用. 这是一个弯曲线元. 由于球对称性，可只考虑 Σ_t 中 $\theta = \pi/2$ 的截面(记作 S)，其诱导线元为

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \ d\varphi^2 . \qquad (9\text{-}4\text{-}42)$$

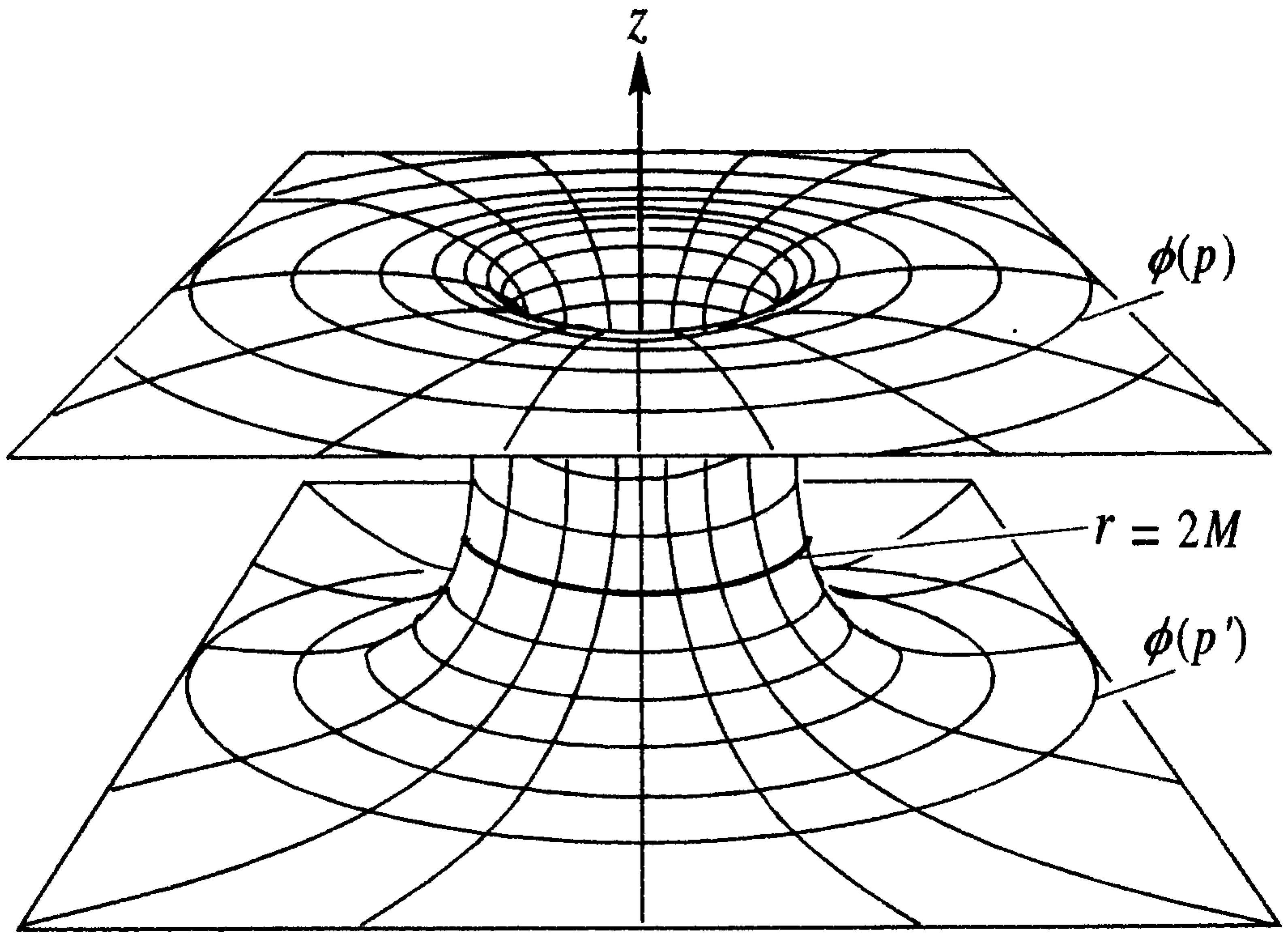


图 9-14　施瓦西时空的嵌入图($T=0$，压缩掉一维)

以 g_{ab} 代表这个线元对应的度规，则(S, g_{ab})是 2 维黎曼空间. 为了直观地表现其内禀弯曲情况，可把它镶嵌进高一维的欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中，即考虑嵌入映射 $\phi: S \to \mathbb{R}^3$，利用 $\phi[S]$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的外部弯曲情况直观地反映(S, g_{ab})的内禀弯曲情况. 图 9-15 就是把(S, g_{ab})嵌进 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 的嵌入图. 由图看出，越是远离恒星中心，空间弯曲越是轻微，当 $r \to \infty$ 时趋于平直. 但是，这个图是怎么画出的？根据什么原则画图才有此等功效？

3 维欧氏度规 δ_{ab} 在柱坐标系 $\{z, r, \varphi\}$ 的线元表达式为

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 \ d\varphi^2 . \qquad (9\text{-}4\text{-}43)$$

在 S 上取一径向元线段，首末点 p，p' 的 r 值之差为 dr (见图 9-16 左). 若把这线段平移至 S 上 r 值不同之处，则新旧两线段虽然 dr 相同，但线长一般不等[见式(9-4-42)]. 这是(S, g_{ab})内禀弯曲的一种重要表现. 令 $q \equiv \phi(p)$，$q' \equiv \phi(p')$，只要画

图时保证元段qq'与pp'线长相等，则$\phi[S]$在$\mathbb{R}^3$中的外部弯曲情况就反映(S, g_{ab})的上述内禀弯曲性. 这就是嵌入图的绘制原则. 据此便可找到曲面$\phi[S]$的方程，从而画出$\phi[S]$. 作为$\mathbb{R}^3$中的超曲面，$\phi[S]$的方程可以表为$f(z, r)=0$（轴对称性使f不含φ），对应于一元函数$z=z(r)$，它代表$\phi[S]$上任一点的z值对r值的依从关系. 于是$\phi[S]$上任一元线段的线长为

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\,d\varphi^2 = \{[dz(r)/dr]^2 + 1\}dr^2 + r^2\,d\varphi^2\,. \tag{9-4-44}$$

与式(9-4-42)对比得

$$\left[\frac{dz(r)}{dr}\right]^2 + 1 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad \text{即} \quad \frac{dz(r)}{dr} = \sqrt{\frac{2m(r)}{r-2m(r)}}\,, \tag{9-4-45}$$

故

$$z(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{2m(r')}{r-2m(r')}}\,dr' \quad (\text{对}\,0<r<\infty), \tag{9-4-46}$$

因为对$r \geqslant R$有$m(r)=M$，所以

$$z(r) = \sqrt{8M\,(r-2M)} + C \quad (\text{对}\ r \geqslant R), \tag{9-4-47}$$

其中

$$C \equiv -\sqrt{8M\,(R-2M)} + \int_0^R \sqrt{\frac{2m(r)}{r-2m(r)}}\,dr \tag{9-4-48}$$

为常数. 虽然对$r<R$的点$z(r)$取决于$m(r)$的函数形式，但$r>2m(r)$保证$z(r)$是单调常增函数，而式(9-4-47)则表明$\phi[S]$在$r>R$时为旋转抛物面. 于是有图9-15那样的嵌入图(对$r<R$只是定性地画出). 请注意，嵌入图的背景欧氏空间$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$只是为表现$\phi[S]$而人为引入的，真正有物理意义的点只是$\phi[S]$上的点(不要以为“草帽里”可以装入什么东西).

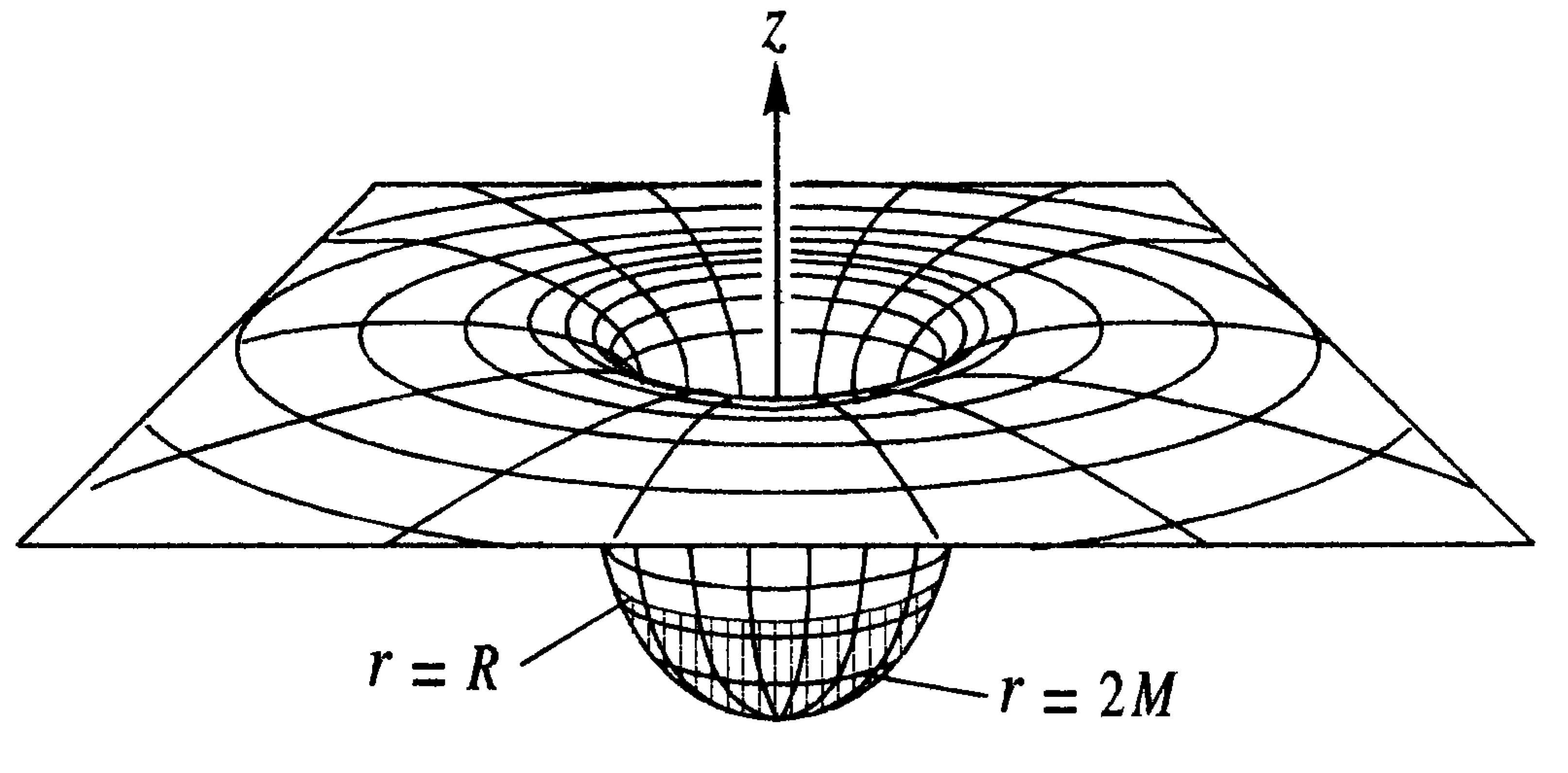


图9-15　静态球对称恒星的嵌入图(压缩掉一维)

现在就不难理解图9-14，它其实是施瓦西解的Kruskal延拓(见图9-13)中$T=0$(因而$t=0$)的“全空间”Σ_0的嵌入图，Σ_0包含图9-13中位于X轴的所有点(每点代表一个球面S^2). 仿照上述推导可知嵌入图中超曲面$\phi(\Sigma_0)$(图中压缩一维)是由方程

$$z(r) = \pm\sqrt{8M\,(r-2M)} \tag{9-4-49}$$

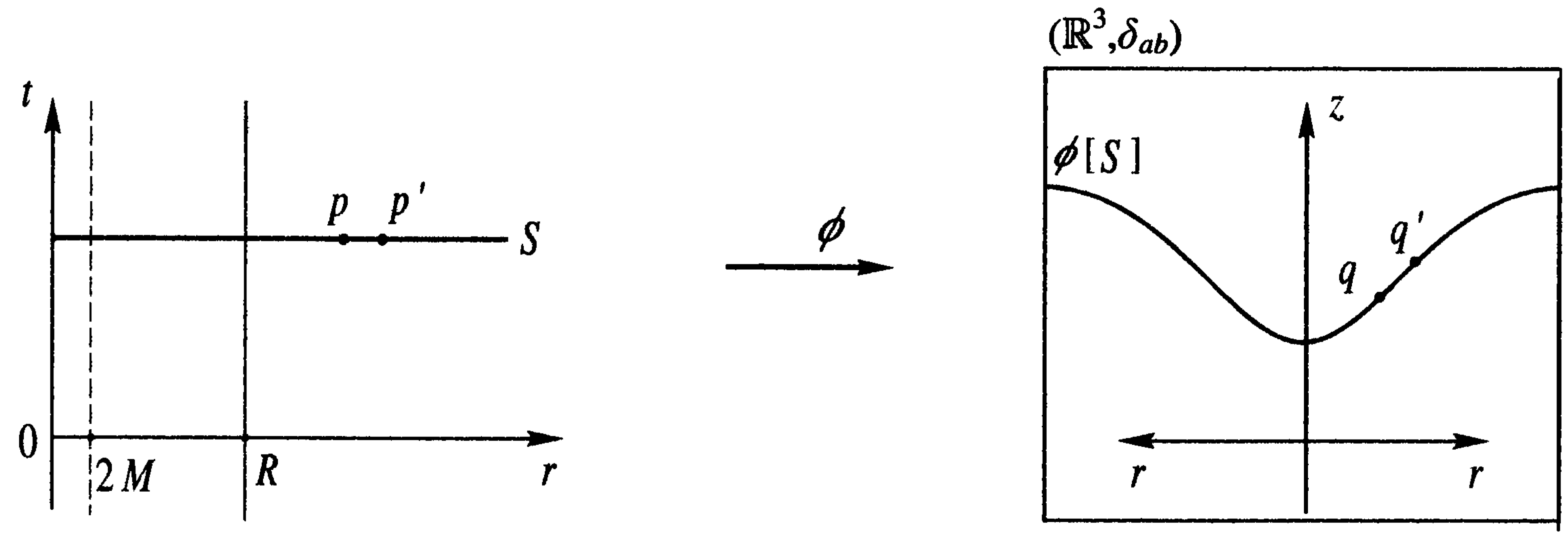


图 9-16　从静态球对称恒星时空中的 S 面到 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 的嵌入映射

决定的旋转抛物面(由于渐近平直，它向上下两侧发展为两个近似于平面的曲面．)．因为 Σ_0 中任一点的 r 值都大于等于 $2M$，所以嵌入图中不存在 $r<2M$ 的点．整个“空间”被 $r=2M$ 的点组成的圆周(其实是球面)分为上下两半(称为喉，即 throat.)，分别对应于图 9-13 (b)中 X 轴上 $X>0$ 和 $X<0$ 两部分．例如，图 9-13(b)的 p 和 p' 点分别对应于图 9-14 的圆周(球面) $\phi(p)$ 和 $\phi(p')$．有必要再次提醒读者，嵌入图中只有那张旋转抛物面才代表 $t=0$ 时的“全空间” Σ_0，面外各点并无物理意义．

9.4.6　球对称恒星的引力坍缩和施瓦西黑洞

如 9.3.2 小节所述，演化后期的球对称恒星要想维持内部流体静力学平衡[满足式(9-3-17)]，其质量必须小于中子星质量上限．初始质量大于这一上限的恒星如果不能在演化中抛出足够质量从而成为稳定的白矮星或中子星，就根本没有稳定状态可言，只能不断坍缩而成黑洞．根据 Birkhoff 定理(见 8.3.3 小节)，星外时空必有施瓦西度规，因此可用时空图 9-17 描述．图中无阴影部分与图 9-13 的相应部分全同，但阴影部分则由星内度规(爱因斯坦方程的非真空解)描述，因此球对称坍缩星的时空根本没有白洞区 W，也没有 A′ 区，但黑洞区 B 以及 A 区的一部分在此情况下却有重要意义．无论构成星体的物质如何坚实，只要星体表面越过事件视界，就只能不断收缩，直至整个星体被压为奇点．理由很简单：星体表面任一点的世界线都必须位于光锥以内(类时)，因而与 T 轴的夹角必须小于 45°(注意，图 9-13 和 9-17 中±45°斜直线代表类光测地线)．施瓦西坐标只能覆盖 $r>2M$ (或 $0<r<2M$)的时空区域，因而不能表现恒星晚期坍缩为施瓦西黑洞的全过程，特别是，不能表现全过程中最关键的一步——星体表面缩进事件视界以内．如果要用施瓦西坐标描写恒星坍缩，则只能画成图 9-18. 由于施瓦西坐标系(关键在坐标 t)在 $r=2M$ 处没有定义，此图实际上只是把两个图(分别表现为 $r>2M$ 和 $0<r<2M$)拼在一起的结果．图的右边($r>2M$)容易使人误以为坍缩星表面永远处于事件视界 $r=2M$ 以外，这种误解来自把 $t=\infty$ 混同于“永远”(知道芝诺佯谬的读者可注意坐标时间 t 同“阿基里斯时间”的类似性)．由图 9-13b 可知星体表面

与 $r = 2M$ 的交点(见图 9-17 的 p)对应于 $t = \infty$，但星体表面的观者在 p 点的固有时 τ 却是有限值，他从此进入黑洞并在很短的 $\Delta\tau$ 内掉入奇点(对 $M = 3M_\odot$ 的黑洞，$\Delta\tau$ 约为 2×10^{-5} s.).

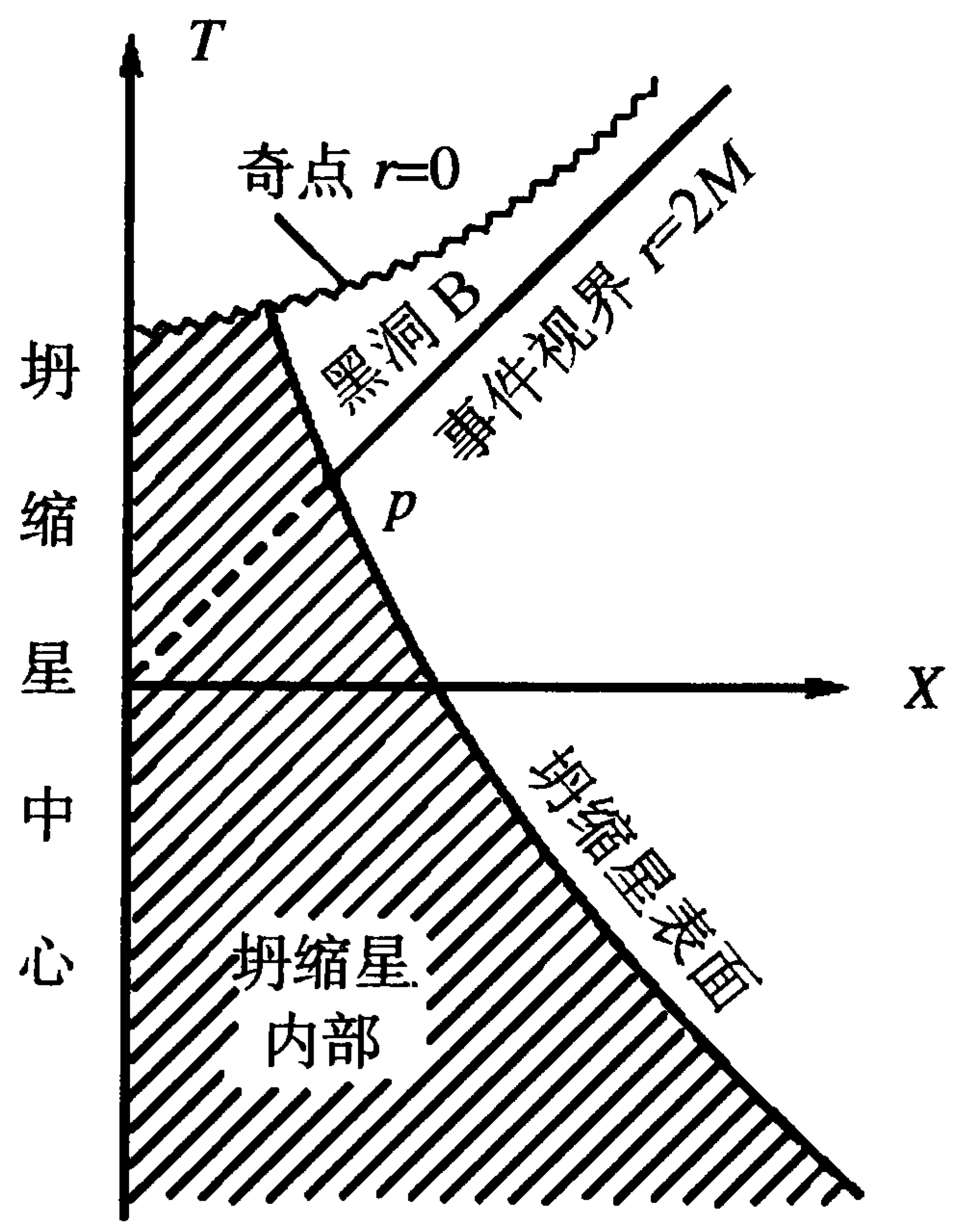


图 9-17　用 Kruskal 坐标描述大质量恒星晚期坍缩. 施瓦西真空解只适用于星体表面以外，B 区代表由坍缩造成的黑洞

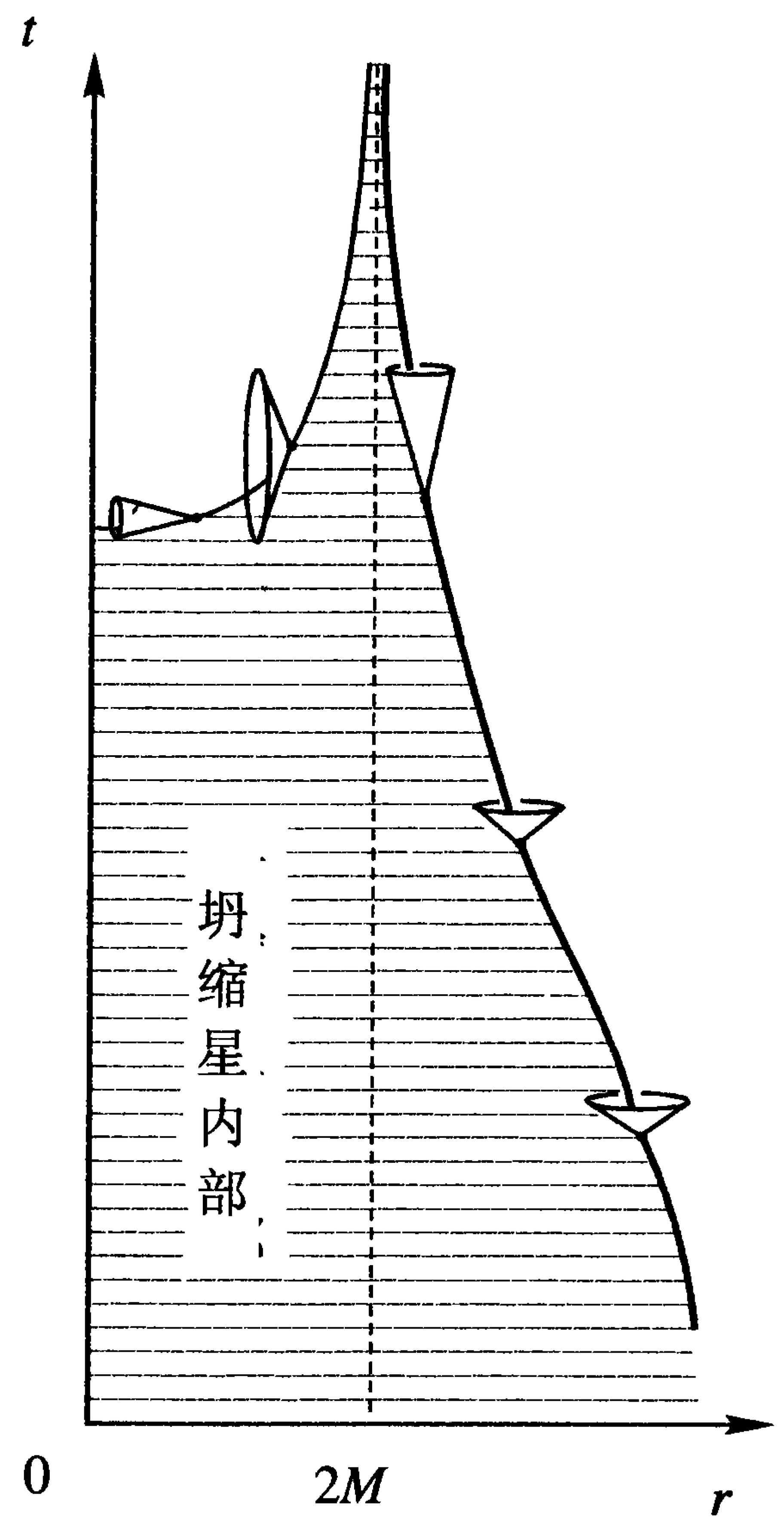


图 9-18　用施瓦西坐标描述恒星晚期坍缩. 虽然星体表面要到 $t\to\infty$ 才缩至 $r = 2M$，却不表明它永远处于视界以外，因为坐标时趋于无穷不代表"永远"

恒星坍缩成黑洞的过程可以更形象地用另一坐标系——内向 Eddington 坐标系 $\{v, r, \theta, \varphi\}$——表示，它虽不像 Kruskal 系那样能覆盖最大延拓的施瓦西时空，但能覆盖 A 区和 B 区(而不像施瓦西坐标系那样只能覆盖 4 个区中的任一个). 该系的 r，θ，φ 与施瓦西系的对应坐标相同，$v := t + r_*$. 施瓦西系的前两维线元

$$d\hat{s}^2 = -(1-2M/r)\,dt^2 + (1-2M/r)^{-1}dr^2 \tag{9-4-50}$$

在内向 Eddington 系成为

$$d\hat{s}^2 = -(1-2M/r)\,dv^2 + 2dv\,dr\,. \tag{9-4-51}$$

由上式知非零分量 $g_{vv} = -(1-2M/r)$，$g_{vr} = 1$ 及行列式 $g = -1$ 在 $r = 2M$ 处皆表现良好，故 $r = 2M$ 不再是奇点. 再考虑到 $v\in(-\infty,\infty)$ 对应于 $V\in(0,\infty)$，可知 $\{v, r\}$ 能覆盖图 9-13 的 A，B 区. $g_{rr} = 0$ 和 $g_{vv} = -(1-2M/r)$ 还表明内向 Eddington 系 $\{v, r, \theta, \varphi\}$ 的坐标基矢 $(\partial/\partial r)^a$ 为类光矢量而 $(\partial/\partial v)^a$ 为类时(对 A 区)或类空(对 B 区)矢量. 设 $\eta(\lambda)$ 是 A，B 区内任一径向类光测地线，则由式(9-4-51)有

$$0 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dv}{d\lambda}\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dv}{d\lambda} + 2\frac{dr}{d\lambda}\right],$$

说明径向类光测地线分为两族，分别由以下条件表征：

(1) $$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda = 0, \quad 即 \quad v = 常数; \tag{9-4-52}$$

(2) $$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}+2\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}=0, \quad 故 \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{2r}{r-2M}. \tag{9-4-53}$$

第一族类光测地线在 $v \sim r$ 图中为水平直线，不够直观. 定义 $\tilde{t} := v - r$，则由式(9-4-51)得

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = -\ (1-2M/r)\ \mathrm{d}\tilde{t}^2 + (4M/r)\ \mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}r + \ (1+2M/r)\,\mathrm{d}r^2\,. \tag{9-4-54}$$

两族类光测地线在坐标系 $\{\tilde{t},\ r\}$ 中的表现如图 9-19：族(1)(内向族)的方程为 $\mathrm{d}\tilde{t}/\mathrm{d}r = -1$，因而是斜率为−1 的平行直线族；族(2)(外向族)的方程则为

$$\mathrm{d}\tilde{t}/\mathrm{d}r = (r+2M)/(r-2M)\,,$$

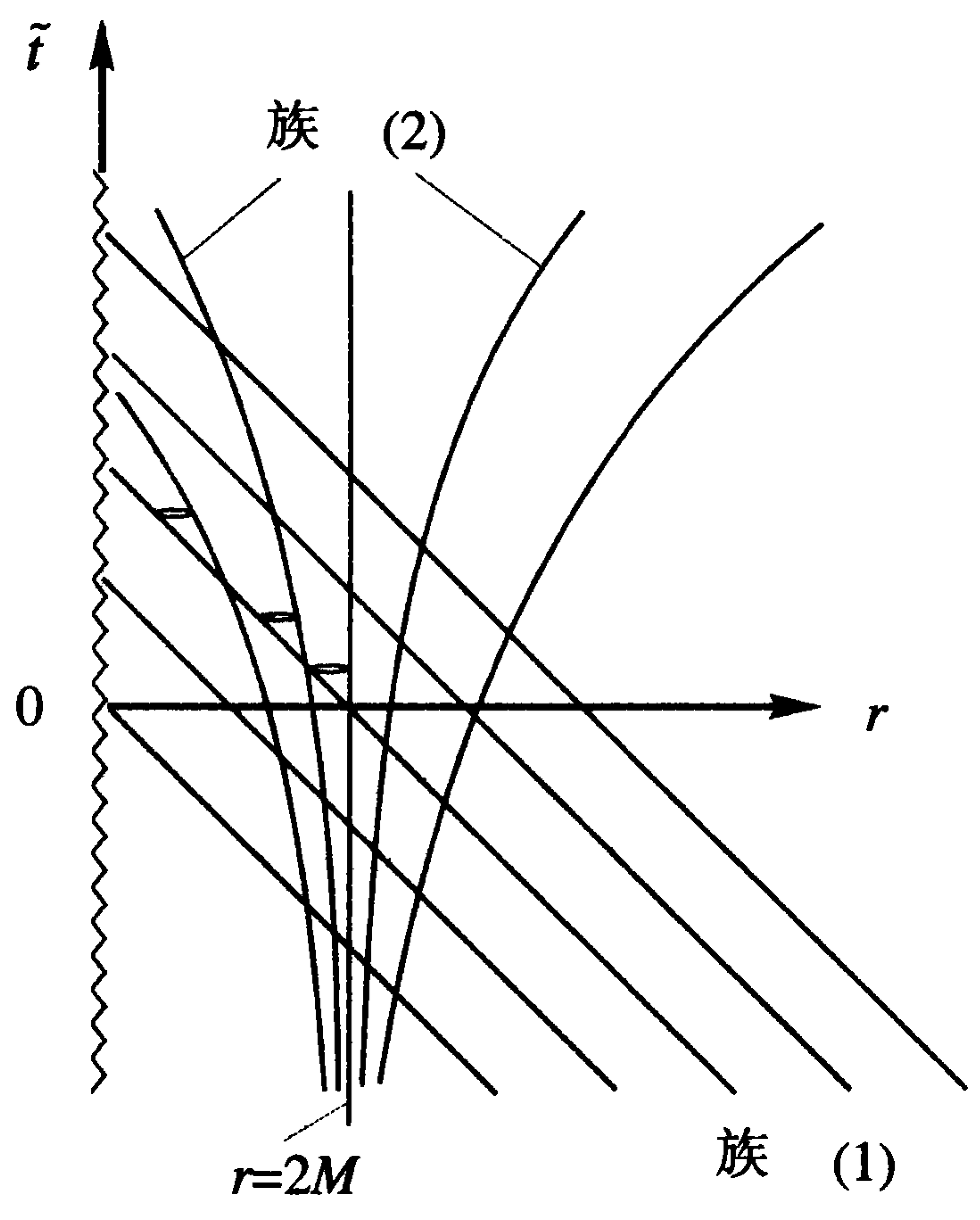


图 9-19　2 维施瓦西时空两族类光测地线在 $\{\tilde{t}, r\}$ 坐标系的表现

其表现颇为特别：除一条为竖直线($r = 2M$)外都是曲线，在竖直线以右的线的 r 值随仿射参数 λ 的增大而增大(真正外向)，但在竖直线以左的线的 r 值却随 λ 增大而减小(实际上内向，但仍属外向族．)．这一怪事反映了黑洞的重要特征：$r = 2M$ 是事件视界，在视界以内($r < 2M$)的任何光子都不能穿越视界而到达洞外($r > 2M$)，它们的 r 值只能不断减小至零．由两族类光测地线可方便地画出各点的光锥，这对分析质点的运动大有帮助，因为质点的世界线为类时线，线上每点的切矢必须限于该点的光锥之内．由此可知事件视界外的质点可穿越视界进入黑洞，而一旦进入就无法退出，只能掉入奇点．把图 9-19 以 $\tilde{t}$ 轴为对称轴旋转便得 3 维时空图(见图 9-20)，再补上坍缩星表面的世界管(图中的炮弹形)，就可形象表现坍缩为黑洞的星体的外部时空几何．为便于理解，讨论以下假想实验(“假想”包括忽略潮汐力的后果)．设某观者坐着燃料充足的飞船做黑洞探险．如果他不开动发动机，飞

船将自由下落，必然穿过事件视界进入黑洞并葬身奇点．如果他在到达视界前“悬崖勒马”，掉转船头，开足马力(即在 r 尚未小到 $2M$ 时就让 r 重新变大)，是可以安全返航并提交探险报告的．然而，如果他多走一步到达视界(须知当他的世界线与视界相交时他并无特殊感觉)，就将“一失足成千古恨”，因为由视界上的光锥可知一到视界就无法逆转，就连向远方朋友打个无线电话也传不出去，因为在视界上所发出的“外向”光子只能沿视界竖直向上(r 值保持为 $2M$)．

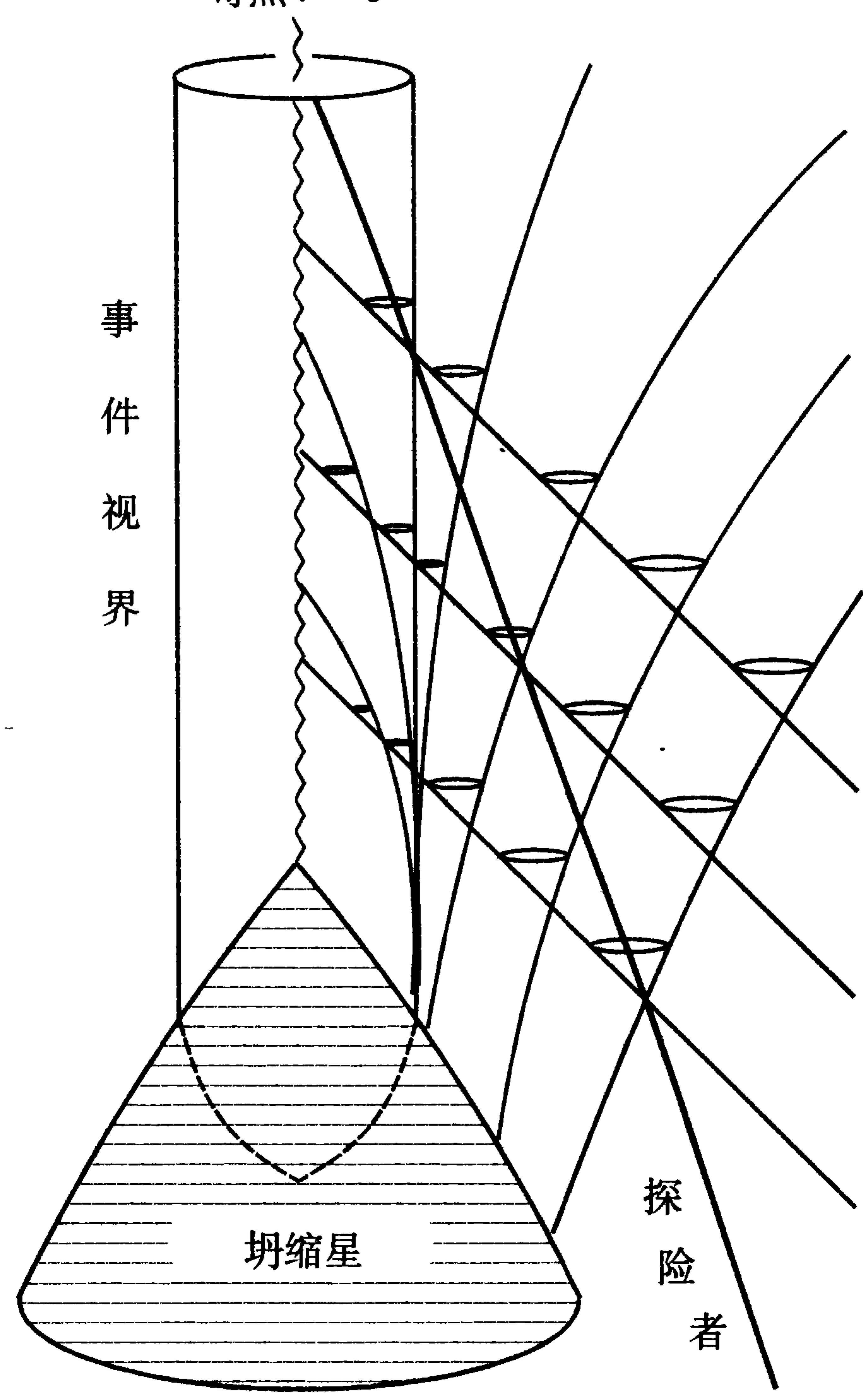


图 9-20　$\{\tilde{t}, r\}$ 系中恒星坍缩为黑洞的时空图．黑洞探险者在到达视界前如不掉转船头势必掉入奇点

下面再讨论坍缩星的外观．图 9-21 示出星体表面所发的外向光子到达外部静态观者的情况．由于视界以内的星体表面所发光子不能到达视界以外，外部观者似乎会看到星体逐渐变小，忽然消失．然而细观图 9-21 可知情况并非如此．由于视界以外的外向光子世界线越靠近视界越陡，在视界上完全竖直(躺在视界上)，外部观者将永远(无论其固有时 τ' 为多大)收到视界外的星体表面所发的光．他会感到星体的收缩越来越慢，星体越来越趋于某一大小，[①] 即感到星体半径以越来

① 稍后将看到外部观者收到的光波存在越来越严重的红移．因此，只有假定(理论上)观者对任何波长和强度的光都能感受，他才会有正文中的感觉．

越小的速率趋于 $2M$ 并将“冻结”在这一大小. 这种现象也称为引力场中的钟慢效应. 第 6 章曾指出, 在比较钟速时首先要确定比较的具体办法(约定一个明确的“比钟”方案). 在图 9-21 的情况下, 光子世界线就成为选择比钟方案的关键: 我们约定把两条相邻的径向光子世界线在星体表面观者和外部观者世界线上分别定出的固有时间 $\Delta\tau$ 和 $\Delta\tau'$ 作为比较对象. 计算表明(见选读 9-4-3) $\Delta\tau' > \Delta\tau$, 而且若 $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1$ 则 $\Delta\tau_2' > \Delta\tau_1'$, 即 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 随 τ 增加而增加, 所以外部观者认为星体表面的标准钟不但比自己的钟慢, 而且越走越慢(请注意, 这种“认为”是时空几何以及刚才所约定的比钟方案的共同结果). 这种钟慢效应的另一表现就是红移. 把两条相邻径向类光测地线看作两个相邻波峰的世界线, $\Delta\tau$ 和 $\Delta\tau'$ 便分别是星体表面观者和外部观者测得光波的周期, $\Delta\tau' > \Delta\tau$ 便说明外部观者收到的光波有较大波长, 即有红移; 而 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 随 τ 增加而增加则说明红移越来越甚. 不过这种红移与 9.2.1 小节讨论的稳态观者之间的红移有所不同, 因为星体表面的观者不是稳态观者, 详见选读 9-4-2.

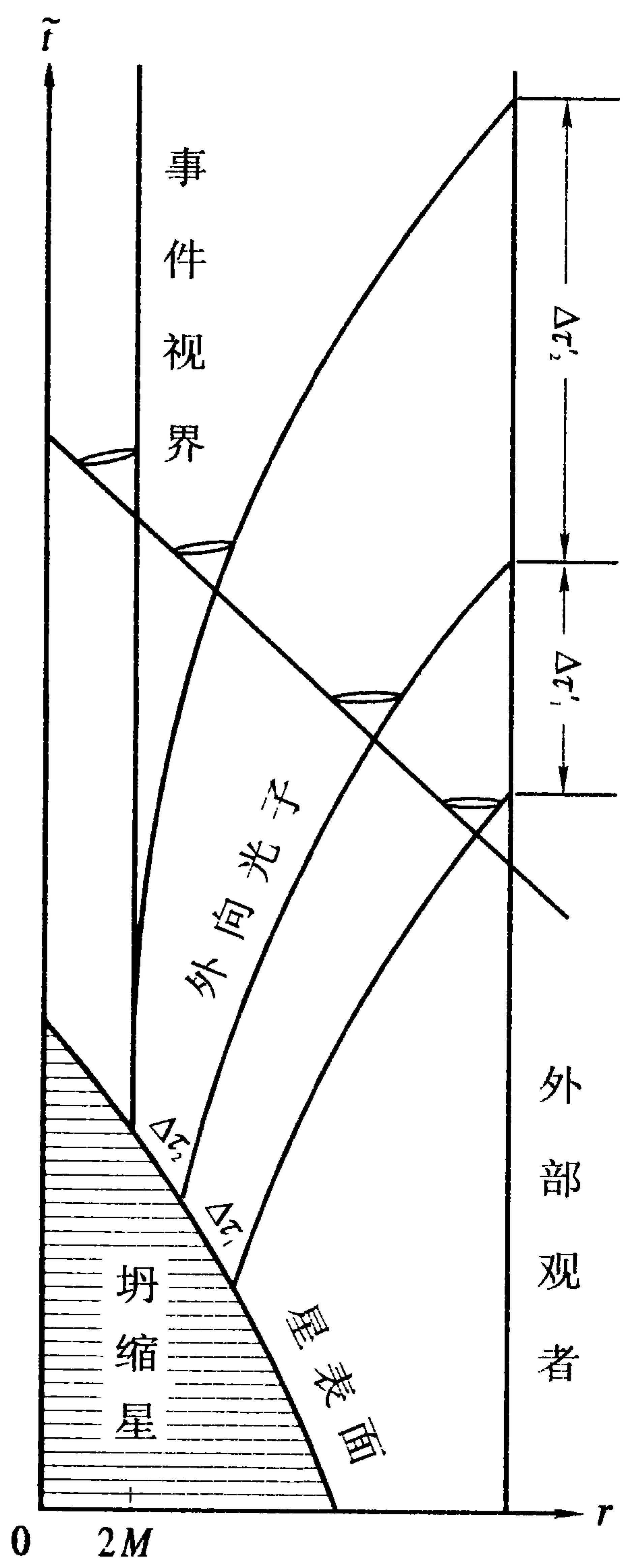


图 9-21　外部观者原则上可永远收到视界外的星体表面所发的光. $\Delta\tau_1' > \Delta\tau_1$ 表明存在红移; $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1$ 而 $\Delta\tau_2' > \Delta\tau_1'$ 表明红移越来越甚

[选读 9-4-1]

同一物理过程在不同坐标系中有如此不同的时空图, 这往往使初学者感到困惑不解. 问题的实质其实很简单: 坐标系按定义无非是从流形的某个开集 O 到 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集 V 的映射, 时空图是指 V 中的图. 同一物理过程在不同坐标系中当然可有不同的时空图. 不妨说物理过程是绝对的, 而时空图(由于涉及坐标系)是相对的. 本书在第一次介绍时空图时(6.1.5 小节)就已指出过这一问题.

由式(9-4-54)可知坐标基矢 $(\partial/\partial\tilde{t})^a$ 与 $(\partial/\partial r)^a$ 并不正交. 图 9-19 把 $\tilde{t}$ 轴和 r 轴画成正交, 是因为时空图是 $\mathbb{R}^n$ 的开集 V 中的图, 并不直接反映时空度规, 因而不反映矢量的正交性. 图 9-19 所表达的只是: 所有竖直线都是 r 为常数的线, 所有水平线都是 $\tilde{t}$ 为常数的线. 只有这样, 由 $\mathrm{d}\tilde{t}/\mathrm{d}r = -1$ 和 $\mathrm{d}\tilde{t}/\mathrm{d}r = (r+2M)/(r-2M)$ 刻划的两族类光测地线才表现为图中的两族线.

[选读 9-4-1 完]

[选读 9-4-2]

为简化讨论, 考虑最简单的恒星模型, 即均匀密度的无压强球对称星(尘埃

云). 由于压强梯度为零，星体表面每点的世界线都是径向类时测地线. 图 9-22 示出星体表面某事件 p 所发光子到达外部观者(事件 p')的情况，Z^a 和 $\tilde{Z}^a$ 分别代表 p 点的径向自由下落观者和静态观者的 4 速，Z'^a 代表外部静态观者在 p' 点的 4 速. 设 λ，$\tilde{\lambda}$ 和 λ' 分别是 Z^a，$\tilde{Z}^a$ 和 Z'^a 测同一光子所得的波长，则由式(9-2-2)可知

$$\frac{\lambda'}{\tilde{\lambda}}=\frac{\chi'}{\chi}, \tag{9-4-55}$$

其中

$$\chi\equiv(-\xi^a\xi_a)^{1/2}\Big|_p=\left[1-\frac{2M}{r(p)}\right]^{1/2}, \qquad \chi'\equiv(-\xi^a\xi_a)^{1/2}\Big|_{p'}=\left[1-\frac{2M}{r(p')}\right]^{1/2}. \tag{9-4-56}$$

然而前面提到的 $\Delta\tau'>\Delta\tau$ 所对应的红移却是指 $(\lambda'-\lambda)/\lambda$. 在式(9-4-55)的基础上，欲求 λ'/λ 只须求 $\tilde{\lambda}/\lambda$. 这时问题只涉及 p 点，可用同狭义相对论相同的手法处理(见 § 7.2 和 § 7.5). 这实质上就是多普勒频移问题，允许直接使用式(6-6-48a)，式中的 γ 可求之如下：

$$\gamma\equiv-g_{ab}Z^a\tilde{Z}^b=-g_{ab}(\partial/\partial\tau)^a\chi^{-1}(\partial/\partial t)^b=\chi^{-1}E\,.$$

(其中 E 是以 Z^a 为切矢的类时测地线的能量.) 再由 $\gamma=(1-u^2)^{-1/2}$ 求得 Z^a 相对于 $\tilde{Z}^a$ 的 3 速率 $u=\sqrt{E^2-\chi^2}/E$，代入式(6-6-48a)便得

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}=\frac{E+\sqrt{E^2-\chi^2}}{\chi}. \tag{9-4-57}$$

上式表明，当 p 点无限趋近事件视界时，观者 Z^a 和 $\tilde{Z}^a$ 测得的波长之间存在无限(多普勒)红移. 式(9-4-55)和(9-4-57)结合便可求得 λ'/λ：

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\chi'(E+\sqrt{E^2-\chi^2})}{\chi^2}. \tag{9-4-58}$$

上式可看作多普勒红移与引力红移的结合. 借用此式还可补证本选读前一段所给的结论——对图 9-21 有 $\Delta\tau'>\Delta\tau$ 以及 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 随 τ 增加而增加. 因为 $\Delta\tau$ 和 $\Delta\tau'$ 可分别解释为光波在发射和接收时的周期，所以

$$\frac{\Delta\tau'}{\Delta\tau}=\frac{\chi'(E+\sqrt{E^2-\chi^2})}{\chi^2}>\frac{\chi'}{\chi^2}E>E, \tag{9-4-59}$$

式中 E 为坍缩星表面一点的世界线(测地线)的能量，即

$$E=-g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial\tau)^b=-\chi g_{ab}\tilde{Z}^a(\partial/\partial\tau)^b=\chi\gamma\,,$$

其中 $\gamma\equiv g_{ab}\tilde{Z}^a(\partial/\partial\tau)^b$. 把该测地线反向延至 $r=\infty$，则 $\chi=1$ 而 γ 仍大于(等于)1，故 $E\geqslant 1$，由式(9-4-59)便知 $\Delta\tau'>\Delta\tau$，而且 χ 减小时 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 增大，可见 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 随 τ 增加而增加. 就是说，随着星体的坍缩，其表面所发的光到达外部观者时红移

越来越甚.　　　　**[选读 9-4-2 完]**

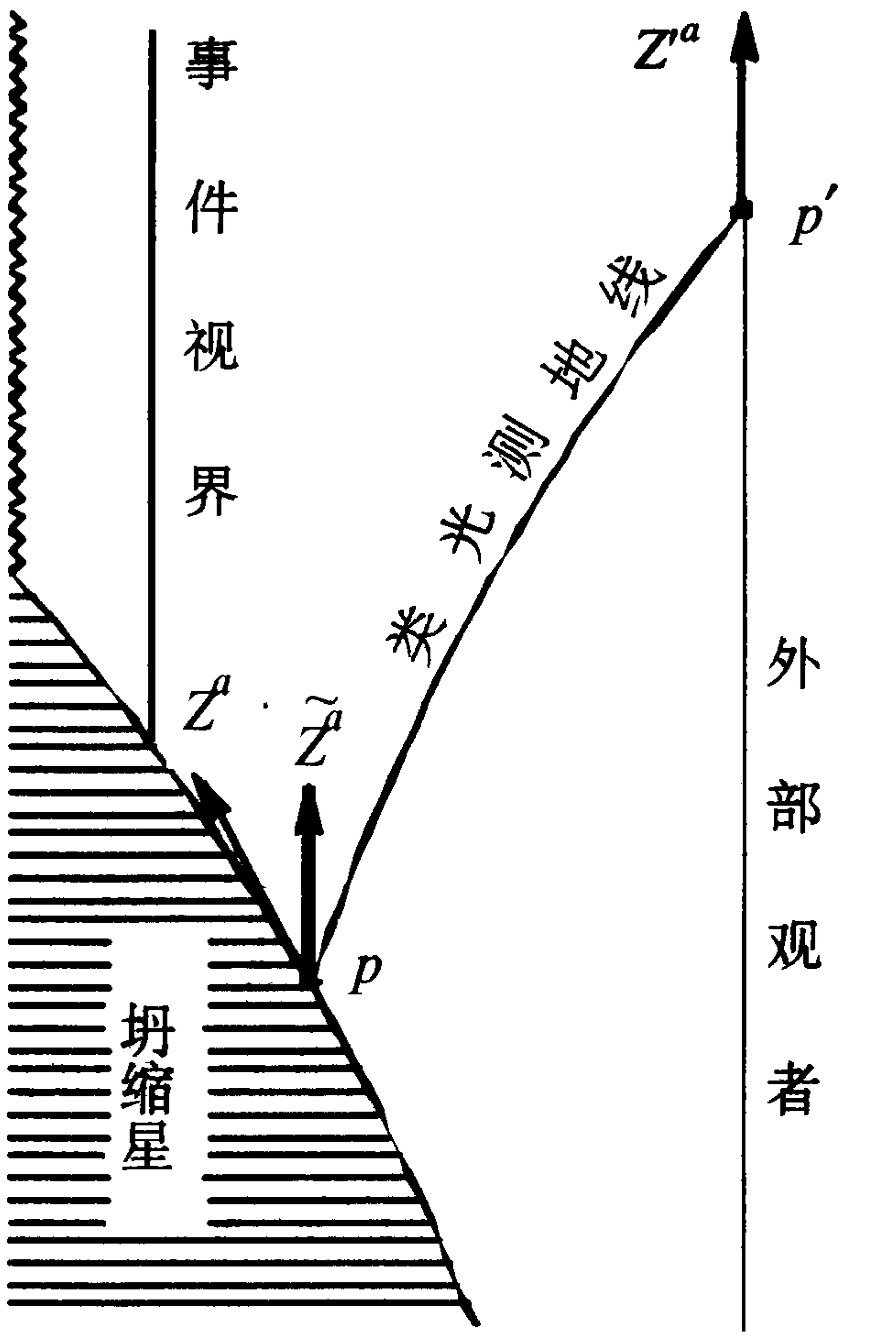


图 9-22　Z'^a 和 $\tilde{Z}^a$ 测得波长的关系为引力红移；Z^a 和 $\tilde{Z}^a$ 测得波长的关系为多普勒红移

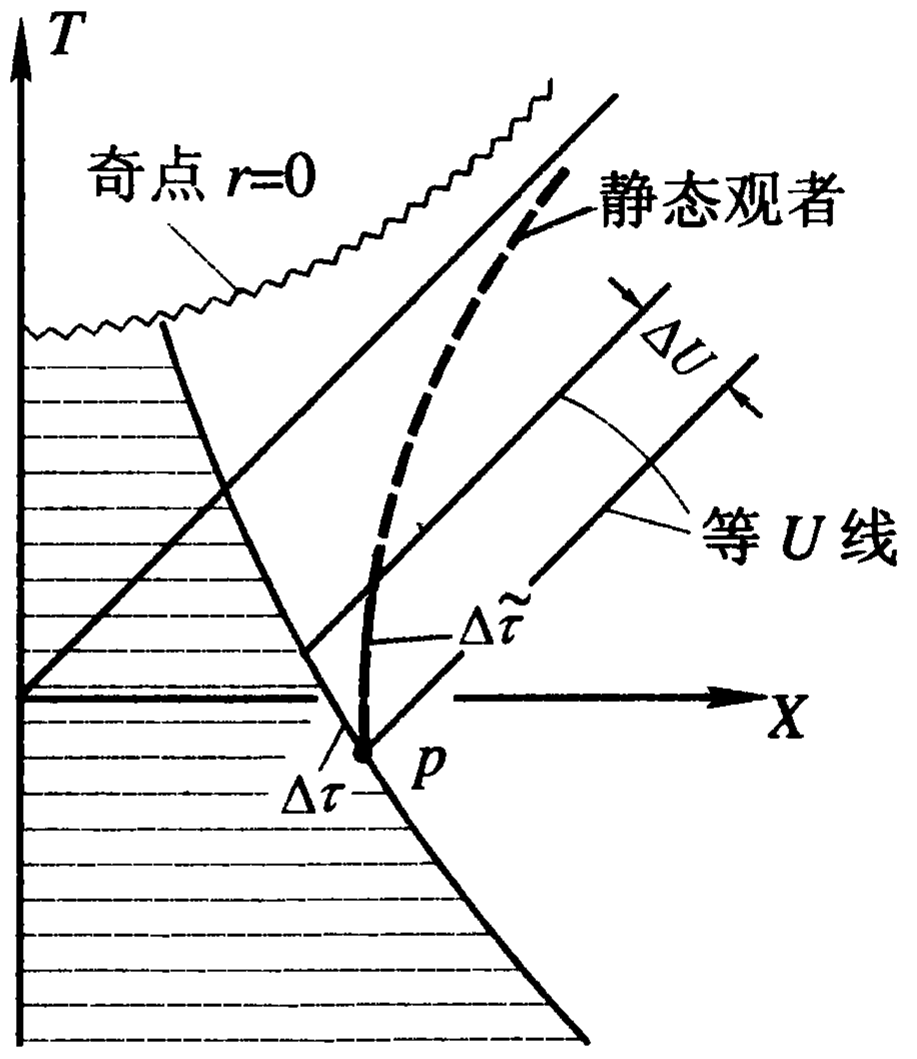


图 9-23　推导式(9-4-58)的另一方法（见习题 15）

习　题

~1. 考虑 Taub 的平面对称静态时空，其线元为式(8-6-1′)，试借助 Killing 矢量场写出类时测地线 $\gamma(\tau)$的参数表达式 $t(\tau)$，$x(\tau)$，$y(\tau)$，$z(\tau)$所满足的解耦方程(参考§ 9.1).

2. 用牛顿引力论借图 9-8 直接推出式(9-3-18).

~3. 试证 OV 流体静力学平衡方程(9-3-17)可改写为

$$\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{1/2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-(\rho+p)\,g\ , \tag{9-4-60}$$

其中 g 代表流体质点的 4 加速 $U^b\nabla_b U^a$ 的大小.

注　在牛顿近似下 $[1-2m(r)/r]^{1/2}\cong 1$，$p\cong 0$，式(9-4-60)成为 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r\cong-\rho g$．而 $g\cong m(r)/r^2$，故得式(9-3-18)，即 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r\cong-\rho m(r)/r^2$.

~4. 试证当 $R>>M$ 时式(9-3-26)近似回到牛顿引力论的式(9-3-23).

~5. 求闵氏时空中 Rindler 坐标 t，x 与洛伦兹坐标 T，X 的关系.

~6. Rindler 时空的类时 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$ 是闵氏时空的哪个 Killing 矢量场?

~7. 求施瓦西时空中静态观者的 4 加速的长度 $A\equiv(A^aA_a)^{1/2}$．提示：可借用第 8 章习题 3 的结论，即 $A_a=\nabla_a\ln\chi$．

~8. 把图 9-13(a)的 N_1(或 N_2)所代表的径向类光测地线简称为 N_1 (或 N_2)，试证：(1)坐标 V(或 U)是类光测地线 N_1(或 N_2)的仿射参数；(2)坐标 r 是除 N_1 和 N_2 外的径向类光测地线的仿射参数.

~9. 引入与 Kruskal 坐标类似的坐标消除下列线元的坐标奇性 $r=R$：

$$ds^2 = -\ (1 - r^2/R^2)\ dt^2 + (1 - r^2/R^2)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2), \qquad R = 常数.$$

10. 试证最大延拓施瓦西时空有 s.p.曲率奇性. 提示：利用式(8-3-21).

11. 试证图 9-13(a)的 N_1 是类光超曲面. 提示：只须证明其法矢 n^a 类光. 请注意 N_1 的方程为 $U = 0$，其法余矢为 $n_a = \nabla_a U$.

12. 试由式(9-4-50)推出式(9-4-51)，再推出式(9-4-54).

~13. 写出施瓦西度规在外向 Eddington 坐标系$\{u, r, \theta, \varphi\}$($u \equiv t - r_*$)的线元表达式.

*14. 试证用 $(\partial/\partial V)^a$ 和 $(\partial/\partial U)^a$ 定义的 ξ^a [见式(9-4-40)]在 N_1 和 N_2 上是类光 Killing 矢量场.

*15. 把图 9-21 改画为图 9-23. 试通过计算图中的 $\Delta\tau'/\Delta\tau$ 给出式(9-4-58)的另一推导. 提示：(1) $U \equiv -e^{(r_*-t)/4M}$ 在每条外向类光测地线上为常数. 先后沿外部静态观者世界线和星面自由下落观者世界线求得同一 dU 的两个表达式(分别含 $d\tau'$ 和 $d\tau$)，在两式之间画等号便得式(9-4-58). (2)在写出用 $d\tau$ 表出 dU 的式子时要用到以能量 E 表达 $dt/d\tau$ 和 $dr/d\tau$ 的公式，这可借§9.1 的手法求得.

第10章 宇 宙 论

§10.1 宇宙运动学

10.1.1 宇宙学原理

宇宙是古老而神奇的话题. 中外先哲们几乎无不对此作过思考和探索并得出过自己的结论. 然而，宇宙论只有在广义相对论诞生之后才真正算得上一门科学. 从广义相对论看来，宇宙是“无所不包”的最大时空，其大尺度的弯曲情况与物质分布的关系服从爱因斯坦方程.

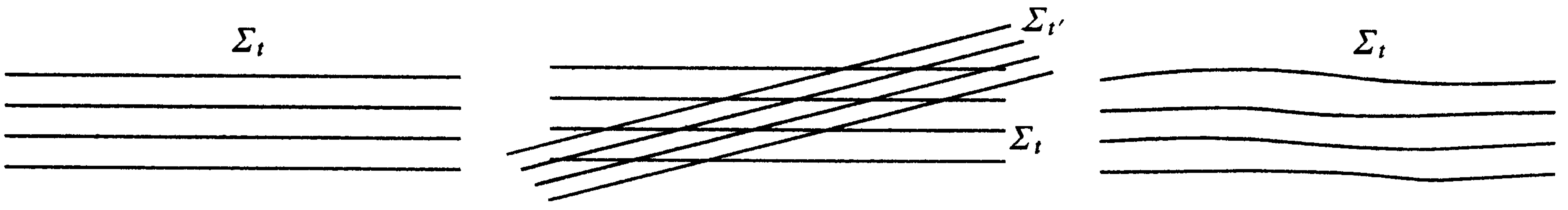
在物理学的众多分支中，宇宙论在如下意义上是最为特殊的分支：它的研究对象独一无二——我们的宇宙. 没有任何“其他宇宙”可资对比，无法像研究其他学科分支那样一而再地做实验，因为宇宙的演化过程“只此一次”. 只能通过大量观测积累数据，通过构造模型来解释观测结果、推断过去和预言未来. 存在许多宇宙模型，本章只介绍公认度最高的一种. 由于取得巨大成功，它也常被称为宇宙学的**标准模型**(standard model). 标准模型也存在这样那样的问题，因此近20多年来不断被修改. 特别是1998年的观测表明当今宇宙正在加速膨胀，这一惊人事实更使标准模型非作相当程度的修改不可. 一个新的标准宇宙模型正在形成之中，虽然还有许多问题尚待深入探讨. 本章的前3节讲的主要是标准模型，§10.4介绍对标准模型的一个重要修改——在极早期宇宙中插入“暴涨”阶段，§10.5则简略介绍新标准模型，重点放在“暗能量”问题. 宇宙论一直是一个十分活跃的研究课题，这使本章不得不带有如下特点：即使介绍的是定稿时最新的认识和数据，在本书出版时它也可能过时. 关心宇宙论最新进展的读者只能查阅最新文献.

标准模型(以及许多其他模型)的一个基本假设是如下的**宇宙学原理**(cosmological principle)：每一时刻的宇宙空间在大尺度下是均匀且各向同性的. 所谓空间均匀，是指空间各点的物理情况一样，没有一个空间点比另一空间点更特殊. 这在普通尺度下当然不对——宇宙中某些地方有恒星而另一些地方没有. 事实上，宇宙中的物质分布呈现“结团”现象：物质集聚成恒星，恒星集聚成**星系**(galaxy)(一个星系约含10^6~10^{13}颗恒星. 银河系只是很普通的一个星系，含千亿颗恒星.)，某些星系又集聚成大小不一的**星系团**(cluster of galaxies). 此外还有**超星系团**(supercluster)……. 然而，距离达到10^{10}光年的多方面观测使人们相信宇宙在很大的尺度下($>3\times10^8$光年，也称宇观尺度，足以容纳许多星系团)是均匀的，

质量密度点点相等. 这里的密度是指宇观尺度下的平均密度, 即在宇观小体积内(但已包含许多星系或星系团)"抹匀"后的密度."抹匀"是物理学的惯用手法. 例如, 从微观尺度看来, 物质并非连续分布(主要集中于原子核), 但从宏观尺度看却可认为物质连续分布并定义宏观密度, 如果宏观密度在某范围内点点相等, 就说该范围内物质分布是均匀的. 这里的"点"指"宏观点", 即宏观小而微观大(包含大量分子)的体积. 所谓各向同性, 是指存在这样的参考系, 其中任一观者向四面八方看到的物理情况相同, 没有一个方向特殊. 这在普通尺度下也不对: 至少我们在某一方向看到恒星而在另一方向则看不到. 然而人们倾向于相信在宇观抹匀之后确实存在这样的各向同性参考系.

宇观尺度下空间均匀和各向同性的假设是爱因斯坦于 1917 年用广义相对论研究宇宙时提出的. 当时的观测资料尚少, 他主要是为简化讨论而提出这一假设[马赫原理对假设的提出也起了作用, 见 Peebles(1993)P.10.~16.]. 后来, 随着观测和理论的发展, 宇宙学原理受到越来越多的观测支持.

宇宙学原理是关于宇宙空间的性质的原理. 在非相对论物理学中, 空间一词非常简单, 在相对论中则不然. 问题在于, 时空是绝对对象而空间和时间则与人为分法有关, 对同一时空可以通过不同的 3+1 分解得到不同的时间和空间. 要给"空间均匀"一个准确的表述, 应先对"空间"给出明确的定义. 在非相对论物理学中, 每个绝对同时面 Σ 就是某一时刻的全空间(见图 6-10), 因而空间概念十分简单(是绝对的); 在狭义相对论中, 每一惯性系$\{t, x, y, z\}$的等 t 面 Σ_t 称为该系在该时刻的全空间. 在上述两种情况下, 时空都被等t面所"分层", (含义是: 对任一时空点p有且仅有一个等t面 Σ_t 使 $p \in \Sigma_t$.) 区别在于前者的分层是绝对的, [只有一种分法,见图 10-1(a)]而后者的分层是相对的[不同惯性系有不同的分层法, 见图 10-1(b)]. 后者的分层(对每一惯性系而言)还有两个特点: ① 每层都是一张类空超曲面; ②所有层的集合$\{\Sigma_t\}$是一个单参族, 即任一实数值 t 对应着唯一的一层 Σ_t, 而t的物理意义正是该层对应的惯性坐标时刻, 所以一个层也叫一个"时刻". 在广义相对论中, 由于弯曲时空不存在整体惯性系, 用惯性系对时空分层的做法不再适用, 索性规定具有上述两个特点的任何分层方式(即任一单参类空超曲面族)都允许, 每层代表一个"时刻"[图 10-1(c)]. 这是相对论中空间和时间概念具有相当任意性的反映. 如果时空具有一定的对称性, 则与这种对称性相适配的分层对讨论更为方便. 其实, 作为弯曲时空在曲率为零时的特例, 闵氏时空的分层也是相当任意的, 用惯性系的同时面分层的方式之所以被普遍采用, 正是因为它与时空的内在对称性相适配.



(a) 非相对论物理学　　(b) 狭义相对论　　(c) 广义相对论

图 10-1　把时空分层，每层代表一个时刻的空间

时空的空间均匀性和各向同性性是时空内在对称性的反映. 空间均匀性是指存在这样一种分层方式，每层中各点的几何和物理情况全同(因此每层称为一个均匀面). 这种分层方式就是与内在对称性适配的方式. 其他分层方式虽然也允许，但未能保证每层都是均匀面，因而不方便. 如无特别声明，在宇宙论中谈及空间时都指均匀面. 空间各向同性性是对参考系而言的. 如果时空存在一个参考系，其中每个观者在每一时刻都无法用局域实验发现他的任一空间方向(同他的世界线正交的方向)有别于其他空间方向，就说时空具有空间各向同性性.

10.1.2　宇宙的空间几何

本小节证明满足宇宙学原理的3维空间只有3种可能几何,从而大大简化讨论.

宇宙学原理假定宇宙在物理上和几何上都是空间均匀和各向同性的. 为便于讨论宇宙的空间几何，我们先用数学语言给出几何上的空间均匀性和各向同性性的明确定义.

定义 1　时空(M, g_{ab})称为**空间均匀的**(spatially homogeneous)，若存在把 M 分层的单参类空超曲面族$\{\Sigma_t\}$使得对任意t和任意 $p, q \in \Sigma_t$ 存在h_{ab}(由g_{ab}在 Σ_t 上诱导的度规)的等度规映射$\phi : \Sigma_t \to \Sigma_t$ 使 $\phi(p) = q$ (见图 10-2). 每一 Σ_t 称为一张**均匀面**(surface of homogeneity).

定义 2　时空(M, g_{ab})中的参考系称为**各向同性**(isotropic)**参考系**，若对其中任一观者(4 速为 Z^a)世界线上任一点 p 以及 p 点任意两个等长的空间矢量 $w_1{}^a$ 和 $w_2{}^a$ 存在 g_{ab} 的等度规映射$\psi : M \to M$ 使$\psi(p) = p$，$\psi_* Z^a = Z^a$，$\psi_* w_1{}^a = w_2{}^a$ (见图 10-3). 各向同性参考系内的观者称为**各向同性观者**. 存在各向同性参考系的时空

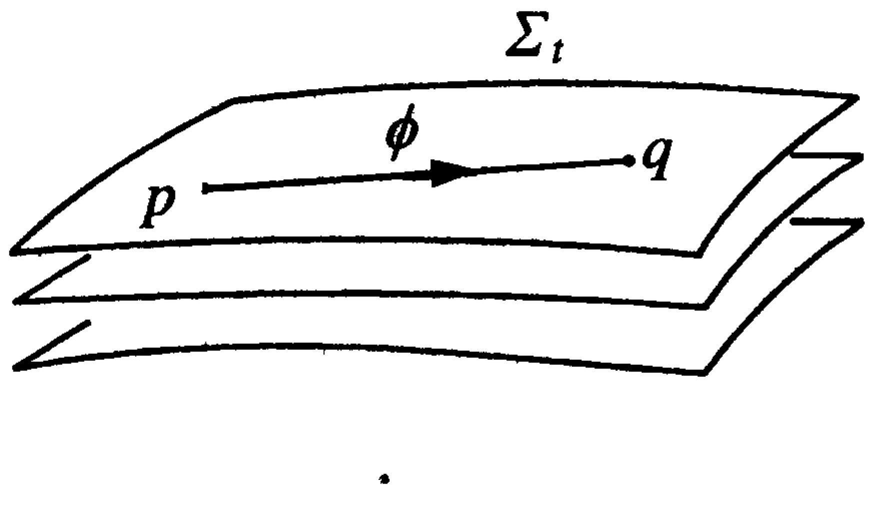


图 10-2　空间均匀性定义用图

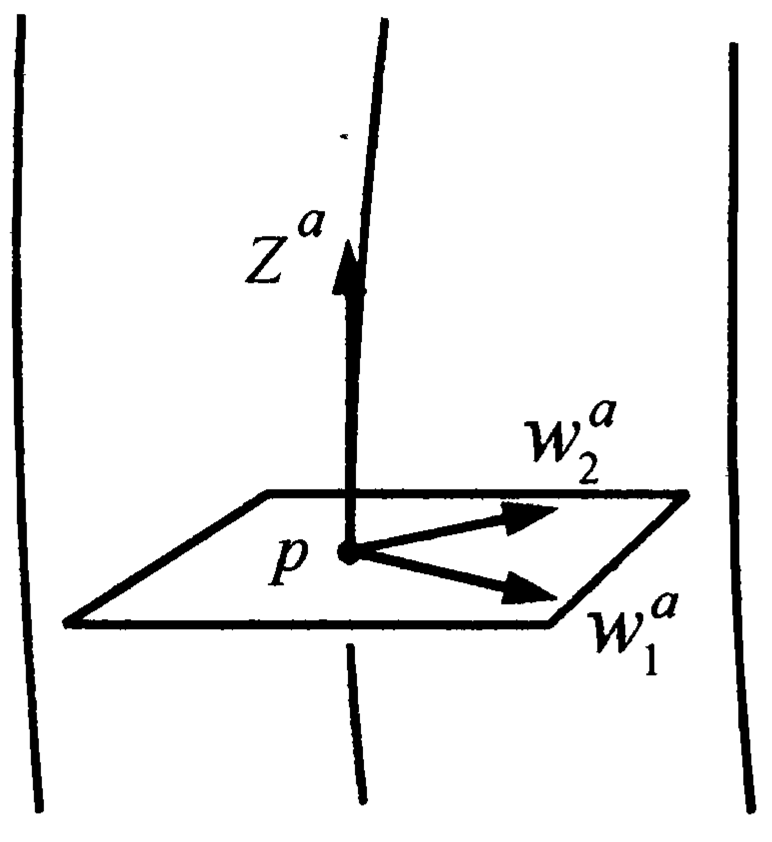


图 10-3　各向同性观者定义用图

称为**各向同性时空**.

在宇宙这个浩瀚的“大海”中，一个星系如同“沧海之一粟”，被处理为宇宙时空中的一条世界线. 不妨猜想每个星系都是一个各向同性观者(观测表明这一猜想基本属实但略有歧离). 今后谈到星系时如无特别说明就是指各向同性观者.

如果时空既空间均匀又各向同性，自然要问它的各向同性参考系$\mathscr{R}$与它的均匀面Σ_t之间的关系，我们当然希望$\mathscr{R}$的观者世界线与Σ_t正交. 然而这对闵氏时空未必成立，因为任一惯性参考系都是各向同性参考系，任一惯性系的同时面族都是均匀面族，而一个惯性系的观者世界线当然与另一惯性系的同时面不正交. 但是，只要空间均匀和各向同性时空有唯一的均匀面族，正交性就一定成立. 请看如下命题：

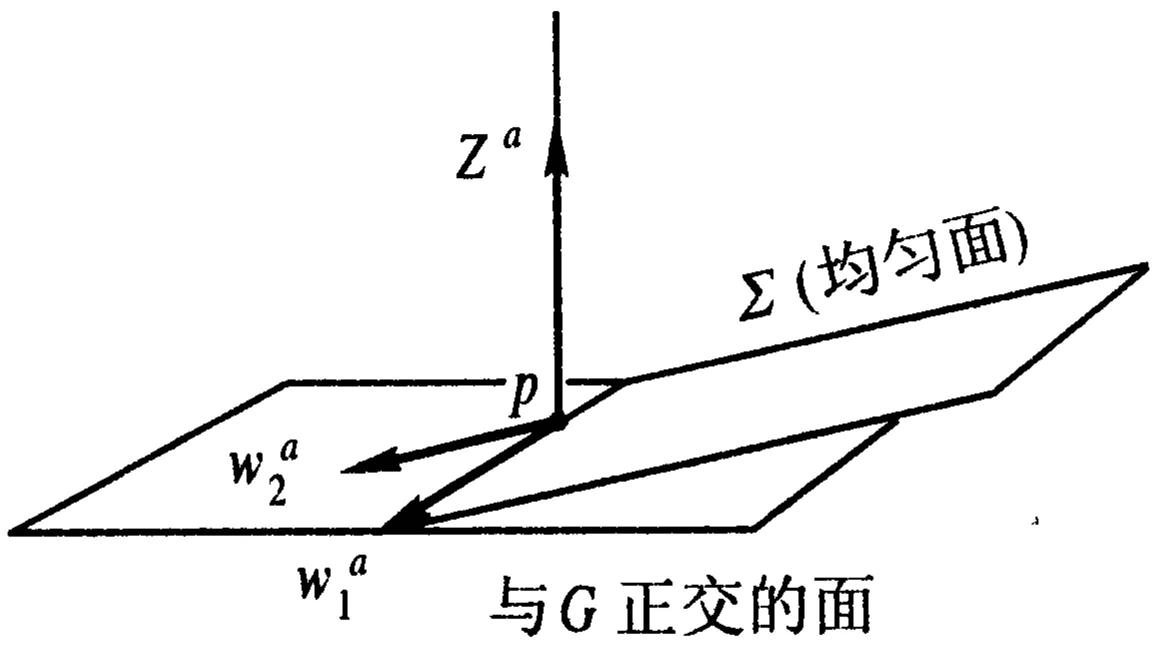


图 10-4 命题 10-1-1 证明用图

命题 10-1-1 若空间均匀且各向同性时空有唯一的均匀面族，则均匀面必定处处与各向同性观者世界线正交.

证明[选读] 设p是各向同性观者G世界线上一点，Σ是含p的均匀面，它与G在p点的4速Z^a不正交(见图 10-4). 设V_p是p点的4维切空间，$W_p \subset V_p$是与Z^a正交的3维子空间，则W_p的元素就是p点的空间矢量(对G而言). 令$w_1{}^a \in W_p$为切于Σ的矢量(这种矢量很多)，$w_2{}^a \in W_p$为不切于Σ的矢量. 设ψ是等度规映射，则Σ是均匀面导致$\psi[\Sigma]$是均匀面(读者可从定义1出发自证)，$\psi(p)=p$导致$\psi[\Sigma]$和Σ都含p点，于是由均匀面族的唯一性可知$\psi[\Sigma]=\Sigma$. 因“曲线切矢的像等于曲线像的切矢”，故$w_1{}^a$切于Σ导致$\psi_* w_1{}^a$切于$\psi[\Sigma]$，于是$\psi_* w_1{}^a$切于Σ，因而不等于$w_2{}^a$，可见不存在等度规映射ψ使$\psi(p)=p$和$\psi_* w_1{}^a = w_2{}^a$，与G为各向同性观者矛盾. □

在接受宇宙学原理这一假设的同时，人们还默认(假定)宇宙的均匀面族是唯一的，因此各向同性观者世界线与均匀面正交. 这一各向同性参考系称为**宇宙静系**. 我们可以一劳永逸地对宇宙时空做一种“正交 3+1 分解”，每一均匀面代表一个时刻的全空间，每一(与均匀面正交的)各向同性观者世界线代表一个空间点

的全部历史. 下面讨论任一时刻的空间(均匀面Σ_t)的 3 维几何.

命题 10-1-2　设h_{ab}是宇宙时空度规g_{ab}在均匀面Σ_t上的诱导度规，$\hat{R}_{abc}{}^d$是h_{ab}的曲率张量，$\hat{R}_{abcd} \equiv h_{de}\hat{R}_{abc}{}^e$，则存在常数$K$使

$$\hat{R}_{abcd} = 2Kh_{c[a}h_{b]d}\,. \tag{10-1-1}$$

证明　设$\Lambda_p(2)$是把Σ_t看作独立的 3 维流形时点$p \in \Sigma_t$的全体 2 形式的集合，令$\hat{R}_{ab}{}^{cd} \equiv h^{ce}\hat{R}_{abe}{}^d$，则$\forall Y_{cd} \in \Lambda_p(2)$有$\hat{R}_{ab}{}^{cd}Y_{cd} \in \Lambda_p(2)$，故$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$是从$\Lambda_p(2)$到$\Lambda_p(2)$的线性映射. 由定理 5-1-3 可知$\Lambda_p(2)$是 3 维矢量空间，故$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$对应于 3×3 矩阵$L$. 由曲率张量的对称性$\hat{R}_{abcd} = \hat{R}_{cdab}$可知矩阵$L$是对称的(证明见选读 10-1-1)，因而可对角化. 选基底使L为对角矩阵，由各向同性性以及均匀面族的唯一性可以证明对角元相等(见选读 10-1-1)，故L只能是 3×3 单位矩阵I的某一倍数，记此倍数为$2K$，则

$$L = 2KI, \qquad K \in \mathbb{R}\,. \tag{10-1-2}$$

单位矩阵I对应于从$\Lambda_p(2)$到$\Lambda_p(2)$的恒等映射，而由

$$\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}Y_{cd} = \delta_a{}^c\delta_b{}^dY_{[cd]} = \delta_a{}^c\delta_b{}^dY_{cd} = Y_{ab}$$

看出这一恒等映射可表为$\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$，故矩阵等式(10-1-2)可改写为张量等式

$$\hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2K\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}\,. \tag{10-1-3}$$

上式对Σ_t的任一点成立，而空间均匀性则要求K为常数. 用$h_{ce}h_{df}$与上式两边缩并，注意到$h_{ce}h_{df}\hat{R}_{ab}{}^{cd} = \hat{R}_{abef}$，便得式(10-1-1).　□

[选读 10-1-1]

现在补证正文中用到的结论，即$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$对应于对称矩阵. 暂时撇开$\Lambda_p(2)$而讨论一个带正定度规g_{ab}的n维矢量空间V. 设$L^a{}_b$是V上的(1,1)型张量，满足$L_{ab}=L_{ba}$(其中$L_{ab} \equiv g_{ac}L^c{}_b$)，则$L^a{}_b$在$V$的任一正交归一基底(及其对偶基底)的分量$L^\mu{}_\nu$等于$L_{ab}$在同一基底的分量$L_{\mu\nu}$（因$L^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma}L_{\sigma\nu} = \delta^{\mu\sigma}L_{\sigma\nu} = L_{\mu\nu}$)，于是对称性$L_{ab}=L_{ba}$保证$(L^\mu{}_\nu)$为对称矩阵. 为把此结果用于矢量空间$\Lambda_p(2)$，还须先给$\Lambda_p(2)$定义正定度规. $\forall X_{ab}, Y_{ab} \in \Lambda_p(2)$定义内积$(X,Y) := X^{ab}Y_{ab}$，其中$X^{ab} \equiv h^{ac}h^{bd}X_{cd}$，就相当于在$\Lambda_p(2)$上定义了度规($h_{ab}$的正定性保证此度规的正定性). 于是$\hat{R}_{abcd} = \hat{R}_{cdab}$相当于刚才的$L_{ab}=L_{ba}$，故$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$对应的 3×3 矩阵$L$是对称矩阵，因而可对角化. 现在进一步证明 3 个对角元相等. 因为每个对角元无非是相应的特征矢量的特征值，所以只须证明如下命题：

命题 10-1-3　设Y_{ab}和Y'_{ab}是$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$的任意两个特征矢，λ和λ'是相应的特征值，即

$$\hat{R}_{ab}{}^{cd}Y_{cd} = \lambda Y_{ab}, \qquad \hat{R}_{ab}{}^{cd}Y'_{cd} = \lambda' Y'_{ab}, \tag{10-1-4}$$

则各向同性性以及均匀面族的唯一性保证 $\lambda' = \lambda$.

证明 (Σ_t, h_{ab}) 是 3 维黎曼空间. 以 W_p 代表 $p \in \Sigma_t$ 的切空间，则 $(W_p, h_{ab}|_p)$ 是带正定度规的 3 维矢量空间，$\Lambda_p(2)$ 无非是此空间上全体 2 形式的集合. 把 $Y_{ab} \in \Lambda_p(2)$ 的对偶形式(1 形式)记作 w_c，则由式(5-6-1)得 $w_c = Y^{ab}\hat{\varepsilon}_{abc}/2$ (其中 $\hat{\varepsilon}_{abc}$ 是与 h_{ab} 适配的体元). 用 h^{cd} 对 w_c 升指标得 p 点的空间矢量 $w^a = \hat{\varepsilon}^{abc}Y_{bc}/2$，同理有 $w'^a = \hat{\varepsilon}^{abc}Y'_{bc}/2$. 不失一般性，设空间矢量 w'^a 和 w^a 等长，则由各向同性的定义可知存在 g_{ab} 的等度规映射 $\psi: M \to M$ 使 $\psi(p) = p$，$\psi_* w^a = w'^a$. 再由均匀面族的唯一性可知 $\psi[\Sigma_t] = \Sigma_t$，由此不难证明把 ψ 的定义域限制在 Σ_t 后所得的映射 $\psi: \Sigma_t \to \Sigma_t$ 是 h_{ab} 的等度规映射，即 $\psi^* h_{ab} = h_{ab}$，从而 $\psi^*\hat{\varepsilon}_{cab} = \hat{\varepsilon}_{cab}$，$\psi^*\hat{R}_{ab}{}^{cd} = \hat{R}_{ab}{}^{cd}$. 由 Y_{ab} 与 w_c 互为对偶形式易得 $Y_{ab} = \hat{\varepsilon}_{cab}w^c$，于是

$$\psi^* Y_{ab} = \psi^*(\hat{\varepsilon}_{cab}w^c) = \hat{\varepsilon}_{cab}\psi_* w^c = \hat{\varepsilon}_{cab}w'^c = Y'_{ab}. \tag{10-1-5}$$

另一方面，由式(10-1-4)得

$$\psi^*(\hat{R}_{ab}{}^{cd}Y_{cd}) = \psi^*(\lambda Y_{ab}). \tag{10-1-6}$$

$$\text{式(10-1-6)左边} = \hat{R}_{ab}{}^{cd}\psi^* Y_{cd} = \hat{R}_{ab}{}^{cd}Y'_{cd} = \lambda' Y'_{ab}, \tag{10-1-7}$$

其中第一步用到 $\psi^*\hat{R}_{ab}{}^{cd} = \hat{R}_{ab}{}^{cd}$，第二步用到式(10-1-5)，第三步用到式(10-1-4).

$$\text{式(10-1-6)右边} = \lambda\psi^* Y_{ab} = \lambda Y'_{ab}. \tag{10-1-8}$$

式(10-1-6)、(10-1-7)和(10-1-8)联合给出 $\lambda' = \lambda$. □

[选读 10-1-1 完]

[选读 10-1-2]

前面在讨论 Σ_t 的几何时，我们先利用各向同性性证明 $\forall p \in \Sigma_t$ 有 $K \in \mathbb{R}$ 使式(10-1-1)对 p 点成立，再利用空间均匀性说明 K 在 Σ_t 上为常数. 然而，不用空间均匀性也可证明 K 为常数，证明如下：以 ∇_a 代表与 h_{ab} 适配的导数算符，则比安基恒等式[式(3-4-8)]与式(10-1-1)结合给出 $0 = \nabla_{[e}R_{ab]cd} = 2h_{c[a}h_{b|d|}\nabla_{e]}K$. 以 $h^{ad}h^{cb}$ 作用于上式两边得 $\nabla_e K = 0$ (证明中用到 Σ_t 的维数 $n \geqslant 3$)，可见 K 在 Σ_t 上为常数. 这一讨论表明，在只关心 Σ_t 的几何时，无需空间均匀性也可得出命题 10-1-2 的结论.

[选读 10-1-2 完]

广义黎曼空间(M, g_{ab})叫**常曲率空间**(space of constant curvature)，若存在常数 K 使其黎曼张量满足

$$R_{abcd} = 2K g_{c[a}g_{b]d}. \tag{10-1-1'}$$

由下册附录 J 的一个命题可知：①常曲率空间有最高对称性，即其等度规群(可能只是局部群)的维数(亦即独立 Killing 矢量场的个数)是 $n(n+1)/2$，其中 n 是空间的

维数. ②流形维数、度规号差及 K 值相同的两个常曲率空间是(局域)等度规的(即有相同的局域几何). 式(10-1-1)表明宇宙的均匀面 (Σ_t, h_{ab}) 是常曲率空间.① 因此，若能列出任意实数 K 相应的度规 h_{ab}，便能穷尽 Σ_t 的各种可能的(局域)空间几何. 空间有最高对称性的特点使人们立即想到平直度规，因为对平直度规有 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}=0$，自然满足 $K=0$ 情况下的式(10-1-3). 于是 $K=0$ 时的空间线元可借笛卡儿坐标表为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 . \qquad (10\text{-}1\text{-}9)$$

当然，$K\neq 0$ 时 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}\neq 0$，因此 $K\neq 0$ 时 h_{ab} 不可能平直. 既然度规有最高对称性，除平直度规外自然想到球对称度规. 通常的球对称度规是指 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中的 2 维球面上由 δ_{ab} 诱导的 2 维度规，其线元可表为 $\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$. 现在要找的是 3 维球对称度规，它应是 4 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 中 3 维球面上由 δ_{ab} 诱导的度规. 设 x, y, z, w 是 4 维欧氏空间的笛卡儿坐标，则其中的 3 维球面(记作 $S_{\bar{R}}$)的方程为

$$x^2+y^2+z^2+w^2=\bar{R}^2 , \qquad (10\text{-}1\text{-}10)$$

其中常数 $\bar{R}$ 代表球面半径. 仿照 3 维欧氏空间的做法，用下式定义 4 维欧氏空间的球坐标 R, ψ, θ, φ：

$$\begin{aligned} x&=R\sin\psi\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=R\sin\psi\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=R\sin\psi\cos\theta,\\ w&=R\cos\psi, \end{aligned} \qquad (10\text{-}1\text{-}11)$$

则 4 维欧氏线元可表为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}w^2=\mathrm{d}R^2+R^2[\mathrm{d}\psi^2+\sin^2\psi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)] .$$

由式(10-1-10)和(10-1-11)可知在半径为 $\bar{R}$ 的 3 维球面 $S_{\bar{R}}$ 上有 $R=\bar{R}$，$\mathrm{d}R=0$，故 $S_{\bar{R}}$ 上的、由 4 维欧氏线元诱导出的 3 维线元为

$$\mathrm{d}l^2=\bar{R}^2[\mathrm{d}\psi^2+\sin^2\psi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)] . \qquad (10\text{-}1\text{-}12)$$

由上式出发计算 $S_{\bar{R}}$ 的曲率张量(习题)，得 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}=2\bar{R}^{-2}\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$，即 3 维球面 $S_{\bar{R}}$ 的曲率张量满足 $K=\bar{R}^{-2}$ 的式(10-1-3). $\bar{R}^{-2}$ 可取任意正实数，故各种半径的 3 维球面穷尽了 $K>0$ 的常曲率空间局域几何. 为求得全部 $K<0$ 的常曲率空间，考虑 4 维闵氏时空的、由如下方程

① 由命题 10-1-3 的证明可知各向同性性和均匀面族唯一性是保证 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 对应的矩阵 L 有相同对角元[因而 (Σ_t, h_{ab}) 是常曲率空间]的充分条件. 其实均匀面族唯一性也是必要条件，因为存在人为例子(略)，当只有各向同性性而没有均匀面族唯一性时 (Σ_t, h_{ab}) 不是常曲率空间.

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \bar{\xi}^2 \tag{10-1-13}$$

(其中 t, x, y, z 是洛伦兹坐标，$\bar{\xi}$ 为常数)定义的 3 维旋转双曲面 (记作 $S_{\bar{\xi}}$，压缩两维后如图 10-5)，用下式定义双曲坐标 ξ，ψ，θ，φ：

$$\begin{aligned} x &= \xi \operatorname{sh}\psi \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \xi \operatorname{sh}\psi \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= \xi \operatorname{sh}\psi \cos\theta, \\ t &= \xi \operatorname{ch}\psi, \end{aligned} \tag{10-1-14}$$

则 4 维闵氏线元可表为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= -\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2[\mathrm{d}\psi^2 + \operatorname{sh}^2\psi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)] . \end{aligned} \tag{10-1-15}$$

从式(10-1-14)可知在由式(10-1-13)定义的 3 维双曲面 $S_{\bar{\xi}}$ 上有 $\xi = \bar{\xi}$, $\mathrm{d}\xi = 0$，故 $S_{\bar{\xi}}$ 上的由 4 维闵氏线元诱导的 3 维线元为

$$\mathrm{d}l^2 = \bar{\xi}^2[\mathrm{d}\psi^2 + \operatorname{sh}^2\psi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)] . \tag{10-1-16}$$

由上式出发计算 $S_{\bar{\xi}}$ 的曲率张量(练习)，得

$$\hat{R}_{ab}{}^{cd} = -2\bar{\xi}^{-2}\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]} , \tag{10-1-17}$$

即 3 维双曲面 $S_{\bar{\xi}}$ 的曲率张量满足 $K = -\bar{\xi}^{-2}$ 的式(10-1-3). $\bar{\xi}^{-2}$ 可取任意正实数，故各种参数 $\bar{\xi}$ 的 3 维双曲面穷尽了 $K < 0$ 的常曲率空间局域几何.

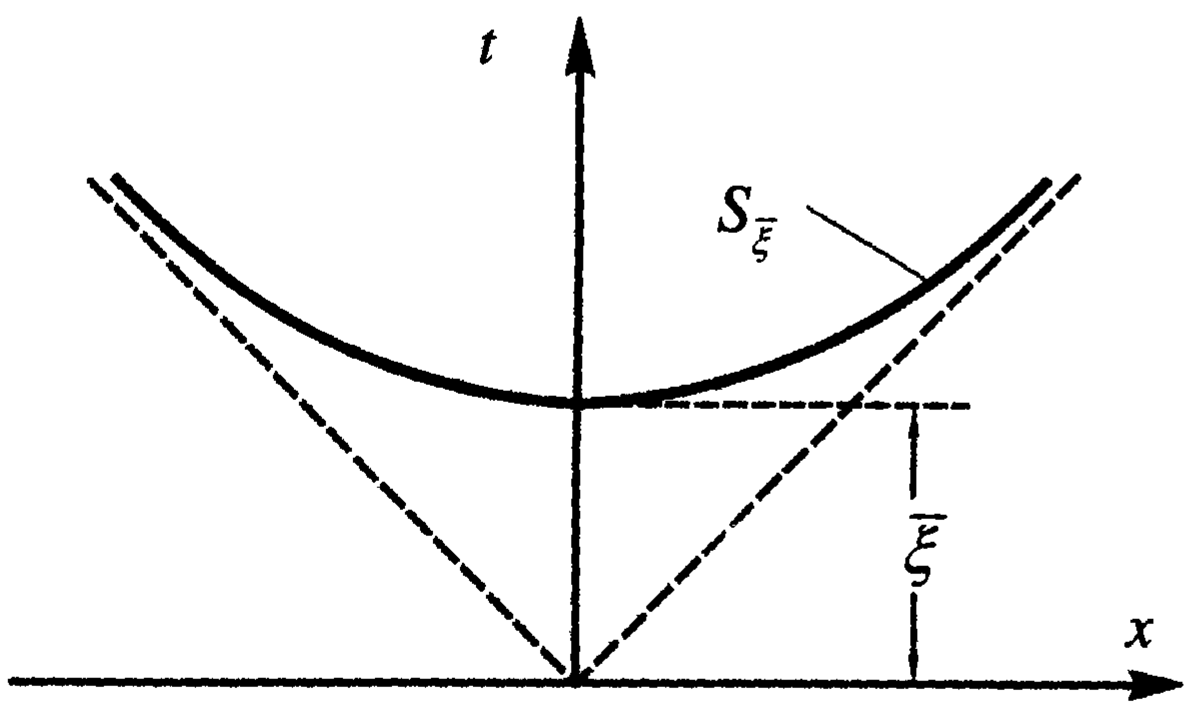


图 10-5 闵氏时空的双曲面(只画两维)

小结 由宇宙学原理可知宇宙在任一瞬间(即任一均匀面)的局域空间几何只有以下 3 种可能情况：

(a) 3 维球面度规，其线元可用球坐标 ψ, θ, φ 表为

$$\mathrm{d}l^2 = K^{-1}[\mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)], \qquad K > 0 . \tag{10-1-18}$$

(b) 3 维平直度规，其线元可用笛卡儿坐标 x, y, z 表为

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \quad (\text{对应于 } K = 0 \text{ 的情况}), \tag{10-1-19}$$

若改用球坐标 ψ, θ, φ, 则上式可表为与式(10-1-18)更类似的形式：

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\psi^2 + \psi^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) . \tag{10-1-19'}$$

(c) 3 维双曲面度规，其线元可用双曲坐标 ψ, θ, φ 表为

$$\mathrm{d}l^2 = -K^{-1}[\mathrm{d}\psi^2 + \operatorname{sh}^2\psi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)], \qquad K < 0 . \tag{10-1-20}$$

关于宇宙在空间上是否有限的问题，在人类文明史中一直存在两种相反意见，两者交替占上风，占上风的总时间几乎一样长. 现在，当我们明确宇宙的空间几何只有上述 3 种可能性时，问题就变得十分明确. 在可能性(a)中，宇宙空间是 3 维球面(“封闭宇宙”)，其体积有限，因此是有限宇宙. 空间虽然有限，但却“无

边”，因为球面没有边界．在可能性(b)和(c)中，宇宙空间是 3 维欧氏空间或 3 维双曲面(“开放宇宙”)，其体积为无限，因此是无限宇宙．然而，我们的宇宙到底属于 3 种中的哪一种？这个问题将在§10. 3 和§10. 5 中讨论．

有必要说明一点．常曲率空间的定义只要求度规满足式(10-1-1′)而未对底流形的整体拓扑结构提出要求．以宇宙的均匀面(Σ_t, h_{ab})为例．对$K>0$的情况，从式(10-1-1)可得的结论只是：h_{ab}一定是 3 球面度规[满足式(10-1-18)]，但不能肯定整个Σ_t就是一个 3 球面(因为无论从球面上挖去某些点还是把球面上的某些点认同都不改变其局域几何)．然而，利用宇宙学原理可以排除绝大多数的人为改变整体拓扑的做法．虽然还不能完全排除，但从物理角度可认为它们都不够自然，于是才得出关于宇宙空间整体几何的如下结论：$K>0$时Σ_t为 3 球面(封闭宇宙)，$K=0$和$K<0$时Σ_t分别是欧氏空间和旋转双曲面(开放宇宙)．

10.1.3 Robertson-Walker (罗伯逊–沃克) 度规

宇宙时空度规g_{ab}应是这样的度规，它在每一均匀面Σ_t上的诱导度规为Σ_t按照 10.1.2 小节得到的h_{ab}(对应于线元dl^2)．可以引入方便的坐标系把g_{ab}写成简洁的线元表达式．先指出一个结论：任意两个各向同性观者的世界线介于任意两张均匀面之间的线段必定等长．从物理上不难接受这一结论，因为所有各向同性观者应该平权，很难相信存在这样两个各向同性观者，他们的世界线介于两张均匀面之间的线段竟然长度不等．选读 10-1-3 还将对这一结论给出严格证明．现在介绍坐标系．在均匀面Σ_0上选(局部)坐标$x^1\equiv\psi$，$x^2\equiv\theta$，$x^3\equiv\varphi$(在 3 种几何下ψ，θ，φ的含义已明于 10.1.2 节)，用各向同性观者世界线把这些空间坐标携带至Σ_0外，即每条世界线各点由相同的ψ，θ，φ刻画．调节每一各向同性观者的标准钟的初始设定使它们在与Σ_0面的交点上指零，把每一时空点的时间坐标t定义为过该点的各向同性观者的固有时τ，便得宇宙时空的一个坐标系$\{t, x^i\}$[称为**Robertson-Walker**(或 **RW**)**坐标系**]．这显然是各向同性参考系的一个共动坐标系．还应说明，这样定义的时间坐标t与均匀面族(单参类空超曲面族)$\{\Sigma_t\}$的参数t可以不等(因为后者原则上可以很任意)，但为避免混淆，从现在起约定把$\{\Sigma_t\}$的参数t选得与时间坐标t一样，就是说，均匀面Σ_t上每点的时间坐标都是t．这样定义的坐标系有两大优点：①等t面与均匀面重合(因此均匀面也称同时面)，代表宇宙在时刻t的全空间；②各向同性观者世界线是t坐标线，且其上的坐标时t等于固有时τ，这称为**宇宙时**．如无特殊声明，在宇宙论中提到的“时间”都指宇宙时．优点②使坐标基矢$(\partial/\partial t)^a$等于各向同性观者的 4 速Z^a，从而

$$g_{00}=g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b=g_{ab}Z^aZ^b=-1\,;$$

优点①使 3 个空间坐标基矢$(\partial/\partial x^i)^a$都切于均匀面，因而都与坐标基矢$(\partial/\partial t)^a$正

交，于是

$$g_{0i} = g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial x^i)^b = 0, \qquad i=1, 2, 3;$$

又因为 h_{ab} 是 g_{ab} 的诱导度规，所以

$$g_{ij} = g_{ab}(\partial/\partial x^i)^a(\partial/\partial x^j)^b = h_{ab}(\partial/\partial x^i)^a(\partial/\partial x^j)^b = h_{ij}, \qquad i, j=1, 2, 3,$$

其中第二步用到诱导度规的定义(见§ 4.4 定义 5). 请注意，h_{ij} 一般来说是 t 和 x^i 的函数，宜记作 $h_{ij}(t,x)$ (括号中的 x 代表 x^1, x^2, x^3). 利用均匀面族的唯一性可以证明(见选读 10-1-4) $h_{ij}(t,x)$ 可以写成“分离变量”的形式，即

$$h_{ij}(t,x) = a^2(t)\hat{h}_{ij}(x), \tag{10-1-21}$$

其中 $a(t)$ 只是 t 的函数，$\hat{h}_{ij}(x)$ 只是 x^i 的函数. 于是 4 维宇宙度规 g_{ab} 在上述坐标系的线元为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\hat{h}_{ij}(x)dx^i dx^j, \tag{10-1-22}$$

其中 $\hat{h}_{ij}(x)$ 视空间几何属何种情况而定. 先看最简单的情况(b). 这时空间度规平直，所以 $\hat{h}_{ij}(x) = \delta_{ij}$，式(10-1-22)对情况(b)可表为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad [\text{情况(b)}]. \tag{10-1-23b}$$

改用球坐标 ψ, θ, φ，其中 $\psi \equiv (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，则为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\psi^2 + \psi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \quad [\text{情况(b)}]. \tag{10-1-23b$'$}$$

至于 $a(t)$ 的函数形式，则要留待爱因斯坦方程决定(见 10.2.3 小节). 类似地，式(10-1-18)和(10-1-20)右边在与 $-dt^2$ 相加前也要乘以待定函数 $a^2(t)$. 既然式(10-1-18)的 K^{-1} 和式(10-1-20)的 $-K^{-1}$ 都是正实数，不如把它们吸收进 $a^2(t)$ 中. 于是式(10-1-22)用于情况(a)和(c)的结果为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \quad [\text{情况(a)}], \tag{10-1-23a}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\psi^2 + \text{sh}^2\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \quad [\text{情况(c)}]. \tag{10-1-23c}$$

注 1 式(10-1-23b)描述的 4 维时空是弯曲的[除非 $a(t)$ 为常数，而小节 10.2.3 表明 $a(t)$ 不是常数.]，平直的只是时空中的每个 3 维均匀面. 因此，情况(b)对应的是有平直空间几何的弯曲时空.

对情况(a)、(b)、(c)分别定义 r 如下：

$$r \equiv \begin{cases} \sin\psi, & [\text{情况(a)}] \\ \psi, & [\text{情况(b)}], \\ \text{sh}\,\psi, & [\text{情况(c)}] \end{cases} \tag{10-1-24}$$

则式(10-1-23a)、(10-1-23b′)和(10-1-23c)可合并为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{10-1-25}$$

其中 $k \equiv \begin{cases} +1, & [\text{情况(a)}] \\ 0, & [\text{情况(b)}] \\ -1, & [\text{情况(c)}] \end{cases}$ (注意 k 同 K 的类似性和区别).

式(10-1-23)或(10-1-25)称为 **Robertson-Walker 度规**，简称 **RW 度规**. 以上讨论表明，只用宇宙学原理(加上均匀面族唯一性的默认)就可把宇宙的时空几何确定到 RW 度规的程度. 这一度规只有两个尚待确定的因素：① k 的取值，即确定我们的宇宙属于 3 种情况中的哪一种(这将在 10.3.2 小节讨论)；② $a(t)$的具体函数形式，这须由爱因斯坦方程确定，见 10.2.3 小节.

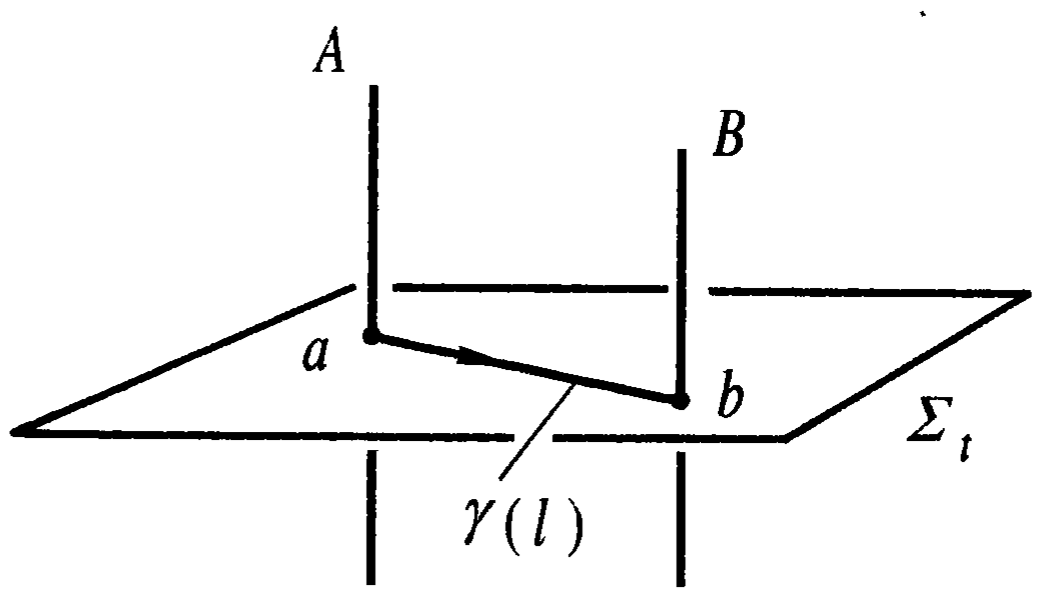


图 10-6 a, b 是星系 A, B 在时刻 t 的表现，测地线 $\gamma(l)$ 的线长是 A, B 在时刻 t 的距离

在结束本节之前，我们来说明 $a(t)$的物理意义. 设 h_{ab} 是 RW 度规在均匀面 Σ_t 上的诱导度规，则(Σ_t, h_{ab})是 3 维黎曼空间. 设 a, b 分别是星系 A, B 与 Σ_t 的交点，$\gamma(l)$是 a, b 间的、躺在 Σ_t 上的测地线(见图 10-6)，则其线长便是 a 与 b (作为 Σ_t 上两点)的距离，在物理上就解释为星系 A, B 在时刻 t 的距离(亦称固有距离)，记作 $D_{AB}(t)$. 以 l_1 和 l_2 分别代表测地线 $\gamma(l)$在 a, b 点的参数值，由线长公式可知

$$D_{AB}(t) = \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{h_{ab}(\partial/\partial l)^a(\partial/\partial l)^b}\,\mathrm{d}l\,.$$

令 $\hat{h}_{ab} \equiv a^{-2}(t)\,h_{ab}$，约定 $a(t)$只取正值，则

$$D_{AB}(t) = a(t)\hat{D}_{AB}\,, \tag{10-1-26}$$

其中

$$\hat{D}_{AB} \equiv \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\hat{h}_{ab}(\partial/\partial l)^a(\partial/\partial l)^b}\,\mathrm{d}l\,. \tag{10-1-27}$$

由上式及式(10-1-25)知 $\hat{D}_{AB}$ 只取决于星系 A, B 而与时间无关，式(10-1-26)则表明 $a(t)$是以 $\hat{D}_{AB}$ 为单位在时刻 t 测 A, B 的距离所得的值，反映任意两星系的距离随时间的变化情况，因此称为宇宙的**尺度因子**(scale factor). 若星系 A, B 的空间坐标分别为(r_A, θ, φ)和(r_B, θ, φ)，则可取参数 l 为 r 而把式(10-1-26)具体表为

$$D_{AB}(t) = a(t)\int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}\,. \tag{10-1-28}$$

上式的积分在 $k = 1, 0, -1$ 三种情况下都不难用显式表出. 注意到式(10-1-25)中的 $-\mathrm{d}t^2$ 在国际制中为$-c^2\mathrm{d}t^2$，有长度量纲，可知在 $k = \pm 1$ 的情况下(那时 r 无量纲)$a(t)$有长度量纲[$k = 0$ 时 $a(t)$的量纲则可任意选择，取决于对式(10-1-23b)中的 x, y, z 的量纲的选择.] 在 $k = +1$ 时宇宙封闭，还可问及宇宙在任一时刻 t 的体积(3 维球"面"的体积)，它显然同 $a(t)$有关. 由式(10-1-23a)可知空间诱导度规 h_{ab} 的适配体元为

$$\hat{\varepsilon} = a^3 \sin^2\psi \sin\theta \, \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi ,$$

故全空间(整个 3 球“面”)的体积为

$$V = \int \hat{\varepsilon} = a^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^2\psi \mathrm{d}\psi = 2\pi^2 a^3 . \qquad (10\text{-}1\text{-}29)$$

可见 $a^3(t)$正比于封闭宇宙在时刻 t 的体积，$a(t)$就是封闭宇宙在时刻 t 的半径.

[选读 10-1-3]

现在补证 10.1.3 小节开头指出的结论，即证明如下命题：

命题 10-1-3 在默认宇宙学原理以及宇宙有唯一均匀面族的前提下，任意两个各向同性观者的世界线介于两张均匀面之间的线长相等.[①]

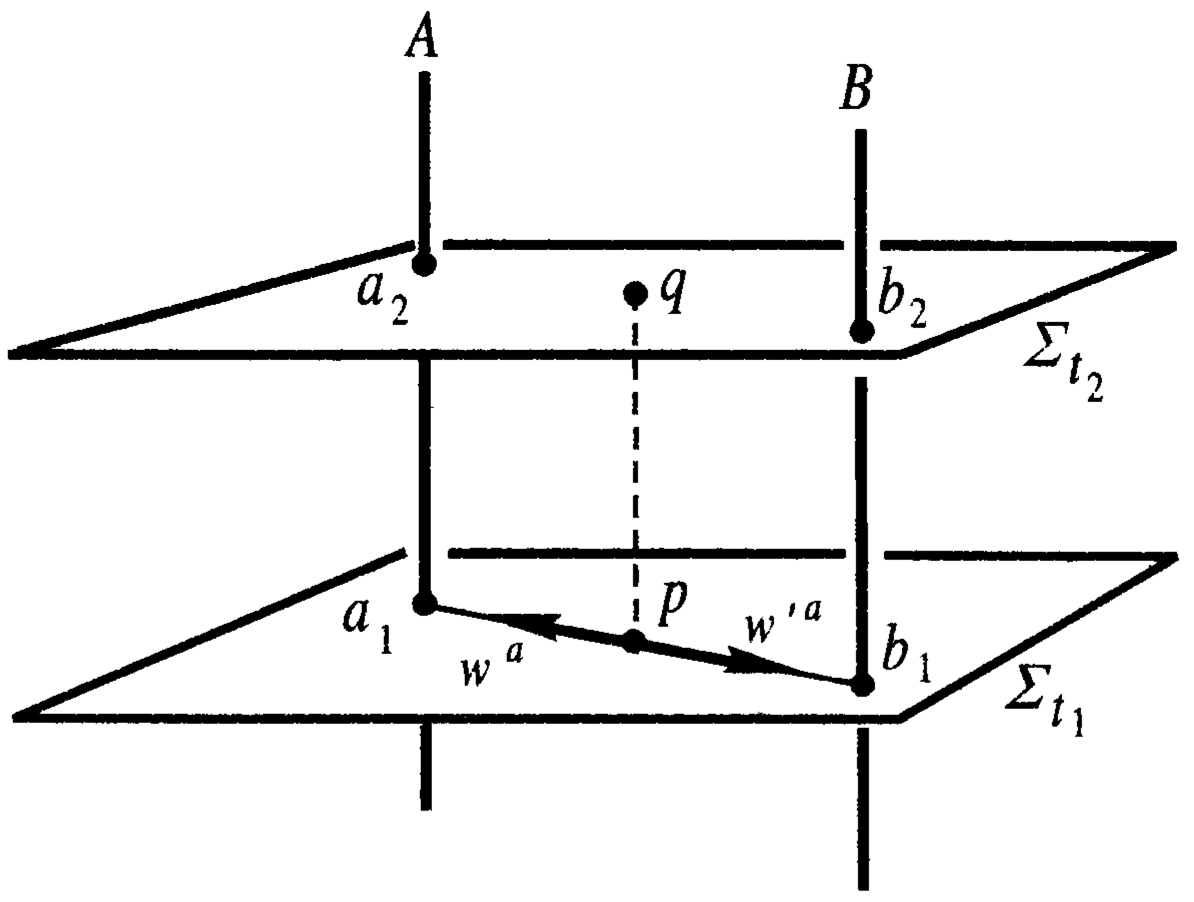


图 10-7 各向同性观者 A，B 介于两张均匀面之间的固有时间相等

证明 设各向同性观者A,B与均匀面 Σ_{t_1}，Σ_{t_2} 的4个交点依次为 a_1, a_2, b_1, b_2 (图 10-7). 黎曼空间有个定理，保证空间任一点都有一个称为凸邻域的邻域，其中任意两点之间存在唯一的在域内的测地线. (Σ_{t_1}, h_{ab}) 是 3 维黎曼空间，暂时假定 b_1 在 a_1 的凸邻域内，则域内有测地线 $\gamma(l)$从 a_1 到 b_1，其中 l 是线长. 设 p 是 γ 的中点，即 $l_{a_1 p} = l_{p b_1}$，令 $w^a \equiv - w'^a \equiv -(\partial/\partial l)^a|_p$，则 w^a 和 w'^a 都为单位长，故由各向同性的定义可知存在等度规映射 $\psi: M \to M$ 使 $\psi(p) = p$，$\psi_* w^a = w'^a$. 由均匀面族的唯一性可知 $\psi[\Sigma_{t_1}] = \Sigma_{t_1}$. 因为各向同性观者世界线正交于均匀面，所以各向同性观者在 ψ 下的像仍是各向同性观者. 又因为测地线及其线长都是以度规衡量的，故等度规映射 ψ 满足 $\psi[\gamma_{pa_1}] = \gamma_{pb_1}$，因而 $\psi[a_1] = b_1$，而这又进一步保证 $\psi[A] = B$. 设过 p 的各向同性观者世界线交 Σ_{t_2} 于 q，以 τ 代表该线的固有时，则

$$\tau(q) - \tau(p) = \tau(\psi(q)) - \tau(\psi(p)) = \tau(\psi(q)) - \tau(p) ,$$

(第一步是因为等度规映射保线长.) 于是 $\psi(q) = q$，再由均匀面族的唯一性便得 $\psi[\Sigma_{t_2}] = \Sigma_{t_2}$. 综上结论便知 $\psi[A_{a_1 a_2}] = B_{b_1 b_2}$，因而线段 $A_{a_1 a_2}$ 与 $B_{b_1 b_2}$ 等长. 利用凸邻域之间的交叠区通过“接力”不难证明即使 b_1 不在 a_1 的凸邻域内也有相同结论. □

[选读 10-1-3 完]

[选读 10-1-4]

现在补证式(10-1-21)，即 $h_{ij}(t, x)$可以写成“分离变量”的形式. 设 Σ_{t_1} 和 Σ_{t_2} 是

① 若均匀面族不唯一，则可举出本命题结论的反例.

均匀面，G 为各向同性观者，$p_1 \equiv G \cap \Sigma_{t_1}$，$p_2 \equiv G \cap \Sigma_{t_2}$，可用坐标分别表为 $p_1 = (t_1, x_G{}^i)$ 和 $p_2 = (t_2, x_G{}^i)$．令 $X^a|_{p_1}$ 和 $Y^a|_{p_1}$ 是 p_1 点的互相等长的空间矢量，坐标分量分别为 X^i 和 Y^i，即 $X^a|_{p_1} = X^i(\partial/\partial x^i)^a|_{p_1}$，$Y^a|_{p_1} = Y^i(\partial/\partial x^i)^a|_{p_1}$，则

$$h_{ij}(t_1, x_G)X^iX^j = h_{ij}(t_1, x_G)Y^iY^j. \tag{10-1-30}$$

因 G 是各向同性观者，故有等度规映射 $\psi: M \to M$ 使 $\psi(p_1) = p_1$，$\psi_*(X^a|_{p_1}) = Y^a|_{p_1}$．由均匀面族的唯一性可知 ψ 诱导的坐标变换 $t, x^i \mapsto t', x'^i$ 满足

$$t' = t,\quad x'^i = f^i(x),\qquad i = 1,2,3\ (\text{括号内的 } x \text{ 代表 } x^1, x^2, x^3), \tag{10-1-31}$$

而且 $x_G{}^i = f^i(x_G)$．由式(4-1-7)得

$$Y^i = X^j(\partial f^i/\partial x^j)|_{x_G}. \tag{10-1-32}$$

再考虑 p_2 点的空间矢量 $X^a|_{p_2} \equiv X^i(\partial/\partial x^i)^a|_{p_2}$ 和 $Y^a|_{p_2} \equiv Y^i(\partial/\partial x^i)^a|_{p_2}$．因实数 X^i 和 Y^i 满足式(10-1-32)，故 $\psi_*(X^a|_{p_2}) = Y^a|_{p_2}$，因而 $X^a|_{p_2}$ 和 $Y^a|_{p_2}$ 等长．可见从式(10-1-30)推出了下式：

$$h_{ij}(t_2, x_G)X^iX^j = h_{ij}(t_2, x_G)Y^iY^j. \tag{10-1-33}$$

再设 $X^a|_{p_1}$ 与 $Y^a|_{p_1}$ 不等长(且 $Y^a|_{p_1} \neq 0$)．因 h_{ij} 正定，故有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使

$$h_{ij}(t_1, x_G)X^iX^j = \lambda^2 h_{ij}(t_1, x_G)Y^iY^j = h_{ij}(t_1, x_G)(\lambda Y^i)(\lambda Y^j),$$

因而 $$h_{ij}(t_2, x_G)X^iX^j = h_{ij}(t_2, x_G)(\lambda Y^i)(\lambda Y^j) = \lambda^2 h_{ij}(t_2, x_G)Y^iY^j,$$

所以对任意非零(X^1, X^2, X^3)和(Y^1, Y^2, Y^3)有

$$\frac{h_{ij}(t_1, x_G)X^iX^j}{h_{ij}(t_2, x_G)X^iX^j} = \frac{h_{ij}(t_1, x_G)Y^iY^j}{h_{ij}(t_2, x_G)Y^iY^j}. \tag{10-1-34}$$

上式表明比值与(X^1, X^2, X^3)及(Y^1, Y^2, Y^3)无关，只取决于 t_1，t_2 和 $x_G{}^i$，故存在函数 $\omega(t_1, t_2, x_G)$ 使

$$h_{ij}(t_1, x_G)X^iX^j = \omega(t_1, t_2, x_G)\, h_{ij}(t_2, x_G)X^iX^j. \tag{10-1-35}$$

进一步，对任意(X^1, X^2, X^3)和(Y^1, Y^2, Y^3)还有

$$h_{ij}(t_1, x_G)(X^i + Y^i)(X^j + Y^j) = \omega h_{ij}(t_2, x_G)(X^i + Y^i)(X^j + Y^j),$$

$$h_{ij}(t_1, x_G)(X^i - Y^i)(X^j - Y^j) = \omega\, h_{ij}(t_2, x_G)(X^i - Y^i)(X^j - Y^j),$$

因而 $$h_{ij}(t_1, x_G)X^iY^j = \omega(t_1, t_2, x_G)\, h_{ij}(t_2, x_G)X^iY^j,$$

于是有 $h_{ij}(t_1, x_G) = \omega(t_1, t_2, x_G)\, h_{ij}(t_2, x_G)$．注意到 G 为任一各向同性观者，便可把上式的 x_G 改作 x，从而有

$$h_{ij}(t_1, x) = \omega(t_1, t_2, x)\, h_{ij}(t_2, x). \tag{10-1-36}$$

最后，证明 ω 其实与 x 无关，即 $\omega(t_1, t_2, x)$可改写为 $\omega(t_1, t_2)$. 取等度规映射 $\psi: M \to M$ 使其诱导的坐标变换满足式(10-1-31). 宇宙度规 g_{ab} 在新坐标系 $\{t', x'^i\}$ 的线元为

$$ds^2 = -dt'^2 + h_{ij}(t', x')dx'^i dx'^j = -dt^2 + h_{ij}(t, x')(\partial f^i/\partial x^k)(\partial f^j/\partial x^l)dx^k dx^l ,$$

与原坐标系的线元 $ds^2 = -dt^2 + h_{ij}(t, x)dx^k dx^l$ 对比得

$$h_{ij}(t, x')(\partial f^i/\partial x^k)(\partial f^j/\partial x^l) = h_{kl}(t, x) . \tag{10-1-37}$$

令 t 分别为 t_1 和 t_2 便得

$$h_{ij}(t_1, x')(\partial f^i/\partial x^k)(\partial f^j/\partial x^l) = h_{kl}(t_1, x) . \tag{10-1-38}$$

$$h_{ij}(t_2, x')(\partial f^i/\partial x^k)(\partial f^j/\partial x^l) = h_{kl}(t_2, x) . \tag{10-1-39}$$

由式(10-1-36)可知

$$式(10\text{-}1\text{-}38)左边 = \omega(t_1, t_2, x')\, h_{ij}(t_2, x')(\partial f^i/\partial x^k)(\partial f^j/\partial x^l) ,$$

$$式(10\text{-}1\text{-}38)右边 = \omega(t_1, t_2, x)\, h_{kl}(t_2, x) .$$

对比两边，注意到式(10-1-39)，便得 $\omega(t_1, t_2, x) = \omega(t_1, t_2, x')$，因而 ω 与 x 无关. 于是式(10-1-36)简化为 $h_{ij}(t_1, x) = \omega(t_1, t_2)\, h_{ij}(t_2, x)$. 令 t_2 固定而 t_1 变动(并改记作 t)，便得

$$h_{ij}(t, x) = \omega(t, t_2)\, h_{ij}(t_2, x) . \tag{10-1-40}$$

令 $\hat{h}_{ij}(x) \equiv h_{ij}(t_2, x)$， $a^2(t) \equiv \omega(t, t_2)$，便有 $h_{ij}(t, x) = a^2(t)\hat{h}_{ij}(x)$，此即待证的式(10-1-21).

[选读 10-1-4 完]

§ 10.2 宇宙动力学

10.2.1 哈勃定律

美国天文学家 Slipher 在 20 世纪初期观测了 41 个河外星系的光谱，发现其中的36个存在红移[设λ和 λ' 分别是发光时和光到达地球时的波长，则 $z \equiv (\lambda' - \lambda)/\lambda$ 简称**红移**.]. 把红移归因于多普勒效应，便可得出“这 36 个星系离银河系退行而去”、因而“宇宙膨胀”的结论(因为太阳绕银河系中心转动，其他 5 个星系的光谱的蓝移可被解释为太阳正好与它们相向运动所致.). 天文学家迄今已测量了数以万计的星系光谱，除极少数(发自很近的星系)外都是红移. 这为宇宙膨胀的论断提供了坚实的观测基础. 美国天文学家哈勃(Hubble)从 1923 年开始测量河外星系同我们的距离(这比 z 的测定困难得多)，发现红移 z 与距离 D 有正比关系，而 z 在低速时又等于退行速率 u [对式(6-6-66a)做泰勒展开并保留 1 阶项得 $z \cong u$]，于

是在 1929 年发表了如下定律(**哈勃定律**)：

$$u_0 = H_0 D_0 \quad (\text{下标 0 代表“当今”}), \tag{10-2-1}$$

其中 H_0 是同星系无关的数，叫**哈勃常数**(Hubble constant). 今天，用 RW 度规不难从理论上推出哈勃定律. 定义两个星系的相对速率为 $u(t) := \mathrm{d}D(t)/\mathrm{d}t$ [其中 $D(t)$ 是它们在时刻 t 的距离]，则由式(10-1-26)易得

$$u(t) = \hat{D}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}D(t), \qquad \dot{a}(t) \equiv \mathrm{d}a(t)/\mathrm{d}t . \tag{10-2-2}$$

定义**哈勃参数**(Hubble parameter)

$$H(t) := \dot{a}(t)/a(t), \tag{10-2-3}$$

则

$$u(t) = H(t)\,D(t) . \tag{10-2-4}$$

上式说明，对给定时刻 t，任意两个星系之间的退行速率正比于两者的距离. 以 t_0 代表当今时刻，以 H_0 简记 $H(t_0)$(即哈勃常数)，便有

$$u(t_0) = H_0 D(t_0). \tag{10-2-1'}$$

这便是哈勃定律[式(10-2-1)]. 应注意哈勃参数 $H(t)$同哈勃常数 $H_0 \equiv H(t_0)$ 的区别：前者与时间 t 有关，后者是前者的当今值. 因为观测表明 $H_0 > 0$，由式(10-2-1′)可知只要 $D(t_0) \neq 0$ 就有 $u(t_0) > 0$，即任一星系观测另一星系时都发现它离自己退行而去[哈勃只测出其他星系离我们银河系退行而去，式(10-2-1′)则肯定任一对星系之间都在互相远离.]. 可见，我们测得所有星系离我们退行而去并不表明银河系是宇宙膨胀的中心. 作为比喻，考虑一个布满蚂蚁的气球. 当气球膨胀时，每一蚂蚁都看到其他蚂蚁离它退行而去. 没有一只蚂蚁是特殊的. 同气球膨胀一样，宇宙的膨胀也没有中心.

由式(10-2-1)可知，当 D 足够大时，u 可以大于光速. 这同相对论并无矛盾. 相对论的基本原则(之一)是“质点世界线是类时曲线”(这是绝对的、毫不含混的提法)，只有采用适当的速率定义才等价于“质点速率小于光速”(这是相对的提法). 在记住“相对论中任何质点的速率都小于光速”的同时，必须记住这句话中的“质点速率”是指式(6-3-28)定义的由观者对质点做当时当地测量所得的速率. 如果这观者是闵氏时空的惯性观者，这速率也就是质点相对于该观者所在惯性系的速率. 然而，速率的定义很多，只要与上述速率定义不等价，超光速就未必违背相对论. 星系退行速率就是一例. 退行速率 u 的定义是星系距离对宇宙时间的导数，这虽然很有物理意义，很可以称为速率，却不是某观者对某星系做当时当地测量所得的速率，这样定义的速率大于光速并不与相对论矛盾，并不导致谬误. 事实上，在推导 RW 度规的过程中早已承认每一星系的世界线是类时曲线，因此早已遵守前面提及的相对论基本原则. 据此，如果任何观者(不一定各向同性观者)对任一星系做当时当地测量，所得速率肯定小于光速.

10.2.2 宇宙学红移

哈勃把宇宙学红移解释为平直时空的多普勒红移，并由此得出星系退行的结论. 根据广义相对论，宇宙物质的存在必然导致时空弯曲，宇宙学红移其实是弯曲时空的效应. 哈勃观测的星系与我们的距离从宇宙学角度来看很小，时空曲率的效应在这个范围内没有明显表现，近似看作多普勒红移并无不可. 然而，对距离足够大的星系的红移现象应该在弯曲时空的基础上解释. 在几何光学近似下(见选读 7-2-1)可认为光信号沿类光测地线传播. 设星系 A 在 p_1 时发出的光子沿类光测地线 $\eta(\beta)$(β 为仿射参数)运动，在 p_2 时被星系 B 收到(见图 10-8). 光子在 p_1 点相对于观者 A 的角频率 $\omega_1=-g_{ab}Z^aK^b|_{p_1}$，其中 Z^a 是 A 的 4 速，$K^b=(\partial/\partial\beta)^b$ 是光子的 4 波矢. 注意到 Z^a 与 RW 坐标系$\{t,r,\theta,\varphi\}$的坐标基矢 $(\partial/\partial t)^a$ 一致以及

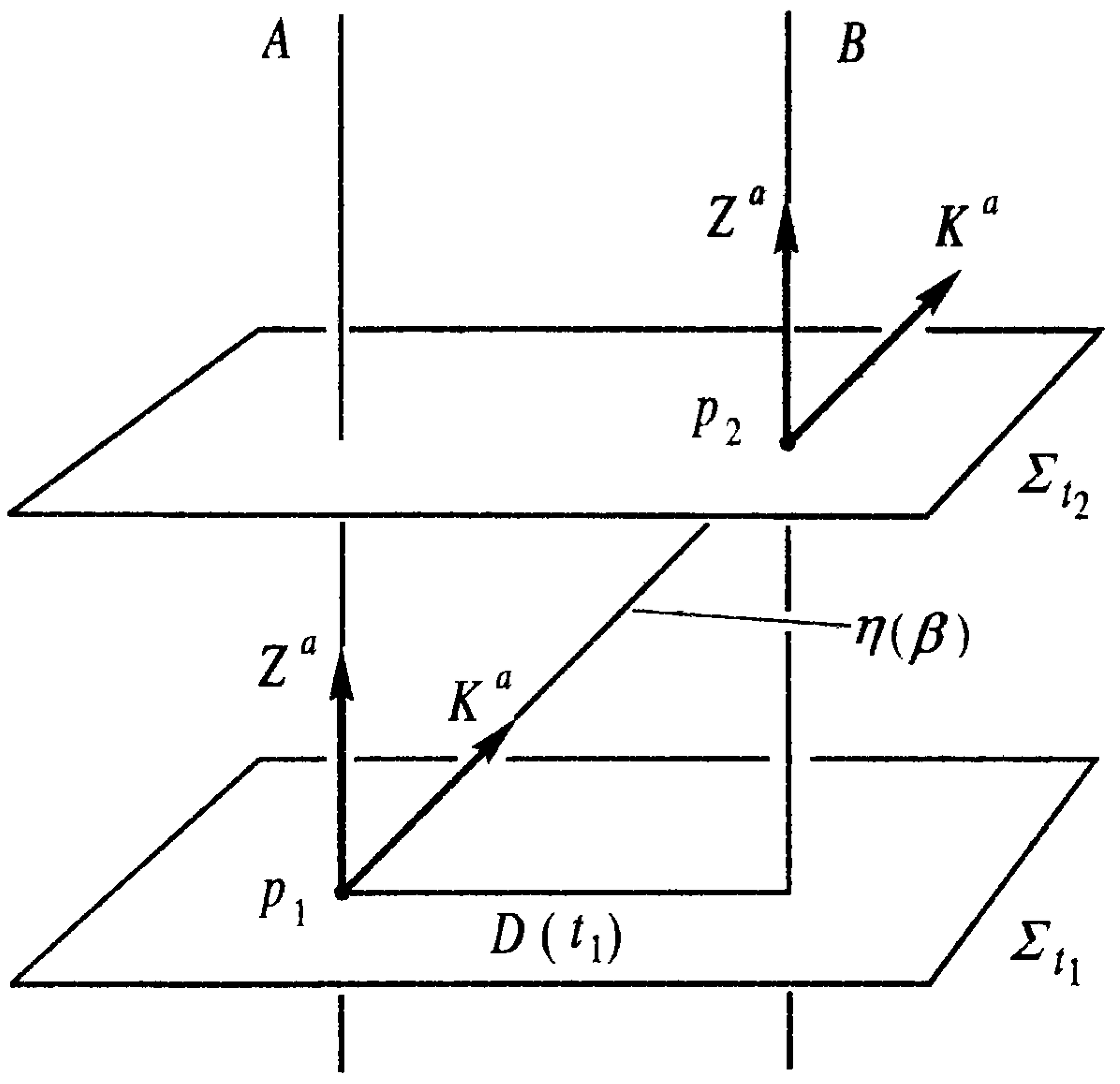


图 10-8 宇宙学红移的推导. $\eta(\beta)$是类光测地线

$$K^b=(\partial/\partial t)^b(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\beta)+(\partial/\partial x^i)^b(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\beta),$$

可知 $\omega_1=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\beta|_{p_1}$. 同理，该光子在 p_2 相对于观者 B 的角频率 $\omega_2=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\beta|_{p_2}$. 宇宙学红移可借助于 $\eta(\beta)$所满足的测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\beta^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\beta}=0,\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{10-2-5}$$

求得，其中 x^0，x^1，x^2，x^3 依次代表 t,r,θ,φ. 由式(10-1-25)求得非零克氏符

$$\Gamma^0{}_{11}=a\dot{a}(1-kr^2)^{-1},\qquad \Gamma^0{}_{22}=a\dot{a}r^2,\qquad \Gamma^0{}_{33}=a\dot{a}r^2\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1{}_{01}=\Gamma^1{}_{10}=\dot{a}/a,\qquad \Gamma^1{}_{11}=kr(1-kr^2)^{-1},$$

$$\Gamma^1{}_{22}=-r(1-kr^2),\quad \Gamma^1{}_{33}=-r(1-kr^2)\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^2{}_{02}=\Gamma^2{}_{20}=\Gamma^3{}_{03}=\Gamma^3{}_{30}=\dot{a}/a,\qquad \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\Gamma^3{}_{13}=\Gamma^3{}_{31}=1/r,$$

$$\Gamma^2{}_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\qquad \Gamma^3{}_{23}=\Gamma^3{}_{32}=\cot\theta.$$

由此易证各向同性观者的世界线是测地线[习题. 利用克氏符的上述表达式及式(5-7-2)几乎可一望而知.]. 令式(10-2-5)的 $\mu=2,3$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\beta^2}+2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta}\right)^2=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\beta^2}+2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta}+2\cot\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta}=0. \tag{10-2-6}$$

选择坐标系使$\theta(p_1)=\theta_0$，$\varphi(p_1)=\varphi_0$，并使$K^a|_{p_1}$在$(\partial/\partial\theta)^a$和$(\partial/\partial\phi)^a$的分量为零，便可保证整条测地线$\eta(\beta)$有$\theta=\theta_0$和$\varphi=\varphi_0$. 就是说，对任一给定测地线$\eta(\beta)$，总可通过重选$\theta$，$\varphi$坐标使之成为径向测地线[因为$\eta(\beta)$事先给定，选定坐标系后其$t(\beta)$，$r(\beta)$，$\theta(\beta)$，$\varphi(\beta)$就都是确定的函数. 欲证$\theta(\beta)=\theta_0$和$\varphi(\beta)=\varphi_0$只须注意式(10-2-6)是关于$\theta(\beta)$和$\varphi(\beta)$的 2 阶联立方程组，而$\theta(\beta)=\theta_0$和$\varphi(\beta)=\varphi_0$是满足初始条件$\theta(p_1)=\theta_0$，$\varphi(p_1)=\varphi_0$，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\beta|_{p_1}=0$，$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\beta|_{p_1}=0$的唯一解.]. 再令式(10-2-5)的$\mu=0$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\beta^2}+\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta}\right)^2=0,$$

由K^a的类光性得

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta}\right)^2=\frac{a^2}{1-kr^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta}\right)^2, \tag{10-2-7}$$

两式联立得$\dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\beta^2}+\dfrac{\dot{a}}{a}\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta}\right)^2=0$. 令$\omega=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\beta$，则$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}+\dfrac{\omega}{a}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\beta}=0$，从而解得

$$\omega=\omega_0\,a^{-1}\quad(\omega_0\text{为积分常数}). \tag{10-2-8}$$

由于ω可解释为过$\eta(\beta)$上任一点的各向同性观者测得的光子角频率，上式可解释为：随着宇宙的膨胀，宇宙中每一光子(相对于各向同性观者)的波长都正比地拉长(红移). 把式(10-2-8)用于p_1，p_2点得

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{a(t_1)}{a(t_2)}, \tag{10-2-9}$$

故相对红移量

$$z=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}=\frac{\omega_1}{\omega_2}-1=\frac{a(t_2)}{a(t_1)}-1. \tag{10-2-10}$$

若A，B的距离足够小，则由图 10-8 知$t_2-t_1\cong D(t_1)$，略去泰勒展开的高阶项得

$$a(t_2)\cong a(t_1)+\dot{a}(t_1)(t_2-t_1)\cong a(t_1)+\dot{a}(t_1)D(t_1),$$

故

$$z=[(\dot{a}(t_1)/a(t_1)]\,D(t_1)=H(t_1)\,D(t_1). \tag{10-2-11}$$

其中第二步用到式(10-2-3). 令$t_2(\cong t_1)$为t_0，上式便是哈勃的观测结果.

注 1　习题 3 给出推导式(10-2-8)的另一方法，其特点是直接用类光测地线方程的矢量形式$K^a\nabla_aK^b=0$而不是其分量形式(10-2-5). 式(10-2-8)还可通过纯几何式的讨论导出(用到测地线切矢与 Killing 场的缩并沿测地线为常数)，详见 Wald (1984) P. 103~104.

10.2.3 尺度因子的演化

把 Robertson-Walker 度规的爱因斯坦张量 G_{ab} 写成用 $a(t)$ 表达的形式，再写出宇宙的内容物的能动张量 T_{ab}，便可由爱因斯坦方程 $G_{ab}=8\pi T_{ab}$ 得到尺度因子 $a(t)$ 的微分方程，从而求得宇宙的演化方式．宇宙的内容物(contents)可分为两大类：静质量非零的粒子构成的内容物称为**物质**(matter，汉语亦称实物)；静质量为零的粒子构成的内容物称为**辐射**(radiation)．对物质(实物)提供主要贡献的是各个星系，对辐射提供主要贡献的是 1965 年发现的、充满宇宙的微波背景电磁辐射(详见 10.3.1 小节)．用宇观尺度衡量，每个星系可看作一个质点(“沧海之一粟”)，所有星系组成理想流体，流体的压强可忽略(相当于星系的无规运动可忽略)，因而可近似为尘埃，一个星系近似就是尘埃中的一个“颗粒”，因此其世界线是测地线(见§6.5)．而式(10-2-5)后已指出各向同性观者世界线是测地线，可见星系可近似看作各向同性观者．宇宙中的全部物质(整个尘埃)的能动张量可表为

$$T_{ab}\,(\text{物质})=\rho_{\mathrm{M}}U_aU_b\,,$$

其中 U^a 是各向同性观者的 4 速，ρ_{M} 是各向同性观者测得的物质能量密度．另一方面，所有辐射也可看作一种特殊的理想流体，其 4 速等于各向同性观者的 4 速 U^a，因而所有辐射的能动张量可表为

$$T_{ab}(\text{辐射})=\rho_{\mathrm{R}}U_aU_b+p(g_{ab}+U_aU_b)\,,$$

其中 ρ_{R} 及 p 分别是各向同性观者测得的辐射能量密度和辐射压强，满足 $p=\rho_{\mathrm{R}}/3$．综合上述两点可知宇宙的总能动张量可近似表为

$$T_{ab}=\rho U_aU_b+p(g_{ab}+U_aU_b)\,, \tag{10-2-12}$$

其中 ρ 是尘埃(星系)和辐射的总能量密度．在实际宇宙中，除星系外还有其他形式的物质，但从宇宙学原理出发可以相信它们的能动张量也取式(10-2-12)的形式，因而也可认为式(10-2-12)已包含了它们的贡献．总之，在标准模型中，宇宙的内容物只有物质和辐射两种，物质的特征是 $p\cong 0$，辐射的特征是 $p=\rho/3$，式(10-2-12)包含了所有物质和辐射的贡献．空间均匀性的假设要求 ρ 和 p 都不是空间坐标的函数．

RW 线元[式(10-1-25)]的 t, r, θ, φ 是各向同性观者的共动坐标，由式(10-2-12)求得 T_{ab} 在此系的非零分量为

$$T_{00}=\rho, \qquad T_{ij}=pg_{ij}\,, \tag{10-2-13}$$

其中非零的 g_{ij} 只有

$$g_{11}=a^2(1-kr^2)^{-1}, \qquad g_{22}=a^2r^2, \qquad g_{33}=a^2r^2\sin^2\theta\,.$$

另一方面，根据式(10-1-25)，爱因斯坦张量 G_{ab} 在该系的非零分量又可用 $a(t)$ 表为(计算留作练习)

$$G_{00} = 3(\dot{a}^2 + k)/a^2, \tag{10-2-14}$$

$$G_{ij} = -\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) g_{ij}. \tag{10-2-15}$$

于是爱因斯坦方程的分量形式 $G_{00} = 8\pi T_{00}$ 和 $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ 可表为

$$3(\dot{a}^2 + k)/a^2 = 8\pi\rho \quad (\text{称为 \textbf{Friedmann 方程}}), \tag{10-2-16}$$

$$2\ddot{a}/a + (\dot{a}^2 + k)/a^2 = -8\pi p, \tag{10-2-17}$$

式(10-2-16)和(10-2-17)就是决定尺度因子 $a(t)$ 的基本方程. 由此两方程易得

$$3\ddot{a} = -4\pi a(\rho + 3p), \tag{10-2-18}$$

微分式(10-2-16)并与式(10-2-18)联立消去 $\ddot{a}$ 得

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\dot{a}/a = 0. \tag{10-2-19}$$

因为式(10-2-17)可由式(10-2-16)和(10-2-19)导出，方程组(10-2-16)、(10-2-17)同方程组(10-2-16)、(10-2-19)等价. 因为 $\rho > 0,\ p \geqslant 0$，由式(10-2-18)可知 $\ddot{a} < 0$. 这表明宇宙或则膨胀($\dot{a} > 0$)或则收缩($\dot{a} < 0$)，除个别时刻($\dot{a} > 0$ 与 $\dot{a} < 0$ 之间的过渡时刻)外不会出现 $\dot{a} = 0$，因而不会处于静态. 既然观测表明当今宇宙正在膨胀[$\dot{a}(t_0) > 0$]，由 $\ddot{a} < 0$ 可知 $\dot{a}(t) > \dot{a}(t_0)\ \forall t < t_0$，而且 t 越小则 $\dot{a}(t)$ 越大. 这就表明，如果逆着时间回溯，宇宙将以越来越大的速率缩小，在某一时刻(选作 $t = 0$)达到 $a(0)=0$. 这一时刻的密度为无限大，称为**大爆炸奇点**(big bang singularity). “大爆炸”一词并不贴切. 普通爆炸是正常(非奇异)的、早已明确的时空背景中的一个事件，爆炸之前有一个炸弹(爆炸事件在炸弹世界线的未来端点)，爆炸之后每一碎片是时空中的一条世界线. 宇宙“大爆炸”与此十分不同. 首先，它对应于一个时空奇性(存在无限趋近于它的不完备类时测地线，物质密度和由时空曲率构成的某些标量在趋于它时发散.)，不能向过去延拓. 不妨这样直观地想：宇宙中的粒子开始时挤在“要多小有多小”的空间中，任何两个粒子随着宇宙的膨胀而不断相互远离. 其次，与炸弹爆炸后的碎片不可能充满全空间不同，大爆炸后的物质在每一时刻都均匀充满整个宇宙空间. 粒子之间距离的增大是空间膨胀的表现.

为了定量求解方程(10-2-16)和(10-2-19)，先讨论两个极端情况：①T_{ab} 完全来自物质(尘埃)的贡献(称为**尘埃宇宙**)；②T_{ab} 完全来自辐射的贡献(称为**辐射宇宙**). 尘埃宇宙有 $p = 0$，对式(10-2-19)积分得

$$\rho_{\mathrm{M}} a^3 = \text{常数}. \tag{10-2-20}$$

这是自然的，因为任一共动体积随 a 增大而按 a^3 增大，而体积内的尘埃粒子数(因而能量)不变，故密度按 a^{-3} 减小. 辐射宇宙有 $p = \rho_{\mathrm{R}}/3$，对式(10-2-19)积分得

$$\rho_{\mathrm{R}} a^4 = \text{常数}. \tag{10-2-21}$$

这是因为任一共动体积内的光子数不变而每一光子的频率(能量)由于红移而按 a^{-1}

减小[见式(10-2-8)]. 既然 ρ 与 a 的关系分别为 $\rho_M \propto a^{-3}$ 和 $\rho_R \propto a^{-4}$，尽管当今宇宙很接近于物质为主，在 a 足够小时总是以辐射为主的(不过早期宇宙尚无星系，只有粒子). 下面分别在这两个极端情况下求解方程(10-2-16)和(10-2-19).

对辐射宇宙，式(10-2-19)已积分为式(10-2-21)，故只须在其基础上求解方程(10-2-16). 令

$$B^2 \equiv 8\pi\rho a^4/3, \qquad (10\text{-}2\text{-}22)$$

则由式(10-2-21)知 B 为常数(约定 $B>0$). 方程(10-2-16)可改写为

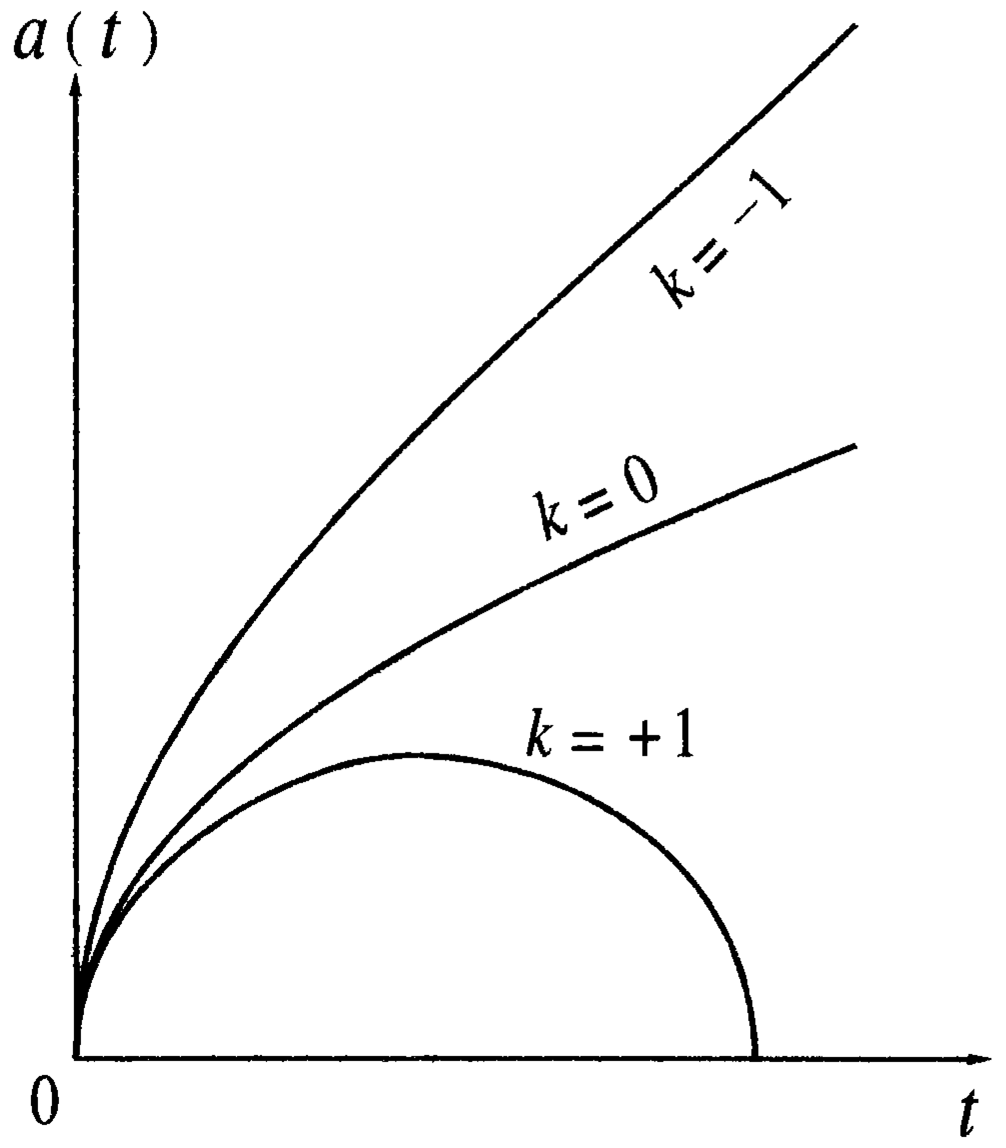


图 10-9 辐射宇宙的 $a(t)$ 曲线

$$\dot{a}^2(t) = B^2 a^{-2}(t) - k\,. \qquad (10\text{-}2\text{-}23)$$

借助变量替换 $b(t) \equiv a^2(t)$ 可在 $a(0)=0$ 的初始条件下求得方程的特解 $a^2(t) = 2Bt - kt^2$，因而在 3 种情况下分别有

情况 a $(k=+1)$, $\quad a^2(t) = 2Bt - t^2$, (10-2-24a)

情况 b $(k=0)$, $\quad a^2(t) = 2Bt$, (10-2-24b)

情况 c $(k=-1)$, $\quad a^2(t) = 2Bt + t^2$. (10-2-24c)

3 种情况的 $a(t)$ 曲线示于图 10-9. 由于在 a 很小时以辐射为主，图中 3 条曲线在原点附近的表现有重要意义. 由式(10-2-24)或图 10-9 可知 $t=0$ 时 $a=0$，这就是大爆炸奇点. 由式(10-2-23)可知在 a 足够小时 k 可忽略，因此 3 种情况的曲线在奇点附近近似相同.

对物质(尘埃)宇宙，式(10-2-19)已积分为式(10-2-20)，故只须在式(10-2-20)基础上求解方程(10-2-16). 令

$$A \equiv 8\pi\rho a^3/3, \qquad (10\text{-}2\text{-}25)$$

则由式(10-2-20)知 A 为常数. 方程(10-2-16)可改写为

$$\dot{a}^2(t) = \frac{A}{a(t)} - k\,. \qquad (10\text{-}2\text{-}26)$$

为便于求解，引入新变量

$$\hat{t}(t) \equiv \int_0^t \mathrm{d}t'/a(t'), \qquad (10\text{-}2\text{-}27)$$

以 a' 记 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\hat{t}$，则式(10-2-26)成为

$$a'^2(\hat{t}) = Aa(\hat{t}) - ka^2(\hat{t})\,. \qquad (10\text{-}2\text{-}28)$$

上式在 3 种情况下满足初始条件 $a(0)=0$ 的特解分别为

情况 a $(k=+1)$， $\quad a = A(1-\cos\hat{t})/2$， $\quad t = A(\hat{t}-\sin\hat{t})/2$， (10-2-29a)

情况 b $(k=0)$，　　$a=(9A/4)^{1/3}t^{2/3}$，　　(10-2-29b)

情况 c $(k=-1)$，　　$a=A(\text{ch}\hat{t}-1)/2$，　　$t=A(\text{sh}\hat{t}-\hat{t})/2$.　　(10-2-29c)

3 种情况的 $a(t)$曲线大致也如图 10-9，不另画出. 尘埃宇宙解由前苏联的 Friedmann (弗里德曼)于 1922 年最先得出，大大早于哈勃(1929)和 Robertson 及 Walker(1935)的发现，不少文献把标准宇宙模型也称为 Friedmann-Robertson- Walker 模型(FRW 模型).

以上是对两个极端情况的定量讨论. 实际宇宙既含实物又含辐射，定量求解有困难，但可做以下定性讨论. 首先，观测表明当今宇宙正在膨胀，即 $\dot{a}(t_0)>0$，由式(10-2-18)知 $\dot{a}$ 越向过去越大，故 $t<t_0$ 的 $a(t)$曲线向上凸起 (图 10-9 中的 $k=0$, -1 曲线以及 $k=1$ 曲线的左半段.)，因而会在 $t<t_0$ 的某时刻与 t 轴相交(前已约定选此时刻为 $t=0$)，这同图 10-9 定性一致. 再看 $t>t_0$ 的情况. 把式(10-2-19)改写为

$$\mathrm{d}(\rho a^3)/\mathrm{d}a=-3pa^2\,, \tag{10-2-30}$$

因右边恒为负，上式表明 ρa^3 随 a 增而减，故 ρ 至少按 a^{-3} 减小. 把式(10-2-16)改写为

$$3(\dot{a}^2+k)=8\pi\rho a^2\,, \tag{10-2-31}$$

则右边在 a 增加时至少按 a^{-1} 减小. 上式表明 $\dot{a}$ 随 a 的变化情况与 k 值有关. 对 $k=0$ 有 $\dot{a}^2=8\pi\rho a^2/3$，故 $\dot{a}^2$ 随 a 增大而减小，在 $a\to\infty$ 时趋于零. 注意到 $\dot{a}(t_0)>0$，可知 $\dot{a}(t)$ 恒为正，即 a 随 t 不断增长，只是 $a(t)$曲线的斜率不断下降并在 $a\to\infty$ (因而 $t\to\infty$)时趋于零，与图 10-9 中 $k=0$ 曲线的定性表现一致. 若 $k=-1$，则式(10-2-31)成为 $\dot{a}^2=(8\pi\rho a^2/3)+1$，情况与 $k=0$ 类似，只是现在 $a(t)$曲线的斜率在 $a\to\infty$ $(t\to\infty)$时趋于 1(而不是 0). 这与图 10-9 中 $k=-1$ 曲线的定性表现一致. 若 $k=+1$，则式(10-2-31)成为 $\dot{a}^2=(8\pi\rho a^2/3)-1$，表明 $\dot{a}^2$ 随 a 增加而减小，当 $8\pi\rho a^2/3$ 减至 1 时 $\dot{a}^2$ 减至零. 以 a_C 代表满足 $8\pi\rho a^2/3=1$ 的 a 值，则它代表临界状态：在 a 从 $a(t_0)$起增至 a_C 的过程中，$\dot{a}$ 从 $\dot{a}(t_0)>0$ 起不断减小，当 a 增至 a_C 时(相应的 t 记作 t_C) $\dot{a}$ 减至零. 由于式(10-2-18)要求 $\ddot{a}$ 恒为负，即 $\dot{a}$ 随 t 增加而减小，因此 $\dot{a}$ 从 $t>t_C$ 开始变为负数，即 a 从 $t>t_C$ 开始随 t 增加而减小，直至为零. a_C 显然是 $a(t)$ 的极大值. 这与图 10-9 中 $k=1$ 曲线的定性表现一致. 可见，实际宇宙的 $a(t)$仍可用图 10-9 大致描述.

[选读 10-2-1]

严格说来还应补证 a_C 和 t_C 都为有限值. 令 $f(a)\equiv a\dot{a}^2$，则由 $\dot{a}^2=(8\pi\rho a^2/3)-1$ 得

$$f(a)=(8\pi\rho a^3/3)-a=f_1(a)-f_2(a)\,,$$

其中 $f_1(a) \equiv 8\pi\rho a^3$，$f_2(a) = a$. 由式(10-2-30)可知 $f_1(a)$ 的图像是斜率为负的曲线，而 $a > 0$ 和 $\rho > 0$ 则保证它在第一象限内，故必与代表 $f_2(a)$ 的斜率为 1 的过原点直线交于一点. 由 $a\dot{a}^2 = f_1(a) - f_2(a)$ 可知此交点的 a 值就是 a_C，可见 a_C 有限. 以 ρ_C 代表与 a_C 相应的 ρ 值，则 $\dot{a}^2 = (8\pi\rho a^2/3) - 1$ 给出 $\rho_C = 3/8\pi a_C{}^2 > 0$，配以 $p \geqslant 0$，由式(10-2-18)便知 $\ddot{a}_C < 0$，这就保证 t_C 有限，即 a 不会在 $t \to \infty$ 时才增至 a_C.

[选读 10-2-1 完]

既然宇宙有起始时刻($t = 0$)，就可谈及宇宙今天的年龄，它等于 $t_0 - 0 = t_0$. 设 $D(t)$ 是任选的两个星系的距离，以 D_0 简记 $D(t_0)$，粗略认为膨胀一直以当今速率 u_0 进行(见图 10-10 中的直线)，则 $t_0 \cong D_0/u_0 = D_0/H_0D_0 = H_0^{-1}$. H_0 的实测值约为(20km/s)/百万光年，故 $t_0 \cong H_0^{-1} \cong 135$ 亿年. 但由图 10-10 知 $t_0 < H_0^{-1}$(t_0 与 H_0^{-1} 的定量关系见习题 4)，可见 t_0 小于 135 亿年.① 由于种种原因，H_0 不易测准. 哈勃当年测得的 H_0 约为上引值的 8 倍，于是 t_0 小于 17 亿年. 这是无法接受的，因为从放射性元素的相对丰度估计的地球年龄约为 46 亿年. 更有甚者，恒星的年龄在 20 世纪 30 年代被错误地估为 10^4 亿年，这就使小于 17 亿年的宇宙年龄更加无法接受. 这导致人们对大爆炸理论的疑惑，许多宇宙理论应运而生. 直至 20 世纪 50 年代末发现 H_0 值大约只有哈勃所测值的 1/8 后，这一笼罩在大爆炸理论头上的阴云才得以驱散.

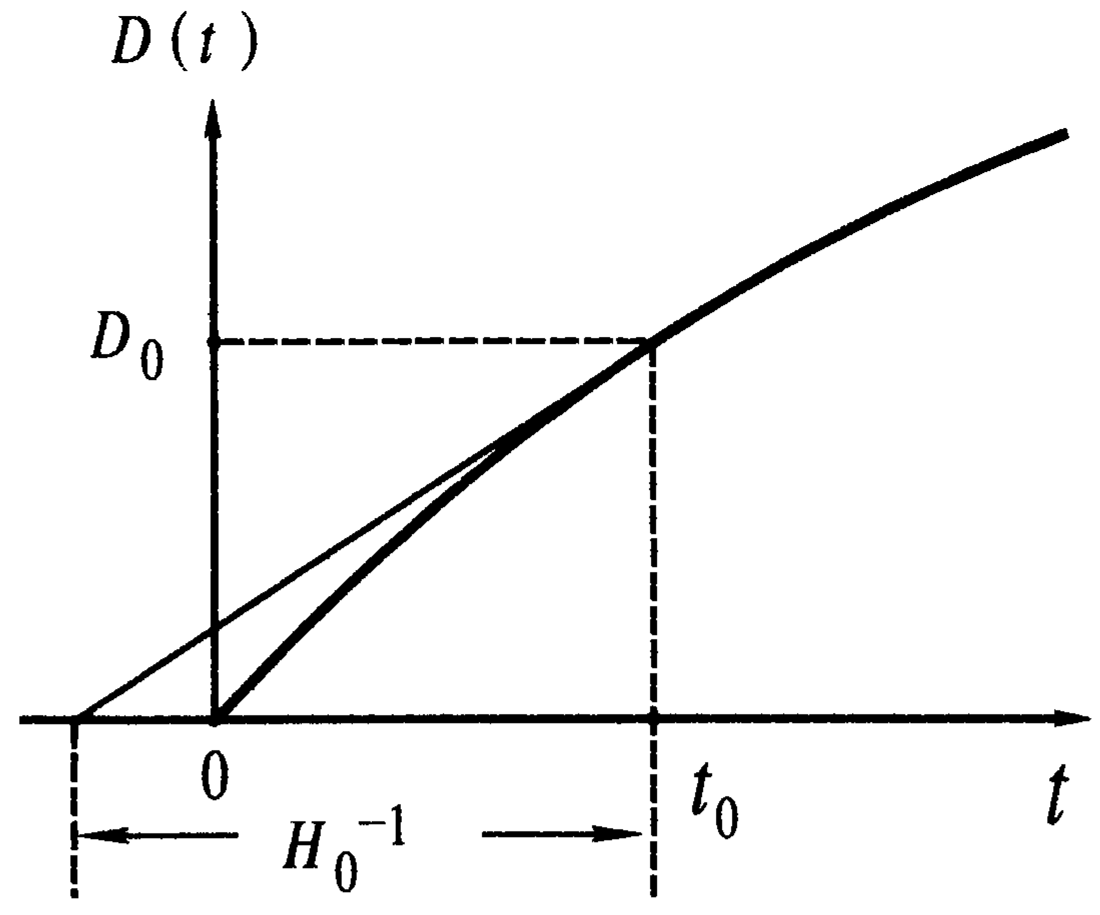


图 10-10 宇宙年龄 $t_0 < H_0^{-1}$

提高哈勃常数 H_0 的测量精度对宇宙论的研究至关紧要. 长期来各种测量结果的最大值约为最小值的 2.5 倍，通常认为

$$H_0 = 100\,h\ \text{km}\cdot\text{sec}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}, \tag{10-2-32}$$

其中 h 满足 $0.4 \lesssim h \lesssim 1$，反映测量结果之间的出入，$1\,\text{Mpc} = 10^6\,\text{pc}$，pc 是天文学常用距离单位 parsec (即 parallax second)的缩写，汉语称为**秒差距**，$1\,\text{pc} \cong 3.26$ 光年. 近几年来用各种方法测量 H_0 值的结果日趋接近，最新数据为[Spergel et al. (2003)]

$$H_0 = 71\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}, \qquad \text{更准确地就是}\ h = 0.71\begin{cases}+0.04\\-0.03\end{cases}. \tag{10-2-33}$$

本章开始时说过宇宙是“无所不包”的最大时空. 对这句话应做补充说明. 用

① 然而，1999 年对 Ia 类超新星的观测发现当今宇宙并非如图 10-10 那样减速膨胀而是如图 10-13 所示的加速膨胀(详见 10.3.3 小节)，结果是 $t_0 > H_0^{-1}$. 本书定稿时的最新结果为 $t_0 \cong 137$ 亿年.

RW 度规描述的宇宙只是“抹匀”后的宇宙，它只反映宇宙在宇观尺度下的行为. 如果关心较小尺度下的局部表现，就要根据该局部的物质分布情况选择适当度规描述. 例如，一个近似孤立的球对称恒星周围的时空几何应由施瓦西度规描述. 宇宙虽然是无所不包的最大时空，但 RW 度规并不反映其局部(小于宇观尺度)区域的时空几何.

10.2.4 宇宙学常数和爱因斯坦静态宇宙

爱因斯坦早在 1917 年就用爱因斯坦方程讨论宇宙. 限于当时关于宇宙不变的普遍哲学理念，他一开始就企图找到一个描述静态宇宙的时空度规. 可惜爱因斯坦方程容不得静态解，因为静态意味着 $\dot{a}=0$，方程(10-2-16)、(10-2-17)于是成为

$$3k=8\pi\rho a^2 \tag{10-2-16'}$$

和

$$k=-8\pi p a^2, \tag{10-2-17'}$$

它们在物理条件 $\rho>0$ 和 $p\geqslant 0$ 下显然互不相容. 爱因斯坦早已看出爱因斯坦方程没有静态解，但当时的他是如此坚信静态宇宙，以至为了获取静态解而不惜修改自己的方程. 他假定修改后的方程取 $\tilde{G}_{ab}=8\pi T_{ab}$ 的形式，考虑到 T_{ab} 的性质，可知 $\tilde{G}_{ab}$ 必须满足 $\tilde{G}_{ab}=\tilde{G}_{ba}$ 以及 $\nabla^a\tilde{G}_{ab}=0$，而由 g_{ab} 及其一、二阶导数构成的满足这两个要求的 $\tilde{G}_{ab}$ 只能取 G_{ab} 和 g_{ab} 的线性组合的形式(证略)，因此他在 1917 年发表了如下的修改后的爱因斯坦方程

$$G_{ab}+\Lambda g_{ab}=8\pi T_{ab}, \tag{10-2-34}$$

其中常数 Λ 叫**宇宙学常数**①(cosmological constant，简称宇宙常数). 上式可改写为

$$G_{ab}=8\pi(T_{ab}-\Lambda g_{ab}/8\pi). \tag{10-2-35}$$

下面说明这一新方程的确容许静态解. 为便于讨论，可形式地把 $T_{ab}-\Lambda g_{ab}/8\pi$ 看作新的“能动张量”，从而把式(10-2-35)仍看作无 Λ 项的爱因斯坦方程. 为区分起见，把原来记作 T_{ab} 的能动张量改记作 $\bar{T}_{ab}$，把新能动张量记作 T_{ab}（即 $T_{ab}=\bar{T}_{ab}-\Lambda g_{ab}/8\pi$），于是以 T_{ab} 为能动张量的、(形式上)无 Λ 项的爱因斯坦方程可表为

$$G_{ab}=8\pi T_{ab}=8\pi(\bar{T}_{ab}-\Lambda g_{ab}/8\pi). \tag{10-2-36}$$

当时的物质模型只有实物(尘埃)而无辐射，即 $\bar{T}_{ab}$ 中只含 $\bar{\rho}$ 而不含 $\bar{p}$，所以 $\bar{T}_{ab}=\bar{\rho}U_aU_b$，因而 $\bar{T}_{00}=\bar{\rho}$，$\bar{T}_{ij}=0$，由式(10-2-13)可知新能动张量 T_{ab} 的 ρ 和 p 分别满足

---

① 爱因斯坦假定 Λ 很小，使得在除宇宙学问题外的一切问题中 Λ 项所起的作用都可忽略[有关讨论见 Rindler(1982)].

$$\rho = T_{00} = \bar{T}_{00} - \Lambda g_{00}/8\pi = \bar{\rho} + \Lambda/8\pi\ , \tag{10-2-37}$$

$$p g_{ij} = T_{ij} = \bar{T}_{ij} - \Lambda g_{ij}/8\pi = -\Lambda g_{ij}/8\pi\ , \qquad \text{即} \quad p = -\Lambda/8\pi\ . \tag{10-2-38}$$

这表明 Λ 项的引入相当于在宇宙中加进压强 p 为负的"物质"(只要选 $\Lambda > 0$)，从而使式(10-2-16′)和(10-2-17′)的联立不再无解. 现在由式(10-2-17′)和(10-2-38)得

$$k = a^2 \Lambda\ , \tag{10-2-39}$$

由式(10-2-16′)和(10-2-37)得

$$3k = (8\pi\bar{\rho} + \Lambda)\, a^2\ . \tag{10-2-40}$$

两式相减得

$$2k = 8\pi\bar{\rho} a^2\ . \tag{10-2-41}$$

条件 $\bar{\rho} > 0$ 导致 $k > 0$，因而

$$k = +1\ , \tag{10-2-42a}$$

从而式(10-2-39)和(10-2-41)分别给出

$$\Lambda = a^{-2}\ , \tag{10-2-42b}$$

$$a^2 = 1/4\pi\bar{\rho}\ . \tag{10-2-42c}$$

式(10-2-42)便是加进 Λ 项后的唯一静态解，式(10-2-42a)说明这个解的空间几何是球面几何，相应的 4 维线元是

$$ds^2 = -dt^2 + a^2[d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]\ ,$$

$$\text{其中}\ a^2 = \Lambda^{-1} = \text{常数}. \tag{10-2-43}$$

这叫做**爱因斯坦静态宇宙度规**. 上式虽然是静态解，但却是个不稳定的静态解，一经微扰就变为膨胀或收缩. 文献指出[Peebles(2002)]，爱因斯坦当时并未写出关于 $a(t)$的微分方程，因此并未发现这一不稳定性.

由于坚信静态宇宙，爱因斯坦在 1922 年对 Friedmann 的文章审稿时写了否定意见，并对 Friedmann 写给他的申明观点的信未予理会. 1923 年，爱因斯坦在听取了 Friedmann 的同事 Krutkov 向他重申 Friedmann 的意见后觉得有理，便给杂志社寄去一张便条，承认自己审稿有误，并肯定 Friedmann 结果的正确性. 他对自己引入宇宙常数深感后悔，曾说过这是他一生中最大的失策. 然而，问题并不因他放弃 Λ 项而就此完结，宇宙常数 Λ 的地位在历史上几起几落，直至今天(详见 10.3.3 小节).

§ 10.3 宇宙的热历史

10.3.1 宇宙演化简史

前已说过，a 足够小的宇宙以辐射为主. 向实物为主的转变大约发生在 $t = 10^{11}$ s，即大爆炸后的数千年. 本小节介绍根据标准模型勾勒出来的宇宙从大爆

炸至今的演化简史. 讨论中不可避免地涉及高能物理的某些基本知识，对此缺乏了解的读者最好先阅读一点有关读物. 为了不过多涉及高能物理、热力学和量子统计学，我们只做较粗略的介绍[更准确、细致的讨论见温伯格(1972)；Kolb and Turner(1990).]. 由于宇宙无所不包，没有外界，其演化可看作绝热膨胀. 早期宇宙以辐射为主，温度T同尺度因子 a 的关系不难求得. 由式(10-2-21)知辐射宇宙的能量密度ρ与a^{-4}成正比，而由辐射的量子统计学又知ρ与T^4成正比，① 于是$T \propto a^{-1}$. 另一方面，式(10-2-23)的k在a足够小时可以忽略，故其解为$a=(2Bt)^{1/2}$，与$T \propto a^{-1}$结合便得$Tt^{1/2}=$常量. 此常量在国际制的数值约为 10^{10}，故

$$T=10^{10}\big/\sqrt{t} \quad (T\text{ 和 }t\text{ 的单位分别为 K 和 s}). \tag{10-3-1}$$

这就是早期宇宙(辐射为主时)的温度T和时间t的近似关系式. 由此可知$t=0$ (大爆炸)时$T=\infty$，可见宇宙的演化是从温度无限高的大爆炸奇点开始的、温度不断下降的绝热膨胀过程.

1. 大爆炸奇点

宇宙的演化始于大爆炸奇点($t=0$, $T=\infty$). 时空奇点是最棘手的问题之一. 许多物理量在趋近奇点时趋于无限大，一切物理定律在奇点处失效. 1965 年以前，多数物理学家不相信时空奇点的存在，曾经提出过避免奇点的各种理由. Penrose 和 Hawking 从 1965 至 1970 年先是分别地后是合作地借用整体微分几何证明了一系列奇点定理，断言只要某些合理条件得到满足，时空奇点(包括大质量恒星晚期坍缩及宇宙起源的大爆炸奇点)就不可避免(下册附录对奇点定理有定性介绍). 重要的是这些条件中不含对称性要求. 这曾一度使许多相对论学家不得不承认奇点的存在，对奇点的各种深入研究也应运而生. 不过，由于不相信物理量会无限变大，应该换一角度看待奇点定理：与其说奇点定理证明了奇点的存在性，不如说它表明经典广义相对论在奇点附近(那里时空曲率很大)的不适用性. 众所周知，物理学在 20 世纪初期发生过两大革命——相对论的诞生和量子论的创立. 从认识时空结构和引力本质这一角度来看，广义相对论是十分革命的理论. 但是从另一重要角度看来它却“很不革命”，因为它并不遵守量子理论的基本原则. 量子论认为任一可观测量不能有确定值(除非系统处于该量的本征态)，对测量结果只能做概率性预言. 然而在广义相对论中所有可观测量(如度规)都有确定值(用世界线描述粒子的历史就是默认粒子在每一时刻有确定位置). 国际理论物理学界现在把不考虑量子效应的理论称为经典理论，因此把爱因斯坦的广义相对论称为经典广

---

① 对电磁辐射，由黑体辐射定律可知$\rho \propto T^4$，考虑到其他粒子的贡献，ρ与T应有$\rho=(\pi^2/30)N_{\text{eff}}T^4$的关系，其中$N_{\text{eff}}$是由静能远小于$kT$ (k 为玻尔兹曼常数)的粒子的种类数决定的数. 可见只当N_{eff}为常数时有$\rho \propto T^4$.

义相对论.[①] 既然奇点定理表明时空曲率足够大时经典广义相对论失效，极早期宇宙就应存在一个临界时刻$t_C > 0$，经典广义相对论在时段$[0, t_C]$内不成立，应代之以一个全新的关于引力的量子理论(称为**量子引力论**，即 quantum gravity). 虽然许多前沿学者致力于创立这门新理论，并且不断取得进展，但至今仍未建立起完整的理论来. 在量子引力论尚未建立的今天，我们无法考虑奇点及其极近处(时段$[0, t_C]$内)的问题而只能从临界时刻t_C开始讨论. 如何估计这一t_C值?由于问题涉及时空、引力和量子论，t_C应取决于基本常量 c，G 和 $\hbar$，而由 c，G，$\hbar$ 组成的有时间量纲的“唯一”量是**普朗克时间**$t_P \equiv (G\hbar / c^5)^{1/2} \sim 10^{-43}\text{s}$，因此就取$t_P$作为临界时刻$t_C$，即认为经典广义相对论适用与否的粗略界限就是$t_P$(详见选读10-3-1). 我们只能讨论$t_P \sim 10^{-43}\text{s}$以后的演化史.

[选读 10-3-1]

可以这样说，时空曲率在时段$[0, t_C]$内是如此之大，以致经典广义相对论不能成立. 然而这句话需要解释. 首先，什么是时空曲率的大小(magnitude)?曲率是张量，它的大小通常是指由它(及度规)所构成的标量值，例如标量曲率$R \equiv g^{ab}R_{ab}$以及标量$\mathscr{R} \equiv R^{ab}R_{ab}$. 早期宇宙以辐射为主，而电磁辐射(类光电磁场)的能动张量的迹$T = 0$，由爱因斯坦方程可知其$R = 0$. 因此我们以$\mathscr{R} \equiv R^{ab}R_{ab}$代表早期宇宙的时空曲率的大小. 第二，当$\mathscr{R}$大到什么程度时经典广义相对论失效?我们希望找到一条界线，即一个临界值$\mathscr{R}_C$，使得在非常粗略的意义上可以说，当$\mathscr{R} < \mathscr{R}_C$时可用经典广义相对论而当$\mathscr{R} > \mathscr{R}_C$时不能. 最保险的办法是利用量子引力论去找这条界线，可惜目前还没有这一理论. 退一步的办法是通过微扰手段获取某种信息，它会告诉我们$\mathscr{R}_C$的大致量级. 还有一种虽然可能粗略但却最为省事的办法，即量纲分析法. $\mathscr{R}$在国际制的量纲为L^{-4}[由附录 A 式(A-7)可推得]，而由 c，G，$\hbar$ 组成的有长度量纲的“唯一”量是**普朗克长度**$l_P \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2} \sim 10^{-35}\text{m}$，于是人们普遍接受$\mathscr{R}_C \sim l_P^{-4}$($\sim$ 代表同量级).

总之，由量纲分析可粗略认为$\mathscr{R}_C \sim l_P^{-4}$. 然而量纲分析又给出$t_C \sim t_P$. 自然要问：暂时假定经典广义相对论适用，当宇宙演化至t_P时，其$\mathscr{R}$值真的与$\mathscr{R}_C \sim l_P^{-4}$有相同量级吗?从式(10-2-5)后面的克氏符表达式出发可求得 RW 宇宙的里奇张量的非零分量为

① 请注意现在对“经典物理学”的界定已与20世纪的前半部分有所不同. 当时把相对论(狭义及广义)和量子力学列入“近代物理学”而把此前的物理学称为“经典物理学”. 随着研究的深入(特别是认识到广义相对论必须同量子论结合以后)，人们逐渐把“经典”一词变为“非量子”的同义语，而把不考虑量子效应的广义相对论称为经典广义相对论，以便同量子引力论区别. “经典物理学”的这一新的界定标准已相当普遍地在国际理论物理学界得到公认. 与此相比，某些读者对“经典”一词的理解是不是太“经典”了?

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a\,,\qquad R_{11} = (1-kr^2)^{-1}(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)\,,$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)\,,\qquad R_{33} = r^2\sin^2\theta\,(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)\,,$$

由此得

$$\mathscr{R} \equiv R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 9\,(\ddot{a}/a)^2 + 3a^{-4}(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)^2\,. \tag{10-3-2}$$

因为极早期宇宙以辐射为主,而且在a如此小的情况下可取$k=0$,故由式(10-2-24b)得 $a(t)=(2Bt)^{1/2}$,求导发现 $-\ddot{a}/a=(\dot{a}/a)^2=(1/4)\,t^{-2}$,代入式(10-3-2)得 $\mathscr{R}=0.75\,t^{-4}$,改回国际制(补c),便得t时刻的$\mathscr{R}$值为$\mathscr{R}(t)=0.75\,c^{-4}t^{-4}$. 注意到$l_P=ct_P$,便有

$$\mathscr{R}(t_P)=0.75\,l_P^{-4}\sim l_P^{-4}\,.$$

即t_P时的曲率$\mathscr{R}(t_P)$与$\mathscr{R}_C\sim l_P^{-4}$同量级,可见经典广义相对论在时段$[0,10^{-43}\text{s}]$内不适用.

[选读 10-3-1 完]

2. 早期宇宙的热平衡

虽然经典广义相对论大致从$t=10^{-43}$s开始有效,但在10^{-43}s后的一小段时间内温度奇高,高能物理学对如此高能的领域还显得力不从心. 大致地说,宇宙主要由能量极高的正反粒子对组成,包括夸克(quark)、轻子(lepton)、传递相互作用的规范玻色子(gauge boson,如光子)以及目前尚未确证其存在性甚至尚未认识的粒子. 高能粒子之间的频繁相互作用使它们共处于一个热平衡态中,可比喻为"一锅充分搅拌的基本粒子汤". 以光子γ为例,它不像在当今宇宙那样可通行无阻地走很长路程,其"平均自由时间"由于与其他粒子的频繁碰撞(包括被散射、吸收和再发射)而十分短暂. 虽然宇宙也在快速膨胀,但在可觉察出宇宙膨胀的一段时间内光子已与其他粒子碰撞过非常多次. 不但光子,就连中微子在极早期宇宙的一段时间内也如此. 总之,虽然宇宙不断膨胀,但在宇宙(特别是早期宇宙)的大部分历史中粒子之间的相互作用率远大于宇宙膨胀率(直观说就是"搅拌"的快慢远超过"锅"的膨胀快慢),因此在早期宇宙的多数时段内可实现多种粒子的局域热平衡.

根据量子统计学,温度为T的辐射中的辐射粒子的平均能量约等于kT,其中k是玻尔兹曼常数(勿与区分三种空间几何的k相混). 这一结论也近似适用于静能远小于kT的实物粒子,它们以接近光速的速率运动,可近似视为辐射粒子,与辐射粒子统称为**相对论性粒子**. 例如,$T=10^{11}$K时$kT\cong 10$ MeV,而电子e的静能约为0.5MeV,故在$T=10^{11}$K时电子是相对论性粒子. 根据量子场论,两个光子可转化为某种粒子的正反粒子对("对产生"),一对正反粒子也可转化为两个光子("对湮灭"). 这两种过程当然都要满足能量守恒律. 光子在室温下的平均能量kT远小于电子静能,因此两个光子变为正、负电子对($2\gamma\to e+e^+$)的可能性几乎为零. 然而在$T=10^{11}$K的高温下这种"对产生"的"速率"很大(约与光子密度成正比). e与e^+相遇又可湮灭为两个光子($e+e^+\to 2\gamma$),湮灭"速率"正比于

(e, e^+)对的密度. 因此，达到平衡时，(e, e^+)对的密度与能量大于电子静能 m_e 的光子对的密度大致相等. 反之，由于质子 p 和中子 n 的静能约为 m_e 的 1840 倍，即使在 $T = 10^{11}$K 的高温下 $(p, \bar{p})$ 和 $(n, \bar{n})$ 的密度也几乎为零($\bar{p}$ 和 $\bar{n}$ 分别代表反质子和反中子).

3. 物质与反物质的不对称性

在 $t = 0.01$s 、$T = 10^{11}$K 时，由于 $kT >> m_e$ 及 $kT << m_p$ ，存在大量(与 γ 的数量同量级)的 $(e,\ e^+)$ 而几乎没有 $(p, \bar{p})$ 和 $(n, \bar{n})$. 因此宇宙的内容物为：大量的中微子 ν 和反中微子 $\bar{\nu}$ ；大量的光子 γ ；大量的 $(e,\ e^+)$ (每种粒子的数密度大致相同)以及少量的质子 p 和中子 n . 在更早的时候，例如当 $T >> 10^{13}$K 时，由于 $kT > m_p$ ，曾经存在过大量的 $(p, \bar{p})$ 和 $(n, \bar{n})$ ，只当温度降至 $kT < m_p$ 时才因湮灭而消失. 既然 p，$\bar{p}$ 和 n，$\bar{n}$ 成对湮灭，为何还残留少量 p 和 n? 我们知道必有少量 p 和 n 是因为我们知道当今宇宙中的实物无不由 p 和 n 组成，宇宙中的反粒子为数甚少. 就是说，当今宇宙存在着关于粒子和反粒子(物质和反物质)的不对称性，承认这一事实就只能承认在 $t = 0.01$s 前除大量 $(p,\bar{p})$ 和 $(n,\bar{n})$ 之外还有少量不成对的 p 和 n. 到 $kT < m_p$ 时，p 与 $\bar{p}$ ，n 与 $\bar{n}$ 成对湮灭，只剩下少量的 p 和 n(都是重子). 据估计，宇宙中重子(baryon)与光子的数密度之比 n_b / n_γ 仅为 10^{-10} 的量级，但它偏不为零. 若再追问重子和反重子的这种不对称性的来源，则只有两个可能答案：① 宇宙一开始就存在偏爱粒子(而不是反粒子)的不对称性(这显然不够自然)；②宇宙开始时重子和反重子一样多，只是在极早期演化中出现偏爱重子的不对称性. 如果坚信重子数守恒，后一种可能便不成立. 幸好 20 世纪 70 年代开始出现的电、弱、强大统一理论(GUT)认为在能量很高时重子数可不守恒. 理论表明，重子数不守恒加上极早期膨胀中对热平衡态的短暂偏离可以从原本关于粒子和反粒子是对称的宇宙中产生出过剩的 p 和 n 来. 虽然大统一理论由于未能取得预期的实验支持而仍有待探讨，但有理由相信迟早会有某种成功的大统一理论解决上述宇宙学疑难.

4. 中微子的退耦

在 $t = 1$s、$T = 10^{10}$K 时，$kT \cong 1$MeV 仍大于 m_e，故仍存在大量的 $(e,\ e^+)$. 然而，由于温度和密度与前相比已明显降低，中微子(及反中微子，下同) 与其他粒子的相互作用率远小于宇宙膨胀率，它们的平均自由时间显著变长，近似成为与其他粒子无相互作用的自由粒子，就不再与其他粒子共处热平衡中. 这称为中微子的**退耦**(decoupling). 中微子退耦时间和温度分别记作 $t_{\nu d}$ 和 $T_{\nu d}$. 它们退耦后虽然也像其他粒子那样充满宇宙，而且由于对总能动张量仍有贡献而对宇宙的演化有影响，但它们在除此而外的各方面都与宇宙的其他组分互不关联，两者独立演化. 这些大量的中微子一直存在至今，作为一个独立的粒子系统，其当今温度约

为 2K，可惜由于同测量仪器的相互作用太微弱而难以被探测.

5. 原初核合成

观测表明当今宇宙的氦约占宇宙总质量的 1/4. 除早期宇宙的原初核合成外，这一氦丰度无法用任何过程解释(恒星内部的核反应虽不断生成氦，但其值只占上述丰度的一小部分.). 原初核合成涉及的温度段约在 10^{10}K 至(稍低于)10^9K 之间. 温度高于这一段时，即使质子和中子结合为氦核也会被高能光子所击碎(“光分裂”). 由于这一温度段内涉及的物理知识早已在地球上的实验室内得到确证，人们对原初核合成理论有足够的信心. 因为核子数密度较低以及宇宙快速膨胀导致反应时间很短(约 10^2s)，原初核合成中只有快速的两粒子反应可以发生. 首先是质子同中子结合成为氘核 ^{2}H，多余的能量和动量由一个光子带走($p+n \to {}^2H+\gamma$)，继而是一系列后续反应而生成 ^{3}H(氚核)，^{3}He 和 ^{4}He，如

$$^2H+n \to {}^3H+\gamma\,, \qquad ^2H+p \to {}^3He+\gamma\,, \qquad ^2H+{}^2H \to {}^3He+n\,,$$

$$^2H+{}^3H \to {}^4He+n\,, \qquad ^3He+{}^3He \to {}^4He+2p\,.$$

由于不存在质量数为 5 的稳定核素，反应链至此中断. ^{4}He 作为主要产物逐渐积累，直至数量足够时核反应才得以继续，结果是在 ^{4}He 基础上生成的很少一点 ^{7}Li. 由于不存在质量数为 8 的稳定核素，反应链至此终结. 整个反应链必须经过的第一步是质子同中子结合为氘核. 氘核的结合能比氦核的结合能小得多，氦核在温度低到 3×10^9 K 时就可保持稳定，而氘核在这一温度下刚刚形成便会破裂，因此真正有意义的核合成过程在温度略小于 10^9K 时才由于通过了“氘关卡”而开始发生，产物是大量的 ^{4}He 和微量的 ^{2}H，^{3}He 和 ^{7}Li (^{3}H 不稳定，很快衰变为 ^{3}He.). 若以 ^{4}He 的产量为单位，则 ^{2}H 和 ^{3}He 的产量约为 10^{-5}，而 ^{7}Li 约为 10^{-10}. 至于今天宇宙中各种比 ^{7}Li 更重的元素，主要是后来在恒星内部的核反应以及超新星爆发中形成的. 恒星内部之所以能跳过 $A=5$ 和 8 的元素而生成重元素，是由于强大的自引力使核心球的密度很高，并且有足够的反应时间使三粒子碰撞过程得以发生.

原初核合成产生的氦丰度密切依赖于核合成结束前中子和质子的数密度之比 n_n/n_p(理由稍后便知). 这可由以下讨论求得. 中微子退耦前，中子和质子可通过以下弱作用过程互相转换：$p+e \leftrightarrow n+\nu_e$，$p+\bar{\nu}_e \leftrightarrow n+e^+$. 因为中子质量略大于质子质量($m_n - m_p \cong 2.5\, m_e$)，质子变中子的过程比其逆过程较难发生. 例如，由于 $m_p + m_e \cong m_n - 1.5 m_e < m_n$，从能量守恒知道一个静止质子和一个静止电子不能变为一个哪怕是静止的中子，但反过来却没有这个问题. 当然，在温度高达 10^{10}K 以上时电子能量远大于其静能 m_e，因而 $p+e \to n+\nu_e$ 可以发生，但无论如何，其发生的概率总小于逆过程的概率，因此在正反向过程达到统计平衡时 n_n/n_p 应小于 1，定量关系由玻尔兹曼公式

$$n_{\mathrm{n}} / n_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\Delta m/kT} \tag{10-3-3}$$

给出，其中$\Delta m \equiv m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}}$. 当温度降至$T_{\gamma\mathrm{d}} \cong 10^{10}\,\mathrm{K}$时中微子退耦，上述n，p互变的弱作用过程基本停止，$n_{\mathrm{n}} / n_{\mathrm{p}}$便在数值$\mathrm{e}^{-\Delta m/kT_{\gamma\mathrm{d}}}$上大致冻结. 以上讨论略去了自由中子的自发衰变$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$，因为其半衰期(约 10 min)远大于$T_{\gamma\mathrm{d}}$时的宇宙年龄($t_{\gamma\mathrm{d}} \cong 1\mathrm{s}$). 但到氦合成时宇宙年龄($t \cong 10^2\mathrm{s}$)已占中子半衰期的可观部分，因此$n_{\mathrm{n}} / n_{\mathrm{p}}$比其冻结值$\mathrm{e}^{-\Delta m/kT_{\gamma\mathrm{d}}}$略低，约为 1/7 弱一点. 以$N_{\mathrm{n}}$和$N_{\mathrm{p}}$分别代表总中子数和总质子数，暂令$\sigma \equiv N_{\mathrm{n}}/N_{\mathrm{p}}$，则总核子数$N = N_{\mathrm{n}} + N_{\mathrm{p}} = (\sigma+1)N_{\mathrm{p}}$，其中全部中子都与同数量的质子结合成氦，故氦中所含核子数为$N_{\mathrm{He}} = 2N_{\mathrm{n}} = 2\sigma N_{\mathrm{p}}$，因此原初核合成产生的氦丰度(以质量计)为

$$Y = \frac{N_{\mathrm{He}}}{N} = \frac{2\sigma N_{\mathrm{p}}}{(\sigma+1)N_{\mathrm{p}}} = \frac{2\sigma}{\sigma+1},$$

即

$$Y = 2\left(\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}}\right)\left(1+\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}}\right)^{-1}, \tag{10-3-4}$$

以$n_{\mathrm{n}} / n_{\mathrm{p}} \cong 1/7$代入得$Y \cong 0.25$. 除原初核合成外，恒星内部的核反应也产生 $^4\mathrm{He}$ (虽然比原初核合成的产量少得多)，因此有必要从观测到的氦丰度推断原初氦丰度(原初核合成结束时的丰度). 近年来确定的原初氦丰度约为 0.23，与上述理论值(0.25)接近. 其他产物($^2\mathrm{H}$，$^3\mathrm{He}$和$^7\mathrm{Li}$)的丰度虽然很小，但对验证理论也很重要. 定量计算原初核合成产物丰度还要用到一个重要的物理参量η，定义为宇宙中重子与光子数密度之比(即$\eta \equiv n_{\mathrm{b}}/n_{\gamma}$). η^{-1}代表每个重子周围的光子数，它通过影响光分裂的难易而影响核合成的开始时刻，从而影响产物的丰度. $^4\mathrm{He}$ 的丰度只微弱地依赖于η，然而 $^2\mathrm{H}$，$^3\mathrm{He}$ 和 $^7\mathrm{Li}$ 的丰度却对η相当敏感. 计算表明，只要假定η值在$3.4\times10^{-10} \sim 5\times10^{-10}$之内，即

$$\eta \equiv n_{\mathrm{b}}/n_{\gamma} \cong (3.4 \sim 5)\times10^{-10}, \tag{10-3-5}$$

则上述 4 种产物的理论丰度都能与观测丰度符合. 这不仅是对核合成理论的有力支持，而且也给η这个十分重要的物理参量划出了一个相当明确(而且狭窄)的范围，从而构成对宇宙论的又一重要贡献.

原初核合成理论的另一重要贡献是把中微子的种类数N_{ν}确定为 3，即确认中微子只有 3 种(因而轻子只有 3 代). 这本是粒子物理学的问题，用宇宙论对此给出结论的简史可从 1976 年谈起. 当时国际物理界的状况有如下特点：①已有迹象表明除第一、二代轻子 e 和μ (及其相应的中微子ν_{e}和ν_{μ})外还存在第三代轻子(因而有第三种中微子)；②当时的加速器无法对N_{ν}给出有意义的限制；③许多物理学家倾向

于相信 N_ν 的数值会随加速器能量增大而增大；④ 很少有粒子物理学家相信宇宙论的研究对粒子物理学能有什么帮助. 然而，Steigman 等却独辟蹊径，指出中微子种类的增加会使宇宙原初核合成的主要产物 ^{4}He 的丰度增加，因而 ^{4}He 的观测丰度应能对 N_ν 给出一个上限. 基本思路如下：式(10-2-16)的 k 在 a 很小时可忽略，与 $H \equiv \dot{a}/a$ 结合得 $H^2 = 8\pi\rho/3$. 中微子种类较多导致 ρ 较大，由上式知 H 较大，即宇宙膨胀较快，导致中微子提前退耦，即 $t_{\nu d}$ 较小，因而退耦温度 $T_{\nu d}$ 较大. 由式(10-3-3)知这又导致 n_n/n_p "冻结"在较大数值上，因而 ^{4}He 丰度较高. 他们当时给出的上限是 $N_\nu \leqslant 7$ (发表于 1977 年). 该文展示了"宇宙论可对粒子物理学提出重要限制、宇宙是高能加速器的重要补充"这样一种新认识. 后来许多学者沿此方向继续研究，把 N_ν 一再缩小. 1990 年，Walker 等五人已给出 $N_\nu \leqslant 3.3$，与欧洲核子研究中心(CERN) 1990 年发表的用加速器得到的结果 $N_\nu = 3$ 一致. 详见 Steigman(1991).

6. 宇宙微波背景辐射

宇宙在原初核合成后较长一段时间内没有重大事件发生，直到 $t \cong 10^{13}\text{s} \cong 4\times10^5$ 年. 这时 $T \cong 3000\text{K}$ (或 4000K)，在这种温度下，原子核与电子开始在电磁作用下结合为中性原子(此前的电子仍有足够能量挣脱核的电磁束缚)，宇宙中的实物开始从电离状态(等离子体)向中性状态迅速转化. 在电离状态时，光子与带电粒子(特别是自由电子)有频繁的相互作用(如康普顿散射)，因此同实物粒子处于热平衡. 然而光子与中性原子几乎没有相互作用，因此在带电粒子结合为中性原子后宇宙变得透明(光子的平均自由时间大大长于宇宙当今年龄)，光子从实物粒子的热平衡"大家庭"中退耦而出并自成独立系统. 在退耦前夕，这些光子由于与实物粒子达到热平衡(类似于恒温箱中的光子与箱壁粒子的热平衡)，其能量密度按波长的分布满足黑体辐射曲线，可由如下的普朗克公式描述：

$$du = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}(e^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1} d\lambda, \tag{10-3-6}$$

其中 du 代表单位体积中波长在 $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ 范围内的光子的能量，T 为温度，h 和 k 分别为普朗克和玻尔兹曼常数. 退耦后的光子虽然不再与实物粒子达到热平衡，其能量按波长的分布仍满足普朗克公式，只是式中的温度 T 随尺度因子 a 的增大而反比下降. 下面对其理由做一简单说明. 退耦后，设 a 增大一个因子 α，即 $a' = \alpha a$，则单位体积光子数减为 α^{-3} 倍. 每一光子的能量又因红移而减为 α^{-1} 倍[见式(10-2-7)]. 因此单位体积中波长在 $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ 内(指尺度因子为 a 时)的那些光子的能量降为 $du' = \alpha^{-4}du = \frac{8\pi hc}{\alpha^4\lambda^5}(e^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1}d\lambda$，改用新波长 $\lambda' = \alpha\lambda$ 表示则为

$$du' = \frac{8\pi hc}{\lambda'^5}(e^{hc/kT'\lambda'} - 1)^{-1} d\lambda', \qquad 其中\ T' \equiv \alpha^{-1}T. \tag{10-3-7}$$

可见在尺度因子增至 a' 时能量密度按波长的分布仍由普朗克公式描述，只是相应

于一个较低的温度T'. 估算表明退耦后的光子系统的当今温度$T_0\sim 3\text{K}$ (早期曾估为 10K 或 5K). 就是说，当今宇宙由大量背景光子所均匀充满(各星系都“沐浴”在无处不在的光子气中)，它们的能量密度按波长的分布由 T~3K 的那条黑体辐射曲线描述. 辐射能量主要集中在微波波段(能量密度最大值约在波长为 0.1cm 处)，因此称为**宇宙微波背景辐射**(cosmic microwave background radiation). 美国无线电工程师 Penzias 和 Wilson 因在 1965 年意外地测到这种各向同性辐射而获 1978 年诺贝尔物理奖. 他们其实只在一个波长(7.35cm)上测到信号(即只测到曲线上的一点). 假定这是黑体辐射，则经过此点的黑体辐射曲线对应的温度为 3.5K. 美国的迪克(Dicke)等马上指出这是大爆炸的遗迹(“化石”)，是他们正准备探测的宇宙背景辐射. 然而当时也有若干文章对此给出非大爆炸遗迹的解释. 要确定这是大爆炸遗迹必须满足两个条件：① 能谱分布是黑体辐射曲线；② 有高度的各向同性[各个方向测得强度(或折合为温度)相等]. 由此引起人们对曲线其他点以及各向同性性的测量. 不久(1967)就证实非各向同性性不超过千分之 1 至 3，对波长大于 0.3cm 的许多点的测量结果都同$T\cong 3\text{K}$ 的黑体辐射曲线吻合. 波长小于 0.3cm 的辐射易被大气吸收，宜用气球或人造卫星在大气层外观测. 美国国家宇航局(NASA)的宇宙背景探测者 COBE (Cosmic Background Explorer)卫星从 1989 年开始以高精度对宽广的波段做了测量并得到非常完美的黑体辐射曲线，图 10-11 是首次发表

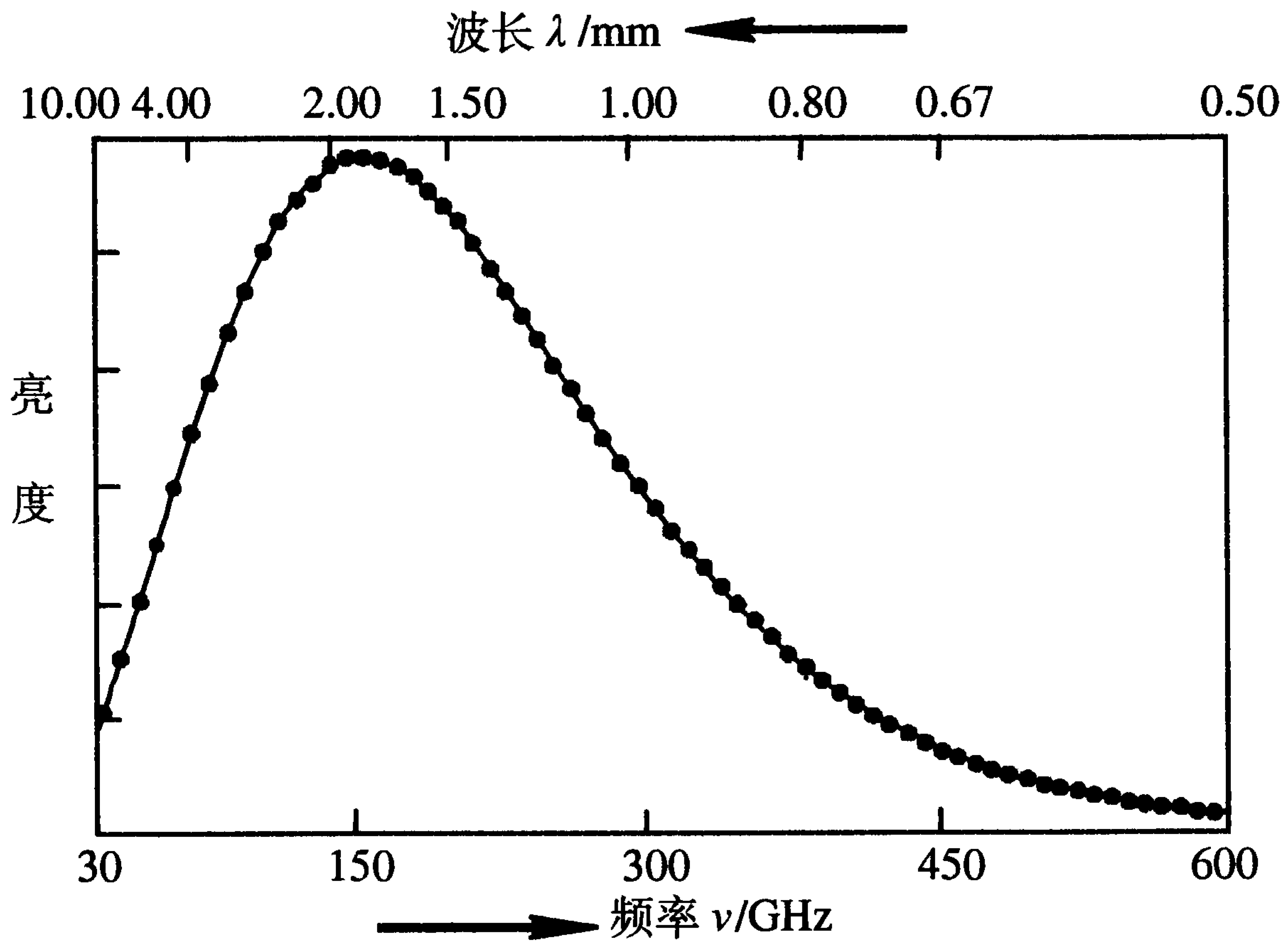


图 10-11 COBE 测得的宇宙背景辐射曲线(根据 1990 年发表的图画出)，①
相应的黑体温度为$T\cong 2.735\text{ K}$

① 本图亮度 B_ν 是指单位时间内通过单位面积、单位立体角、在单位频率内的能量，单位为 $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$，即 焦耳·秒$^{-1}$·米$^{-2}$·(球面度)$^{-1}$·(赫兹)$^{-1}$. 式(10-3-6)的 u 对应的亮度不是 B_ν 而是 B_λ，即单位时间内通过单位面积、单位立体角、在单位波长内的能量，单位为 $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. 对同一温度 T, $B_\nu\sim\nu$ (或 $B_\nu\sim\lambda$)曲线的峰值频率(波长)不等于 $B_\lambda\sim\lambda$ (或 $B_\lambda\sim\nu$)曲线的峰值频率(波长). 对 $T=2.73$，$B_\nu\sim\nu$ 和 $B_\lambda\sim\lambda$ 曲线的峰值波长分别约为 1.6 和 1mm.

(1990)的结果，被认为是人类在自然界中观测到的最完美的黑体谱. COBE 对背景辐射的各向同性性也给出了更精确的测量结果. 把温度 T(作为角度的函数)用球谐函数展开，除常数项 T_0 外，最低级的两个球谐函数依次称为**偶极矩**(dipole moment)和**四极矩**(quadrupole moment)，它们是非各向同性性的主要表现. 以 T_1，T_2 分别代表偶极矩及四极矩非各向同性度的幅值，COBE 的测量结果为 $T_1/T_0 \sim 10^{-3}$ 和 $T_2/T_0 \sim 10^{-5}$. 前者可合理地解释为地球相对于各向同性参考系有微小速率的结果：地球绕太阳运动，太阳相对于银河系中心运动，银河系相对于各向同性参考系又有"本动速度"，因此地球相对于各向同性参考系有微小的速度. 根据定义，只有各向同性观者才能测得各向同性性，因此地球观者测背景辐射得到微小的非各向同性性是理所当然的. 分析表明这种非各向同性性的一阶近似正好表现为偶极矩 [直观地说，地球在背景辐射海中穿行，它感到的前方辐射应强于后方，对应于偶极非各向同性.]. 因此，COBE (及此前的地面天文学家)测得的约千分之一的偶极非各向同性性不但合理，而且还可反过来确定地球相对于各向同性系(宇宙静系)的准确速率，结果为 $350\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. 扣除这一非各向同性性之后，应该说光子退耦时的非各向同性度(以四极矩为主)只有 10^{-5} 左右. 这一微小的非各向同性度对理解宇宙的大尺度结构(星系等)的形成至关紧要(见稍后的 7)，它在 1992 年首次被 COBE 测出就成了各国报纸的头条新闻. 由于星系发出的光要经历一定时间才到达地球(见图 10-8)，通过对发光星系及类星体的观测可以获得比 t_0 更早时期的宇宙信息. 然而宇宙微波背景辐射携带着比此更早的信息(早到光子退耦时期，那时还没有星系.)，这对宇宙学的研究有重要价值. 微波背景辐射的观测结果被认为是对标准模型的最有力支持. 标准模型的一个强劲对手——稳恒态宇宙模型(steady state model)——的一大缺点正是难以对背景辐射给出有说服力的解释，因而在 1965 年后实际上退出历史舞台.

7. 结构形成

标准模型的基本前提是大尺度空间均匀性和各向同性性. 在小一点的尺度下宇宙呈现有层次的结构：存在恒星、星系、星系团和超星系团. 一个被普遍接受的想法是：今天的复杂结构起源于极早期宇宙中非常微弱的**密度涨落**(亦称**扰动**) $\delta\rho/\rho$，其中 ρ 为平均密度，$\delta\rho$ 为该点的密度与 ρ 之差. 引力对密度涨落有放大作用：如果某处 $\delta\rho/\rho>0$ (密度大于平均密度)，则该处的物质在引力作用下收缩，从而导致更高的密度涨落. Jeans 在 1902 年就对静态流体建立了这方面的理论，Lifschitz 于 1946 年给出了膨胀宇宙中密度涨落被放大的理论. 在此基础上曾经出现过各种关于结构形成的模型. 早期(20 世纪 70 年代)的模型由于认为宇宙中的物质主要由重子组成而导致严重困难. 后来出现了非重子暗物质的概念(详见 10.3.2 小节)，以此为基础的两种结构形成理论(分别称为**热暗物质模型**和**冷暗物质模型**)先后问世[详见

Longair(1998)；简明介绍见俞允强(1997)]. 在热暗物质模型中，结构的形成是“自上而下”的：先形成超星系团，再逐级破裂为星系团和星系. 反之，在冷暗物质模型中，结构的形成是“自下而上”的：先形成星系，然后逐级形成星系团和超团. 至于原初扰动的起因，过去只能作为初始条件来指定. 在暴涨宇宙模型(基本思想是在极早期曾有过一次为时极短的指数式急剧加速膨胀，详见 10.4.3 小节) 已被普遍接受的今天，原初扰动完全可由暴涨模型提供. 冷暗物质模型已经取得很大成功. 可以说，以暴涨提供的原初扰动为“种子”的冷暗物质模型是当今被广泛接受的结构形成理论，甚至有人认为应将它列为现代宇宙论的第 4 个基石(前 3 个是公认的：宇宙膨胀、微波背景辐射和原初核合成.). 然而不同学者的评价还不尽相同.

最后，为帮助读者记住宇宙演化史的几个关键时期，我们很粗略地列出表 10-1.

应该说明，在关于宇宙演化过程的上述描述中，我们对 $t = 1\text{s}$ 以后的认识可以说是相当可靠的，然而对 $t < 1\text{s}$ 的早期宇宙的描述却没有如此高的可信度，因为那个时期留下的任何“化石”都含有不确定因素.

10.3.2 暗物质

RW 度规只存在 $k = 1$，$k = 0$ 和 $k = -1$ 三种可能性，前者为封闭宇宙，后两者为开放宇宙. 我们的宇宙到底是三种中的哪一种？是封闭的还是开放的？答案当然与天文观测密切相关. 本小节介绍某些理论讨论和天文观测结果.

由 $H \equiv \dot{a}/a$ 和式(10-2-16)得 $H^2 = 8\pi\rho/3 - k/a^2$，补上物理常数 G 和 c (补法见附录 A)则为

$$H^2 = 8\pi G\rho/3 - kc^2/a^2 . \tag{10-3-8}$$

定义**临界密度**(critical density)

$$\rho_{\text{C}} := 3H^2/8\pi G , \tag{10-3-9}$$

则

$$\rho = \rho_{\text{C}} + 3kc^2/8\pi G a^2 . \tag{10-3-10}$$

表 10-1 宇宙演化大事记

t	T	kT	要 点
0.01s	10^{11}K	10MeV	大量 ν (及 $\bar{\nu}$)，γ，(e, e^+)与少量 p, n 共处热平衡中
1s	10^{10}K	1MeV	ν (及 $\bar{\nu}$)退耦；大量 γ，(e, e^+)与少量 p，n 共处热平衡中
14s	3×10^{9}K	0.3MeV	(e, e^+)迅速湮灭
>100s	$<10^{9}$K	<0.1MeV	1. 原初核合成. 产物有 ^{4}He(占 1/4)，H(占 3/4)和微量的 ^{2}H，^{3}He，^{7}Li； 2. (e, e^+)全部湮灭，余少量电子以平衡质子电荷
10^5年	3000K	0.3eV	中性原子合成，光子退耦成背景辐射
10^9年			结构形成

可见$k=0$对应于$\rho=\rho_C$，$k=\pm1$对应于$\rho \gtrless \rho_C$. 就是说，若宇宙的质量密度ρ大于临界密度ρ_C，则为封闭宇宙($k=1$)，否则为开放宇宙. 对这一结论可做如下直观理解：大爆炸时各种粒子以高初速四散飞出，在引力作用下速率渐减. 如果引力够强，它们的速率会渐减至零并开始掉头加速，最终又聚到一起(对应于先膨胀后收缩的宇宙)；如果引力不足，它们虽然不断减速，却永不掉头(对应于永远膨胀的宇宙). 这好比从地面发射的火箭，在初速小于某临界值时最终要掉头加速落地，否则一去不返. 引力的强弱取决于宇宙的质量密度ρ，因此可以预期存在一个临界值ρ_C，当且仅当$\rho>\rho_C$时为封闭宇宙. 定义密度参数

$$\Omega := \rho/\rho_C\,, \tag{10-3-11}$$

则Ω可理解为以ρ_C为单位的密度，故可说当且仅当$\Omega>1$时为封闭宇宙. 但应注意ρ_C本身也是t的函数. 由式(10-3-11)和(10-3-9)知Ω可表为

$$\Omega = 8\pi G\rho/3H^2\,. \tag{10-3-12}$$

若能测得哈勃参数及质量密度的当今值 H_0 和ρ_0，由上式便可判断宇宙是否封闭. 暂时假定星系是宇宙内容物的主要存在形式. 设星系的当今数密度为 n，星系的平均质量为$\bar{M}$，则$\rho_0=n\bar{M}$. 设宇宙空间中单位体积的光度为$\mathscr{L}$(称为**光度密度**，即 luminosity density)，星系的平均光度为$\bar{L}$，则$\mathscr{L}=n\bar{L}$，代入式$\rho_0=n\bar{M}$得

$$\rho_0 = \mathscr{L}\bar{M}/\bar{L}\,, \tag{10-3-13}$$

其中$\bar{M}/\bar{L}$叫星系的**平均质光比**(average mass-to-light ratio). 以ρ_{0C}和Ω_0分别代表ρ_C和Ω的当今值，则

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{C0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^{\,2}}\mathscr{L}\frac{\bar{M}}{\bar{L}}\,, \tag{10-3-14}$$

其中第二步用到式(10-3-9)和(10-3-13). $\mathscr{L}$已有较可靠的观测值. 把$\mathscr{L}$和H_0的观测值代入上式便可得到Ω_0与平均质光比$\bar{M}/\bar{L}$的关系. 实际测量是对星系进行的，测得的只是该星系的质光比M/L,只有当星系有相当代表性时以M/L作为$\bar{M}/\bar{L}$代入式(10-3-14)才能给出较好结果. 不同星系的质量差别很大(可差到好几个量级)，而质光比的差别则小得多. 这是用式(10-3-14)代替式(10-3-12) (用于 $t=t_0$)的一个优点. 下面介绍测量旋涡星系(spiral galaxy，如银河系)质量的动力学方法(利用质量的引力效应). 在旋涡星系中，恒星除无规运动外还有以星系的引力为向心力的绕星系中心的转动(轨道运动). 为简化讨论，设星系有球对称性. 由牛顿引力论知

$$v^2(r) = GM(r)/r\,, \tag{10-3-15}$$

其中$v(r)$是离中心为r处的恒星的轨道运动速率，$M(r)$是星系在半径r以内的质量. $v(r)$曲线称为星系的**转动曲线**(rotation curve)，许多星系的转动曲线都已被测

出. 以 R 代表星系光度消失处的 r, 则 $M(R)$代表星系的发光物质的质量. 以这样测得的质光比代入式(10-3-14)便得到发光物质对 Ω_0 的贡献

$$\Omega_0(\text{发光物质})<1\% \quad (\text{倾向于 } 0.5\%). \tag{10-3-16}$$

这表明发光物质贡献的质量密度还不到临界密度的百分之一, 然而 $M(R)$远不能代表星系的全部质量. 如果 $r=R$ 外没有质量, 则由式(10-3-15)可知 $v(r)$ 曲线应从 $r=R$ 开始按 $r^{-1/2}$ 的规律下降. 然而大量旋涡星系的转动曲线呈现如下共性: 先从星系中心陡然升起, 然后近似地水平延伸, 直至 R 以外很远处无法测量为止,[①] 如图 10-12 所示. 这表明旋涡星系在发光部分之外有一个半径比 R 大得多的球状"暗晕" ["dark halo" , 由不发光的**暗物质**(dark matter)组成.], 其质量约为发光部分的 3~10 倍. 除旋涡星系外还有其他星系, 例如椭圆星系. 有证据表明椭圆星系也有数量可观的暗物质.

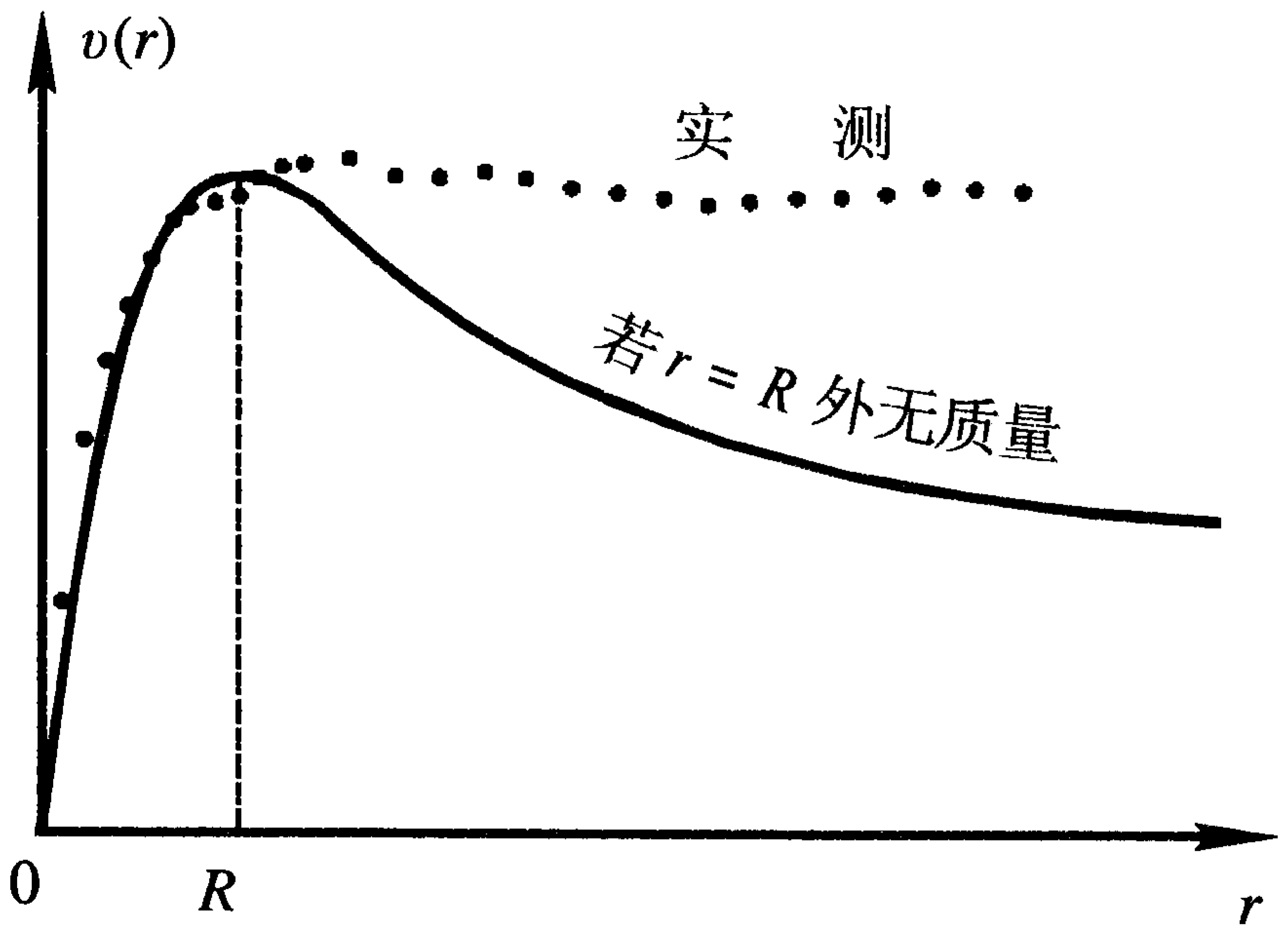


图 10-12 星系的转动曲线(示意)

鉴于星系同星系之间存在大量空间, 其中很可能有大量物质, 人们还用类似的动力学方法对星系团做过测量[假定维里定理成立, 则有类似于式(10-3-15)的公式.]. 结果为

$$\Omega_0(\text{星系团})\cong 10\,\% \sim 30\,\% \,. \tag{10-3-17}$$

这就证实星系团中除星系外还有大量暗物质. 由于上式的得出依赖于某些尚未完全证实的假设, 更由于宇宙中只有大约 5%的星系存在于大的星系团中, 我们还不能肯定宇宙的 Ω_0 可由式(10-3-17)表示(虽然还有不少旁证), 但至少可以肯定宇宙中的暗物质在质量上大大超过发光物质. 暗物质的存在本来不值得惊讶, 人们很容易举出暗物质的例子: 行星、暗淡的小恒星、白矮星、中子星、黑洞、瓦解了的星系以及星际和星系际稀薄气体……它们都由重子(主要是质子和中子)组成. 然而原初核合成理论对当今宇宙重子物质的质量密度给出如下限制:

$$\Omega_{b0}h^2 = 3.7\times 10^7\eta\,, \tag{10-3-18}$$

① 曲线的每一点是由对恒星或中性气云所发射线的频移测量得到的, 这些恒星和气云起到试探粒子的作用. 当 r 比 R 大到一定程度时就找不到试探粒子.

[其中 h 是以 $100\ \mathrm{km\cdot sec^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$ 为单位测量哈勃常量 H_0 所得的数(见 10.2.3 小节末)，$\eta \equiv n_\mathrm{b}/n_\gamma$.] 这就使问题变得复杂．先对上式给出推导．以 $n_{\mathrm{b}0}$ 代表当今重子(主要是核子)的数密度，$m_{核}$ 代表每个核子的质量，则当今重子物质的质量密度 $\rho_{\mathrm{b}0} = n_{\mathrm{b}0} m_{核}$，它对应的 $\Omega_{\mathrm{b}0} \equiv \rho_{\mathrm{b}0}/\rho_{\mathrm{C}0}$ 可由式(10-3-9)求得

$$\Omega_{\mathrm{b}0} = \frac{n_{\mathrm{b}0} m_{核}}{3H_0^{\ 2}/8\pi G}. \tag{10-3-19}$$

或

$$\Omega_{\mathrm{b}0} H_0^{\ 2} = 8\pi G m_{核} n_{\mathrm{b}0}/3 = 8\pi G m_{核} n_{\gamma 0} \eta/3, \tag{10-3-20}$$

其中 $n_{\gamma 0}$ 代表当今宇宙的光子数密度，可由微波背景辐射公式(10-3-6)求得．该式的 $\mathrm{d}u$ 是波长在 $(\lambda, \lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 范围内的背景光子能量密度，而在此波长范围内的每一光子的能量为 $E = hc/\lambda$，所以此波长范围内的光子数密度为

$$\mathrm{d}n_\gamma = \frac{\mathrm{d}u}{E} = \frac{8\pi}{\lambda^4}(\mathrm{e}^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1}\mathrm{d}\lambda, \tag{10-3-21}$$

积分上式便得到包括各种波长的光子在内的数密度

$$n_\gamma = \int_0^\infty \frac{8\pi}{\lambda^4}(\mathrm{e}^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1}\mathrm{d}\lambda = 2\times 10^7\, T^3 \quad 个/\mathrm{m}^3. \tag{10-3-22}$$

以当今背景辐射温度 $T \cong 2.728\ \mathrm{K}$ 代入上式得

$$n_{\gamma 0} \cong 4.1\times 10^8 \quad 个/\mathrm{m}^3, \tag{10-3-23}$$

以此 $n_{\gamma 0}$ 值和 G，$m_{核}$ 在国际制的数值代入式(10-3-20)右边；把式(10-2-32)的 H_0 改用国际制单位表示(即 $H_0 = 3.2\times 10^{-18} h$)并代入式(10-3-20)左边，便得式(10-3-18)．该式含有来自 h 和 η 的双重不确定性，把 $3.4\times 10^{-10} < \eta < 5\times 10^{-10}$，$0.5 < h < 0.7$ 代入式(10-3-18)得

$$2.3\,\% < \Omega_{\mathrm{b}0} < 5.1\,\%. \tag{10-3-24}$$

上式带来两方面问题．一方面，把 $2.3\,\% < \Omega_{\mathrm{b}0}$ 与 Ω_0(发光物质)$\cong 0.5\,\%$ 对比可知由重子组成的物质中只有一小部分发光，因而肯定存在大量的重子暗物质．天文学家的任务是要为这些暗物质的“栖身之地”开出清单，这方面的观测已有不少成果，还有待进一步深入进行．另一方面，把 $\Omega_{\mathrm{b}0} < 5.1\,\%$ 与式(10-3-17)对比则会发现宇宙中的暗物质的大部分由非重子组成．虽然把式(10-3-17)推广到全宇宙的可靠性还有待进一步研究，但已有多方面旁证，因此至少应该严肃对待非重子暗物质问题．何况不考虑非重子暗物质的结构形成理论必然失败(见 10.3.1 小节末)的结论也已表明非重子暗物质的非常重要性．但是，非重子暗物质远不如重子暗物质容易想像．对非重子暗物质的候选者的探究已成为当代热门课题，而且方兴未艾．为了构成对 Ω_0 的贡献，非重子暗物质大约应为稳定(或寿命很长)的非重子粒子．背景光子数量虽大，但因静质量为零，对 Ω_0 的贡献微不足道．中微子如果

有静质量的话，将是很明显的候选者. 从 1997 年起人们开始倾向于相信至少某些中微子有静质量(约 0.1eV)，这些中微子(作为非重子热暗物质，“热”是指高速运动.)对 Ω_0 的贡献约为 0.3%~15%. 进一步的候选者涉及理论虽有预言、目前尚未观测到的有静质量的非重子粒子，它们曾活跃于温度甚高的极早期宇宙并随温度下降而退耦，其中稳定的或寿命很长的粒子还应作为背景遗迹留存至今(冷暗物质，“冷”是指粒子以低速运动.).

如果认为式(10-3-17)代表宇宙中所有物质(包括可视物质和暗物质)对 Ω_0 的贡献，就应得出宇宙远非封闭的结论. 然而，1981 年提出的暴涨模型(详见§10.4)认为 Ω_0 很有可能非常接近于(甚至等于)1，某些测量和分析也支持这一数值. 现在暴涨模型已被广泛接受，如何协调 $\Omega_0 \cong 1$ 和式(10-3-17)? 在 1998 年之前，为了同 $\Omega_0 \cong 1$ 不矛盾，一般认为星系(团)的分布远不能代表宇宙中物质分布的全貌，除了与星系(团)相伴随的成团物质外，还可能有约 80%的物质比较不成团地、甚至是光滑地分布于宇宙之中. 请注意，我们的讨论至今一直采用无 Λ 项的爱因斯坦方程. 由于对宇宙常数 Λ 值的测量在 1998 年取得重要进展，人们相信应该从有 Λ 项的爱因斯坦方程出发讨论宇宙学问题，与无 Λ 项的爱因斯坦方程的主要区别在于 Ω_0 除包括来自物质(含可视物质、重子暗物质和非重子暗物质)的贡献 Ω_{M0} 外还包括来自宇宙常数 Λ 的贡献 Ω_Λ，而且倾向于相信前、后者的贡献大致上为“三七开”，合效应是 $\Omega_0 \cong 1$. 详见 10.3.3 小节. ①

此外，正如 10.3.1 小节末所指出的，暗物质(尤其是冷暗物质)的研究对结构形成理论也有重大意义. 不考虑暗物质的任何结构形成理论都逃脱不了失败的命运.

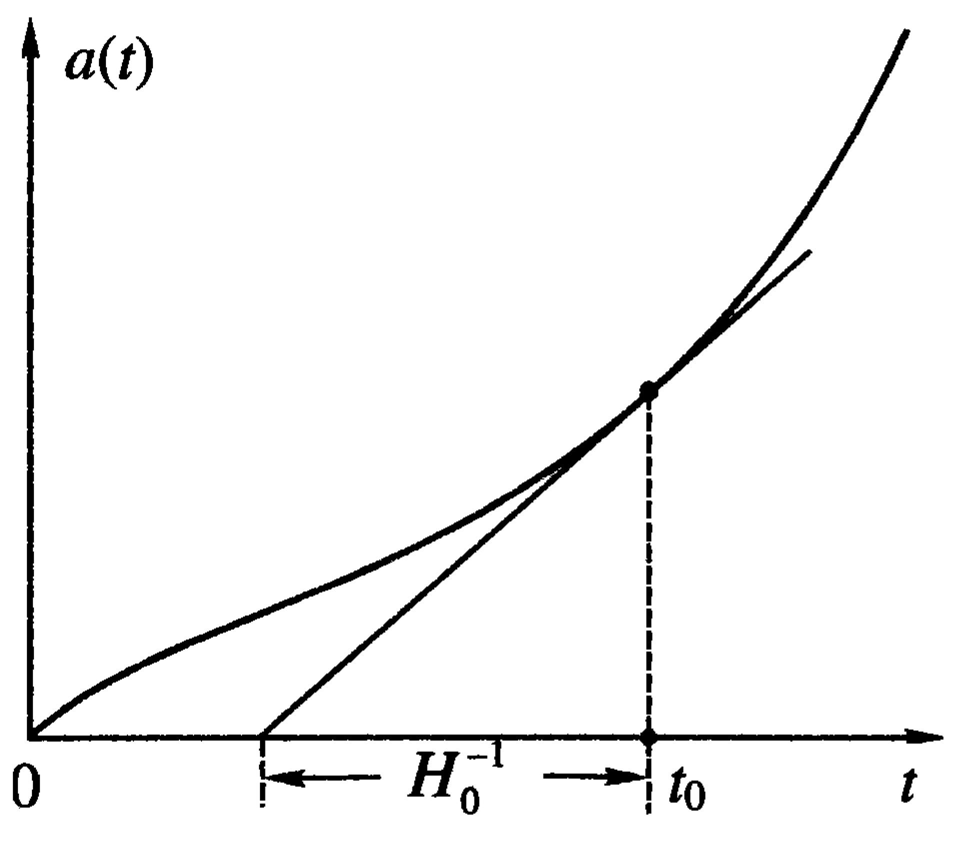


图 10-13 $\Lambda > 0$ 模型的 $a(t)$ 曲线. 宇宙年龄 $t_0 > H_0^{-1}$

10.3.3 宇宙学常数问题

自从爱因斯坦在 1917 年首次引入宇宙常数项后，Λ 的必要性在历史上曾经几起几落，数度浮沉. 虽然爱因斯坦从 1923 年起就放弃 Λ，但是直至 20 世纪 50 年代末它仍然受到许多人的青睐，原因之一是哈勃对 H_0 的早期测量结果严重偏大，而 $\Lambda > 0$ 的存在可使过大的 H_0 不导致过小的宇宙年龄. 下面定性说明个中原委. 由式(10-2-35)可知 Λ 的存在相当于宇宙多了一个“能动张量” $-\Lambda g_{ab}/8\pi$，与理想流体能动张量

① 1988 年的重要进展是发现当今宇宙正在加速膨胀. 当时把它与存在 Λ 项等同看待. 然而用 Λ 项解释加速膨胀也存在重大困难，于是又出现其他解释. 加速膨胀的形成机制已成为当今宇宙论乃至整个基本物理学的一个重大疑难问题，称为“暗能量”问题，见§10.5.

$$T_{ab}=(\rho+p)U_aU_b+pg_{ab}$$

对比可知它相当于一个满足物态方程 $-\rho=p=-\Lambda/8\pi$ 的“理想流体”．如果只有它的贡献，则式(10-2-18)成为 $3\ddot{a}=a\Lambda$，对 $\Lambda>0$ 就有 $\ddot{a}>0$．可见，与物质场相反，正的宇宙常数 Λ 使宇宙的膨胀加速，它所起到的不是引力作用而是斥力作用．在宇宙的早期，物质的能量密度 ρ 很大，引力超过斥力，膨胀是减速的．ρ 随宇宙膨胀而变小，小到引力与斥力平衡时(注意，Λ 不变)膨胀匀速进行．ρ 的进一步减小则导致引力小于斥力，于是宇宙加速膨胀．选择适当模型可使当今宇宙处于加速膨胀阶段，因此测得的 H_0^{-1} 不是大于 t_0 而是小于 t_0 (见图 10-13)．年龄矛盾靠正的宇宙常数 Λ 有望解决或得以缓和．

然而情况到了 20 世纪 50 年代末又开始出现转机．一方面，H_0 的新测量值降至哈勃当年测得值的约 1/8；另一方面，近代恒星理论的建立又使恒星年龄比 20 世纪 30 年代的估计小了很多，于是 20 世纪 30 年代的年龄矛盾不复存在，Λ 再次变得不再必需．此后，在经历了第 3 个浮沉(略)之后的今天，Λ 的必要性却又一次摆在我们面前．关键之一在于近代物理发现“真空不空”：根据量子场论，处于真空态的场仍有很大的能量密度，叫做**真空能量密度**(vacuum energy density)，记作 ρ_{vac}，ρ_{vac} 的主要来源之一是各种已知场(例如电子场)的真空涨落(虚的正反粒子对的不断产生和湮灭)，其对 ρ_{vac} 的贡献以复杂的方式依赖于所有已知粒子的质量和相互作用强度．真空定义为量子场的基态，是能量取最低值(而非零值)的状态．由基态的洛伦兹不变性(对任何观者都一样，因而不存在一个特殊的 U^a)可知真空的能动张量只能取如下形式

$$(T_{ab})_{vac}=-\rho_{vac}g_{ab}, \tag{10-3-25}$$

其中 ρ_{vac} 为常数．所以真空可看作一种特殊的理想流体，其压强 p_{vac} 和固有能量密度 ρ_{vac} 都是常数，而且满足如下的物态方程

$$p_{vac}=-\rho_{vac}. \tag{10-3-26}$$

这一物态方程亦可通过如下思考得以印证：考虑一个体积为 V 的正在绝热膨胀(或压缩)的真空容器，由热力学第一定律可知其内能的变化 $d(\rho_{vac}V)=\rho_{vac}dV$ 等于其压强所做的功 $-p_{vac}dV$，因而 $p_{vac}=-\rho_{vac}$．在不涉及引力的物理学中，ρ_{vac} 不会带来任何测量效应．系统能量的测量只能通过测定它在某过程中的能量差(或测定两系统的能量差)来进行，因此能量可看作某种“相对量”，即相对于某一基准而言的量．通常总以真空作为测定能量的基准，这等价于把真空的能量规定为零．然而，在涉及引力时情况有根本性改变：爱因斯坦方程认定一切能量密度(ρ_{vac} 也不例外)都是时空弯曲的根源，用于宇宙这个时空，则 ρ_{vac} 有其“绝对”意义：它的非零性导致宇宙时空的弯曲，这种“绝对性”的后果是不能采用把真空选为能量

基准来消除 ρ_{vac} 的影响. 因此在宇宙论中 ρ_{vac} 的非零问题必须认真对待. 通常把真空涨落的贡献等价地看作一个宇宙常数项的贡献，即认为爱因斯坦方程中存在 $\Lambda \equiv 8\pi\rho_{\text{vac}}$ 的宇宙常数项，于是宇宙常数问题再度回归. 下面估算 ρ_{vac} 的量级. 先考虑质量为 m 的粒子在势场 $V = Kx^2/2$ 中的运动(谐振子). 按照经典物理学，当粒子静止于 $x=0$ 处时动能、势能都为零，因而总能为零. 这一状态称为基态. 然而，在量子力学中情况有所不同：不确定原理屏除了粒子(波函数)既有确定位置(比如 $x=0$)又有确定速度(比如为零)的可能性，其结果是谐振子的基态能量取非零值 $E_0 = \hbar\omega/2$(其中 $\omega = k/m$ 为角频率)，称为**零点能**. 现在进而考虑量子场论. 一个相对论量子场可看作具有各种可能频率的谐振子的集合体. 以最简单的标量场为例，当它处于真空态时，它的零点能取如下非零值

$$E_0 = \sum_i \frac{1}{2}\hbar\omega_i\,, \tag{10-3-27}$$

其中取和遍及所有可能的 3 波矢 $\vec{k}$. 为求 E_0 可把系统放在体积为 L^3 的方盒内对 $\hbar\omega_i/2$ 取和，然后令 L 趋于 ∞. 加上周期性边界条件，令第 i 个模式的波长为 $\lambda_i = L/n_i$(其中 n_i 为整数)，注意到 $k_i = 2\pi/\lambda_i$，可知处于 $(k_i, k_i + \mathrm{d}k_i)$ 范围内的 k_i 的分立值共有 $L\,\mathrm{d}k_i/2\pi$ 个. 于是式(10-3-27)可改写为

$$E_0 = \frac{\hbar L^3}{2(2\pi)^3}\int \omega_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3\vec{k} = \frac{\hbar L^3}{2(2\pi)^3}\int \sqrt{k^2 + m^2/\hbar^2}\;\mathrm{d}^3\vec{k}\,, \tag{10-3-28}$$

其中用到 $\omega_{\vec{k}}^{\,2} = k^2 + m^2/\hbar^2$. 上式两边同除以 L^3 并令 $L \to \infty$ 便得基态(真空)能量密度

$$\rho_{\text{vac}} \equiv \lim_{L\to\infty}\frac{E_0}{L^3} = \frac{\hbar}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\sqrt{k^2 + m^2/\hbar^2}\;k^2\mathrm{d}k\,. \tag{10-3-29}$$

这一积分显然发散，因为它包含这么一项，该项在 $k \to \infty$ 时以 k^4 的方式趋于无限(紫外发散). 把积分上限取至 $k = \infty$ 意味着承认上述场论对任意高能情况适用，然而，事实上当能量(因而 k)超过某值(以 $k_{\max}$ 代表)时上述场论失效，因此计算 ρ_{vac} 时应该来个高能截断，其结果为

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\hbar}{4\pi^2}\int_0^{k_{\max}}\sqrt{k^2 + m^2/\hbar^2}\;k^2\mathrm{d}k = \hbar\frac{k_{\max}^{\;4}}{16\pi^2}\,. \tag{10-3-30}$$

通常认为普朗克能量 $E_{\text{P}} \sim 10^{19}\,\text{GeV}$ 相应的 k 可取作 $k_{\max}$，即 $k_{\max} = E_{\text{P}}\hbar^{-1}$，故上式可改写为 $\rho_{\text{vac}} \sim E_{\text{P}}^{\;4}/16\pi^2\hbar^3$. 由量纲考虑可知真空质量密度(仍记作 ρ_{vac})在国际制的公式为

$$\rho_{\text{vac}} \sim E_{\text{P}}^{\;4}/16\pi^2\hbar^3c^5 \quad (\text{转换法则见附录 A})\,, \tag{10-3-30$'$}$$

而 $E_{\text{P}} \sim 10^{19}\,\text{GeV}$ 相当于 $E_{\text{P}} \sim 1.6\times 10^9\,\text{J}$，代入上式得

$$\rho_{\text{vac}} \sim 10^{94}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3} . \tag{10-3-31}$$

不可思议的是，天文学家用多种测量手段得到的 Λ 上限竟然只有上式给出的 $8\pi\rho_{\text{vac}}$ 的 10^{-120} 倍！一种貌似可行的补救措施是假定爱因斯坦方程在考虑 ρ_{vac} 的贡献前就已存在一个宇宙常数[称为“裸”（“bare”）宇宙常数]，它与 $8\pi\rho_{\text{vac}}$ 之和恰好为零. 然而，宇宙中存在种类繁多的量子场(粒子)，每种场对 ρ_{vac} 提供不尽相同的贡献，它们之间的相互作用也对 ρ_{vac} 有所贡献，很难相信所有这些贡献的总和竟然如此凑巧地与“裸” Λ 的贡献恰相抵消. 虽然许多学者提出过许多解决矛盾的方案，但人们普遍认为问题尚未解决. 这就是存在了 30 多年之久的著名的宇宙常数问题. 这可以称为**物理学家的宇宙常数问题**. 天文学家则更为关心如何用观测确定非零的 Λ 项是否果真存在. Λ 的存在对宇宙的演化应有影响. 在爱因斯坦方程中添加 Λ 项后，方程(10-2-16)和(10-2-17)相应改为

$$3(\dot{a}^2+k)/a^2 = 8\pi\rho + \Lambda , \tag{10-3-32}$$

$$2\ddot{a}/a + (\dot{a}^2+k)/a^2 = -8\pi p + \Lambda , \tag{10-3-33}$$

把式(10-3-32)用于当今时刻 t_0 便有

$$H_0{}^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a_0{}^2} , \tag{10-3-34}$$

仿照 Ω_0 的定义方式，定义

$$\Omega_{\Lambda 0} := \Lambda / 3H_0{}^2 , \tag{10-3-35}$$

则式(10-3-34)可改写为

$$1 = \Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda 0} - k/a_0{}^2 H_0{}^2 . \tag{10-3-36}$$

(Ω_{M0} 代表物质对 Ω_0 的贡献，注意当今辐射的贡献可忽略.) 应能通过观测回答如下问题：为了确保上式成立，是否需要一个非零的 $\Omega_{\Lambda 0}$？如果是，$\Omega_{\Lambda 0}$ 应为何值？这就是**天文学家的宇宙常数问题**. 宇宙演化的速度 $\dot{a}$ 和加速度 $\ddot{a}$ 取决于代表引力的 Ω_M 和代表斥力的 Ω_Λ 的力量对比. 天文学家早已习惯于对减速度 $-\ddot{a}$ 做无量纲化处理，他们关心的是如下定义的(无量纲)**减速参量**(deceleration parameter)的当今值

$$q_0 := -\left(\frac{a}{\dot{a}^2}\ddot{a}\right)_{t_0} . \tag{10-3-37}$$

考虑到当今的 $\rho + 3p \cong \rho$，把式(10-3-32)、(10-3-33)的当今值(并取 $p=0$)代入式(10-3-37)得

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda 0} . \tag{10-3-38}$$

上式直观地反映“Ω_{M0} 导致减速、正的 $\Omega_{\Lambda 0}$ 导致加速”的事实. 对 q_0 的直接测量

已有数十年的历史. 关键困难之一是如何选择适当的测量对象(距离指示物). 成团的星系曾被用作测量对象，但存在缺点——它们自身的演化给测量带来不确定因素. 我们需要的是对演化不敏感的距离指示物. 后来发现 Ia 型(亦记作 1a 型)超新星(type Ia supernova)可以充当理想的距离指示物，以此为对象的测量已成为近年来的活跃研究课题，新的结果不断涌现. 1998 年开始发表的对大批高红移 Ia 型超新星的观测结果[例如 Riess et al.(1998); Perlmutter et al.(1999)]尤其令人瞩目，在国际上引起强烈反响. 这些结果以很高的置信度表明：①宇宙常数 Λ 非零，而且为正；②当今宇宙正在加速(而不像过去以为的减速)膨胀($\Omega_{\Lambda 0}$ 的影响超过 $\Omega_{M0}/2$ 的影响，导致减速参量 $q_0<0$.). 更有甚者，把这些结果与微波背景辐射的非各向同性度的观测结果相结合还进一步给出如下定量结果：

$$\Omega_{M0}=0.25^{+0.18}_{-0.12}, \qquad \Omega_{\Lambda 0}=0.63^{+0.17}_{-0.23}, \tag{10-3-39}$$

这表明：① $\Omega_{M0}+\Omega_{\Lambda 0}\cong 1$，因而[根据式(10-3-36)] $k\cong 0$，即当今宇宙接近平直，与 § 10.4 要讲的暴涨模型的预言一致；② $\Omega_{\Lambda 0}$ 非但不是可有可无，而且占主导地位，Ω_{M0} 与 $\Omega_{\Lambda 0}$ 的比例大致是“三七开”. 虽然以上结果在当时还不是完全肯定的，但已引起了国际性的高度重视. 有人甚至认为 1998 年发现宇宙正在加速膨胀是 20 世纪最重要的发现之一. §10.5 还将进一步介绍由这一加速膨胀带来的“暗能量”问题.

上述结果还取得如下的侧面支持：虽然冷暗物质(CDM)模型是结构形成理论中最成功的模型，但基于 $\Omega_{M0}=1$ 的 CDM 模型不能与观测结果定量吻合. 反之，基于 $\Omega_{M0}\cong 0.3$，$\Omega_{\Lambda 0}\cong 0.7$ 的 ΛCDM 模型(加 Λ 表示考虑 Λ)却与观测结果吻合得很好.

$\Omega_{\Lambda 0}$ 约占 $\Omega_{M0}+\Omega_{\Lambda 0}$ 中的七成，在这个意义上可说它对应于一个大的宇宙常数 Λ (大到从前一直未曾相信过的程度). 然而，拿这个 Λ 同 $8\pi\rho_{vac}$ 相比，则仍有 $\Lambda/8\pi\rho_{vac}\sim 10^{-120}$，在这个意义上又可说 Λ 是离奇地小. 虽然小，却又偏偏不为零，这就(至少在某种意义上说)使物理学家的宇宙常数问题难上加难. 有些物理学家曾经相信在超对称理论中费米子与玻色子的真空能量密度由于等值异号而精确抵消，从而“解释了”过去关于 $\Omega_{\Lambda 0}\cong 0$ 的观测事实. 然而现在却要说明它们并不绝对抵消，在基本抵消后还留有“小尾巴”($\Omega_{\Lambda 0}\cong 0.7$)，其量级只有抵消前的 10^{-120} 倍. 一种怎样的物理机制能起到如此微妙的作用?

本节主要参考文献：Carroll et al.(1992)；Sahni et al. (1999)；Turner(1999).

§ 10.4 标准模型的疑难和克服

10.4.1 粒子视界

为介绍第一个疑难，先讲解粒子视界的概念.

设 p 是各向同性观者 G 的世界线上的一点. 问：是否存在这样的粒子(各向同性观者，下同.)，它在任一时刻所发的光信号都不与 G 交于 p？由于宇宙起源于大爆炸奇点，初学者往往会想像如图 10-14 那样的时空图，从而得出否定答案. 然而图 10-14 以及上述否定答案都是错的. 以最简单的情况(b)($k=0$)为例，这时 RW 线元为

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)\,. \qquad (10\text{-}4\text{-}1)$$

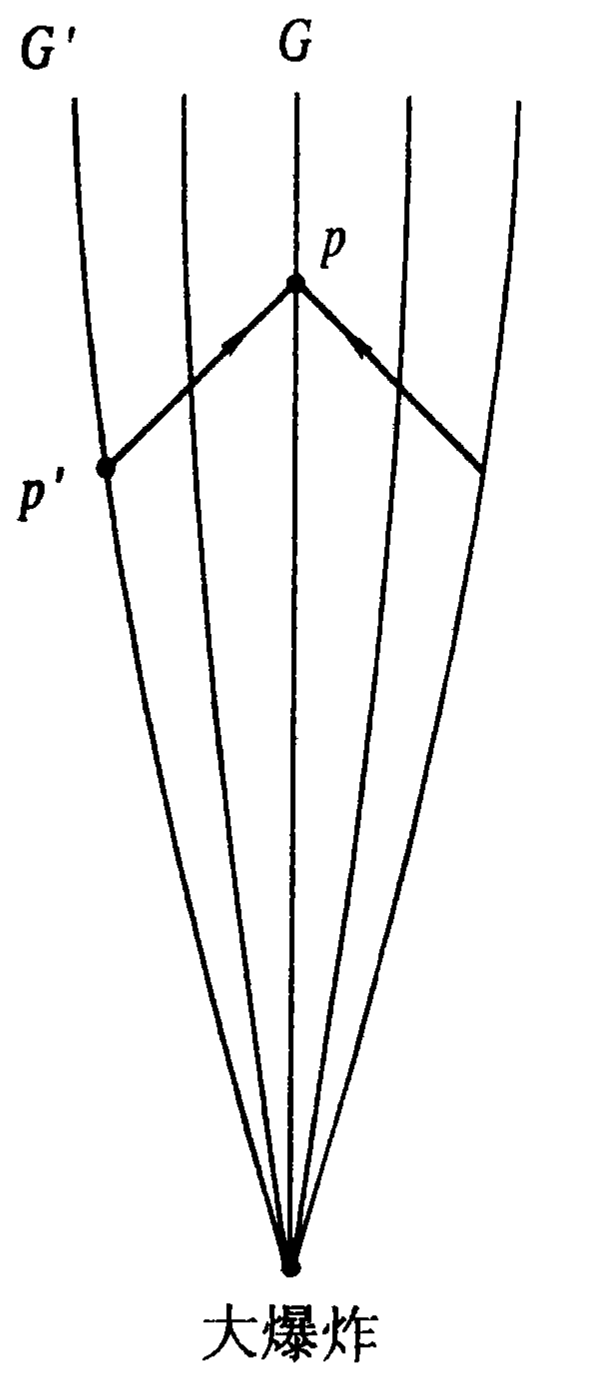


图 10-14 根据此图，任一粒子世界线上总有一点(例如 G' 上的 p')，它发出的类光测地线可到 p 点. 可惜**此图是错的**

引入新坐标

$$\hat{t}(t)\equiv\int_0^t dt'/a(t')\,, \qquad (10\text{-}4\text{-}2)$$

则
$$ds^2=a^2(\hat{t})(-d\hat{t}^2+dx^2+dy^2+dz^2)\,. \qquad (10\text{-}4\text{-}3)$$

上式与闵氏线元只差一个正的因子 $a^2(\hat{t})$. 以 η_{ab} 和 g_{ab} 分别代表闵氏度规和式(10-4-3)的度规，则 $g_{ab}=a^2\eta_{ab}$. 在微分几何中，若一个度规场等于另一度规场乘以一个处处为正的函数，就说这两个度规场有共形联系(详见下册 § 12.1)，因此 g_{ab} 同 η_{ab} 有共形联系. 又因 η_{ab} 为平直度规，故 g_{ab} 称为共形平直度规. 由于 $g_{ab}=a^2\eta_{ab}$，任一矢量 v^a 用 g_{ab} 衡量是类时的($g_{ab}v_a v_b<0$)当且仅当用 η_{ab} 衡量是类时的. 对类空和类光性也有类似结论. 再者，可以证明(见下册第 12 章)，一条类光曲线用 g_{ab} 衡量是测地线当且仅当用 η_{ab} 衡量是测地线(但对类空和类时曲线这结论不成立！). 因此，在只关心因果问题时，式(10-4-3)和闵氏线元给出同样结果. 上述问题就是一个应用实例. 但现在要特别注意新坐标 $\hat{t}$ 的取值范围. 把式(10-2-24b)和(10-2-29b)代入式(10-4-2)得

$$\hat{t}(t)\propto\begin{cases} t^{1/2}, & (\text{对辐射宇宙}) \\ t^{1/3}, & (\text{对物质宇宙}) \end{cases} \qquad (10\text{-}4\text{-}4)$$

由 t 的取值范围 $(0,\ \infty)$ 知 $\hat{t}$ 的取值范围为 $(0,\ \infty)$，由式(10-4-2)知 $t=0$ 时 $\hat{t}=0$. 注意到闵氏时空的惯性坐标时间 $\hat{t}$ 的取值范围为 $(-\infty,\ \infty)$，可知 $k=0$ 的 RW 时空只对应于“半个”闵氏时空(见图 10-15). 由图可知对 G 上一点 p 而言，的确存在粒

子G''，其世界线上任一点所发的光都不能到达p. 设Σ_p是过p的均匀面(p时刻的"全宇宙空间")，每一粒子的世界线与Σ_p的交点就代表该粒子在宇宙时刻t_p的表现. Σ_p可分为两个子集(见图10-16)，凡可被G在t_p时看见的粒子都属于子集1，否则属于子集2. 这两个子集的分界面(2维面)称为观者G在时刻p的**粒子视界**(particle horizon)，在不会混淆时可简称视界.① 以上只讨论了$k=0$的情况. 在a足够小时方程(10-2-16)中含k的一项可以忽略，既然$k=0$情况有视界，$k=\pm1$的情况在a足够小时也有视界. 在$k=+1$的情况下空间几何为3球面，空间体积在每一时刻都为有限值，因此还可提出如下有趣问题：对某一指定时刻t，在视界范围以内的体积(图10-16中的子集1)占该时刻全空间体积的百分之多少？对$k=+1$的物质宇宙的定量计算及结果见Kolb and Turner(1990)P.83. 此处只介绍一个关键结论：$k=+1$的物质宇宙膨胀至最大时粒子视界开始消失(此后任一时刻都不再有粒子视界). 然而，$k=+1$的辐射宇宙从大爆炸开始到大挤压为止都存在粒子视界，见习题8.

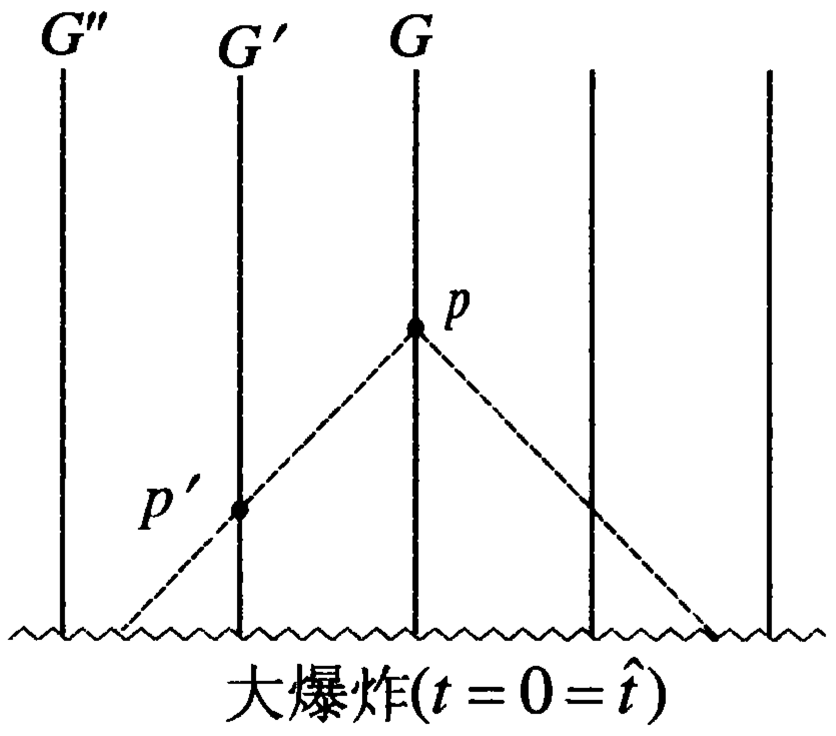


图10-15 $k=0$的RW时空的因果关系可用"半个"闵氏时空描述. 大爆炸奇点在图中表现为一张"水平面". 有些粒子(如G'')不能被G在p时看见

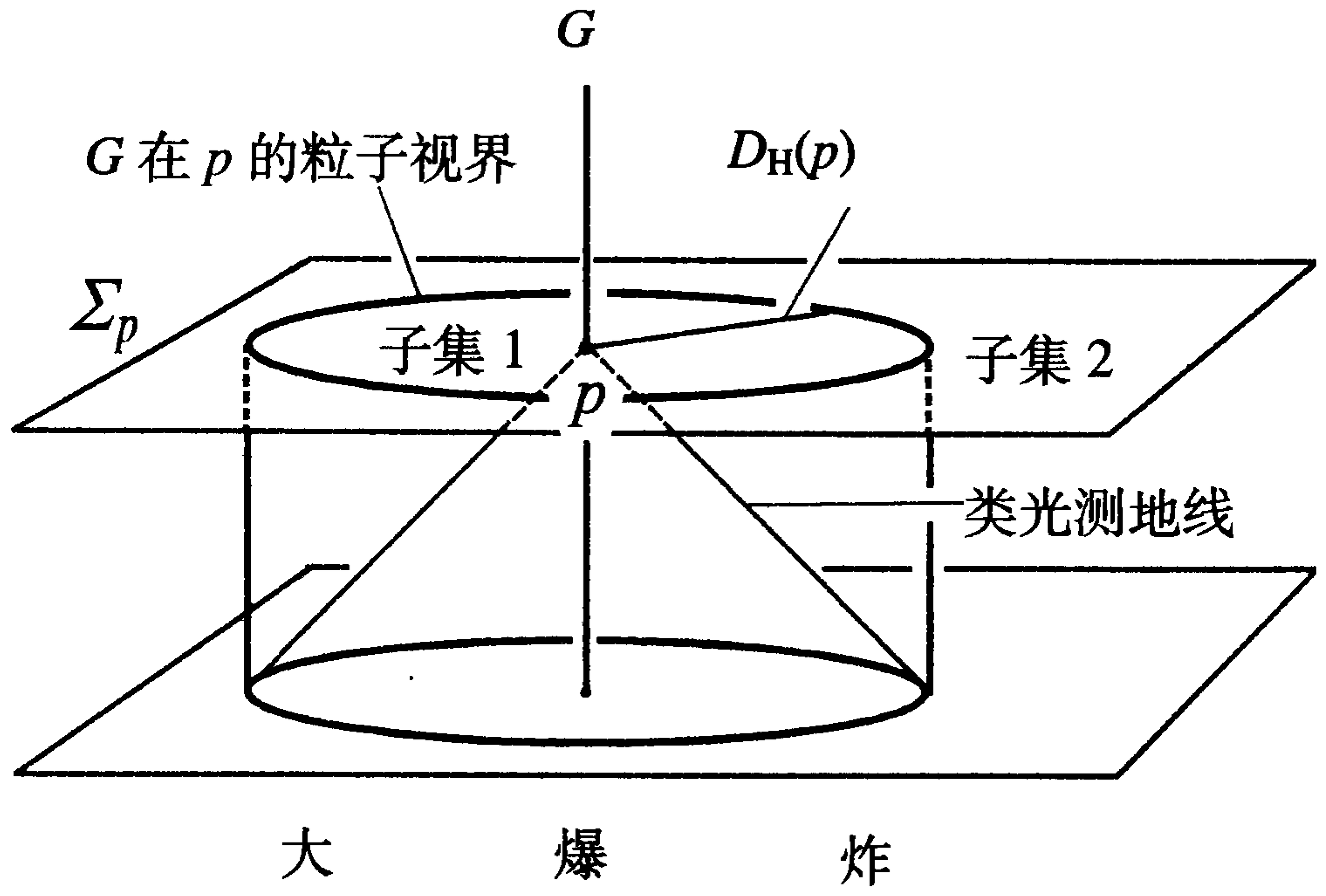


图10-16 G在p点的粒子视界是一个2维面. 视界内的粒子都可被G在时刻t_p看见

① 广义相对论中存在不止一种视界概念. 最常用的是事件视界，定义如下：设(M, g_{ab})是任一时空，G是其中的一个观者. 把M分为两个子集，凡可被G看见的事件(时空点)都属于子集1，否则属于子集2. 所谓"可被G看见"是指该点发出的指向未来的类光测地线中至少有一条与G的世界线相交. 两个子集的分界面(超曲面)称为**观者G的事件视界**(例如图9-14的H). 图9-13(a)的N_1是A区中任一静态观者的事件视界. 在宇宙论研究早期对视界的理解尚不清晰，致使文献中出现不少混淆. Rindler在1956年首先对此做了澄清. 正文关心的是不同于事件视界的粒子视界.

时刻 t_p 的粒子视界上任一点与 p 的距离 $D_{\mathrm{H}}(t_p)$ 叫**视界(固有)半径**或**视界距离**. 由式(10-1-28)和(10-2-6)不难证明(习题)

$$D_{\mathrm{H}}(t_p)=a(t_p)\int_0^{t_p}\mathrm{d}t/a(t)\,. \tag{10-4-5}$$

对 $k=0$ 的辐射宇宙和物质宇宙，由式(10-2-24b)和(10-2-29b)分别有 $a(t)\propto t^{1/2}$ 和 $a(t)\propto t^{2/3}$，代入上式积分并改写为国际制形式(补 c)得

$$D_{\mathrm{H}}(t)=2ct\quad(\text{对辐射宇宙}), \tag{10-4-6}$$

$$D_{\mathrm{H}}(t)=3ct\quad(\text{对物质宇宙}). \tag{10-4-7}$$

10.4.2 标准模型的疑难

标准模型在取得辉煌成功的同时也存在若干疑难. 这些疑难只涉及极早期宇宙，即大爆炸后远小于 1s 的时段. 我们重点介绍两个.

视界疑难　微波背景辐射的观测表明宇宙早在光子退耦时就非常均匀和各向同性. 对此的自然解释是此前各种粒子的频繁相互作用起到“充分自我搅拌”的作用. 然而粒子视界的存在却给这种解释带来严重困难. 由于当今宇宙存在粒子视界，我们在原则上能观测到(与观测手段的先进程度无关)的只是整个宇宙的一部分，称为**当今可观测宇宙**(the presently observable universe)或**当今可视宇宙**(the presently visible universe). 准确地说，以 $G_{银}$代表银河系观者(我们)，$D_{\mathrm{H}}(t_0)$ 代表 $G_{银}$在 t_0 时刻的视界距离，则在 t_0 时刻与 $G_{银}$的距离小于 $D_{\mathrm{H}}(t_0)$ 的所有各向同性观者(粒子)的世界线构成的时空子集就是 $G_{银}$的当今可观测宇宙，其当今半径自然等于 $D_{\mathrm{H}}(t_0)$. 讨论对象既然是当今可观测宇宙，谈及其半径时为何还要在前面加“当今”二字?这是因为宇宙在不断膨胀，当今可观测宇宙的半径(记作 $D_{今可观}$)是 t 的函数，应记作 $D_{今可观}(t)$[注意，$D_{今可观}(t)$并非 t 时刻的可观测宇宙的半径，而是当今可观测宇宙在 t 时刻的半径.]，只有它的当今值 $D_{今可观}(t_0)$才等于 $D_{\mathrm{H}}(t_0)$ (见图 10-17). 此值可借式(10-4-7)大致估出：

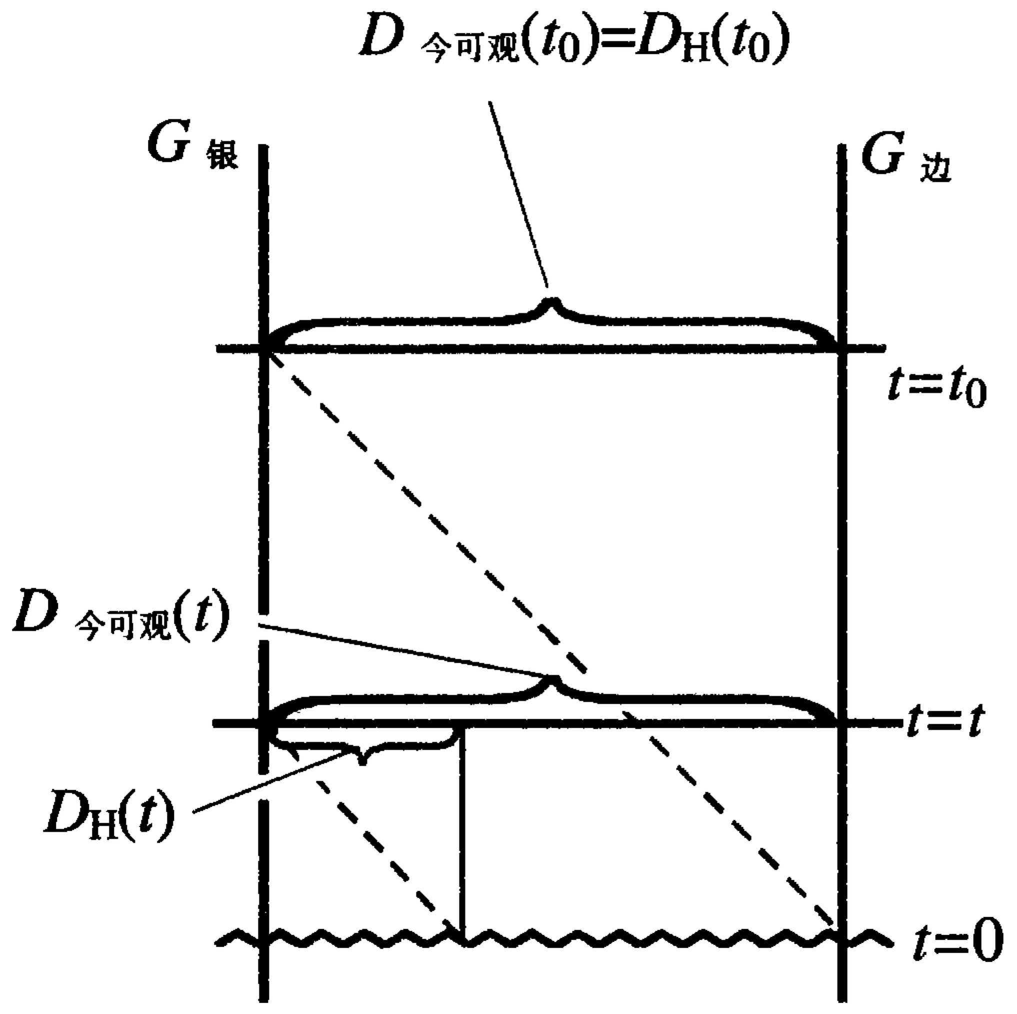


图 10-17　当今可观测宇宙的半径 $D_{今可观}$是 t 的函数，其当今值 $D_{今可观}(t_0)\cong 3\times10^{26}\mathrm{m}$

$$D_{今可观}(t_0) = D_{\rm H}(t_0) \cong 3ct_0 \cong 3\times(3\times10^8)\times(3\times10^{17}) \cong 3\times10^{26}\ \text{m}\,.$$

随着时间往过去推移，$D_{今可观}(t)$ 和 $D_{\rm H}(t)$ (指 $G_{银}$在 t 时刻的视界距离)都在缩小. $D_{今可观}(t)$可看作 $G_{银}$与当今可观测宇宙边缘的各向同性观者 $G_{边}$的空间距离，而任意两个各向同性观者之间的空间距离正比于 a[式(10-1-26)]，故

$$D_{今可观}(t) \propto a(t)\,. \tag{10-4-8}$$

光子退耦后成为独立体系，由式(10-3-7)可知背景辐射的温度T_γ与 a 成反比，因而 $D_{今可观}(t)$与$T_\gamma(t)$ 成反比. 注意到光子退耦温度$T_\gamma(t_{\gamma\rm d}) \cong 4000\text{K}$ 以及当今背景辐射温度$T_\gamma(t_0) \cong 2.7\text{K}$，便得

$$D_{今可观}(t_{\gamma\rm d}) = D_{今可观}(t_0)\,T_\gamma(t_0)/T_\gamma(t_{\gamma\rm d}) \cong 3\times10^{26}\times2.7/4000 \cong 2\times10^{23}\ \text{m}\,.$$

另一方面，因$t_{\gamma\rm d} \cong 10^{13}\text{s}$，由式(10-4-6)可知当时的视界距离为

$$D_{\rm H}(t_{\gamma\rm d}) \cong 2\times(3\times10^8)\times10^{13} = 6\times10^{21}\ \text{m}\,,$$

说明当今可观测宇宙在光子退耦时的半径约为当时视界距离的 33 倍. 根据粒子视界的定义，某一时刻的空间中距离大于 $D_{\rm H}$ 的两个粒子必定不曾有过相互作用，因为其中任一粒子所发的任何信号在此时刻之前都不能到达另一粒子. 若要通过相互作用达到均匀和各向同性，除非当今可观测宇宙在$t_{\gamma\rm d}$前曾小于视界范围. 然而这是不可能的，因为由式(10-4-6)和(10-4-7)可知$D_{\rm H} \propto t$ 而由式(10-4-8)和(10-2-24b)或(10-2-29b)可粗略认为 $D_{今可观}(t) \propto t^{1/2}$ 或 $D_{今可观}(t) \propto t^{2/3}$，可见 $D_{今可观}(t) > D_{\rm H}(t)$ 的程度越是早期越是严重. 例如，在 $t = 10^{-43}\text{s}$ 时，由式(10-3-1)可知 $T(10^{-43}\text{s}) \cong 3\times10^{31}\text{K}$，由式(10-4-8)及粗略关系$T \propto a^{-1}$可知

$$D_{今可观}(10^{-43}\text{s}) = D_{今可观}(t_0)\ T(t_0)/T(10^{-43}\text{s}) \cong 3\times10^{26}\times2.7/3\times10^{31} \cong 3\times10^{-5}\text{m}\,,$$

而$t = 10^{-43}\text{s}$时的视界距离可由式(10-4-6)求得为

$$D_{\rm H}(10^{-43}\text{s}) = 2\times(3\times10^8)\times10^{-43} \cong 6\times10^{-35}\text{m}\,,$$

说明当今可观测宇宙在$t = 10^{-43}\text{s}$时的半径是视界距离的10^{29}倍! 以上讨论表明当今可观测宇宙在早期根本不可能充分“自我搅拌”(前面关于早期宇宙热平衡的讨论其实只适用于粒子视界以内). 这就是标准模型的**视界疑难**(horizon problem)，亦称**均匀性疑难**.

下面再介绍同微波背景辐射的观测有直接联系的对视界疑难的另一表述[见Guth(1983)；Blau and Guth(1987)]. 在测量微波背景辐射的各向同性时，发现两个背对背天线测得的等效温度在很高精度上相等. 这两个天线接收到的是光子退耦时$(t = t_{\gamma\rm d})$的两地(称为微波源 1 和 2)发来的辐射(见图 10-18). 设$D_{12}(t_{\gamma\rm d})$是$t_{\gamma\rm d}$时源 1 和 2 的固有距离，则上述测量结果表明宇宙在$t_{\gamma\rm d}$时至少在$D_{12}(t_{\gamma\rm d})$的尺度内是均匀的. 然而由计算(见选读 10-4-1)可知$t_{\gamma\rm d}$时的视界距离$D_{\rm H}(t_{\gamma\rm d})$只有$D_{12}(t_{\gamma\rm d})$

的 1/75，表明源 1 和 2 之间不可能有热接触．那么，它们怎么会有如此相同的温度呢? 或者说，怎么解释这种长程均匀性?

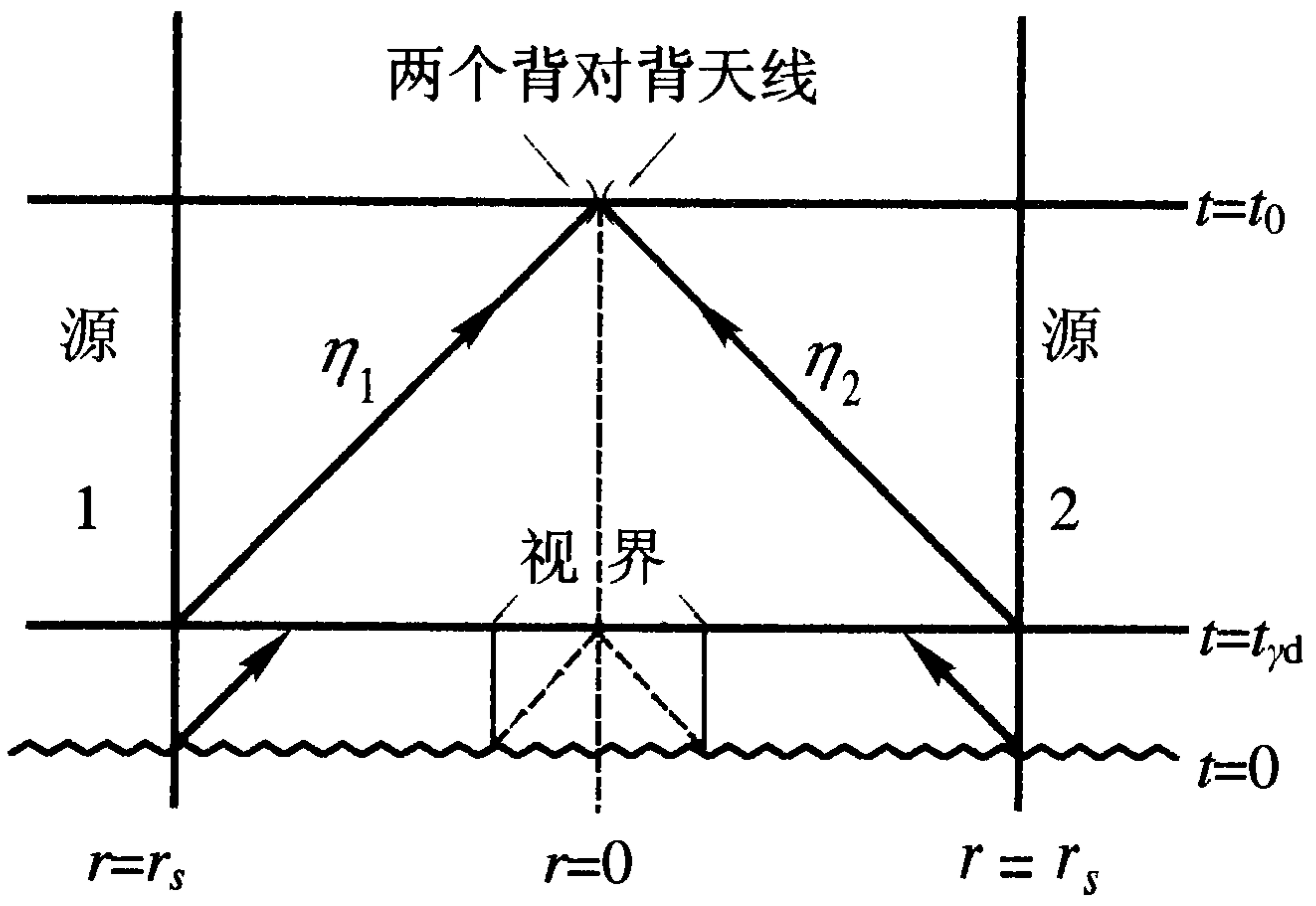


图 10-18 (示意图，不按比例) 两个背对背天线接收到的是光子退耦时($t=t_{\gamma d}$)从两地(源 1 和 2)发来的微波辐射．很难解释两天线测得的温度如此精确地相等，因为从源 1(或 2)发出的光在 $t_{\gamma d}$ 之前远未到达对方

除了可观测宇宙一词外，文献中还常出现**观测宇宙**(the observed Universe)的术语，这是指当今实际上已观测到的那部分宇宙．星系(及类星体)离我们越远，它们发来的光的红移 z 就越大，因此常用红移描述距离．天文学家测得的最远的星系(和类星体)的红移 z 早已达到 1 的量级(1999 年的文献给出了关于 $z=5$ 的类星体和 $z=6.68$ 的星系的测量结果)．仍用 $z=u$ 的近似(u 为该星系的退行速率)，与哈勃定律 $u=H_0D_0$ 结合便得 $D_0=zH_0^{-1}$，注意到 z 为 1 的量级，可知观测宇宙的大小 D_0 可由数值 H_0^{-1} 标志，其量级也是 10^{26}m [与可观测宇宙 $D_{今可观}(t_0)$量级相同，但应注意是两个不同概念.]．H_0^{-1} 称为**哈勃长度**(Hubble length)．利用选读 10-4-1 的估算法还可看出“微波源 1”与我们的当今距离 $a(t_0)r_s$ 也有 H_0^{-1} 的量级(虽然它的红移 z 已达约 1000)．这更说明用哈勃长度描述观测宇宙的大小是恰当的．

[选读 10-4-1]

现在给出 $N\equiv D_{12}(t_{\gamma d})/D_H(t_{\gamma d})=75$ 的证明．为简化计算，设 $k=0$，且在涉及 $a(t)$ 时一律取 $a(t)=\beta t^{2/3}$ (其中 β 为常数)，即默认以物质为主．设天线所在处的径向坐标 $r=0$，源 1(和 2)的 r 为 r_S，则把 $k=0$ 的式(10-1-25)用于径向类光测地线 η_1 得 $r_S=\int_{t_{\gamma d}}^{t_0}\mathrm{d}t/a(t)$．由式(10-1-28)得

$$\begin{aligned}D_{12}(t_{\gamma d})&=2a(t_{\gamma d})r_S=2a(t_{\gamma d})\int_{t_{\gamma d}}^{t_0}\mathrm{d}t/a(t)\\&=2a(t_{\gamma d})\int_{t_{\gamma d}}^{t_0}\mathrm{d}t/\beta t^{2/3}=6\beta^{-1}a(t_{\gamma d})(t_0^{1/3}-t_{\gamma d}^{1/3}).\end{aligned}\tag{10-4-9}$$

另一方面，由式(10-4-5)得

$$D_H(t_{\gamma d}) = a(t_{\gamma d})\int_0^{t_{\gamma d}} dt/a(t) = a(t_{\gamma d})\int_0^{t_{\gamma d}} dt/\beta t^{2/3} = 3\beta^{-1}a(t_{\gamma d})\,t_{\gamma d}{}^{1/3}. \quad (10\text{-}4\text{-}10)$$

因此

$$N \equiv \frac{D_{12}(t_{\gamma d})}{D_H(t_{\gamma d})} = 2\left[\left(\frac{t_0}{t_{\gamma d}}\right)^{1/3} - 1\right].$$

以 T_γ 代表微波背景辐射的温度，由 $T_\gamma \propto a^{-1}$ 及 $a \propto t^{2/3}$ 得

$$T_\gamma(t_{\gamma d})/T_\gamma(t_0) = (t_0/t_{\gamma d})^{2/3},$$

故

$$N = 2\left[\left(\frac{T_\gamma(t_{\gamma d})}{T_\gamma(t_0)}\right)^{1/2} - 1\right].$$

以 $T_\gamma(t_0) = 2.7$ 和 $T_\gamma(t_{\gamma d}) = 4000$ 代入得 $N = 75$. 由于用了两个简化假设(即 $k = 0$ 和 $a \propto t^{2/3}$)，以上计算仍嫌粗糙. 为提高可信度，Guth (1983)在附录中取消上述两点简化，从非常一般的条件出发做了精确得多的估算. 结果更为严重：$N > 90$.

[选读 10-4-1 完]

平直性疑难 根据标准模型，Ω 值与 1 的偏离会随时间的向后推移而被严重地放大. 以 $\varepsilon(t) \equiv |1-\Omega^{-1}(t)|$ 作为 Ω 与 1 的偏离程度的某种反映，得

$$\varepsilon(t) = |(\rho - \rho_C)/\rho| = 3|k|/8\pi\rho(t)a^2(t), \quad (10\text{-}4\text{-}11)$$

其中第二步用到式(10-3-10). 上式说明 $k = 0$ 时 $\varepsilon(t) = 0$，否则

$$\varepsilon \propto (\rho a^2)^{-1} = \begin{cases} (\rho a^4)^{-1}a^2 \propto a^2, & \text{(辐射为主)} \\ (\rho a^3)^{-1}a \propto a. & \text{(物质为主)} \end{cases} \quad (10\text{-}4\text{-}12)$$

由式(10-3-1)知 $t = 10^{-43}$s 时的温度 $T(10^{-43}\text{s}) \cong 3\times 10^{31}$K，故由 a 与 T 的近似反比关系知 $a(t_0) \cong 10^{31}a(10^{-43}\text{s})$，于是由式(10-4-12)知 $\varepsilon(t_0)$ 是 $\varepsilon(10^{-43}\text{s})$ 的 10^{31}~10^{62} 倍，进一步的估算结果约为 $\varepsilon(t_0) = 10^{60}\varepsilon(10^{-43}\text{s})$，可见宇宙膨胀对 ε 值有惊人的放大作用. 由于 $\Omega(t_0)$ 的量级为 1 且 $\Omega(t_0) > 0.1$，故 $\varepsilon(t_0) < 10$，因而 $\varepsilon(10^{-43}\text{s}) \cong 10^{-59}$，即 $1-\Omega^{-1}(10^{-43}\text{s}) \cong \pm 10^{-59}$，于是

$$\Omega(10^{-43}\text{s}) \cong (1 \mp 10^{-59})^{-1} \cong 1 \pm 10^{-59}. \quad (10\text{-}4\text{-}13)$$

如果那时的 Ω 比式(10-4-13)的大值略大一点点，宇宙将在尚未演化至今就已收缩为大挤压奇点；反之，如果那时的 Ω 比式(10-4-13)的小值略小，宇宙的膨胀将快到无法形成恒星和星系. 为了形成今天这样的宇宙，更确切地说，为了能有今天这样一个量级为 1 的 Ω 值，在 10^{-43}s 时的 Ω 值必须被异常精确地“微调”到与 1 如此接近，只在小数点后第 59 位才有非零的数. 为什么会这样凑巧？这种微调是

怎么造成的？由于$\Omega=1$对应于宇宙在空间上平直，上述问题也可表述为：极早期宇宙为什么会被微调到如此不可思议地接近平直？这就是**平直性疑难**(flatness problem)，亦称**微调疑难**(fine-tuning problem).①

平直性疑难还可用熵的概念做另一表述．熵是广延量，可以谈及宇宙的任一共动体积内的熵．以$k=+1$的情况为例．体元$a^3\sin^2\psi\sin\theta\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$在$\psi$，$\theta$，$\varphi$的某一范围内的积分都可看作一个共动体积，以下谈及共动体积时就以a^3为代表[由式(10-1-29)可知$a^3(t)$乘以$2\pi^2$等于宇宙在时刻t的体积]．宇宙在其大部分历史中都能维持其内容物的局域热平衡，由热力学第一、二定律可以证明[见 Kolb and Turner (1990) P.65~66]任一共动体积内的熵不随时间而变．熵的这一性质使它成为研究宇宙膨胀的一个非常有用的基准量．对这一重要常数值可做如下估算．设S是a^3内的熵[称为**特征熵**，见 Guth(1983).]，则熵密度定义为$s\equiv Sa^{-3}$．熵密度的当今值s_0可由物理讨论求得，此处只引用冯麟保(1994)式(6-54)的结果[讨论过程还可参阅 Kolb and Turner (1990)和 Blau and Guth (1987)]：

$$s(t_0)\cong 3\times10^9\,\mathrm{m}^{-3}\,②. \tag{10-4-14}$$

把式(10-4-11)改写为$\dfrac{\Omega-1}{\Omega}=\dfrac{3k}{8\pi\rho a^2}$，再利用$s=Sa^{-3}$和式(10-3-12)并改写为国际制形式(补$c^2$)便得特征熵表达式

$$S=\left[\frac{k\,c^2}{H^2(\Omega-1)}\right]^{3/2}s\,. \tag{10-4-15}$$

以H，Ω和s的当今值代入上式便可求得常数S：H_0可取$(10^{10}\text{年})^{-1}$，$k/[\Omega(t_0)-1]$可取作>1，$s(t_0)$可取为$3\times10^9\,\mathrm{m}^{-3}$，代入式(10-4-15)便得$S>10^{87}$．这是一个大得非同寻常的熵值．在标准模型中，$S$值只能作为初始条件给定．除非有特殊理由，此初始值应为1的量级．$S>10^{87}$这样大的熵值实在不可思议．宇宙为何竟有如此巨大的熵？这就是平直性疑难的另一表述，又称**熵疑难**.

视界疑难与平直性疑难有一个共性：它们都可归结为“初始条件问题”．如果硬性规定宇宙的“初始条件”，两个疑难都可“解决”．对视界疑难的答案是：宇宙从一开始(“天生”)就是均匀和各向同性的；对平直性疑难的答案是：宇宙的Ω值一开始就如此不可思议地接近于1(宇宙从一开始就有$>10^{87}$那样大的熵值)．类似地还可列出其他两个疑难．第一，当今宇宙为何存在物质与反物质的不对称性? 对此也可这样回答：因为宇宙一开始就存在偏爱物质的不对称性．第二，

---

① 如果假定宇宙从一开始就有$\Omega=1$，则它将保持$\Omega=1$至今．然而这种可能性极小．RW 线元原本是对任何实数K定义的(见10.1.2小节)，后来引进分立参数k，它只能取1，0，−1三个值．$k=1$和$k=-1$分别代表$K>0$和$K<0$，占领了实数轴上除0以外的所有点，而$k=0$则只是实数轴上测度为零的一点.

② 在玻尔兹曼常数取为1的单位制中能量与温度同量纲，故熵S无量纲，熵密度s的单位为m^{-3}.

当今宇宙在较小尺度上呈现出结构(恒星、……)，解释这种结构的必要前提是极早期宇宙存在过适当的密度涨落谱 $\delta\rho/\rho$. 标准模型对这个问题的回答也只能是：宇宙一开始就有如此适当的密度涨落谱. 然而这种“初始条件”式的回答终究很不自然(说穿了就是：我们最终所得到的不过是我们最初所强加的.)，并且容易带上宗教色彩. 后来，主要是由于粒子物理学家的介入，上述问题以及标准模型的一些其他疑难才得到满意得多的解决.

10.4.3 暴涨模型及其对视界、平直性疑难的解决

粒子物理学家大约从20世纪70年代中期开始逐渐介入宇宙论的研究. 大统一理论预言的重子数不守恒性使物质-反物质不对称性问题有望解决. 然而大统一理论也导致新的宇宙学问题：用这一理论与标准模型所做的估算认为极早期宇宙必产生过某些特殊的非相对论性粒子，其中一种叫**磁单极子**(magnetic monopole). 它们的密度虽然随宇宙膨胀而减小，但对 Ω_0 的贡献仍比 Ω_0 的观测值高出 10^{11} 的量级，这就是**磁单极疑难**. 美国粒子物理学家 Guth 提出的暴涨模型[Guth (1981)]成功地解决了标准模型的视界疑难及平直性疑难,对磁单极疑难至少也起到缓解作用. 虽然这一理论除其宝贵的暴涨思想外已被其他暴涨理论所代替，但至少从教学法的角度看，对 Guth 的原始暴涨理论做适当介绍还是有所裨益的.

根据大统一理论[例如 SU(5)理论]，在能量足够高(高于临界值 $T_C \cong 10^{14}\,\text{GeV}$)时，① 电、弱、强相互作用是统一的. 我们之所以看到它们表现得如此不同，只是因为我们接触到的能量(包括能量最高的加速器提供的能量)大大低于 T_C. 然而，甚早期宇宙曾涉及高于 T_C 的能量. 当 $T > T_C$ 时，内部对称性使电、弱、强相互作用表现为一种统一的作用；当 T 降至 T_C 以下时，内部对称性自发破缺，强作用与电弱作用才表现得很不相同. 当温度下降至约 $10^2\,\text{GeV}$ 时，电弱统一的内部对称性也破缺，电磁作用和弱作用表现为不同的相互作用. $T_C \cong 10^{14}\,\text{GeV}$ 称为大统一临界温度. 大统一理论中存在 Higgs 场，这是一种标量场，与传递弱作用的中间玻色子 W^+ ，W^- 和 Z^0 都有耦合(从而使它们获得质量). Higgs 场 ϕ 的有效势 $V(\phi)$ 可解释为能量密度. 适当选择 SU(5)大统一理论的自由参数可使 $V(\phi)$ 具有如下性质[见图 10-19，Higgs 场 ϕ 其实具有多个分量(“内部”分量)，但在图中(及讨论中)把 ϕ 简化成1维.]：① $V(\phi)$ 在 $T > T_C$ 时有一极小值(设其出现在 $\phi = 0$ 处)，由于真

① 温度 T 和能量 E 可按 $E = kT$ 建立一一对应关系. 用能量单位描述温度时，实际上是指它对应的能量. 1eV 的能量对应的温度为 $T = \dfrac{E}{k} = \dfrac{1.6\times10^{-19}\,\text{J}}{1.38\times19^{-23}\,\text{J/K}} = 1.16\times10^4\,\text{K}$ ，故 10^{14}GeV 的能量对应的温度 $T = (10^{14}\times10^9)\times1.16\times10^4\,\text{K} = 1.16\times10^{27}\,\text{K}$. 因此 $T_C \cong 10^{14}\,\text{GeV}$ 意即 $T_C \cong 10^{27}\,\text{K}$. 请注意本脚注中的等式是量的等式而非数的等式.

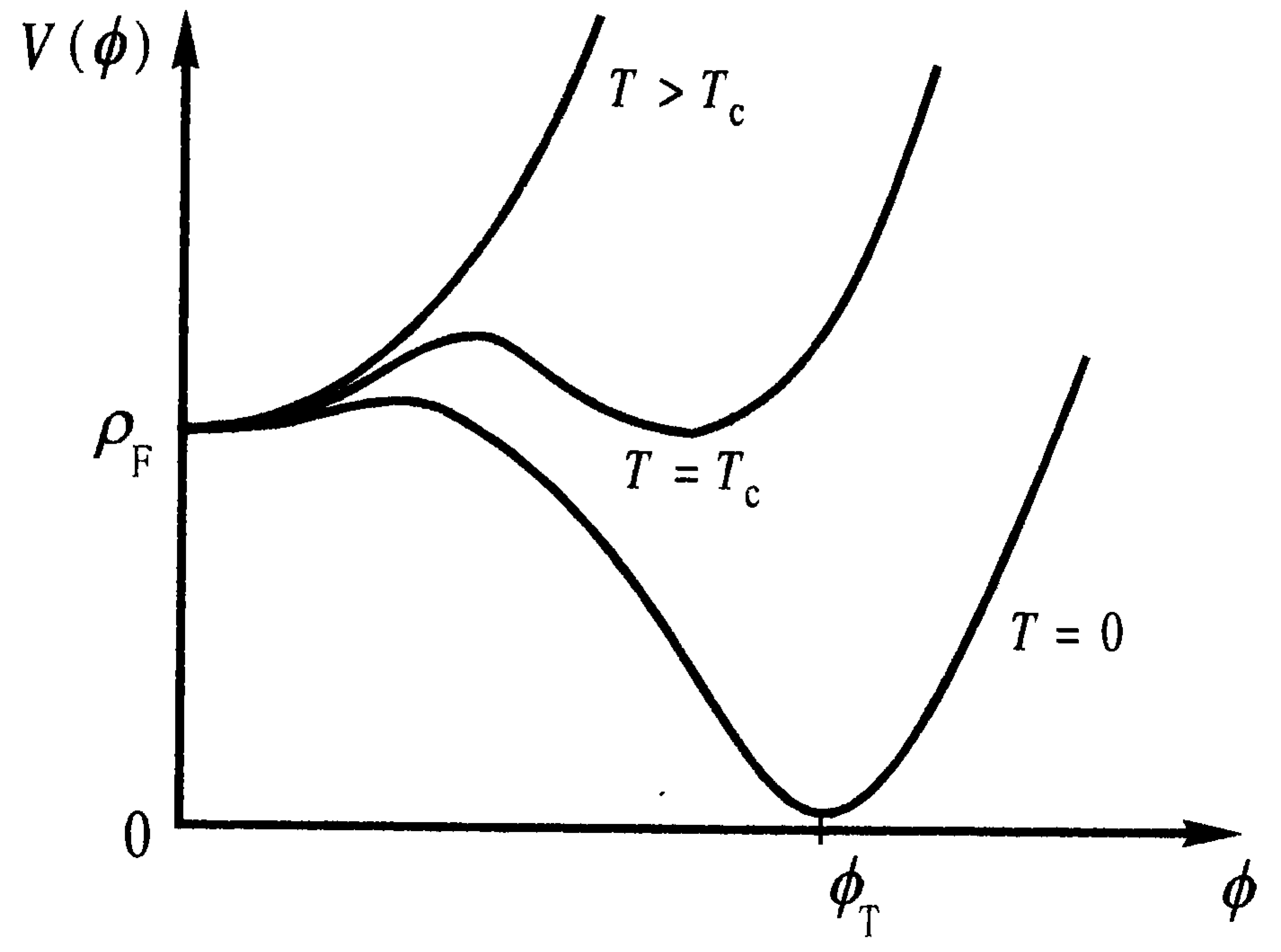


图 10-19　Higgs 场的有效势 $V(\phi)$ 曲线(简化示意图)

空定义为能量极小的状态，故 $\phi=0$ 是真空态；②$V(\phi)$ 在 $T=T_{\rm C}$ 时有两个极小值，两者 V 值相等，其中一个出现在 $\phi=0$ 处；③$V(\phi)$ 在 $T<T_{\rm C}$ 时有两个极小值，其一出现在 $\phi=0$，其二出现在 $\phi=\phi_{\rm T}$，而且 $V(\phi_{\rm T})<V(0)$，$\phi=\phi_{\rm T}$ 和 $\phi=0$ 分别称为**真真空**(true vacuum)**态**和**假真空**(false vacuum)**态**. 当今宇宙的 ϕ 场在 $T\cong 0$ 曲线的真真空态 $\phi=\phi_{\rm T}$ 附近做微小涨落，其真空能量密度相应于一个宇宙常数 Λ，虽然其观测值从天文学的角度看来很大，但与用 $E_{\rm P}$ 估算的真空能量密度相比只有约 10^{-120} 倍，因此 Guth 假定 $T\cong 0$ 的曲线有 $V(\phi_{\rm T})\cong 0$. 反之，假真空却是一种很特殊的物质状态，它有很大的常数能量密度，记作 $\rho_{\rm F}$，其值正比于大统一理论的临界能量 $E_{\rm C}$ 的 4 次方[估算真空能量密度时通常用所论范畴的最高能量的 4 次方，所以现在要把式(10-3-30′)的 $E_{\rm P}$ 换为 $E_{\rm C}=kT_{\rm C}$.]. 于是

$$\rho_{\rm F}\sim(10^{14}{\rm GeV})^4\hbar^{-3}c^{-5}\cong 10^{76}{\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3}\,. \tag{10-4-16}$$

(把一个大质量恒星压成质子般大小方可得到如此巨大的能量密度.) 暴涨模型的一大优点是对初始条件要求很低，它的主要要求是甚早期宇宙中含有某些温度高于 $T_{\rm C}$ 的小区域，并且正在膨胀. 这些区域中的 ϕ 场处于真空态，即 $\phi=0$(见图 10-19). 当 T 随该区域的膨胀降至 $T_{\rm C}$ 及其以下时，$V(\phi)$ 出现两个极小值，分别相应于真、假真空，ϕ 场从 $T_{\rm C}$ 起进入假真空态. 由于假真空比真真空有较高能量，它只是一个亚稳态，ϕ 场终将通过量子隧道效应穿越 $V(\phi)$ 曲线中两个极小值间的势垒而变为真真空态，这对应于一阶相变(从对称相 $\phi=0$ 变为对称破缺相 $\phi=\phi_{\rm T}$). 考虑到大统一理论的某些未知参数值，同冷却率相比较，相变产生得非常缓慢，即 ϕ 场在 $T<T_{\rm C}$ 时要在假真空态滞留一段时间才通过相变进入真真空态(这种在相变前发生的“过冷”现象在凝聚态物理中十分普遍，例如水能过冷至冰点以下 20 多度才发生相变而成冰.). 不难选择大统一理论的参数使区域过冷到接近 $T=0$ 而仍处于假真空态. 在这段时间内，由于假真空的能量密度 $\rho_{\rm F}$[式(10-4-16)]甚大于当时的辐射的能量密度，总密度 $\rho\cong\rho_{\rm F}$. 我们最关心的是过冷情况下尺度因子 a 的演化. 假定区域内为均匀且各向同性[放弃这一假定似乎也有相同结果，

见 Blau and Guth (1987).]. 同标准模型一样，过冷期间的函数 $a(t)$ 也应通过方程(10-2-16)和(10-2-19)获得. $\rho \cong \rho_F$ = 常数 及 $p=-\rho$ [见式(10-3-26)]使方程(10-2-19)自动满足. 令

$$\chi \equiv (8\pi G\rho_F/3)^{1/2} \cong 10^{34}\text{s}^{-1}, \tag{10-4-17}$$

由于 a 很小时 k 可忽略[见式(10-2-23)]，方程(10-2-16) (补上 G)简化为

$$\frac{\dot{a}}{a} = \chi = \text{常数}, \tag{10-4-18}$$

(由此可知 χ 无非是过冷期间的哈勃参数.) 其解满足

$$a(t) \propto \text{e}^{\chi t}. \tag{10-4-19}$$

上式说明这段时间内 a 随 t 按指数规律以很小的时间常数 $\chi^{-1}=10^{-34}$s 急剧增长 (χ^{-1} 很小来自 ρ_F 很大),大大超过标准模型中 a 的增长速率,故称**暴涨**(inflation) [准确含义是：对时段 t_2-t_1，令 $Z \equiv a(t_2)/a(t_1)$，则 $Z_{暴} >> Z_{标}$.]. 对暴涨的原因也可从另一角度理解. 由式(10-2-18)得

$$\ddot{a} = -4\pi a\,(\rho+3p)/3.. \tag{10-4-20}$$

在标准模型中 $\rho+3p>0$，故 $\ddot{a}<0$，即膨胀是减速的. 这是因为普通理想流体的压强 p 和能量密度 ρ 都为非负值，它们都起吸引作用. 然而，假真空对应于压强为负的理想流体，其物态方程为 $p=-\rho_F<0$，代入式(10-4-20)得 $\ddot{a}=8\pi a\,\rho_F/3>0$，可见膨胀加速，其原因就在于负压强的排斥作用超过了能量密度的吸引作用，使净作用表现为很强的斥力而非引力. 暴涨过程大约持续了 10^{-32}s 或更长一点时间，即起于 $t_C \cong 10^{-34}$s (t_C 对应于大统一临界温度 T_C，即 $T_C=10^{10}/\sqrt{t_C}=10^{27}$K)而止于 $t_F \cong 10^{-32}$s. 对称性破缺的相变在这一阶段之末发生. 宇宙中每个经历过暴涨的区域的 ϕ 场都先后从假真空态转入真真空态，每个处于真真空态的区域称为一个泡(bubble). 由于真假真空存在能量差，假真空的巨大能量在相变过程中得以释放(叫做**潜热**，类似于水冻成冰时所释放的潜热.)，区域被重新加热(reheating)到接近 T_C，从此以标准模型(辐射为主)的膨胀率继续膨胀. 暴涨模型的一大优点是宇宙在暴涨后的表现对初始条件的细节很不敏感. 只要暴涨前的宇宙满足某些不难满足的要求，它就能演化为今天的样子. 这是标准模型所不可比拟的. 不过暴涨模型不是一个与标准模型相竞争的对手，它只在极早期宇宙一段很短时间内插入一个暴涨过程，在这段时间以外 a 的演化规律同标准模型一样. 它的引入既保持了标准模型的全部优点，又克服了标准模型的若干困难，是很有吸引力的一种模型. 下面介绍暴涨模型对标准模型的疑难的克服.

造成视界疑难的关键是当今可观测宇宙的早期尺度比视界范围大得多. 例如，在 $t=10^{-43}$s 时 $D_{今可观} \cong 10^{-5}\text{m} >> D_H \cong 10^{-34}\text{m}$，两者比值约为 10^{29}，然而这 $D_{今可观} \cong 10^{-5}$m 是在不考虑暴涨的前提下求得的. 由于从 $t_C \cong 10^{-34}$s 至 $t_F \cong 10^{-32}$s 有过暴

涨，$t_C \cong 10^{-34}$s 以前的 $D_{今可观}$ 值应比不考虑暴涨的值(10^{-5}m)小得多. 然而，暴涨前任一时刻的视界距离 D_H 却与用标准模型求得的一样. 设暴涨使尺度因子 a 增大 Z 倍，则只要 $Z > 10^{29}$，视界疑难便告消失. 由式(10-4-19)得

$$Z = e^{\chi(t_F - t_C)}, \tag{10-4-21}$$

其中 $\chi = 10^{34}\text{s}^{-1}$，$t_F - t_C \cong 10^{-32}\text{s} - 10^{-34}\text{s} \cong 10^{-32}\text{s}$，代入上式得 $Z \cong e^{100} \cong 10^{43} >> 10^{29}$，可见在暴涨前有 $D_{今可观} << D_H$. 可观测宇宙当时只是视界范围内的一个小区域，域内各点自然有因果联系，因而有充分的相互作用，在暴涨前就已达到均匀和各向同性. 这个小区域在暴涨期间急速变大，然后再按标准模型膨胀为今天的可观测宇宙. 均匀性和各向同性性在暴涨和正常膨胀中得到保持，视界疑难不复存在.

再看用另一陈述所表达的视界疑难(见图 10-18). 读者可从决定视界距离 D_H 的式(10-4-5)出发证明，由于 a 在 t_C 至 t_F 的期间内有过倍数为 Z 的暴涨，视界距离 D_H 也近似有这一倍数的暴涨，即 $D_H(t_F)/D_H(t_C) \cong Z$. 此后(从 t_F 至今)的 $D_H(t)$ 一直比 $D_{今可观}(t)$ 大出很多(见图 10-20)，于是视界疑难不复存在.

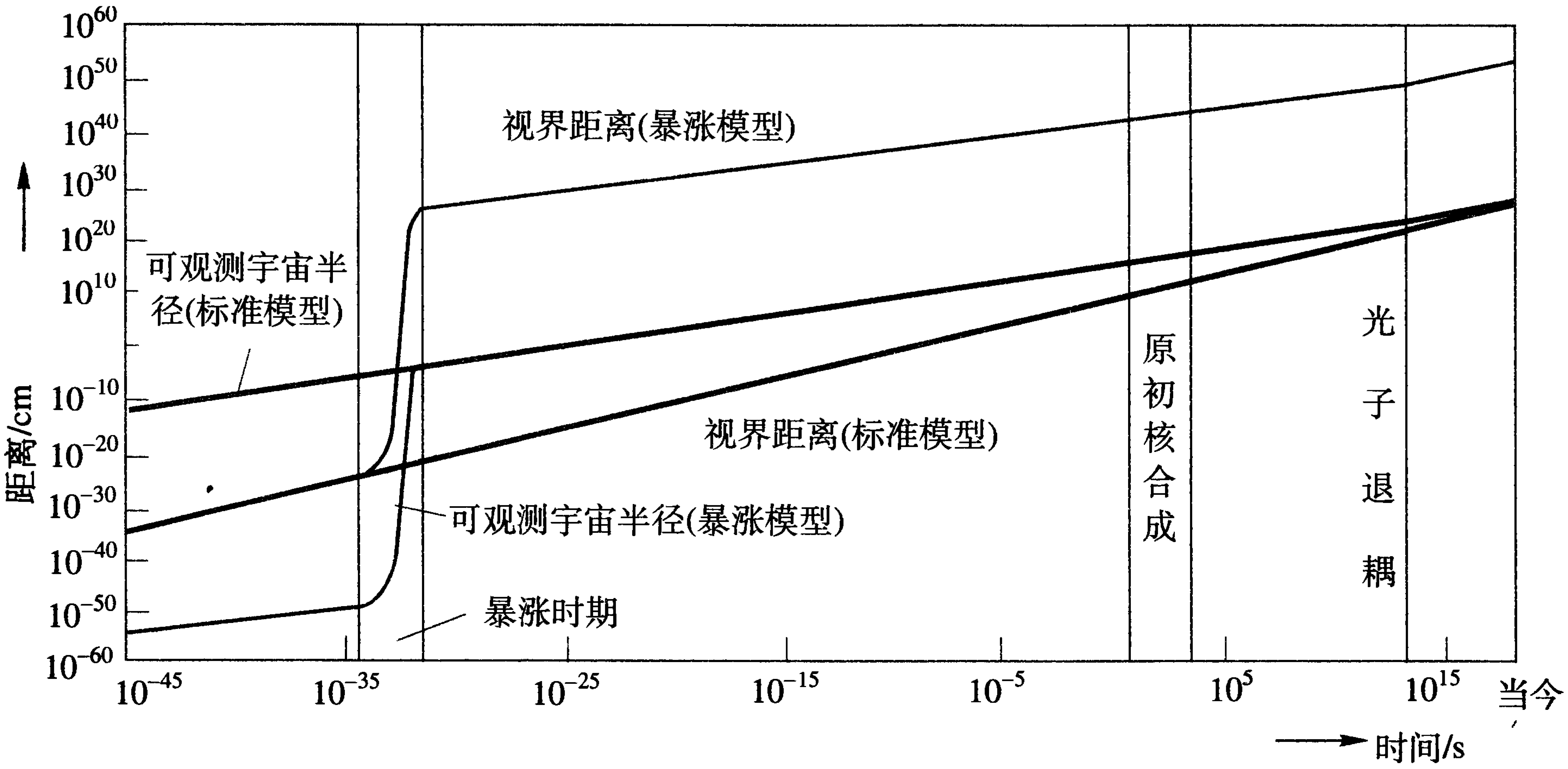


图10-20　视界距离和可观测宇宙大小在两种模型中的演化曲线[参见 Guth and Steinhardt (1984)] [图中“可观测宇宙(暴涨模型)”中的可观测宇宙仍指标准模型的当今可观测宇宙]

在标准模型中，ρa^3 或 ρa^4 是常数，由此导致 Ω 与 1 的偏离程度 $\varepsilon(t)$ 按 a 甚至 a^2 的方式被迅速放大[式(10-4-12)]，这是平直性疑难的根源. 在暴涨模型中，暴涨期间的能量密度 $\rho \cong \rho_F$ 为常数，由式(10-4-11)知 $\varepsilon(t)$ 不但不被放大，反而按 a^{-2} 的方式急剧缩小. a 的暴涨导致 ε 缩小的量级很可能比正常膨胀导致 ε 增大的量级还大得多，对 Ω (10^{-43}s) 的极不自然的要求[式(10-4-13)]不再必要，平直性疑难于是不复存在. 更有甚者，只要上述“很可能”果真成立，而且 ε 在开始时不

是离奇地大[这种假设比式(10-4-13)的假设要自然得多]，今天的 ε 值就必定非常接近于零，以至

$$\Omega(t_0)=1\pm \mathrm{O}(10^{-\mathrm{Big}}) \quad (\mathrm{Big}\text{ 代表一个大数}), \tag{10-4-22}$$

即 $\Omega(t_0)$ 非常接近于 1. 这不但消除了平直性疑难(宇宙开始时不必特殊微调)，而且给出了“宇宙今天的空间几何非常接近平直”的猜测. 至此，宇宙空间是否封闭的问题虽然还没有完全确定的答案，但暴涨模型告诉我们，当今宇宙很可能非常接近临界状态($k=0$)，它是如此“擦边”，以至我们还不能完全肯定它是准确地处于临界状态还是在临界状态的哪一侧.

平直性疑难的另一表述(熵疑难)则可用重加热过程中熵的大量增长来解释. 由于暴涨结束时的重加热使暴涨区的温度重新增至接近 T_C(暴涨开始的温度)，暴涨前后的熵密度 s 近似相等. 因为暴涨使 a 猛增至 Z 倍，暴涨后的特征熵 S' 便近似等于暴涨开始时的特征熵 S 的 Z^3 倍. 只要 $Z>10^{29}$，S' 便可大于 10^{87}. 若取 $Z\sim10^{43}$，则重加热过程(一种高度非绝热过程)竟可把特征熵提高 10^{129} 倍!

从大统一理论出发的研究表明，磁单极数密度的下限反比于大统一相变时的视界距离 D_H 的 3 次方. 在标准模型中，相变发生于 $t_C\cong10^{-34}\,\mathrm{s}$(瞬时发生，没有冷却过程.)；在 Guth 的暴涨模型中，相变发生于 $t_F\cong10^{-32}\,\mathrm{s}$，由于 D_H 也有约 Z 倍的暴涨，即 $D_H(t_F)\cong ZD_H(t_C)$，磁单极数密度的下限降为标准模型的 Z^{-3} 倍，因而磁单极的超大量产生问题得到缓解. 但是，Guth 的暴涨模型不能告诉我们在相变中产生了多少磁单极，因此不能肯定它已解决了磁单极疑难. Linde (1982a, b) 和 Albrecht and Steinhardt (1982)分别提出的“新暴涨模型”对这一疑难给出了明确得多的解决. Guth 的暴涨模型(现在称为原始暴涨模型)还有其自身的致命弱点，即所谓的“体面退出问题 (graceful exit problem)”. 为解决或躲开这一问题的各种努力都遭失败，只有其宝贵思想——宇宙甚早期有过一次短暂而剧烈的暴涨——应予保留. 多种不同的暴涨模型先后问世，其中前苏联学者 Linde 在 1983 年提出的混沌暴涨模型(chaotic inflation model)备受推崇. 在这一模型中既没有相变也没有过冷，它涉及一个有质量的标量场 ϕ，由于量子涨落，其值在早期宇宙的某些区域甚大(与 Planck 质量 $M_P\cong10^{19}\,\mathrm{GeV}$ 同数量级)，其能动张量类似于正的宇宙常数那样起排斥作用，从而导致尺度因子 a 在一段时间内出现准指数式的膨胀，即暴涨. 暴涨过后恢复正常膨胀. 当今的观测宇宙只是当时的一个区域演化至今的一个部分. 由于这一暴涨，平直性、均匀性和磁单极疑难都迎刃而解. 混沌暴涨模型在克服以往暴涨模型的困难的同时保存了它们的全部优点，而且还有自身独特的优点(略).

Guth 在 1981 年提出暴涨模型时，多数天文学家的反应是：这想法虽然有吸引力，但其对 $\Omega_0\cong1$ 的预言与观测结果相去太远，因为当时 Ω_{M0} 的观测值只有

5%~10%. 然而Ω_{M0}的观测值随着观测手段的进步而一路攀升，并曾在1990年被认为达到1的程度(后来发现这不大可能)，现在大致公认的是$\Omega_{M0}\cong 0.25$. 不过人们早就注意到Ω_{M0}很可能并非Ω_0的唯一来源，例如Ω_Λ只要非零也对Ω_0有所贡献，因此$\Omega_{M0}<1$与$\Omega_0\cong 1$不一定有矛盾. ΛCDM (带Λ的冷暗物质结构形成模型，其中$\Omega_{M0}\cong 0.3, \Omega_{\Lambda 0}\cong 0.7$)的巨大成功加强了人们对$\Omega_\Lambda>0$的信心. 1996年后从微波背景辐射的非各向同性性中发现支持$\Omega_0\cong 1$的有力证据，1998年起对高红移Ia类超新星的观测表明当今宇宙正在加速膨胀，以及暴涨模型能给出ΛCDM所需的原初扰动谱，……，所有这一切都使暴涨模型深得人心，就连对此模型一向持怀疑态度的天文学家也不得不开始认真看待. 有人甚至认为过去15年宇宙学的两个主导观念就是暴涨和冷暗物质[Turner (1999)]. 可以说，暴涨思想现在已经成为(新)标准模型中不可或缺的组成部分. 然而也应指出，由于§10.5要介绍的暗能量及其对基本物理学的严厉挑战，也有学者对暴涨思想不以为然.

§10.5 暗能量和“新标准宇宙模型”

10.5.1 暗能量问题

1998年的超新星观测所发现的、当今宇宙正在加速膨胀的结论(10.3.3小节末)现在已被普遍接受，然而加速膨胀的原因却一直使人深感困惑. 虽然用宇宙常数$\Lambda>0$可对它做出解释，但Λ值比粒子物理学的预言值小如此多个量级却又偏不为零的结论使“物理学家的宇宙常数问题”变得更为棘手. 于是人们纷纷寻求对加速膨胀的其他可能解释. 加速膨胀的形成机制已经成为当今宇宙论乃至整个基本物理学的一个至关重要的疑难问题，现在被称为“暗能量(dark energy)”问题.

暗能量是指对宇宙加速膨胀应负责任的宇宙内容物. 在牛顿引力论中，一切物质都只能导致引力而不会导致斥力，因此加速膨胀无法解释. 但广义相对论与此不同. 根据爱因斯坦方程，无论能量密度ρ还是压强p都对引力场有贡献，当压强$p<0$而且$|p|$大到可以与ρ比拟时，就会出现斥力效应. 通常的宇宙内容物，即物质($p\cong 0$)和辐射($p=\rho/3>0$)都不满足这一要求，但正的宇宙常数Λ(或真空能动张量)却恰好满足，因为其$p=-\rho<0$，从而有可能导致加速膨胀，可见宇宙常数Λ是暗能量的一个重要候选者. 但是导致加速膨胀的原因也不是非Λ莫属. 凡具有以下3个特征的“理想流体”都可充当暗能量的候选者：①不发光(因而暗)；②压强p和能量密度ρ满足$p\sim-\rho$(不是非等不可)的关系；③空间分布近似均匀(至少在星系团的尺度上不表现出集聚现象，否则将在星系团尺度上有所显示，然而观测从未发现这种迹象：暗能量是在整个宇宙这一大尺度上被发现的.). 应该指出，暗能量是在原来的标准宇宙模型中不存在的一种宇宙内容物，它既不是

物质($p\cong 0$)也不是辐射($p=\rho/3>0$). 但由于暗能量的第②个特征，它更像辐射而不像物质(因 p 与 ρ 可比拟). 按照通常理解，物质和辐射都具有能量，能量是一种属性而不是内容物本身. 然而英语文献中常用energy作为radiation的代名词，例如汉语中说“一对正反质子湮灭后成为两个光子(辐射)”，而英语中常把这句话说成是“物质湮灭后变成能量”，这里的能量(energy)已被当作辐射(光子)的同义语. 据此，甚至可以说“宇宙内容物中既有物质又有能量”(其实物质也有能量，但这句话中“能量”一词分明是狭义地专指辐射.). 于是可以说暗能量的第②个特征使它更像能量而不像物质(more “energy-like” than “matter-like”). 再加上特征①(不发光)，就产生了“暗能量”一词. 上述解释同时也澄清了暗能量与暗物质的区别：暗物质是不发光的物质($p\cong 0$)，暗能量则既非物质，亦非能量(虽然更像能量)，而是具有上述3个特征的宇宙内容物，是原来的标准模型始料未及的一种宇宙内容物.

除了当今宇宙加速膨胀这一重要观测结果之外，暗能量存在的可信性还来自如下事实：①对宇宙微波背景辐射的非各向同性性的最新测量结果表明宇宙是空间平直的($k\cong 0$)，即 $\Omega_0\cong 1$ (与暴涨理论的预言一致)；②新近发展的、不依赖于质量~光度关系的物理观测表明物质(主要是暗物质)对 Ω_0 的贡献为 $\Omega_{M0}\cong 0.33$ [Turner (2002)] (此外还有用其他方法的观测结果. 新近文献中关于 Ω_{M0} 值的报导不尽相同，约从0.25至0.33.)，可见当今宇宙中竟有约七成的内容物没有下落，这是人们相信暗能量存在的另一重要原因.

虽然真空能量(正的宇宙常数 Λ)是暗能量的第一候选者，但这至少存在两个严重疑难：①宇宙常数问题：为何测得的非零 Λ 比粒子物理学的理论值小如此多个量级？②**巧合性问题**(the coincidence problem)：物质密度 ρ_M 和辐射密度 ρ_R 随尺度因子 a 的增大分别按 $\rho_M\propto a^{-3}$ 和 $\rho_R\propto a^{-4}$ 的规律减小，而宇宙常数 Λ 相应的 ρ_Λ 不随时间而变，故

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}=\frac{\rho_\Lambda}{\rho_M}\propto a^3,\qquad \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_R}=\frac{\rho_\Lambda}{\rho_R}\propto a^4. \tag{10-5-1}$$

可见，在早期宇宙中 Ω_Λ 可被 Ω_R (及 Ω_M)所忽略而在晚期宇宙中 Ω_Λ 占压倒地位. 从 $\Omega_{\Lambda 0}=0.7$ ， $\Omega_{M0}=0.3$ (以及 $\Omega_{R0}=5\times 10^{-5}$)出发的计算表明[Carroll (2003)]， Ω_Λ 在早期的很长时段内近似为0 (变化甚慢)，在晚期的很长时段内近似为1(变化也甚慢)，只在这两个时段之间有这么一个很短的时段， Ω_Λ 在此时段内从0猛增至1(见图10-21). $\Omega_{\Lambda 0}=0.7$ 说明当今($t=t_0$)宇宙正处在这一急速转变时段中(这一时段的特点是 $\Omega_{\Lambda 0}$ 与 Ω_{M0} 量级相同，谈不上以谁为主导.). 为什么我们今天恰好处于这一短暂的转变时段之内(why now)? 这就是所谓的巧合性疑难. 巧合性疑难也可从另一角度陈述. 由于 $\rho_M\propto a^{-3}$ ， $\rho_R\propto a^{-4}$ 而 ρ_Λ 不随 a 而变，今天的微小 Λ 值

($\rho_{\Lambda 0}/\rho_{M0}=7/3$)意味着极早期宇宙的 ρ_Λ/ρ_R 出奇地小[$\rho_\Lambda/\rho_R \sim 10^{-B}$ (其中 B 为 100 左右)]. 因此，为保证今天有 $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{M0}\sim 1$，对极早期宇宙的初始条件必须做过极其精密的微调(只要当初有非常微小的偏离，今天的宇宙就完全不是我们看到的样子.). 这可称为宇宙的**微调疑难**(fine-tuning problem).

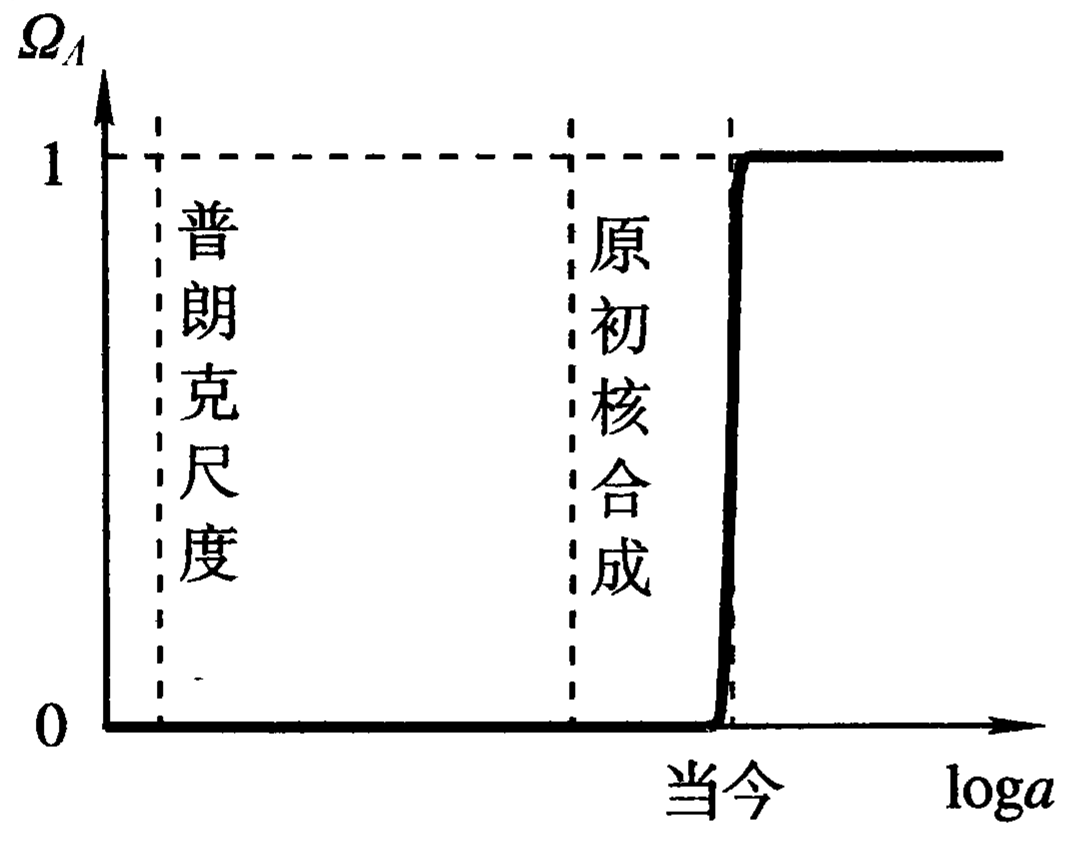


图 10-21　Ω_Λ 在包含当今的短时段内从 0 猛增至 1

针对以上疑难，人们又从粒子物理学出发提出了称为**动力学暗能量**(dynamical dark energy)的多种方案. 与宇宙常数不同，动力学暗能量可以随时间缓慢变化(动力学演化)，只是在每一时段内非常类似于某个宇宙常数 Λ，可定量地用 $w \equiv p/\rho$ 刻画. 此式其实是宇宙中任一种内容物(作为理想流体)的物态方程：对物质有 $w\cong 0$，对辐射有 $w=1/3$，对宇宙常数有 $w=-1$. 对动力学暗能量，w 可取量级为 1 的其他负值，而且可随时间而变. 由 $3\ddot{a}=-4\pi a(\rho+3p)$ [式(10-2-18)]可知 $\ddot{a}>0 \Leftrightarrow w<-1/3$，可见满足 $w<-1/3$ 的内容物都可充当暗能量. 目前已经存在不计其数的动力学暗能量方案，而且还在层出不穷. 此处只简介其中很重要的一大类(称为 quintessence 理论)中的一种版本，着重说明它能消除微调疑难. 这种理论认为极早期宇宙那次暴涨中的标量场 ϕ 在暴涨后仍有影响. 这个 ϕ 场的能量密度 ρ_ϕ 和压强 p_ϕ 分别为 $\rho_\phi=\dot{\phi}^2/2+V(\phi)$ 和 $p_\phi=\dot{\phi}^2/2-V(\phi)$. 当 $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ (ϕ 场变化足够慢)时便有 $\rho_\phi\cong -p_\phi$，在暴涨期间近似等价于一个(很大的)宇宙常数. 暴涨结束时 ϕ 场随时间急剧变化，其能量绝大部分转化为重子，ρ_ϕ 变得很小于 ρ_M. 只要适当选择 $V(\phi)$ 的函数形式，就可保证 ρ_ϕ 随 a 足够缓慢地减小，于是在足够长时间后 ρ_ϕ 将重新超过 ρ_M，这就能解释当今观测到的(小而非零的)宇宙常数. 不但如此，适当选择 $V(\phi)$ 还可取得如下优异效果：求解所得的 $\rho_\phi(z)$ 曲线(其中 z 为红移，代表距离的远近或时间的早晚)在当今($z=0$)的表现与 ρ_ϕ 在 z 很大时(早期)的初值无关，就是说，即使所选初值改变许多个量级，曲线在当今的表现并无改变(见图 10-22). 于是微调疑难不复存在. quintessence 的含义是古哲学的第 5 原质(前 4 种是空气、水、火、土.). 今天的基本粒子是夸克、轻子和中间玻色子，若把非重子暗物质列为第 4 种，则不妨说刚才讨论的 ϕ 场是第 5 种，quintessence

于是得名. 暗物质和暗能量的一个重要区别是前者倾向于成团而后者均匀分布, 但近来人们发现两者存在"你中有我, 我中有你"的迹象, 把两者统一起来成为一个对象的想法颇受青睐. 统一后就只有一种暗分量, 因此这种统一理论又被称为 quartessence (第四原质)理论.

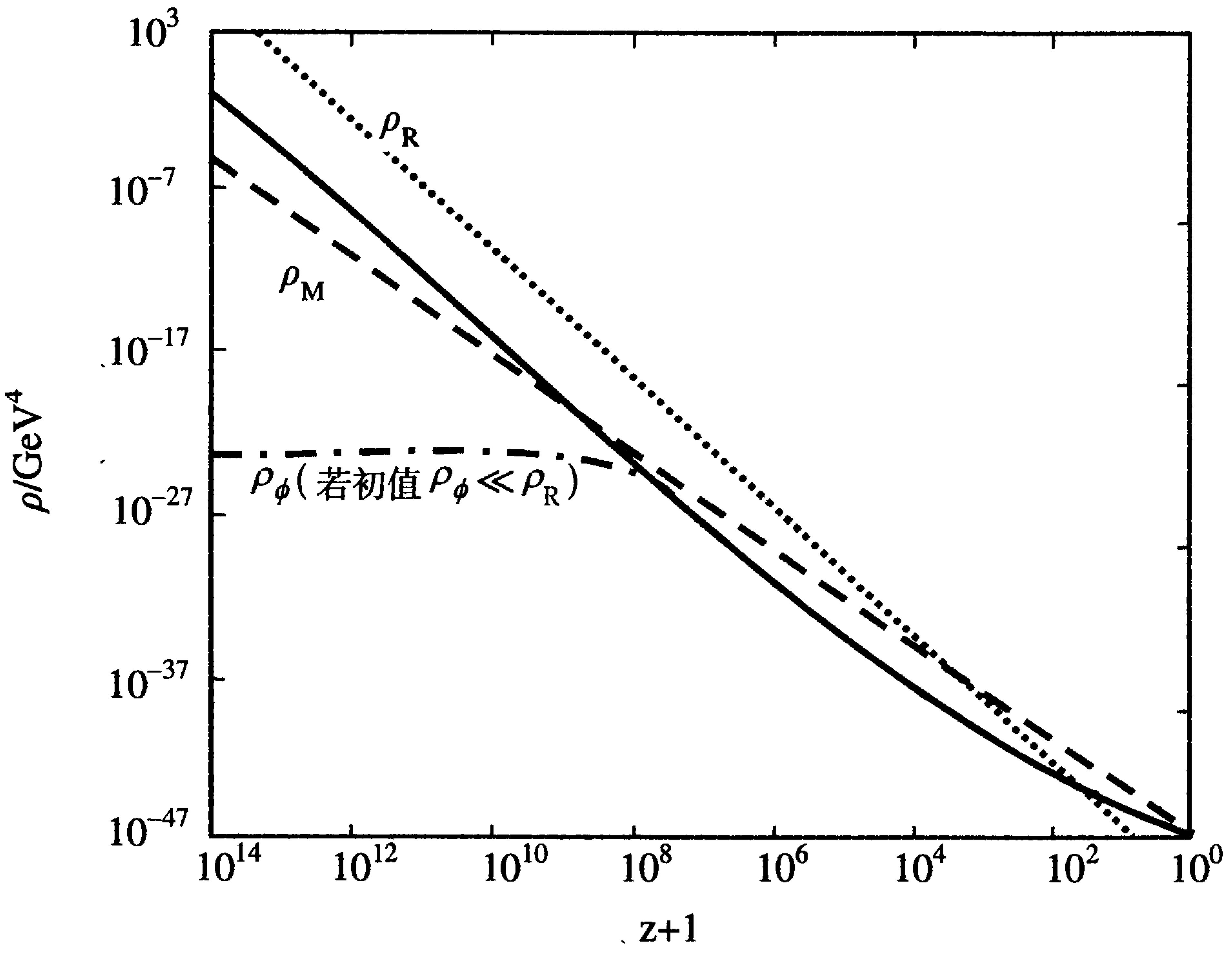


图 10-22 ρ_ϕ 曲线的当今表现与其初值无关

定量地看, 要从加速膨胀得出暗能量存在的结论就要用到式(10-2-18), 而此式是爱因斯坦方程的产物. 如果在涉及整个宇宙这样大的尺度上爱因斯坦方程不再适用, 则暗能量问题可以不复存在. 于是对暗能量问题还存在第三种回答: 在涉及整个宇宙时爱因斯坦方程不再适用. 然而寻求一种取而代之的理论远非易事, 因为这种理论必须在较小的尺度下给出与广义相对论相同的结果, 而且要与关于宇宙的各种观测数据相吻合(例如要给出原初核合成的轻原子的、与观测一致的丰度.).

此外, 也不能完全排除下述可能性: 宇宙其实正在减速膨胀, 只是由于对超新星观测结果做出了错误的解释, 才误以为宇宙正在加速膨胀. 也有人沿着这一方向开展研究, 此处从略.

本书将交稿时笔者在网上读到一文[Kolb et al.(2005)], 该文对宇宙加速膨胀提出了一种既不依靠暗能量又无须对引力理论做修改的、基于暴涨宇宙论的解释.

10.5.2 新标准宇宙模型

自从 1981 年引入暴涨机制以来, 原始的标准宇宙模型已被做了多处修改, 一个新的标准宇宙模型正在形成之中, 虽然还有许多问题尚待深入探讨. 目前看来, 新标准模型至少具有以下特点.

(1) $\Omega_0 \cong 1$(宇宙在空间上平直)，$q_0 < 0$ (宇宙正在加速膨胀).

(2) 宇宙的极早期有过一次虽然极为短暂但却影响深远的暴涨阶段(见 10.4.3 小节). 在此期间由量子涨落造成的密度不均匀性正好为冷暗物质结构形成理论提供所需的原初扰动(“种子”).

(3) 当今宇宙内容物
- 暗能量(约占 70%)
- 暗物质(约占 30%，其中绝大部分是冷暗物质.)
- 发光物质(约占 0.5%)
- 辐射(约占 0.005%)

10.5.3 宇宙的命运(未来)

我们当然关心宇宙的命运，即宇宙在t_0(当今)之后的演化方式. 在原始的标准模型中，命运只取决于空间几何：若$k=0$或$k=-1$，宇宙将永远(减速)膨胀；若$k=1$，宇宙将从膨胀转而收缩，最终缩为大挤压奇点. 在新标准模型中，由于暗能量的存在，命运与空间几何的这种简单关系不复成立(两者脱钩)，宇宙的命运问题变得相当复杂. 即使是$\Omega_0=1$的宇宙也仍有多种可能命运[密切依赖于w值及其演化$w(t)$]. 例如，①若暗能量是真的宇宙常数$\Lambda>0$，则随着时间的推移，Ω_M终将被Ω_Λ所忽略，宇宙将愈来愈接近指数式膨胀(暴涨)，即愈来愈接近 de Sitter 宇宙(详见下册附录)，直至永远(不是真宇宙常数的动力学暗能量演化至晚期也可能类似于一个占主导地位的正宇宙常数，也会导致同样结果.). ②若暗能量是动力学暗能量且随时间减弱得足够快以致宇宙有朝一日回到物质为主的状况($\Omega_M >> \Omega_{暗能量}$)，则其演化类似于原标准模型中$k=0$、物质为主的曲线(指在t足够大时的该曲线)，即减速膨胀，直至永远. ③若动力学暗能量逐渐演化为$\rho<0$，$p>0$的状态(类似于一个负的宇宙常数)，则宇宙还可能从膨胀转而收缩. 此外，在某些条件下还会出现这样的命运：当t趋于某一有限值时$a(t)$竟然趋于无限大(“Big Rip”).

10.5.4 “黑暗物理学”的光明前途

如前所述，我们对暗能量的存在性还刚刚开始认识，对暗能量的了解仍然少得可怜；我们对暗物质虽然稍有认识，但对其中的绝大多数——非重子暗物质——的了解仍然非常肤浅. 这说明我们对宇宙中绝大多数内容物还很不了解. 人们有一种感觉：随着研究的不断深入，我们似乎对宇宙的了解竟然愈来愈少. 是的，物理学正在受到以暗能量为代表的严重疑难(包括宇宙常数问题)的挑战. 有人甚至认为 21 世纪之初的暗能量疑难类似于 20 世纪之初的黑体辐射疑难. 然而，出人意料的实验结果往往是科学进步的重要动力. 正如黑体辐射疑难的解决需要

引入全新的观念(量力观念)和放弃旧观念那样，许多人相信暗能量的挑战终将导致基本物理学(及天文学)的突破性进展．鉴于天文观测对宇宙论研究的异乎寻常的重要性，天文学家已经制定了雄心勃勃的进一步的观测计划．例如[Schubnell (2003)]，他们要用人造卫星去发现并以史无前例的高精度观测多达数千个的高红移(遥远)Ia 型超新星，企图由此测出宇宙年龄的 70%以上的膨胀历史(从今天向过去回溯)，他们还要以很高的精度测定暗能量的(或说宇宙的)物态方程 $w\,(\equiv p/\rho)$ 及其随时间的演化，这种测量结果有助于区分各种不同的暗能量模型，因而意义重大．如此等等，不一而足．另一方面，理论物理学家和天体物理学家正在对暗能量进行着不断深入和广泛的理论攻坚战．有理由相信，在观测天文学家和理论物理学家的联手猛攻下，暗能量之谜总有一天会云开雾散，水落石出，与之相伴的很可能还有基本物理学的某种突破性进展．恐怕可以说：“黑暗物理学的前途是光明的”．

本节主要参考文献：Carroll (2003); Peebles and Ratra (2002); Schubnell (2003); Sahni (2004)及其所引文献．

习 题

~1. 试验证度规(10-1-12)的曲率张量 ${}^{(3)}R_{abc}{}^{d}$ 满足 ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = 2\bar{R}^{-2}\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$．

2. 试证各向同性观者的世界线是测地线．提示：利用式(10-2-5)后的克氏符表达式及式(5-7-2)几乎一望而知．

3. 试用如下步骤导出宇宙学红移公式(10-2-8)：

(a) 证明沿任一类光测地线 $\eta(\beta)$ (β 为仿射参数)有 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta = -K^a K^b \nabla_a Z_b$，其中

$$K^a \equiv (\partial/\partial\beta)^a, \qquad Z^a \equiv (\partial/\partial t)^a, \qquad \omega \equiv -g_{ab}Z^a K^b .$$

(b) 证明 $\nabla_a Z_b = (\dot{a}/a)\,h_{ab}$，其中 h_{ab} 是由 g_{ab} 在均匀面上的诱导度规，$\dot{a} \equiv \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$．

提示：先证明 $\nabla_a Z_b$ 是空间张量场，即 $Z^a\nabla_a Z_b = 0 = Z^b\nabla_a Z_b$，再证明待证等式两边作用于 $(\partial/\partial x^i)^a(\partial/\partial x^j)^b$ $(i, j = 1, 2, 3)$ 得相同结果．

(c) 利用(a)、(b)的结果推出 $\mathrm{d}\omega/\omega = -\mathrm{d}a/a$，从而得式(10-2-8)．

4. 宇宙当今年龄是宇宙从 $a = 0$ 演化至 $a_0 \equiv a(t_0)$ 所需的时间．给定任一 a 值都可谈及宇宙的尺度因子演化至该值所需的时间，称为该 a 值相应的宇宙年龄，因此年龄 t 可看作 a 的函数．

(a) 从式(10-2-29)和(10-2-25)出发证明 $\Lambda = 0$ 的物质宇宙的年龄函数由以下三式给出：

对 $\Omega_0 = 1$，
$$t = \frac{2}{3}H_0{}^{-1}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2},$$

对 $\Omega_0 > 1$，

$$t = H_0^{-1}\left\{\frac{\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{3/2}}\cos^{-1}\left[1-2(1-\Omega_0^{-1})\frac{a}{a_0}\right]-\frac{1}{\Omega_0-1}\left[\Omega_0\frac{a}{a_0}-(\Omega_0-1)\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right]^{1/2}\right\},$$

对 $\Omega_0<1$，

$$t = H_0^{-1}\left\{\frac{-\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}}\mathrm{ch}^{-1}\left[1-2(1-\Omega_0^{-1})\frac{a}{a_0}\right]+\frac{1}{1-\Omega_0}\left[\Omega_0\frac{a}{a_0}+(1-\Omega_0)\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right]^{1/2}\right\}.$$

(b) 由以上三式导出 $\Omega_0=1$，$\Omega_0>1$ 和 $\Omega_0<1$ 三种情况下当今宇宙年龄 t_0 的表达式.

~5. 试证含 Λ 项的爱因斯坦方程即使无物质场($T_{ab}=0$)也不允许平直度规解. 提示：从含 Λ 项的爱因斯坦方程出发求得 R 与 T 的关系，以此消去方程中的 R，便发现 $T_{ab}=0$ 时 R_{ab} 不能为零.

6. 试证 $k=-1$ 和 $k=+1$ 的 RW 度规也是(局部)共形平直的.

提示：用式(10-4-2)定义 $\hat{t}$，把式(10-1-17a)和(10-1-17b)的线元改用坐标 $\hat{t},\psi,\theta,\varphi$ 表出，再分别对 $k=-1$ 和 $k=+1$ 的情况做如下坐标变换 $(\hat{t},\psi)\mapsto(\tilde{t},\tilde{r})$：

对 $k=-1$，令 $\qquad \tilde{t}=\mathrm{e}^{\hat{t}}\mathrm{ch}\psi,\qquad \tilde{r}=\mathrm{e}^{\hat{t}}\mathrm{sh}\psi$，

对 $k=+1$，令

$$\tilde{t}=\tan\frac{1}{2}(\hat{t}+\psi)+\tan\frac{1}{2}(\hat{t}-\psi),\quad \tilde{r}=\tan\frac{1}{2}(\hat{t}+\psi)-\tan\frac{1}{2}(\hat{t}-\psi),$$

则线元分别取如下的明显共形平直形式：

对 $k=-1$，$\qquad \mathrm{d}s^2=a^2(t(\hat{t}))\,\mathrm{e}^{-2\hat{t}}[-\mathrm{d}\tilde{t}^2+\mathrm{d}\tilde{r}^2+\tilde{r}^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]$，

对 $k=+1$，

$$\mathrm{d}s^2=\frac{a^2(t(\hat{t}))}{4}(\cos\hat{t}+\cos\psi)^2[-\mathrm{d}\tilde{t}^2+\mathrm{d}\tilde{r}^2+\tilde{r}^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)].$$

~7. 设 p 为各向同性观者 G 世界线上的一点，试证 G 在 t_p 时刻的视界距离满足式(10-4-5). 提示：利用式(10-1-28)和(10-2-7).

*~8. (a) 设 $\eta(\beta)$ 是径向($\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\beta=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\beta=0$)类光测地线，$p_1=(t_1,\psi_1,\theta,\varphi)$ 和 $p_2=(t_2,\psi_2,\theta,\varphi)$ 是 η 上任意两点，试证对 $k=1,\ 0,\ -1$ 三种情况都有

$$\psi_2-\psi_1=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t/a(t)\,.$$

(b) 对 $k=1$ 的宇宙，从大爆炸奇点发出的任一径向光线在膨胀着的 3 球面上沿大圆弧前进. 试证：(b1) 对物质宇宙，该光线在 3 球面膨胀至最大时刚走完半个大圆，在 3 球面又缩为一点(大挤压)时刚走完一个大圆. 因此，在球面膨胀至最大时任一各向同性观者只要向各个方向看去，总能看到任一各向同性粒子发来的光，表明他的粒子视界从膨胀至最大时开始消失[参见 Wald (1984) P. 106]. (b2) 对辐射宇宙，该光线在 3 球面又缩为一点(大挤压)时刚刚走完半个大圆. 因此，任一各向同性观者的任一时刻都存在粒子视界.

附录A　几何与非几何单位制的转换

讨论单位制时应注意量和数的区别. 除了量的等式(quantity equation)之外，更为常用的是数的等式(numerical-value equation). 数的等式的形式取决于单位制，因此在记忆物理公式时应同时记住它在什么单位制中成立. 由于相对论经常涉及真空光速和引力常量，把它们的数值都取为 1(即 $c = G = 1$)可以简化大量公式，与此相应的单位制叫做**几何单位制**(system of geometrized units). 然而在计算物理量的数值时几何单位就嫌不便. 现在介绍物理公式在几何制和非几何制(以国际制为例)之间的转换法则.

为避免混淆，我们用粗体和非粗体字母分别代表量和数(仅限于本附录中). 非几何单位制通常取时间 $\boldsymbol{T}$、长度 $\boldsymbol{L}$ 和质量 $\boldsymbol{M}$ 为力学领域的基本量. 在几何单位制中，由于 $c = G = 1$，时间、长度和质量三者的单位只有一个可任意选择，因此可认为基本量只有一个，例如可选时间为基本量，并选 s (秒)为其单位(基本单位). 然而，$c = 1$ 的实质是以光速作为速度单位，所以可认为速度 $\boldsymbol{V}$ 也是几何制的基本量，光速是基本单位. 同理，$G = 1$ 暗示引力常量 $\boldsymbol{G}$ 也是几何制的基本量. 所以也可认为几何制有 3 个基本量，即 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{G}$. 事实上，同一单位制的基本量的个数存在灵活性，可根据具体场合的需要选择. 设 $\boldsymbol{A}$ 为任一量，其数值在国际制与几何制中分别为 A 和 A'，则两者之比

$$\chi \equiv A'/A \tag{A-1}$$

称为量 $\boldsymbol{A}$ 在两制之间的**转换因子**(conversion factor). χ 之所以不等于 1，是因为 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的单位在两制中有所不同. $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的国际制单位分别是 s, kg 和 m. 在几何制中，唯一肯定的是 $c = G = 1$，至于 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ 的单位，则尚有一定灵活性. 为便于两制间的比较，我们约定几何制中的时间单位也为 s. 在此约定下便可由 $c = G = 1$ 确定 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的几何制单位，不再有灵活性(见选读 A-1). 根据量纲分析，导出单位随基本单位改变而改变的依从关系由量纲式给出：

$$[A] = [T]^{\tau}[L]^{\lambda}[M]^{\mu}. \tag{A-2}$$

在只关心几何制与国际制(或高斯制)之间的转换时，时间单位在两制中相同使上式的 $[T]^{\tau}$ 可被略去：

$$[A] = [L]^{\lambda}[M]^{\mu}. \tag{A-3}$$

量纲式所描述的是导出单位随基本单位的改变而改变的依从关系. 例如，只要把上式中的$[L]$和$[M]$分别看作基本量 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的单位的改变倍数，则$[A]$代表导出量 $\boldsymbol{A}$ 的单位的相应改变倍数. 在这种理解中$[A]$，$[L]$和$[M]$都代表数，式(A-3)要理解为

数的等式. L, M 单位的改变导致速度 V 和引力常量 G 的单位的相应改变，依从关系为

$$[V]=[L], \qquad [G]=[L]^3[M]^{-1}, \tag{A-4}$$

上式同式(A-3)结合得

$$[A]=[V]^{\lambda+3\mu}[G]^{-\mu}. \tag{A-5}$$

设从国际制变到几何制时 L, M 单位的改变倍数分别为[L], [M], 则 V, G 单位的改变倍数为式(A-4)的[V],[G],而 A 单位的改变倍数则为式(A-5)的[A],与式(A-1)对比可知 $\chi=[A]$. 光速和真实引力常量的数值在国际制中分别为 c 和 G, 在几何制中皆为 1, 故 $[V]=1/c$, $[G]=1/G$, 代入式(A-5)得 $[A]=c^{-\lambda-3\mu}G^{\mu}$. 因此

$$\chi=c^{-\lambda-3\mu}G^{\mu}. \tag{A-6}$$

式(A-1)和(A-6)表明，欲由 A 在几何制中的数值 A' 求得它在国际制中的数值 A, 只须知道量 A 关于基本量 L 和 M 的量纲指数 λ 和 μ, 而这很易推出或查得.

例 1　试由施瓦西半径在几何制的表达式 $r'_S=2M'$ 求它在国际制的表达式.

解　设 A 是这样一个量，它在国际制中的数定义为 $A\equiv r_S/M$, 则它在几何制中的数为 $A'\equiv r'_S/M'=2$. 由 $[A]=[L][M]^{-1}$ 可得 $\lambda=1$, $\mu=-1$, 由式(A-6)又得 $\chi=c^2G^{-1}$, 再由 $\chi\equiv A'/A$ 便得 $A'=c^2G^{-1}A$, 故 $r_S/M\equiv A=c^{-2}GA'=2c^{-2}G$, 因而施瓦西半径的国际制表达式为 $r_S=2GM/c^2$.　　**[解毕]**

例 2　求观者 4 速 Z'^a 在几何制中的类时归一条件 $Z'^aZ'_a=-1$ 的国际制形式.

解　$Z'^aZ'_a=-1$ 等价于 $g'_{\mu\nu}(\mathrm{d}x'^{\mu}/\mathrm{d}\tau')(\mathrm{d}x'^{\nu}/\mathrm{d}\tau')=-1$. 选 x^μ, x^ν 为长度坐标，则由 $\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 知 $[g_{\mu\nu}]=1$, $[\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau]=[T]^{-1}[L]$, 故对量 $\mathbf{d}x^\mu/\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$ 有 $\lambda=1$, $\mu=0$, $\chi=c^{-1}$,

$$g'_{\mu\nu}(\mathrm{d}x'^{\mu}/\mathrm{d}\tau')(\mathrm{d}x'^{\nu}/\mathrm{d}\tau')=c^{-2}g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\tau)(\mathrm{d}x^{\nu}/\mathrm{d}\tau),$$

因而 $g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau)(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}\tau)=-c^2$, 即 $Z^aZ_a=-c^2$.　　**[解毕]**

例 3　10.2.2 小节用到光子角频率的几何制表达式 $\omega'=\mathrm{d}t'/\mathrm{d}\beta'$ (β 是光子世界线的仿射参数). 求其国际制形式.

解　先弄清 $\boldsymbol{\beta}$ 的量纲. 光子的 4 波矢 $K'^a=(\partial/\partial\beta')^a$. 由 $K'^a=\omega'(\partial/\partial t')^a+k'^a$ 可知 $[K^a]=[k^a]$, ① 而 $k^a=k^i(\partial/\partial x^i)^a$, 其中 k^i 为 3 波矢分量, $[k^i]=[L]^{-1}$, 因而 $[K^i]=[L]^{-1}$, 故 $[\beta]=[L]^2$. 式 $\omega'=\mathrm{d}t'/\mathrm{d}\beta'$ 可改写为 $\omega'\mathrm{d}\beta'/\mathrm{d}t'=1$. 令 $A'\equiv\omega'\mathrm{d}\beta'/\mathrm{d}t'$, 则 $[A]=[T]^{-2}[L]^2$, 故 $\lambda=2$, $\mu=0$, $\chi=c^{-2}$, $A'=c^{-2}A$, 即 $\omega'\mathrm{d}\beta'/\mathrm{d}t'=c^{-2}\omega\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$,

---

① 矢量的量纲可定义为它作用于无量纲标量场所得实数(量)的量纲. 依次推广可定义对偶矢量和张量的量纲.

所以 $\omega = c^2 \mathrm{d}t/\mathrm{d}\beta$.　　**[解毕]**

在广义相对论中经常出现张量 g_{ab}，$R_{abc}{}^{d}$，R_{ab} 和 R 等. 在涉及单位变换时就要知道它们的量纲. 为便于变换，先证明如下结论(量纲式中指标可以不平衡)：

$$(1)[g_{ab}] = [L]^2, \quad (2)[\nabla_a \omega_b] = [\omega_b], \quad (3)[R_{abc}{}^{d}] = 1, \tag{A-7}$$
$$(4)[R_{abcd}] = [L]^2, \quad (5)[R_{ac}] = 1, \quad (6)[R] = [L]^{-2}.$$

证明

(1) 因 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ 的实质是 $g_{ab} = g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b$，故 $[g_{ab}] = [\mathrm{d}s^2] = [L]^2$ (对此不甚理解的读者也可从分量的角度来考虑. 当 x^μ，x^ν 都为长度坐标时，由 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ 及 $[\mathrm{d}s^2] = [L]^2$ 可知 $[g_{\mu\nu}] = 1$. 再由 $g_{ab} = g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b$ 便知 $[g_{ab}] = [L]^2$. 应该注意的是，与 $[g_{ab}]$ 的绝对性不同，$[g_{\mu\nu}]$ 依赖于所涉及的坐标的量纲.).

(2) $[\nabla_a \omega_b] = [\partial_a \omega_b] = [(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b \partial \omega_\nu / \partial x^\mu] = [(\mathrm{d}x^\nu)_b][\omega_\nu] = [\omega_b]$.

(3) $\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^{d}\omega_d$. 考虑到 $[\nabla_a \nabla_b \omega_c] = [\omega_c]$，便有 $[R_{abc}{}^{d}\omega_d] = [\omega_d]$，从而 $[R_{abc}{}^{d}] = 1$.

(4) $[R_{abcd}] = [g_{de}R_{abc}{}^{e}] = [L]^2$.

(5) $[R_{ac}] = [g^{bd}R_{abcd}] = [L]^{-2}[L]^2 = 1$.

(6) $[R] = [g^{ac}R_{ac}] = [L]^{-2}$.　　□

例 4　试由爱因斯坦方程的几何制形式 $R'_{ab} - R'g'_{ab}/2 = 8\pi T'_{ab}$ 求出其国际制形式.

解　为简单起见(又不失一般性)，以理想流体为例. 理想流体的能动张量为

$$T'_{ab} = (\rho' + p')U'_a U'_b + p'g'_{ab}.$$

由于相加项量纲相同，只须考虑方程 $R'_{ab} = 8\pi p' g'_{ab}$ 如何变换. 因 $[R_{ab}] = 1$，故 $R'_{ab} = R_{ab}$. 又因 $[pg_{ab}] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}\cdot[L]^2 = [M][L][T]^{-2}$，故对量 pg_{ab} 而言有 $\lambda = \mu = 1$，$\chi = c^{-4}G$，因而 $p'g'_{ab} = c^{-4}Gpg_{ab}$，于是 $R_{ab} = 8\pi c^{-4}Gpg_{ab}$. 可见爱因斯坦方程的国际制形式为

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi G T_{ab}/c^4. \tag{A-8}$$

[解毕]

以上只讨论了力学领域的单位转换问题，其中的非几何制虽然以国际制为例，但对高斯制同样适用. 然而，当涉及电磁领域时，就要补上第 4 个基本量，国际制与高斯制的区别就显露出来. 国际制的第 4 个基本量是电流 $\boldsymbol{I}$，基本单位是安培；高斯制的第 4 个基本量是介电常量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，基本单位是真空介电常量 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (因而数

$\varepsilon_0=1$). 相应地，涉及电磁量的几何制公式也有两种形式，不妨称之为“几何国际制”和“几何高斯制”形式. 除基本要求 $c=G=1$ 外，几何高斯制还要求 $\varepsilon_0=1$，几何国际制则约定电流的单位为安培. 为同国际文献接轨，本书凡涉及电磁量的公式都采用几何高斯制形式. 不涉及电磁量的公式在两种几何制中形式相同. 不难看出前面的方法对从几何高斯制到高斯制的转换以及从几何国际制到国际制的转换都适用. 例如，读者不难将 RN 线元的几何高斯制形式

$$\mathrm{d}s'^2=-\left(1-\frac{2M'}{r'}+\frac{Q'^2}{r'^2}\right)\mathrm{d}t'^2+\left(1-\frac{2M'}{r'}+\frac{Q'^2}{r'^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r'^2+r'^2(\mathrm{d}\theta'^2+\sin^2\theta'\mathrm{d}\varphi'^2) \tag{A-9}$$

转换为如下的高斯制形式：

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GQ^2}{c^4r^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GQ^2}{c^4r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{A-10}$$

为便于参考，我们把本书中涉及电磁量的部分公式的几何国际制形式列在下面(去掉式号的 * 便得该式相应的几何高斯制形式在本书的式号)：

$$\partial^a F_{ab}=-\varepsilon_0{}^{-1}J_b\,, \tag{6-6-10*}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\partial\vec{E}/\partial t\,. \tag{6-6-12*}$$

$$T_{ab}=\varepsilon_0(F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd})\,. \tag{6-6-28*}$$

$$T_{ab}=\frac{\varepsilon_0}{2}(F_{ac}F_b{}^c+{}^*F_{ac}{}^*F_b{}^c)\,, \tag{6-6-28′*}$$

$$T_{00}=\frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2)\,,\qquad w_i=-\,T_{i0}=\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})_i,\qquad i=1,2,3\,, \qquad \text{(原式无编号)}$$

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,, \tag{8-4-26*}$$

$$F_{ab}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}r)_b \qquad \text{或} \qquad A_a=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}(\mathrm{d}t)_a\,. \tag{8-4-27*}$$

式(8-8-7)中所有 $1/2\pi$ 改为 $2\varepsilon_0$，式(8-8-8)和(8-8-9)中所有系数 2 改为 $8\pi\varepsilon_0$. 第 8 章习题 10 的 $-2\pi J_\mu$ 改为 $-\frac{1}{2}\varepsilon_0J_\mu$.

[选读 A-1]

本选读对几何制做进一步的介绍(仍只限于力学领域). 问：几何制中长度 L 和质量 M 的单位(作为量)是多大？选择 T, V, G 为基本量对回答这一问题带来方便. L 和 M 关于这 3 个基本量的量纲式为

$$[L]=[T][V], \qquad [M]=[T][V]^3[G]^{-1}. \tag{A-11}$$

以$L_{几}$和$L_{国}$分别代表用几何制和国际制长度单位测同一长度所得的数，则$L_{几}/L_{国}=[L]$. 注意到时间单位在几何制和非几何制中相同，光速在几何制和非几何制中的数值分别为1和$c=3\times10^8$，可知$[L]=1/c$，于是上式给出$L_{国}=cL_{几}$. 可见

$$几何制长度单位=c\times国际制长度单位=3\times10^8\text{m}. \tag{A-12}$$

类似地，由式(A-11)第二式及$[G]=1/G$(其中数$G=6.67\times10^{-11}$)得

$$几何制质量单位=\frac{c^3}{G}\times国际制质量单位=\frac{(3\times10^8)^3}{6.67\times10^{-11}}\times\text{kg}=4\times10^{35}\text{kg}. \tag{A-13}$$

反之，当问题不涉及$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{G}$的单位改变时，把几何制看作只有一个基本量$\boldsymbol{T}$又有许多好处. 这时可把时间、长度和质量这三类原本不同的量看作同一类量，认同的“钥匙”是把1s，3×10^8m和4×10^{35}kg这三个量视为相等，即

$$1\text{s}=3\times10^8\text{m}=4\times10^{35}\text{kg}, \tag{A-14}$$

从而使所有量要么没有单位，要么以s[或s的“幂函数”(其实是量)]为单位. 例如，①地球相对于银河系中心的速率$v\cong10^{-3}$，这一数值($\ll1$)强烈表明地球速率之低，使得地球观者对宇宙的观测结果可被看作银河系中心的(假想)观者的观测结果. ②地日距离在几何制中约为480s，直观地表明光从太阳到地球要走8min. ③地球的半径和质量在几何制中分别为$R_\oplus\cong2\times10^{-2}$s和$M_\oplus\cong1.5\times10^{-11}$s，$M_\oplus<<R_\oplus$表明地球表面的引力场弱到使牛顿理论在绝大多数情况下很好地成立. **[选读A-1完]**

几何单位制对广义相对论十分方便. 不涉及引力的量子理论则经常使用**自然单位制**(system of natural units)，其中$c=\hbar=1$. 往往还根据涉及的领域而把第3个**物理常数**设为1，例如在经常涉及热力学时选k(玻尔兹曼常数)为1，在经常涉及原子物理时选m_e(电子质量相应的数)为1，在经常涉及核物理时选m_p或m_n(质子或中子质量相应的数)为1，在涉及引力时(如量子引力理论)选$G=1$. $G=c=\hbar=1$的单位制又称**普朗克单位制**. 下面讨论普朗克制与国际制之间的转换. 与几何制相比，普朗克制在$G=c=1$之外又加上$\hbar=1$的限制，使得时间(因而所有量)的单位不再有任选的自由，因此要从式(A-2)[而不是(A-3)]出发，并把式(A-4)改为

$$[V]=[T]^{-1}[L], \qquad [G]=[T]^{-2}[M]^{-1}[L]^3. \tag{A-15}$$

式(A-2)和(A-15)结合得

$$[A]=[V]^{\lambda+3\mu}[G]^{-\mu}[T]^{\lambda+\mu+\tau}. \tag{A-16}$$

不难证明由光速、引力常量和约化普朗克常量构成的有时间量纲的“唯一”量是普朗克时间$\boldsymbol{t_P}$，它在国际制的数值为$t_P=(G\hbar/c^5)^{1/2}\sim10^{-43}$(s)，其中$c$，$G$和$\hbar$分别是光速、引力常量和约化普朗克常量的国际制数值. 这3个量在普朗克制中的

数值皆为 1，故$[V]=1/c$，$[G]=1/G$，$[T]=1/t_P$. 设$\tilde{\chi}$是量A在国际制和普朗克制间的转换因子，则由式(A-16)得

$$\tilde{\chi}=c^{-\lambda-3\mu}G^{\mu}t_P{}^{-(\lambda+\mu+\tau)}=c^{-\lambda-3\mu}G^{\mu}(G\hbar/c^5)^{-(\lambda+\mu+\tau)/2}. \tag{A-17}$$

例 5　光子能量$\boldsymbol{E}$与频率$\boldsymbol{\nu}$的关系在普朗克制的形式为$E'=2\pi\nu'$，求其国际制形式.

解　设$\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{E}/\boldsymbol{\nu}$，则$[A]=[E][\nu]^{-1}=[T]^{-1}[M][L]^2$，故$\tau=-1$，$\mu=1$，$\lambda=2$，代入式(A-17)得

$$\tilde{\chi}=c^{-5}G\,(G\hbar/c^5)^{-1}=\hbar^{-1}.$$

因而$A'=\tilde{\chi}A=\hbar^{-1}A$，即$E'/\nu'=\hbar^{-1}E/\nu$. 于是由$E'/\nu'=2\pi$得$E/\nu=2\pi\hbar$，或$E=2\pi\hbar\nu$.　**[解毕]**

例 6　由光速、引力常量和约化普朗克常量构成的有质量量纲的“唯一”量是普朗克质量$\boldsymbol{m}_P$，它在普朗克制的数值为$m'_P=1$，求它在国际制的数值m_P.

解　由$[m_P]=[M]$知$\tau=\lambda=0$，$\mu=1$，代入(A-17)得$\tilde{\chi}=c^{-3}G\,(G\hbar/c^5)^{-1/2}=(\hbar c/G)^{-1/2}$，故$m'_P=\tilde{\chi}m_P=(\hbar c/G)^{-1/2}m_P$，于是由$m'_P=1$便得$m_P=(\hbar c/G)^{1/2}$. 以国际制数值$\hbar=10^{-34}$，$c=3\times10^8$，$G=6.67\times10^{-11}$代入得$m_P=2.1\times10^{-8}\text{kg}$.　**[解毕]**

习　题

1. 质点的能量、质量和动量关系的几何制形式为$E'^2=m'^2+p'^2$，求其国际制形式.

2. 试由流体静力学方程的几何制表达式$\mathrm{d}p'/\mathrm{d}r'=-\rho'm'/r'^2$求其国际制表达式.

3. 非相对论流体动力学的欧拉方程的几何制形式为$-\nabla p'=\rho'\left[\partial\vec{u}'/\partial t'+(\vec{u}'\cdot\nabla)\vec{u}'\right]$，求其国际制形式.

4. 试证几何制公式$U'^a=\gamma(Z'^a+u'^a)$ [式(6-3-30)]和$\omega'=-K'^aZ'_a$ [式(6-6-42)]在国际制中有相同形式.

5. 某些文献[如 Sachs and Wu (1977)]的几何制用$c=1=8\pi G$定义(时间单位仍为 s). 求长度和质量在该制中的单位(解此题时宜将引力常量看作几何制的基本量之一).

6. 由光速、引力常量和约化普朗克常量构成的有长度量纲的“唯一”量是普朗克长度$\boldsymbol{l}_P$，它在普朗克制的数值为$l'_P=1$，求它在国际制的数值l_P.

惯例与符号

关于惯例的说明

(1) 本书从§2.6 开始采用抽象指标记号代表张量．例如，v^a代表矢量，其中拉丁字母 a 与常用记号 $\vec{v}$ 中的→的作用类似，称为抽象指标．不要把v^a理解为矢量v的第 a 个分量．涉及分量时以希腊字母作为指标(称为具体指标)，例如v^μ代表矢量v^a的第μ个分量．只有一种情况例外：4 维时空中一个矢量v^a有 3 个空间分量，我们沿用多数文献的惯例，以v^i (其中$i=1,2,3$)代表v^a的第 i 个分量．这虽然违反了“拉丁字母代表抽象指标”的约定，但会带来许多方便．为了不与抽象指标$a,b,c,d,e,\cdots$相混淆，我们只用拉丁字母中从 i 起的若干字母(常用的是 i，j，k)作为空间分量的编号，实践表明通常不会产生混淆．关于指标问题，详见§2.6.

(2) 本书对 4 维时空的度规采用 $-+++$的号差惯例.

(3) 不同文献对黎曼张量$R_{abc}{}^d$和里奇张量 R_{ab} 有不同的定义惯例．本书采用的惯例与 Wald (1984)一致.

符号一览表

{ }	集合．首次出现于§1.1．例：X={1，4，5.6}代表由实数 1，4 及 5.6 构成的集合.
$\mathbb{R}$	全体实数的集合．首次出现于§1.1.
$\mathbb{N}$	全体自然数的集合．首次出现于§1.3.
S^n	n维球面.
$\forall x$	对任一 x．首次出现于§1.1.
$\exists$	存在．首次出现于§1.1.
$\in$	属于．首次出现于§1.1．例：$x\in X$ 代表“x 属于集 X”，即 x 是集 X 的元素.
$\notin$	不属于．首次出现于§1.1.
$\subset$	含于．首次出现于§1.1．例：$A\subset X$ 代表“A 含于集 X”，即 A 是集 X 的子集.
$\cup$	并(见§1.1 定义 2).
$\cap$	交(见§1.1 定义 2).
$-$	集合之差．例：$A-B$ 代表集合 A 与 B 的差集(见§1.1 定义 2).
$-A$	A 的补集(见§1.1 定义 2).

$\varnothing$	空集. 首次出现于§1.1.
$:=$	定义为. 首次出现于§1.1.
$\equiv$	恒等或代表. 首次出现于§1.1. 例: $A \equiv B \cup C$ 意为"以 A 代表 $B \cup C$".
$\cong$	近似等于.
$\Rightarrow$	蕴含(可推出). 例: 命题 $A \Rightarrow$ 命题 B 代表由命题 A 可推出命题 B.
$\Leftrightarrow$	等价.
$\times$	卡氏积(见§1.1 定义 3).
$\square$	(置于行末, 表示证明完毕或略去证明.)
$\mathbb{R}^n$	以 n 个有序实数 $(x^1,\cdots,x^n)$ 为元素的集合, 即 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (共 n 个 $\mathbb{R}$).
$\otimes$	张量积(见§2.4 定义 2).
$:\rightarrow$	映射. 首次出现于§1.1. 例: $f: X \to Y$ 代表"由集 X 到集 Y 的映射".
$f[A]$	设 $f: X\to Y$, $A \subset X$, 则 A 在 f 作用下的像记作 $f[A]$, 以区别于 $x\in X$ 在 f 下的像 $f(x)$.
$\mapsto$	映射的像. 例: 设 $f: X\to Y$, $x\in X$, $y \in Y$, 则 $x \mapsto y$ 代表"x 的像是 y".
$\circ$	复合映射. 首次出现于§1.1. 例: $\phi\circ\psi$ 代表映射 ψ 和 ϕ 的复合映射(先 ψ 后 ϕ).
$(X,\mathscr{T})$	以 X 为底集、$\mathscr{T}$ 为拓扑的拓扑空间(见§1.2 定义 2 及其后的一段).
$\mathscr{T}_{\mathrm{u}}$	通常拓扑(见§1.2 例 3).
C^r	r 阶导函数存在并连续.
C^∞	光滑(即任意阶导函数存在).
$\bar{A}$	集 A 的闭包(见§1.2 定义 8).
$\mathrm{i}(A)$	集 A 的内部(见§1.2 定义 9).
$\dot{A}$ 或 ∂A	集 A 的边界(见§1.2 定义 10).
T_2 空间	豪斯多夫空间(见§1.3 定义 3).
$\dim V$	V 的维数.
V^*	矢量空间 V 的对偶空间. 首次出现于§2.3.
V_p	流形中一点 p 的切空间. 首次出现于§2.2.
V_p^*	矢量空间 V_p 的对偶空间.
$\vec{E}$	3 维(空间)矢量(字母上加箭头而不用粗体, 粗体另有用处, 见后面的 $\boldsymbol{\omega}$.).
e_μ 或 $(e_\mu)^a$	所选基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 中的第 μ 个基矢.
$e^{\mu *}$ 或 $(e^\mu)_a$	基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 的第 μ 个对偶基矢.

$\partial/\partial x^\mu$ 或 $(\partial/\partial x^\mu)^a$	第 μ 个坐标基矢．首次出现于§2.2 例 2.
$\mathrm{d}x^\mu$ 或 $(\mathrm{d}x^\mu)_a$	第 μ 个对偶坐标基矢．首次出现于式(2-3-8)后.
$\mathscr{T}_V(k,l)$	矢量空间 V 上全体 (k,l) 型张量的集合．首次出现于§2.4 例 1 后.
$\mathscr{F}_M$ 或 $\mathscr{F}$	流形 M 上全体光滑函数的集合(见§2.1 定义 5).
$\mathscr{F}_M(k,l)$	流形 M 上全体光滑 (k,l) 型张量场的集合．首次出现于§3.1 定义 1.
$\tilde{A}$	矩阵 A 的转置矩阵.
$[u,v]$	矢量场 u 和 v 的对易子(见§2.2 定义 10).
C	缩并．例：设 $T\in\mathscr{T}_V(2,2)$，则 C_2^1T 代表 T 的第一上指标与第二下指标的缩并．首次出现于§2.4 注 2．用抽象指标表示则为 $\mathrm{C}_2^1T\equiv T^{ab}{}_{ca}$.
δ 或 δ_{ab}	欧氏度规(见§2.5 定义 8).
η 或 η_{ab}	闵氏度规(见§2.5 定义 10).
$\delta^a{}_b$	恒等映射．首次出现于式(2-6-4)所在段.
$g(u,v)$	度规张量 g 作用于矢量 u 和 v 的结果．首次出现于§2.5 定义 1．与 $g_{ab}u^av^b$ 同义.
$T_{(abc)}$	对指标 a，b，c 做全对称化处理[定义见式(2-6-13)].
$T_{[abc]}$	对指标 a，b，c 做全反称化处理[定义见式(2-6-14)].
∇_a	导数算符(见§3.1 定义 1).
∂_a	某坐标系的普通导数算符[定义见式(3-1-9)]．在狭义相对论中又专指惯性坐标系的普通导数算符，满足 $\partial_a\eta_{bc}=0$.
$\Gamma^a{}_{bc}$	导数算符在某坐标系的克氏符(见§3.1 定义 2).
$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$	克氏符 $\Gamma^a{}_{bc}$ 在所在坐标系的分量，也简称克氏符.
exp	指数映射(定义见选读 3-3-1).
ϕ^*	映射 ϕ 诱导的拉回映射(见§4.1 定义 1 和 3).
ϕ_*	映射 ϕ 诱导的推前映射(见§4.1 定义 2 和 4).
$\mathscr{L}_vT^{\cdots}{}_{\cdots}$	张量场 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 沿矢量场 v^a 的李导数(见§4.2 定义 1).
$\boldsymbol{\omega}$	微分形式(场)(用粗体以省略下标)．例如，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是体元(n 形式场) $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 的粗体简写.
${}^*\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\omega}$ 的对偶微分形式(见§5.6 定义 1).
$\Lambda(l)$	矢量空间 V 上全体 l 形式的集合．首次出现于定理 5-1-2 后.
$\Lambda_M(l)$	流形 M 上全体 l 形式场的集合．首次出现于§5.1 定义 3 前一行.
$\Lambda_p(l)$	p 点的(即 V_p 上的)全体 l 形式的集合．首次出现于§5.6 开头.
d	外微分算符(见§5.1 定义 3)．例：$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ 代表微分形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 的外微分.
$\wedge$	楔形积(见§5.1 定义 2).

$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$	联络 1 形式．也记作 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$．首次出现于式(5-7-4).
$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$	曲率 2 形式，也记作 $R_{ab\mu}{}^\nu$．首次出现于式(5-7-7).
$\mathscr{R}$	参考系．首次出现于 6.1.1 小节.
$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}$	沿曲线 $G(\tau)$ 的协变导数．例：$\dfrac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau}$ 与 $T^b\nabla_b v^a$ 同义[T^b 代表 $G(\tau)$ 的切矢].
$\dfrac{\mathrm{D_F}}{\mathrm{d}\tau}$	沿曲线 $G(\tau)$ 的费米导数(见§7.3 定义 1).
Re	取实部.
Im	取虚部.
$(\varepsilon_\mu)^a$	类光标架中的第 μ 个基矢．首次出现于§8.7.

参 考 文 献

陈省身, 陈维桓. 1983. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社

冯麟保. 1994. 宇宙学引论. 北京: 科学出版社

Guth A H and Steinhardt P J. 1984. 刘汝良译. 爆胀宇宙. 科学美国人 (Scientific American). 1984 年第 9 期: 50-62

郭硕鸿. 1995. 电动力学. (第二版). 北京: 高等教育出版社

Kline M. 李宏魁译. 1997. 数学: 确定性的丧失. 长沙: 湖南科学技术出版社

刘辽. 1987. 广义相对论. 北京: 高等教育出版社

熊金城. 1981. 点集拓扑讲义. 北京: 人民教育出版社

俞允强. 1997. 广义相对论引论 (第二版). 北京: 北京大学出版社

周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章克本. 1992. 流体力学(上册). 北京: 高等教育出版社

Abraham R and Marsden J. 1967. *Foundations of Mechanics*. New York: W A Benjamin, INC

Albrecht A. and Steinhardt P J. 1982. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry. *Phys Rev Lett*, **48**: 1220-1223

Bergmann P G. 1976. *Introduction to the theory of relativity*. New York: Dover Publications INC.

Blau S and Guth A. 1987. Inflationary cosmology. in: *Three Hundred Years of Gravitation*. ed. S Hawking and W Israel. Cambridge: Cambridge University Press

Bonnor W B. 1994. The Photon Rocket. *Class Quantum Grav*, **11**: 2007-2012

Carmeli M. 1982. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley and Sons

Carroll S. 2003. Why is the universe accelerating. arXiv: astro-ph/0310342 v2

Carroll S, Press W and Turner E. 1992. The cosmological constant. *Annu Rev Astron Astrophys*, **30**: 499-542

Chandrasekhar S. 1939. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago: University of Chicago Press

Chillingworth D. 1976. *Differential Topology with a View to Applications*. London: Pitman Publishing

Dain S, Moreschi O M and Gleiser R J. 2002. Photon rockets and the Robinson-Trautman geometry. arXiv: gr-qc/0203064 v1

Damour T and DARC-CNRS. 1994. Photon rockets and gravitational radiation. arXiv: gr-qc/9412063 v1

d'Inverno R A. 1992. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Clarendon Press

Fock V A. 1939. Sur le mouvement des masses finies d'Apres la theorie de gravitation Einsteinienne. *J Phys U S S R*, **1**: 81-116

Geroch R P. 1968. What is a singularity in general relativity. *Ann Phys* **48**: 526-540

Geroch R P and Jang P S. 1975. Motion of a body in general relativity. *J Math Phys*, **16**: 65-67

Guth A H. 1981. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys Rev*, D**23**: 347-356

Guth A H. 1983. Speculations on the origin of the matter, energy and entropy of the universe. In: *Asymptotic Realms of Physics: Essays in Honor of Francis E Low*, ed. A H Guth, K Huang and R L Jaffe. Cambidge: MIT Press

Hafele J C and Keating R E. 1972. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. *Science*, **177**: 166-167; Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains. *Science*, **177**: 168-170

Hawking S W and Ellis G F R. 1973. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press

Jackson J D. 1962, 1975, 1998. *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley and Sons, Inc

Kinnersley W. 1969. Field of an arbitrarily accelerating point mass. *Phys Rev*, **186**: 1335-1336

Kolb E W, Matarrese S Notari A and Riotto A. 2005. Primordial inflation explains why the universe is accelerating today. arXiv: hep-th/0503117v1

Kolb E W and Turner M S. 1990. *The Early Universe*, Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company

Komar A. 1959. Covariant conservation laws in general relativity. *Phys Rev*. **113**: 934-936

Kramer D, Stephani H, Lerlt E and MacCallum M. 1980. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge:

Cambridge University Press

Krauss L M and Turner M S. 1999. Geometry and destiny. arXiv: astro-ph/9904020 v1.

Kruskal M D. 1960. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys Rev*, **119**: 1743-1745

Kuang Zhiquan, Li Jianzeng and Liang Canbin. 1986. Gauge freedom of plane-symmetric line elements with semi- plane-symmetric null electromagnetic fields. *Phys Rev*, D**34**: 2241-2245

Kuang Zhiquan, Li Jianzeng, and Liang Canbin. 1987. Completion of plane-symmetric metrics yielded by electromagnetic fields. *Gen Rela Grav*, **19**: 345-350

Kuang Zhiquan and Liang Canbin. 1988. Birkhoff and Taub theorems generalized to metrics with conformal symmetries. *J Math Phys*, **29**: 2475-2478

Letelier P S and Tabensky R R. 1974. The general solution to Einstein-Maxwell equations with plane symmetry. *J Math. Phys*, **15**: 594

Li Jianzeng and Liang Canbin. 1985. An extension of the plane-symmetric electrovac general solution to Einstein equations. *Gen Rela Grav*, **17**: 1001-1013

Li Jianzeng and Liang Canbin. 1989. Static semi-plane-symmetric metrics yielded by plane-symmetric electromagnetic fields. *J Math Phys*, **30**: 2915-2917

Liang Canbin. 1995. A family of cylindrically symmetric solutions to Einstein-Maxwell equations. *Gen Rela Grav*, **27**: 669-677

Linde A D. 1982a. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys Lett*, **108B**: 389-393

Linde A D. 1982b. Coleman-Weinberg thoery and the new inflationary universe scenario. *Phys Lett*, **114B**: 431-435

Longair M S. 1998. Galaxy formation. Berlin: Springer-Verlag

Misner C, Thorne K and Wheeler J. 1973. *Gravitation*. San Francisco: W H Freeman and Company

Newman E T and Penrose R. 1962. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J Math Phys*, **3**: 566

Ni Wei tou. 2005. Empirical foundations of relativistic gravity. arXiv: gr-qc/0504116

Ohanian H C. 1976. *Gravitation and Spacetime*. New York: W W Norton and Company Inc

Patnaik S. 1970. Einstein-Maxwell fields with plane symmetry. *Proc Camb Phil Soc*, **67**: 127

Peebles P J E. 1993. *Principles of physical cosmology*. Princeton: Princeton University Press

Peebles P J E and Ratra B. 2002. The cosmological and dark energy. arXiv: astro-ph/0207347 v2

Penrose R. 1964. Conformal treatment of infinity. In: *Relativity, Groups and Topology*, ed C DeWitt and B DeWitt. New York: Gordon and Breach

Perlmutter S, et al. 1999. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys J*, **517**: 565-586

Riess A G, et al. 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron J*, **116**: 1009-1038

Rindler W. 1982. *Introduction to Special Relativity*. Oxford: Clarendon Press

Sachs R K and Wu H. 1977. *General Relativity for Mathematicians*. New York, Beijing: Springer-Verlag, World Publishing Corporation

Sahni V. 2004. Dark Matter and dark energy. arXiv: astro-ph/0403324 v3

Sahni V and Starobinsky A. 1999. The case for a positive cosmological Λ -term. *Astro-ph / 9904398*

Schubnell M. 2003. Probing dark energy in the accelerating universe with SNAP. arXiv: astro-ph/0308404 v1

Schutz B F. 1980. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press

Speergel D N. 2003. First year Wilkinson microwave anisotropy probe. (WMAP) observations: determination of cosmological parameters. arXiv: Astro-ph/0302209 v3

Spivak M. 1970, 1979. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*(vol 1) Berkeley: Publish or Perish INC

Steigman G. 1991. Big-bang nucleosynthesis comes of age. In: *The Birth and Early Evolution of Our Universe*. ed Nilsson J S, Gustafsson B and Skagerstam B S. Singapore: World Scientific

Stephani H. 1982. General Relativity: *An Introduction to the Theory of the Gravitational Field.* Cambridge: Cambridge University Press

Straumann N. 1984. *General Relativity and Relativistic Astrophysics.* Berlin: Springer-Verlag

Synge J L. 1956. *Relativity: The Special Theory*

Synge J L. 1960. *Relativity: The General Theory.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company

Tariq N and Tupper B O J. 1976. Einstein-Maxwell metrics admitting a dual interpretation. *J Math Phys,* **17**: 292-296

Taub H. 1951. Empty space-times admitting a three parameter group of motions. *Ann Math,* **53**: 472

Turner M S. 1999. Dark matter, dark energy and fundamental physics. *Astro-ph/9912211*

Turner M S. 2002. The case for Ω_M=0.33±0.035. arXiv: astro-ph/0106035 v2

Wald R M. 1977. *Space, Time, and Gravity: The Theory of the Big Bang and Black Holes.* Chicago: The University of Chicago Press

Wald R M. 1984. *General Relativity.* Chicago: The University of Chicago Press

Weber J. 1961. *General Relativity and Gravitational Waves.* New York: Wiley-Interscience

Weinberg S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity.* New York: John Wiley; 邹振隆，张历宁等译. 1980. 引力论和宇宙论：广义相对论的原理和应用. 北京：科学出版社

Will C M. 1981, 1993. *Theory and Experiment in Gravitational Physics.* Cambridge: Cambridge University Press

Will C M. 1995. Stable clocks and general relativity. arXiv: gr-qc/9504017 v1

Will C M. 2001. The confrontation between general relativity and experiment. http//www. livingreviews. org/lrr-2001-4

索 引

A

爱因斯坦等效原理(EEP) 7.5.
爱因斯坦电梯 7.5，7.6.
爱因斯坦(场)方程 7.7，10.2.
线性~ 7.8.
有源~ 7.7，8.4，8.10.1，9.3.1.
真空~ 7.7，8.10.1，9.4.3 末.
爱因斯坦静态宇宙 10.2.4.
爱因斯坦-麦克斯韦方程 8.4.2，8.8.2.
爱因斯坦时空 8 章习题.
爱因斯坦张量 3.4.1，7.7，10.2.3.
线性~ 7.8.
暗能量 10.5.
暗物质 10.3.1 末，**10.3.2**，10.3.3 末.

B

白矮星 9.3.2.
白洞 9.4.3.
半径 8.3.1.
视界固有~ 10.4.1.
施瓦西~ 9.4 初，附录 A.
半平面对称 8.6.
暴涨 10.4.3，10.5.
被动观点(提法，语言) **4.1**，8.10.2.
本动速度 10.3.1 之 6.
比安基恒等式 **3.4**，7.7，8.7 末.
闭包 1.2.
闭的微分形式场 **5.1**，6.6.5.
闭集 1.2.
边界 **1.2**，**5.3**，5.5.
标架 **5.7**，6.3 末，7.3，8.7，8.8，
选读 8-9-1，9.1 末.
标量场 **2.1** 末，2.2.1，8.4.1 末，10.4.3.
标量曲率 **3.4**，7.7，8.7.
标准模型 **10.1.1**，10.2.3，10.3，**10.4**.
标准钟 6.1.1，**6.1.4**，10.1.3.
并集 1.1.
波阵面 6.6.5，选读 7-9-1.
伯克霍夫(Birkhoff)定理 **8.3.3**，8.4.2 末，
8.6，9.4.3 末，9.4.5.
补集 1.1.
不变量 6.3.
不可延积分曲线 选读 2-2-3 末.
不完备测地线 **9.4.1**，9.4.3，10.2.3.
不完备矢量场(见完备矢量场)

C

参考系 6.1.1.
测地~ 7.6，选读 7-9-1.
各向同性~
6.5，**10.1.1**，10.1.2，10.3.1 之 6.
惯性~ **6.1.3**，6.1.5.
静(稳)态~ 8.1.
参数 **2.2.1**，2.2.2，10.4.3.
参数表达式(方程) **2.2.1**.
参数化 **2.2.1**，2.5.
测地偏离方程 **7.6**，7.7 初，选读 7.9.1.
测地线 **3.3**，选读 6-1-1，**9.1**.
差集 1.1.

常曲率空间 10.1.2.
常值映射 1.1.
超光速 6.1.2 末，10.2.1 末.
超曲面 4.4.
类光~ 4.4，6.1.6，6.6.5，选读 7-9-1，9.4.
类空~
4.4，6.1.4，6.1.6，8.1，8.3.1，9.4，10.1.1.
类时~ 4.4.
超曲面正交 8.1，8.3.1，9.4.4.
超新星 选读 7-9-1 前，9.3.2 末，10.3.3 末，10.5.
超星系团 10.1.1 初，10.3.1 之 7.
潮汐加速度 **7.6**，7.8.2 末，选读 7-9-1.
潮汐力(效应) **7.6**，选读 8-3-1，9.4.6 偏后.
车库佯谬 6.2.4.
尘埃 **6.5**，选读 6-6-1 后，选读 8-10-1 后，选读 8-10-2，10.2.3.
尘埃宇宙 **10.2.3**.
乘积拓扑 1.2.
尺度因子 **10.1.3**，**10.2.3**，10.4.3.
“尺缩”效应 **6.2.1**，6.2.4，6.6.1.
重参数化 2.2.1.
抽象指标 2.6.
初始设定 6.1.4.
纯辐射场 **8.9.1**，8.9.3.
磁单极(子) 10.4.3.
磁场 **6.6.1** 初，8.4.1，8.4.2.

D

大爆炸 **10.2.3**，10.3.1 之 1、6.
大挤压 10.3.2 初.
带边流形 5.3.
单参测地线族 7.6.
单参等度规群 4.3.
单参微分同胚群 **2.2.2**，4.2，4.3.
单参微分同胚局部群 选读 2-2-4.
当时当地观测 **6.3**，9.1 中后，
选读 9-3-1.
氘关卡 10.3.1 之 5.
导数算符 3.1.
~的非对易性 3.4.1，3.5，7.2 偏后.
普通~ 3.1.
无挠~ 3.1.
协变~ 3.1.
有挠~ 3.1，3 章习题.
与度规适配的~ 3.2.2.
到上映射 1.1.
等度规群 8.2.
等度规映射 **4.3**，4 章习题，8.1，8.2.
等效原理 7.5.
笛卡儿坐标系 2.5.
电场 **6.6.1** 初，8.4.1，8.4.2.
电磁波 **6.6.5**，7.2，7.9，8.3.3.
电磁场
非类光~ **8.4.1**，8.4.2，8.6，8.8.2.
类光~ **8.4.1**，8.6，8.8.1，8.8.2.
电磁场张量 6.6.1，6.6.2，6.6.3，6.6.4，7.2.
在 NP 形式中的表述 8.8.1，8.8.2.
电磁 4 势 **6.6.5**，7.2，7.9 初.
~的规范自由性 **6.6.5**，7.8.1，7.9 初.
~的运动方程 **6.6.5**，7.2.
~与电磁场的关系 6.6.5.
RN 解的~ 8.4.2.
电磁真空 **8.4.1**，8.4.2，8.8.2.
电荷密度 6.6.1.
电子简并压 9.3.2.
定向 5.2，5.3.
动力学暗能量 10.5.
动量密度 6.4，6.6.4，6 章习题.
动量流密度 选读 6-4-1，8.9.3.

度规 2.5.
　不定~ 2.5.
　负定~ 2.5.
　洛伦兹~ 2.5.
　退化“~” 4.4 末，选读 6-1-1 末.
　诱导~ 4.4，5.5.
　正定~ 2.5.
对称张量 2.5 初，2.6 末.
对偶基底 2.3.
对偶空间 2.3.
对偶矢量 2.3.
对偶微分形式 **5.6**，6.6.1，选读 7-2-1，7.3.
对偶转动 8 章习题.
对偶坐标基底 2.3.
对易关系 8.7 末.
对易子 2.2.2，3.1 末，4.2，7.6.
多层球 选读 9-3-3 中.
多普勒效应 6.6.6，10.2.1 初.

F

法邻域 选读 3-3-1.
法矢 4.4，6.6.5，选读 7-9-1.
法余矢 4.4，6.6.5，选读 7-9-1.
法坐标(见高斯或黎曼法坐标)
反称张量 2.6 末，5.1.
仿射参数 3.3.
费米动量 选读 9-3-3.
费米能 9.3.2.
费米-沃克导数 7.3.
费米-沃克移动(费移) 7.3.
非退化 **2.5**，2.6.
非重子暗物质 10.3.2.
封闭宇宙 10.1.2 末，10.3.2.
辐射 6.5，8.9，10.2.3.
辐射规范 7.9 初.
辐射宇宙 10.2.3.
复合映射 1.1.

G

伽利略坐标 选读 6-1-1.
刚性标架 **5.7**，8.7 初.
高斯(Gauss)定理 **5.5**，选读 6-4-2.
高斯法坐标 选读 8-10-1.
各向同性参考系
　6.5，10.1.1，**10.1.2**，10.3.1 之 6.
各向同性观者(见观者)
各向同性性
6.5，10.1.1，10.1.2，10.4.2，10.4.3.
各向同性坐标系 8.10.1.
共动参考系 6.5.
共动观者 6.5.
共动坐标(系) 10.1.3，10.2.3.
共轭点(对) 3.3，选读 **7-6-3**，选读 8-3-2.
共形联系 10.4.1.
共形平直 10.4.1，10 章习题.
固有距离 8.3.2.
固有时 6.1.1，6.1.4.
固有数密度 6.6.1.
固有坐标系 7.4.
观者 6.1.1.
　各向同性~ **10.1.2**，10.1.3，10.2.
　共动~ 6.5.
　惯性~ 6.1.3.
　瞬时~ 6.3.
　瞬时静止~ 6.3.
　瞬时静止惯性~ 7.4，8.9.3.
　稳(静)态~ 8.1.
　无自转~ 7.3，**7.4**，7.5.
惯性参考系 6.1.3.
惯性力 **7.4**，7.5.

惯性质量 7.1.
惯性坐标时 6.1.4.
惯性坐标系 6.1.2，**6.1.3.**
光度密度 10.3.2.
光滑 2.1，2.2，2.3，2.4.
光子 6.1.1, 6.1.2, 6.6.5.
　背景~ **10.3.1 之 6**，10.3.2.
　~动量 6.6.5.
　~火箭 8.9.3.
　~能量 6.6.5.
　~气 6.5.
　~退耦 10.3.1 之 6.
广义黎曼空间 2.5.
广义协变性(原理) 7.2.
规范自由性(规范变换)
　电磁 4 势的~ **6.6.5**，7.8.1，7.9 初，8.4.2.
　广义相对论的~ 8.10.2.
　线性引力论的~ **7.8.1**，7.9 初.
　转动角速度的~
　　7.3 注 4、5，选读 7-1-3.
轨道 2.2，8.2.
轨道球面 **8.2**，9.1.

H

哈勃参数 10.2.1.
哈勃常数 10.2.1.
哈勃定律 10.2.1.
哈勃长度 10.4.2.
函数的积分 5.5.
恒等映射 2.1.
豪斯多夫空间 1.3.
号差 2.5.
黑洞 9.4.
黑体辐射(定律，曲线，谱) 6.5，**10.3.1 之 6.**
红巨星 9.3.2.
红(蓝)移
　多普勒~ 6.6.6，选读 9-4-3，10.2.1，
　　10.2.2.
　引力~ **9.2.1**，选读 9-4-3.
　宇宙学~ 10.2.2.
红移因子 9.2.1.
弧连通 5.2 脚注.

J

迹 2.4，**3.4**，8.4.1，8 章习题.
积分曲线 **2.2**，6.6.5.
基底
　对偶~ **2.3**，2.4.
　对偶坐标~ 2.3.
　正交归一~ 2.5.
　坐标~ 2.2.1.
几何单位制 附录 A.
几何光学近似 6.6.5，7.2，9.2.1，10.2.2.
嘉当第二结构方程 **5.7**，8.7.
嘉当第一结构方程 5.7.
假真空 10.4.3.
简并电子气 9.3.2.
简并压 9.3.2.
减速参量 10.3.3.
交集 1.1.
角动量 9.1.
角频率 **6.6.5**，7.2，7.9，选读 7-9-1，
　　9.2.1，10.2.2.
角速度 2 形式 7.3.
校准曲线 6.1.5.
结构形成
　10.3.1 之 7，10.3.2 末，10.3.3 末.
结合能 10.3.1 之 5.
紧致性 1.3.
近日点进动 9.2.2.

静能 6.3.
静态参考系(观者、时空) 8.1.
静质量 6.3，6.4 初.
局部惯性系 7.5，选读 7-2-1.
局部洛伦兹系 7.5.
局部唯一 选读 2-2-3，3.3.
具体指标 2.6.
距离 1.1，8.2，8.3.2，8.9.3，10.1.3，10.2.3.
聚点 1.3 偏后.
绝对时间 **6.1.6**，6 章习题.
绝对同时面 **6.1.6**，10.1.1 末.
均匀面 10.1.2.
均匀性疑难 10.4.2.

K

卡氏积 1.1.
开放宇宙 10.1.2 末.
开覆盖 **1.2** 末，2.1 初.
开(子)集 1.2.
开球 1.2.
开圆 1.2.
科氏力 7.4.
可定向流形 5.2.
可观测宇宙 10.4.
克氏符 **3.1**，**3.2.2**，3.4.2，**5.7** 初，7.5.
　~的等价定义　3 章习题，**5.7** 初.
　静态球对称线元的~ 式(8-3-4).
　施瓦西线元的~ 式(8-3-20).
　RW 线元的~ 10.2.2.
　Vaidya 线元的~ 式(8-9-9).
空集 1.1.
空间距离 8.3.2，8.9.3，8 章习题.
空间均匀性 10.1.2.
空间矢量 **6.3**，7.3，7.4，7.6，选读 8-3-1.
空间转动(角速度) **7.3**，7.4.

L

拉回映射 4.1.
类光标架 **8.7**，8.8，选读 8-9-1.
类光超曲面(见超曲面)
类光电磁场(见电磁场)
类光曲线 2.5.
类光矢量 **2.5**，8.7，8.8.
类空超曲面(见超曲面)
类空曲线 2.5.
类空矢量 2.5.
类时超曲面 4.4.
类时曲线 2.5.
类时矢量 2.5.
离散拓扑 1.2.
黎曼法坐标 选读 3-3-1.
黎曼空间 2.5.
黎曼(曲率)张量 **3.4**，5.7.
　施瓦西度规的~ 式(8-3-21).
　线性~ 7.8.1.
李导数 4.2.
里奇平直 7 章习题.
里奇旋转系数 5.7，8.7.
里奇张量 **3.4**，8.7.
　~在类光标架的分量 8.7.
　~的一阶近似(线性~) 7.8.1.
理想流体
　6.5，9.3.1，10.2，10.3.3，10.4.3，10.5.
粒子视界 **10.4.1**，10 章习题.
连通流形　5.2 脚注.
连通拓扑空间　1.2，5.2 脚注.
连续映射 1.1 末，**1.2**.
连续性方程 6.4，6.5.
联络 **3.2.1**，3.2.3，5.7.
联络 1 形式 5.7，8.7.

联络系数 5.7 初.

量的等式 附录 A.

量子引力论 10.3.1 之 1.

邻域 1.2.

临界密度 选读 9-3-3，**10.3.2.**

流体静力学平衡 9.3.1.

流形 2.1.

流形上的积分 5.2.

孪子效应(佯谬) 6.2.3.

洛伦兹变换 4.3，6.1.

洛伦兹度规 2.5.

洛伦兹规范条件(线性引力) 7.8.1，7.9 初.

洛伦兹力(4 维) 6.6.3，6 章习题.

洛伦兹协变性 6.3 初，7.1.

洛伦兹坐标系 **2.5**，4.3 末，74-5.

M

麦氏方程 **6.6.2**，8.4.

NP 形式中的~

8.8.1(无源)，8 章习题(有源).

密度涨落 **10.3.1 之 7**，10.4.2 末.

满射 1.1.

秒差距 10.2.3 末.

闵氏度规(空间，时空) **2.5**，6.1.2.

N

内禀曲率 3.4.1，3.5.

内部 1.2.

挠率张量 3 章习题.

能动张量 **6.4**，6.5，6.6.4，10.3.3.

电磁场的~ 6.6.4，6 章习题.

理想流体的~ 6.5.

宇宙物质场的~ 10.2.3.

宇宙常数对应的~ 10.3.3，10.5.

真空的~ 10.3.3，10.5.

能量密度

6.4，6.5，6.6.4，6 章习题，7.7，选读 9-3-1，10.3.1 之 6，10.3.2，10.4.3.

能量守恒 6.3，6.4.

能流密度 **6.5**，6.6.4，8.9.3.

逆变矢量(指标) 2.6 偏后.

逆像 1.1.

凝聚拓扑 1.2.

牛顿极限 7.8.2.

牛顿引力论的 4 维表述 选读 6-1-1.

O

欧拉方程 6.5.

欧氏度规(空间) 2.6.

欧氏群 8.6.

偶极矩各向异性 10.3.1 之 6.

P

偏振矢(张)量 6.6.5，7.9 偏前.

平均质光比 10.3.2.

平面对称 8.6.

平行(矢量之间) 2.2.1.

平移 2.2.2，3.2.1，3.2.3，4.3，6.1.3.

平移不变性 2.2.2，4.3，8.1，8.5，8.6.

平凡流形 2.1，2 章习题.

普朗克长度 选读 10-3-1，附录 A.

普朗克单位制 附录 A.

普朗克黑体辐射公式 10.3.1 之 6.

普朗克能(质)量 10.3.3，附录 A.

普朗克时间 10.3.3，附录 A.

普通导数算符 3.1.

Q

奇点(奇性)

大爆炸~(见大爆炸).

~定理 10.3.1 之 1.
曲率~ 9.4.1.
时空~ **9.4.1**，9.4.3，10.3.1 之 1.
真~ **9.4** 初.
坐标~ **9.4** 初，**9.4.2**，9 章习题.
奇异时空 9.4.1.
恰当微分形式 5.1，6.6.5 初.
潜热 10.4.3.
嵌入(子流形) 4.4.
嵌入图 9.4.5.
强等效原理(SEP) 7.5.
巧合性问题(疑难) 10.5.
切空间(切平面) **2.2.1** 末，4.4，7.5.
切矢量 2.2.1，4.4.
球对称度规场 8.2.
球对称时空 8.2.
曲率与联络关系式 3.4.1，3.4.2，5.7，8.7.
曲率张量 **3.4**，3.5，**5.7**，10.1.2.
曲率张量计算法
类光标架法 8.7，8.8，选读 8-9-1.
正交归一基底法 5.7.
坐标基底法 3.4.2，8.3.2.
曲线 2.2.1.
全对(反)称张量 2.6 偏后.
群 2.2.2.
扰动 10.3.1 之 7.

R

弱等效原理(WEP) 7.5.

S

熵疑难 10.4.2 末，10.4.3 偏后.
施瓦西半径 9.4 初，附录 A.
施瓦西内解 9.3.1.
施瓦西真空解 **8.3.2**，8.3.3，9 章.
时空 5 章习题，**6.1.1**.
时空图 **6.1.1**，**6.1.5**，选读 9-4-2.
时空转动 7.3.
时钟同步 6.1.4.
时轴正交坐标系 8.1.
矢量 2.2.1.
~(分量)变换式 2.2.1.
矢量场 2.2.2.
~对易子 2.2.2，3.1 偏后.
矢量空间 2.2.1.
事件 6.1.1.
世界面 **6.1.5**，6.2.1，6.6.5，6 章习题.
世界线 6.1.1.
视界
粒子~ **10.4.1**，10 章习题.
事件~ **9.4.3**，**9.4.6**，10.4.1.
~疑难 10.4.2，10.4.3.
适配体元 5.4.
适配坐标系 4.2.
守恒方程 6.4.
守恒量 6.3.
数乘 2.2.1.
数的等式 附录 A.
双星 7.9.
水星近日点进动 9.2.2.
瞬时观者 6.3.
瞬时静止(惯性)参考系(观者，坐标系) 6.3，7.4，8.9.3.
四极矩非各向同性 10.3.1 之 6.
随动观者 6.5.
随动坐标 10.1.3，10.2.3.
缩并(收缩) 2.4.
缩并克氏符 3.4.

T

特征熵 10.4.2，10.4.3.

体积 5.5.

  封闭宇宙的空间~ 10.1.3.

体元 5.5.

通常拓扑 1.2.

同胚 1.2.

同时面 6.1.5，8.1.

  绝对~ **6.1.6**，10.1.1 末.

投影映射 4.4.

图(图册) 2.1.

推迟距离(时刻) 8.9.3.

推前映射 4.1.

椭圆偏振 6.6.3 后半.

拓扑 1.2.

拓扑空间 1.2.

W

外尔张量 **3.4**，8.7，8.8.2.

  ~在类光标架分量 **8.7**，8.8.2.

外曲率 3.5.

外微分 5.1.

完备矢量场 选读 **2-2-4** 末，4.2，4.3.

微波背景辐射 **10.3.1 之 6**，10.3.2，10.3.3，10.4.2.

微调疑难 10.4.2.

微分结构 2.1.

微分流形 2.1.

微分同胚 2.1.

  ~群 8.2 (另见单参微分同胚群).

微分形式 5.1.

伪笛卡儿坐标 2.5.

伪黎曼空间 2.5.

伪欧空间 3.4.1.

伪转动 **2.5**，**4.3**，6.1.3，**7.3**.

稳态时空 8.1.

乌龟坐标 8.9.1 初，9.4.3.

无限红移面 9.4.4.

无限小坐标变换 选读 7-8-1.

无自转观者 7.3，**7.4**，7.5.

物质场 6.4.

物质反物质不对称性 10.3.1 之 3，10.4.2.

X

楔形积(楔积) 5.1.

线长 2.5，8.3.2.

  ~参数 2.5.

  测地线~ 3.3，选读 8-3-2.

  ~与参数化无关 2.5.

线汇 7.6.

线性爱因斯坦(场)方程 7.8.1.

线性爱因斯坦张量 7.8.1.

线性近似 7.8.1.

线性黎曼张量 7.8.1.

线元 2.5.

  诱导~ 3.3 初.

限制 5.2 末，5.3.

相对论性粒子 10.3.1 之 2.

相容 2.1，5.4，5.5.

相位 6.6.5，选读 7-9-1.

协变导数 3.1，3.2.2.

协变矢量 2.6.

协变指标 2.6.

谐和函数 8.10.1.

谐和坐标条件 8.10.1.

新标准模型 10.5.

星系 10.1，10.2，10.3，10.4.

星系团 10.1，10.3.1 末，**10.3.2**，10.5.

序列 1.3.

旋系数 8.7.

Y

雅可比恒等式 2 章习题.
沿曲线平移 3.2.1，3.2.3.
延拓 选读 2-2-3，3.4.1，8.3.3 末，9.4.
　Kruskal~ 9.4.3.
一一映射 1.1.
疑难
　磁单极~ 10.4.3.
　均匀性~ 10.4.2，10.4.3.
　平直性~ 10.4.2，10.4.3.
　熵~ 10.4.2，10.4.3.
　视界~ 10.4.2，10.4.3.
　微调~ 10.4.2，10.4.3，10.5.
引力波 7.9.
引力波偏振模式 7.9，选读 7-9-1.
引力场能不可定域性 选读 9-3-1.
引力辐射 7.9，选读 7-9-1，8.3.3.
引力红移 9.2.1，9.4.6，选读 9.4.5.
引力势 选读 6-1-1，7.1，7.6，7.8.2，9.3.
引力坍缩 7.9，9.3.2 末，9.4 初，**9.4.6**.
引力质量(被动，主动) 7.1.
引力子 选读 7-9-1 末.
映射 1.2.
　常值~ 1.2.
　到上~ 1.2.
　复合~ 1.2.
　恒等~ 2.1，2.6.
　连续~ **1.2**，1.3，1 章习题.
　投影~ 4.4 末.
　一一~ 1.2.
　指数~ 选读 3-3-1.
有限子覆盖 1.3.
有源爱因斯坦方程(见爱因斯坦方程)
右手系(基底) **5.2**，5.3，5.4，5.5，5.6.
诱导定向 5.3，5.5.
诱导度规 4.4.
诱导体元 5.5.
诱导拓扑 1.2.
与度规(定向)相容的体元 5.4，5.5.
宇宙的熵 10.4.2，10.4.3.
宇宙静系 **10.1.2**，10.3.1 之 6.
宇宙年龄 **10.2.3** 末，**10.3.3**，10 章习题.
宇宙时 10.1.3.
宇宙学常数 **10.2.4**，10.3.3，10.4，10.5.
宇宙学红移 10.2.2，10 章习题.
宇宙学原理 10.1.1.
元素丰度 10.2.3 末，**10.3.1 之 5**.
原初核合成 **10.3.1 之 5**，10.3.2.
原初扰动 10.3.1 之 7.
原像 1.2.

Z

张量 2.4.
　~变换律 2.4 末.
　~场 2.4.
　~积 2.4，2.6.
　“~面面观” 2.4，2.6，选读 7-9-1 偏后.
真空爱因斯坦方程(见爱因斯坦方程)
真空能量密度 10.3.3.
真真空态 10.4.3.
真子集 1.1.
正定度规 2.5.
正交归一 2.5.
直线 3.3.
指标升降 **2.6**，5.7.
指数映射 选读 3-3-1.
指向未来(过去) 6.1.6.
质量亏损 6.3.

质量偶极矩 7.9.
质量守恒 6.3，6.5.
中微子退耦 10.3.1 之 4.
中微子种类数 10.3.1 之 5 末.
中子简并压 9.3.2.
中子星 9.3.2.
重子 10.3.1 之 3、5、7，10.3.2.
重子暗物质 10.3.1 之 7，10.3.2.
重子光子数密度比 10.3.1 之 5，10.3.2.
重子数守恒 10.3.1 之 3.
轴对称 8.5.
主动观点(提法，语言) **4.1**，8.10.2.
柱对称 8.5，8.8.2.
转动 4.3，7.3，7.4，6.1.3.
转动曲线 10.3.2.
子集 1.1.
自然单位制 附录 A.
自然坐标 **1.1**，2.1.
自旋系数 8.7.
自由下落参考系 7.6.
自由下落观者 7.4，选读 9-4-3，9 章习题.
自由质点
　　选读 6-1-1，6.3，7.1，7.2，**7.4**，7.5.
自转 **7.3** 末，7.4.
走时率 6.1.4.
“最小替换法则” 7.2.
左手系(基底，标架) **5.2**，5.3，5.4，5.5，5.6.
坐标 2.1.
　~变换 2.1.
　~分量 2.2.1.
　~基底 2.2.1.
　~基矢 2.2.1.
　~奇点 **9.4** 初，9.4.2，9 章习题.
　~时 6.1.4.
　~条件 8.10.1.
　~系 2.2.1.
　~线 **2.2.1**，**4.2**，6.1.3，6.1.5，7.3，7.4，7.5，8.1，8.3.1，8.5，选读 8-10-1，10.1.3.
　~域 2.2.1.
　~钟 选读 7-6-2.
“钟慢”效应 6.2.2，9.4.6 末.
转换因子 附录 A.

其他

CDM　10.3.2 末，10.3.3 末.
COBE　10.3.1 之 6.
De Morgan 律 1.1.
Eddington 坐标 **9.4.6**，9 章习题.
Friedmann 方程 10.2.3.
Killing 矢量(方程) 4.3.
Kinnersley 度规 8.9.2，8.9.3.
Kruskal 延拓(坐标) 9.4.3.
l 次微分形式(l 形式) 5.1.
NP 方程 8.7，8.8.2，选读 8.9.1.
NP 形式 8.7.
OV(Oppenheimer-Volkoff)方程 9.3.1.
pp 波 选读 7-9-1 脚注.
p.p.曲率奇性 9.4.1.
Rindler 时空(坐标) 9.4.2.
quartessence　10.5.
quintessence　10.5.
RN 度规(线元) 8.4.2.
RW 度规(线元) 10.1.3.
RW 坐标系 10.1.3.
s.p.曲率奇性 9.4.1，9 章习题.
Stokes 定理 5.3.
T_2空间 1.3.
Ia 型(1a 型)超新星 10.3.3，10.5.
Vaidya 度规 8.9.1.
ΛCDM 10.3.3 末.

3 标架 6.3 末，7.3，9.1 末.

3 波矢 6.6.5，7.9.

3 电流密度 6.6.1.

3 动量 6.3，8.9.3.

~守恒 6.3.

光子的~ 选读 6-6-3 前.

3 动量流密度(张量) 选读 6-4-1，8.9.3.

3 加速 6.2.3，6.3，7.1，**7.4**，**7.6**.

3 力 6.3.

3 速 **6.3**，**7.4**，7.6.

4 标架 6.3 末，7.3，8.7，8.8，

选读 8-9-1，9.1 末.

4 波矢 6.6.5，7.2，7.9，9.2.1.

4 电流密度 6.6.1.

4 动量 6.3，8.9.3.

~密度 6.4.

~守恒 6.3.

4 加速 6.2.3，**6.3**，7.1，7.2，7.3.

4 力 6.3.

4 洛伦兹力 6.6.3，6 章习题.

4 势 (见电磁 4 势)

4 速 6.3.

~场 6.5.

《现代物理基础丛书》编委会

主　编　杨国桢

副主编　阎守胜　聂玉昕

编　委　(按姓氏笔画排序)

王　牧　王鼎盛　朱邦芬　刘寄星

邹振隆　宋菲君　张元仲　张守著

张海澜　张焕乔　张维岩　侯建国

侯晓远　夏建白　黄　涛　解思深

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书 25

微分几何入门与广义相对论

(中册·第二版)

梁灿彬 周 彬

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书中册包含4章（第11~14章）和6个附录（附录B~G）。第11~13章依次介绍时空的整体因果结构、渐近平直时空和Kerr-Newman黑洞，第14章详细讲述与参考系有关的各种问题，包括时空的3+1分解。附录B和C分别简介量子力学的数学基础和几何相，附录D和E分别介绍能量条件和奇性定理，附录F讲述微分几何很重要的Frobenius定理，附录G则用微分几何语言比较详细地讨论了李群和李代数的知识，并专辟一节介绍对物理学特别重要的洛伦兹群和洛伦兹代数。本册仍然贯彻上册深入浅出的写作风格，为降低读者阅读难度采取了多种措施。

本书适用于物理系高年级本科生、硕博士研究生和物理工作者，特别是相对论研究者。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 中册/梁灿彬，周彬著. –2版. —北京：科学出版社，2009
(现代物理基础丛书；25)
ISBN 978-7-03-024057-6

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何–研究生–教材 ②广义相对论–研究生–教材 IV. ①O186.1 ②O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第021741号

责任编辑：胡 凯/责任校对：包志虹

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽 源 印 刷 厂 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年4月北京师范大学出版社第一版
2009年3月第 二 版 开本：B5 (720 × 1000)
2009年3月第二次印刷 印张：22 3/4
印数：3 001—6 000 字数：438 000

定价：59.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉）

中册前言

作者在修订第一版下册过程中补充了许多内容. 考虑到页数过多不便装订及翻阅, 决定把原定的第二版下册拆分成中册和下册. 中册包含4章(第11~14章)和6个附录(附录B~G), 下册包含两章(第15和第16章)和3个附录(附录H~J), 两册厚度大致相当. 中、下册中的4成篇幅对于与广义相对论无关的理论物理工作者也同样有参考价值(例如共形变换、量子力学的数学基础、几何相、Frobenius定理、拉氏和哈氏理论、辛几何、李群和李代数、纤维丛理论、Noether定理等), 而且阅读时只需要上册前五章的数学知识而不以学过广义相对论为前提.

第11, 12章是广义相对论整体理论中的两个重要专题, 其中第11章介绍时空的整体因果结构, 第12章介绍渐近平直时空. 这是专业性颇强的两个专题, 急于学习中册其他内容的读者也可考虑暂时不读, 因为中册其他章节及附录只在个别情况下用到这两章的知识. 或者, 初学者也可考虑先对第11, 12章进行粗读然后再学习后续章节. 所谓粗读, 是指粗略阅读这两章的非选读内容, 只求对一些基本概念和结论有所了解, 不求概念的深究和结论的证明. 其中特别值得阅读的是§12.2(为此至少要粗略读过§12.1), 它从零开始介绍闵氏时空的类空、类时和类光无限远(即i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$), 这些概念不但对学习第12章及附录E必不可少, 而且在§13.1和§13.3以及下册(尤其是第16章和附录J)中也要用到. 对"时间机器"一类问题有兴趣的读者不妨阅读§11.3的前两页, 更详尽的讨论则可在该两页推荐的文献中找到. 不过, 我们还是建议时间比较充裕的读者比较仔细地学好这两章, 因为这可为学好整个中册及下册打下稳固的基础.

第13章介绍Kerr-Newman(克尔-纽曼)黑洞, 这是广义相对论的一个非常基本而重要的内容. 之所以放在第13章, 只是因为在§13.1至§13.3的少数地方用到第12章的个别概念(i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$)和结论(时空的总电荷和总能量的表达式). 本章较有特色的几处讲法是: §13.1给出了RN时空最大延拓的十分详细的推导; §13.3详述了穿过奇环延拓的必要性、具体做法和结果, 还介绍了Carter图; §13.4证明了能层内不存在静止观者, 并导出了能层内外稳态观者的角速率的取值范围.

第14章比较深入细致地讲述了与参考系有关的各个方面的问题, 其中对爱因斯坦转盘以及参考系内的钟同步问题的讨论也许会引起较大范围读者(包括那些更喜欢"用物理思维"讨论相对论问题的许多同行)的兴趣. 第14章的另一个十分重要的内容就是时空的3+1分解(§14.4), 它不仅对于理解时间和空间的概念有重要帮助, 而且是学习广义相对论的初值问题(§14.5)和哈氏形式(第15章)的不可或缺的基础. 希望§14.4关于3+1分解的讲法对初学者以及广义相对论研究人员都

有所帮助.

为使读者尽早进入物理内容, 本书上册前 5 章只能精选对学习相对论必不可少的最小量微分几何知识. 对学习相对论虽然重要、但可在一开始时暂且避开的其他数学内容则分别放在书中非用不可的章节之前讲授, 或者收入附录之中. 例如, 费米导数和费米移动放在 §7.3, Newman-Penrose 形式放在 §8.7 和 §8.8, 共形变换放在 §12.1, 张量密度和辛几何分别放在 §15.6 和 §15.7, Frobenius 定理以及李群李代数理论分别收入附录 F 和 G, 常曲率空间理论收入附录 J, 特别是专辟附录 I 较详细地介绍纤维丛理论及其在规范场论的应用.

附录 B(量子力学数学基础简介)也许算是与本书书名无直接关系的一个内容. 然而, 根据笔者的经验, 读过本书第 1, 2 章的物理读者对集合、映射、拓扑、矢量空间及其对偶空间、张量、度规等概念比较熟悉, 他们往往跃跃欲试地想把量子力学的内积、左右矢、线性算符以及用正交归一基底展开波函数等一系列问题同上述概念联系起来思考, 力图求得一个更为深入和清晰的理解. 他们希望有一份简明读物作参考. 本附录主要为满足这种需要而产生, 此外也为附录 C(量子力学的几何相)提供必要的基础. 所谓量子力学的数学基础, 此处是指有关泛函分析的知识. 本附录介绍其中最为基础的部分, 并尽量注意同量子力学相联系. 根据泛函分析, 物理工作者很感兴趣的 δ 函数其实是某种连续线性泛函, 我们在讲解连续线性泛函时顺便介绍 δ 函数的数学定义(选读 B-1-2).

自从 Berry 在1984 年首次明确提出量子力学的几何相概念以来, 几何相的研究就成了国际物理界的热点之一. 笔者在《微分几何与广义相对论》课的教学经历中曾不止一次地利用已讲过的微分几何知识(相当于上册的前 5 章)向学生介绍过几何相的基本概念和某些理论发展, 受到学生欢迎. 附录 C 便是以这方面的讲稿为蓝本写成的.

Penrose 和 Hawking 联手证明的奇性定理(1965~1970)无疑是经典广义相对论的重要定理. 由于这些定理的证明涉及太多的、专业性极强的知识(本书只介绍过其中的一部分), 我们不拟给出定理的证明, 只用附录的形式(附录 E)对奇性定理以及 Penrose 于 1969 年开始提出的宇宙监督假设做一个定性介绍. 奇性定理以及正能定理(小节 12.7.4)的前提都涉及能量条件, 我们特用附录 D 对能量条件做一专题讲解.

李群和李代数的知识对物理工作者的重要性自不待言. 用几何语言表述李群李代数理论有一系列的明显优点. 鉴于本书多处用到李群李代数, 考虑到读者已具有一定的几何基础, 我们在附录 G 中用几何语言讲授这一理论. 在选材时特别注意理论物理工作者的需要, 例如, 我们专辟一节(§G.9)比较系统详尽地讲述在相对论中用得特别多的固有洛伦兹群和洛伦兹代数. 在原子物理学发展早期提出的托马

斯进动是一个理论上有趣而又难懂的问题, 由于本书对它的理论基础——费米移动和洛伦兹群分别有过较为详细的讲授, 读者完全有条件对它取得一个较为透彻的理解. 为帮助读者达到这一目的, §G.9 的最后一小节不惜篇幅对托马斯进动做了比较详细的讨论.

关于选读内容以及习题的说明见上册前言.

与上册类似, 笔者在写作第一版下册时曾请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读初稿的部分章节, 他们是(以姓氏汉语拼音为序): 敖滨, 曹周键, 戴陆如, 高长军, 高思杰, 贺晗, 黄超光, 邝志全, 刘旭峰, 马永革, 强稳朝, 田贵花, 吴小宁, 杨学军, 张红宝, 张芃, 郑驻军, 周彬, 周美柯, 笔者已在第一版下册前言中表示了谢意. 在第二版中、下册的写作过程中, 笔者又与许多同行(含前学生)做过多次讨论, 并吸收了他们许多宝贵的意见和建议, 他们主要有(以姓氏汉语拼音为序): 曹周键, 高思杰, 邝志全, 马永革, 吴小宁, 杨学军, 张昊, 张红宝, 在此再次鸣谢. 作者梁灿彬要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友, 第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生, 他不但是梁步入本领域的优秀启蒙导师, 而且对梁回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中国科学院数学研究所的邝志全研究员, 他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议, 而且在与梁的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使梁受益殊深. 北京师范大学数学系从事泛函分析教学多年的周美珂教授对附录 B 曾做过认真的审阅并提出过许多宝贵的意见和建议, 笔者在此深表谢意.

笔者还要感谢国家科学技术学术著作出版基金的资助, 正是这一资助使本书得以再版. 此外, 本书(第二版)中、下册还受到国家自然科学基金资助项目 10505004 的部分资助, 在此一并鸣谢.

考虑到许多读者非常关心下册的内容, 我们特在中册目录之后给出下册目录预告. 此处再对下册的每章和每个附录的内容做一个十分简单的介绍.

下册第 15 章首先把有限自由度系统的拉氏和哈氏理论推广到场系统(无限自由度系统), 然后讨论广义相对论的哈氏形式. 引力场是约束系统, 我们用相当篇幅介绍 Dirac-Bergmann 关于约束系统的哈氏理论, 并介绍如何将这一理论用于电磁场和引力场.

鉴于黑洞(热)力学对广义相对论以及相关交叉学科非常重要, 我们在下册中增补了第 16 章, 该章首先比较详细地讲授稳态黑洞的热力学(即传统的黑洞热力学), 然后着重介绍在非稳态黑洞力学中起关键作用的孤立视界和动力学视界及其有关定律.

Noether 定理是场论教材几乎必讲的重要基础性定理, 多数教材在讲授该定理的证明时都使用坐标语言, 许多有志于彻底弄懂这一证明的读者学习后往往感

到并未真懂. 然而用几何语言可以给出清晰简洁的证明, 下册附录H将给出这一证明并用几何语言对与此有关的一系列问题进行讨论.

纤维丛理论对理论物理工作者的重要性与日俱增, 下册附录I将以尽量好懂的方式讲解主纤维丛和伴纤维丛的概念和性质, 特别是主丛和伴丛上的联络. 为帮助读者了解纤维丛理论在规范场论的应用, 我们还专辟两节对没有场论知识的读者介绍规范场论, 再用三节讲解规范场论的丛语言表述, 特别注重在两种理论之间的“架桥”工作.

广义相对论(特别是宇宙论)以及量子场论(特别是超弦理论)的现代发展使德西特时空和反德西特时空再度变得十分重要, 下册附录 J 将比较详细地讨论德西特时空和反德西特时空.

梁灿彬　周　彬

2008 年 4 月于北京师范大学

中册目录

中册前言

下册目录预告

第 11 章　时空的整体因果结构……1

§11.1　过去和未来……1

§11.2　不可延因果线……13

§11.3　因果条件……15

§11.4　依赖域……21

§11.5　柯西面、柯西视界和整体双曲时空……25

习题……31

第 12 章　渐近平直时空……32

§12.1　共形变换……32

§12.2　闵氏时空的共形无限远……36

§12.3　施瓦西时空的共形无限远……43

§12.4　孤立体系和渐近平直时空……45

§12.5　$\mathscr{I}^{\pm}$和i^0上的对称性, BMS 群和 SPI 群……57

§12.6　引力能量的非定域性……73

12.6.1　电荷与电荷守恒……73

12.6.2　闵氏时空的守恒量……79

12.6.3　引力能量的非定域性……84

§12.7　渐近平直时空的总能量和总动量……87

12.7.1　Komar 质(能)量……87

12.7.2　ADM 4 动量……89

12.7.3　Bondi 4 动量……96

12.7.4　正能定理……99

习题……101

第 13 章　Kerr-Newman(克尔-纽曼)黑洞……103

§13.1　Reissner-Nordstrom(RN)黑洞……103

§13.2　Kerr-Newman(KN)度规……111

§13.3　KN 时空的最大延拓……115

13.3.1　$M^2 < a^2 + Q^2$的情况……115

13.3.2　$M^2 > a^2 + Q^2$和$M^2 = a^2 + Q^2$的情况……122

§13.4　静界、能层和其他……125

13.4.1　静界和能层 ………… 125
13.4.2　无限红移面 ………… 130
13.4.3　闭合类时线 ………… 130
13.4.4　局域非转动观者 ………… 131
§13.5　从旋转黑洞提取能量(Penrose 过程) ………… 134
§13.6　黑洞“无毛”猜想 ………… 137
习题 ………… 140
第 14 章　参考系再认识 ………… 141
§14.1　参考系的一般讨论 ………… 141
14.1.1　类时线汇(参考系)的膨胀、剪切和扭转 ………… 141
14.1.2　类时测地线汇(测地参考系)的 Raychaudhuri 方程 ………… 149
§14.2　爱因斯坦转盘 ………… 151
14.2.1　转盘周长 ………… 151
14.2.2　转盘系是非超曲面正交的刚性参考系 ………… 154
14.2.3　刚性参考系及其空间几何 ………… 155
14.2.4　转盘系的空间几何 ………… 157
§14.3　参考系内的钟同步[选读] ………… 158
14.3.1　惯性参考系的雷达校钟法 ………… 158
14.3.2　任意时空任意参考系的钟同步问题 ………… 159
14.3.3　超曲面正交系的钟同步 ………… 163
14.3.4　Z 类参考系 ………… 167
§14.4　时空的 3+1 分解 ………… 168
14.4.1　空间和时间 ………… 168
14.4.2　时空的 3+1 分解 ………… 169
14.4.3　空间张量场 ………… 176
14.4.4　空间张量场的空间导数 ………… 181
14.4.5　空间张量场的时间导数 ………… 182
§14.5　3+1 分解应用举例——广义相对论初值问题简介 ………… 189
习题 ………… 194
附录 B　量子力学数学基础简介 ………… 196
§B.1　Hilbert 空间初步 ………… 196
B.1.1　Hilbert 空间及其对偶空间 ………… 196
B.1.2　Hilbert 空间的正交归一基 ………… 202
B.1.3　Hilbert 空间上的线性算符 ………… 204
B.1.4　Dirac 的左右矢记号 ………… 206
B.1.5　态矢和射线 ………… 208

§B.2 无界算符及其自伴性 …… 208
习题 …… 220
附录 C 量子力学的几何相 …… 222
§C.1 Berry 几何相 …… 223
§C.2 AA 几何相 …… 230
附录 D 能量条件 …… 235
附录 E 奇性定理和宇宙监督假设 …… 240
§E.1 奇性定理简介 …… 240
§E.2 宇宙监督假设 …… 244
§E.3 用 TIP 语言表述强宇宙监督假设[选读] …… 247
§E.4 奇异边界 …… 251
附录 F Frobenius 定理 …… 255
附录 G 李群和李代数 …… 261
§G.1 群论初步 …… 261
§G.2 李群 …… 262
§G.3 李代数 …… 264
§G.4 单参子群和指数映射 …… 267
§G.5 常用李群及其李代数 …… 270
G.5.1 GL(m)群 (一般线性群, general linear group) …… 270
G.5.2 O(m)群 (正交群, orthogonal group) …… 274
G.5.3 O(1, 3)群 (洛伦兹群) …… 277
G.5.4 U(m)群 (酉群) …… 281
G.5.5 E(m)群 (欧氏群) …… 286
G.5.6 Poincaré群(庞加莱群) …… 287
§G.6 李代数的结构常数 …… 288
§G.7 李变换群和 Killing 矢量场 …… 295
§G.8 伴随表示和 Killing 型[选读] …… 300
§G.9 固有洛伦兹群和洛伦兹代数 …… 305
G.9.1 固有洛伦兹变换和固有洛伦兹群 …… 305
G.9.2 洛伦兹代数 …… 315
G.9.3 用 Killing 矢量场讨论洛伦兹代数 …… 319
G.9.4 洛伦兹群的应用——托马斯进动[选读] …… 323
习题 …… 334
中册符号一览表 …… 336
参考文献 …… 337
索引 …… 342

下册目录预告

(可能小有改变)

第 15 章　广义相对论的拉氏和哈氏形式

§ 15.1　拉氏理论

§ 15.2　有限自由度系统的哈氏理论

§ 15.3　有限自由度拉、哈氏理论的几何表述[选读]

§ 15.4　经典场论的哈氏形式

§ 15.5　广义相对论的哈氏形式

§ 15.6　张量密度[选读]

§ 15.7　辛几何及其在哈氏理论的应用[选读]

§ 15.8　从几何动力学到联络动力学

——Ashtekar 新变量理论简介[选读]

习题

第 16 章　孤立视界、动力学视界和黑洞热力学

§ 16.1　传统黑洞热力学及其不足

§ 16.2　类光测地线汇及其 Raychaudhuri 方程

§ 16.3　类光超曲面上的 Raychaudhuri 方程

§ 16.4　陷俘面与表观视界

§ 16.5　(弱)孤立视界与第零、第一定律

§ 16.6　弱孤立视界的进一步讨论[选读]

§ 16.7　动力学视界及其力学定律

习题

附录 H　时空对称性与守恒律(Noether定理)

§ H.1　用几何语言证明定理

§ H.2　正则能动张量

§ H.3　关于用坐标语言的证明

附录 I　纤维丛及其在规范场论的应用

§ I.1　主纤维丛

§ I.2　主丛上的联络

§ I.3　与主丛相伴的纤维丛(伴丛)

§ I.4　物理场的整体规范不变性

§ I.5　物理场的局域规范不变性
§ I.6　截面的物理意义
§ I.7　规范势与联络
§ I.8　规范场强与曲率
§ I.9　矢丛上的联络和协变导数
习题
附录 J　德西特时空和反德西特时空
§ J.1　常曲率空间
§ J.2　de Sitter (德西特)时空
§ J.3　de Sitter 时空的 Penrose 图
§ J.4　再谈事件视界和粒子视界
§ J.5　Schwarzschild-de Sitter(施瓦西-德西特)时空
§ J.6　Anti-de Sitter(反德西特)时空

第 11 章　时空的整体因果结构

§ 11.1　过去和未来

在狭义相对论中，任一时空点 p 的全体类时和类光矢量(零元除外)被分为指向未来和指向过去两大类(见小节 6.1.6 末). 无论弯曲还是平直时空，一点的切空间并无区别(无非是 4 维矢量空间配以一个洛伦兹度规)，因此弯曲时空中任一点的类时和类光矢量(零元除外)的集合也可类似地分为两大部分. 若只孤立地讨论一点 p，可任意指定其中一个部分为指向未来部分(记作 $\tilde{F}_p$)，其中每一元素称为**指向未来的**(future directed)类时(或类光)矢量，另一部分(记作 $\tilde{P}_p$)的元素则称为**指向过去的**(past directed)类时(或类光)矢量(见图 11-1). 但在讨论全时空时，物理上总希望这种指定在从一个时空点到另一时空点的过渡中是连续的(闵氏时空就如此). 然而并非所有时空都能做到这一点. 考虑以 $S^1 \times \mathbb{R}$(圆柱面)为底流形的 2 维时空，为画图方便，把它沿母线剪开并画成图 11-2. 设其上度规这样给定，使各点的光锥如图 11-2 所示，便无法对指向未来部分($\tilde{F}$)作连续指定. (若按图 11-2 指定，则把左右两竖线粘合后，粘合处的 $\tilde{F}$ 有突变.) 不妨认为这样的时空没有物理意义. 能连续地指定光锥未来部分的时空叫**时间可定向时空**(time orientable spacetime). 今后谈到时空都指时间可定向时空，并认为每一时空都已作了这样的连续指定 (其实上册中早已有这样的默认). 设时空 (M, g_{ab}) 存在一个 C^0 的类时矢量场 t^a，就可把 t^a 在每点 $p \in M$ 的值 $t^a|_p$ 所在的那个部分指定为指向未来部分，这种指定自然是连续的. 因此，存在 C^0 类时矢量场的时空一定是时间可定向时空. 反之也可证明 [见

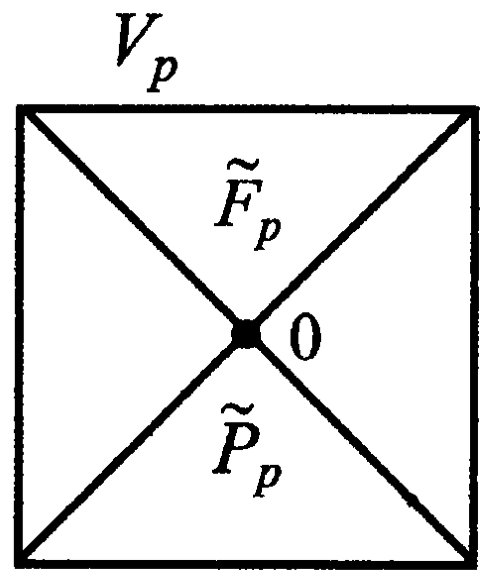


图 11-1　p 点指向过去和未来的类时(及类光)矢量组成子集 $\tilde{P}_p$ 和 $\tilde{F}_p$

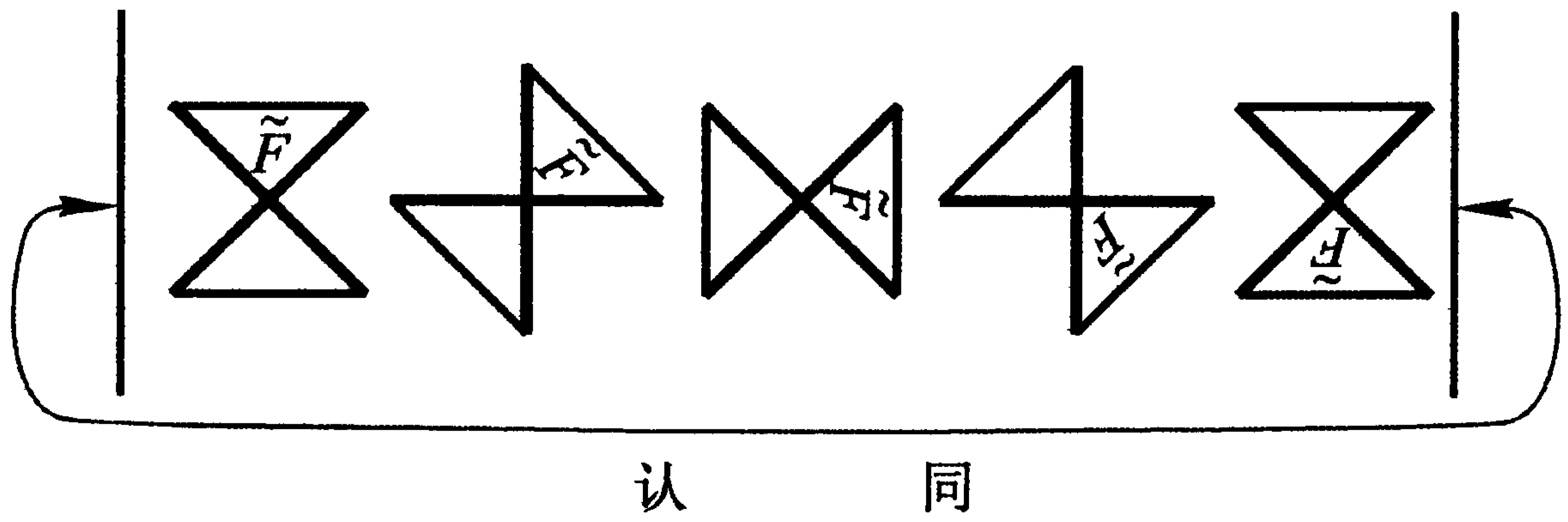


图 11-2　时间不可定向时空一例

Penrose(1972)], 若 (M,g_{ab}) 是时间可定向时空, 则它必存在 C^0 的类时矢量场.

命题11-1-1 设 p 是4维时空 (M,g_{ab}) 的点, $v^a, u^a \in V_p$ 是指向未来或过去的类时或类光矢量, $v^a \neq 0$, $u^a \neq 0$,

(1)若 v^a, u^a 不都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} <0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相同指向}, \\ >0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相反指向}, \end{cases}$

(2)若 v^a, u^a 都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} =0 \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \text{使} v^a = \beta u^a, & \text{(a)} \\ <0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相同指向, 且} v^a \neq \beta u^a, & \text{(b)} \\ >0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相反指向, 且} v^a \neq \beta u^a. & \text{(c)} \end{cases}$

证明 因为任意时空的一点的切空间都一样, 只须对闵氏时空一点 p 证明本命题.

(1) 设 $v^a \in V_p$ 类时, 则总可选惯性系 $\{t, x^i\}$ 使 v^a 切于 t 坐标线, 亦即可选 V_p 的正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $v^a = \alpha(e_0)^a$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.这表明 v^a 在该基底的分量为 $v^\mu = (\alpha, 0, 0, 0)$, 于是 $g_{ab}v^a u^b = \eta_{\mu\nu}v^\mu u^\nu = -\alpha u^0$. 而由图 6-13 关于指向未来和过去的定义可知 v^a 与 u^a 有相同(相反)指向等价于 α 与 u^0 同(反)号, 故

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow \alpha u^0 > 0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相同指向},$$

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow \alpha u^0 > 0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{有相反指向}.$$

(2) 因 $v^a \in V_p$ 类光且非零, 故总有正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $v^a = \alpha[(e_0)^a + (e_1)^a]$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, 从而 $v^\mu = (\alpha, \alpha, 0, 0)$, 于是

$$g_{ab}v^a u^b = -v^0 u^0 + v^1 u^1 = -\alpha(u^0 - u^1), \tag{11-1-1}$$

$u^a \in V_p$ 的类光性则导致

$$0 = g_{ab}u^a u^b = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2, \tag{11-1-2}$$

由此又得

$$|u^0| \geqslant |u^1|. \tag{11-1-3}$$

(a) $g_{ab}v^a u^b = 0 \Leftrightarrow u^0 = u^1 \Leftrightarrow u^\nu = (u^0, u^0, 0, 0) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$, (11-1-4)

其中第一、二步分别用到式(11-1-1)和(11-1-2).

(b) $g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow u^0 - u^1 \neq 0$ 且与 α 同号

$$\Leftrightarrow u^0 \text{与} \alpha \text{同号} \Leftrightarrow u^a \text{与} v^a \text{有相同指向}, \tag{11-1-5}$$

其中第一、二步分别用到式(11-1-1)和(11-1-3). 由式(11-1-4)、(11-1-5)便得

$$g_{ab}v^a u^b < 0 \Leftrightarrow v^a \neq \beta u^a \text{且} v^a \text{与} u^a \text{有相同指向}.$$

(c)证明与(b)类似. □

推论 11-1-2

(1)类光超曲面 Σ 上不存在切于 Σ 的类时矢量.

(2)类光超曲面 Σ 上每点只有一个类光方向, (就是说, $\forall q \in \Sigma$, 设 v^a, u^a 是 q 点的切于 Σ 的类光矢量, 则 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$.) 这就是类光法矢 n^a 的方向.

证明　设 v^a 是点 $q \in \Sigma$ 的切于 Σ 的矢量, n^a 是点 q 的类光法矢, 则 $g_{ab}v^a n^b = 0$. 取命题 11-1-1(1)的 u^a 为 n^b, 便知 v^a 类时会导致 $g_{ab}v^a n^b \neq 0$ 的矛盾, 故 v^a 不能类时. 若 v^a 类光, 取命题 11-1-1(2)的 u^a 为 n^b, 便知 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 使 $v^a = \beta u^a$. 可见 q 点只有一个类光方向, 就是该点的类光法矢的方向. □

定义 1　C^1 曲线 γ 叫**指向未来类时线**, 若 γ 上每点的切矢是指向未来类时矢量; γ 叫**指向未来因果线**(future directed causal curve), 若 γ 上每点的切矢是指向未来类时或类光矢量(后者含零元). **指向过去类时线**和**因果线**可类似地定义.

注 1　我们以前把观者定义为一条以固有时(线长)为参数的类时线, 现在应在“类时线”前加上“指向未来”.

定义 2　$p \in M$ 的切空间 V_p 的子集 $\{v^a \in V_p \mid g_{ab}v^a v^b = 0\}$ 称为 p 点的**光锥**(light cone).

定义 3　$p \in M$ 的**编时未来**(chronological future) $I^+(p)$ 定义为

$$I^+(p) := \{q \in M \mid \exists \text{从} p \text{到} q \text{的指向未来类时线}\}.^{①}$$

还有一个与 $I^+(p)$ 类似而又有区别的重要定义, 即

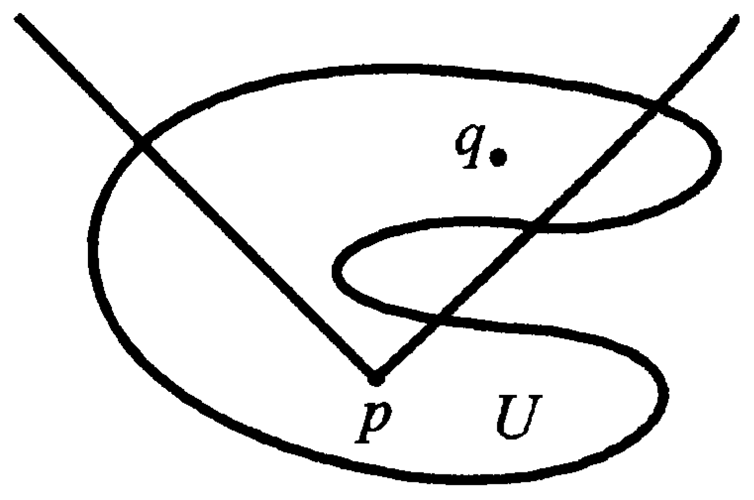


图 11-3　$q \in I^+(p) \cap U$ 但 $q \notin I^+(p, U)$

定义 4　设 U 是 $p \in M$ 的任一邻域, 则 p 的**相对于 U 的编时未来** $I^+(p,U)$ 定义为

$$I^+(p,U) := \{q \in U \mid \exists \text{从} p \text{到} q \text{的位于} U \text{内的指向未来类时线}\}.$$

注 2　①$I^+(p) = I^+(p,M)$. ②图 11-3 给出闵氏时空中 $I^+(p,U) \neq I^+(p) \cap U$ 的一例. ③把定义 3 和 4 的“未来”换为“过去”, 便得到 $I^-(p)$(p 点的**编时过去**)和 $I^-(p,U)$ 的定义. 这种做法称为“对偶地定义”. ④p 点的光锥按定义 2 是 p 点的

---

①“从 p 到 q 的曲线”γ 是指 γ : $[a,b] \to M$, 满足 $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$. 本章的“曲线”往往是指曲线映射的像.

切空间V_p(而不是时空流形M)的子集(由p点的所有类光矢量组成), 虽然在狭义相对论中人们常把p点的光锥理解为时空流形$\mathbb{R}^4$中由$x^2+y^2+z^2-t^2=0$定义的子集, 即以p为顶点的圆锥面[亦可表为$\dot{\mathrm{I}}^+(p)\cup\dot{\mathrm{I}}^-(p)$, 顶上加点代表该子集的边界]. 本书通常按定义2使用光锥一词, 只有小节6.1.6, 8.9.2及8.9.3例外, 那里谈到的p点的“光锥面”实际是$\dot{\mathrm{I}}^+(p)$, $\dot{\mathrm{I}}^-(p)$或两者之并.

定义5　$p\in M$的**因果未来**(causal future)$\mathrm{J}^+(p)$定义为

$$\mathrm{J}^+(p):=\{q\in M\,|\,\exists 从 p 到 q 的指向未来因果线\},$$

p点的**相对于U的因果未来**$\mathrm{J}^+(p,U)$定义为

$$\mathrm{J}^+(p,U):=\{q\in U\,|\,\exists 从 p 到 q 的位于 U 内的指向未来因果线\}.$$

$\mathrm{J}^-(p)$和$\mathrm{J}^-(p,U)$可对偶地定义.

注3　p点本身可看作一条曲线(把$\mathbb{R}$的一个区间映为$\{p\}\subset M$的映射, 即独点线), 其在p点的切矢为零, 因而是类光矢量, 故p点可看作类光曲线. 虽然它既非指向过去亦非指向未来, 但还是规定$p\in\mathrm{J}^+(p)$及$p\in\mathrm{J}^-(p)$. 与此不同, p点不能看作类时曲线, 所以一般来说$p\notin\mathrm{I}^+(p)$. 然而也有例外. 例如, 只要把2维闵氏时空中的直线$t=0$和$t=1$认同(图11-4), 就存在从p经a回到p的类时曲线(是一条闭合的类时线), 从而有$p\in\mathrm{I}^+(p)$. 更有甚者, 事实上这个人造时空的任一时空点都属于$\mathrm{I}^+(p)$, 即$\mathrm{I}^+(p)=M$.

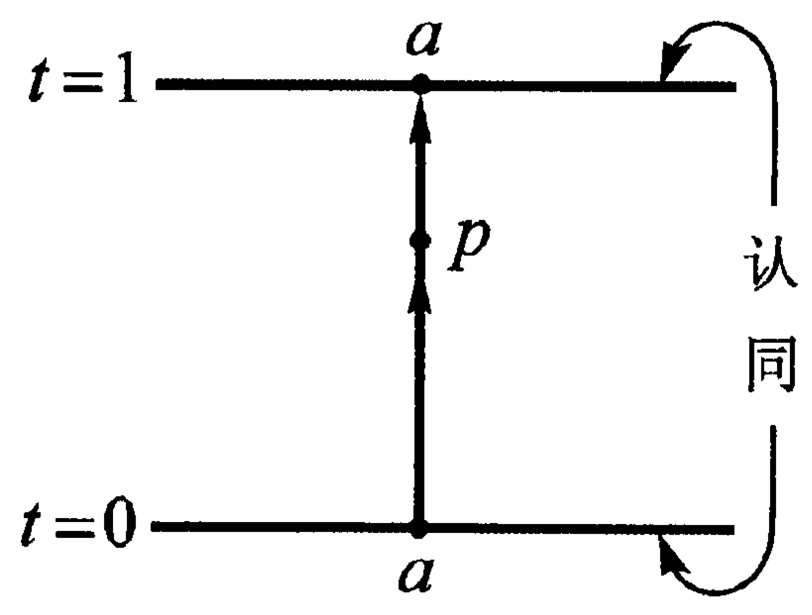


图11-4　闭合类时线pap

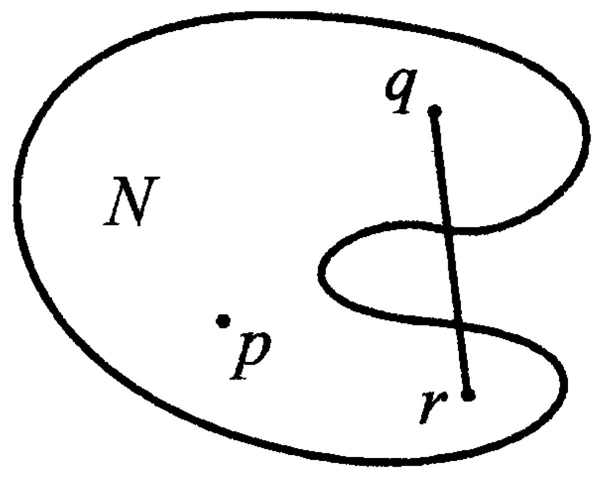


图11-5　非凸邻域示意

定义6　$p\in M$的邻域N称为**凸邻域**(convex neighborhood), 若$\forall q,r\in N$, 有N内的唯一测地线联结q与r. (注: 即使欧氏或闵氏空间, 也并非所有邻域都是凸的, 图11-5就是非凸邻域的一例.) §3.3定义3已讲过法邻域. p点的既凸又法的邻域称为p点的**凸法邻域**(convex normal neighborhood).

注4　①由定义可知凸法邻域是开子集. ②任一时空的任一点必有凸法邻域. ③一点的法邻域未必是域内其他点的法邻域, 但一点的凸法邻域一定是域内任一点的凸法邻域. ②, ③的证明见Hicks(1965).

命题 11-1-3

(a) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$, (不妨形象地表为"$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$")

(b) $p\in \mathrm{J}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$, (不妨形象地表为"$\mathrm{J}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$")

(b′) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{J}^+(r)\ \Rightarrow\ p\in \mathrm{I}^+(r)$. (不妨形象地表为"$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\mathrm{I}$")

证明　(a) $p\in \mathrm{I}^+(q),\ q\in \mathrm{I}^+(r)$ 表明存在从 q 到 p 的指向未来类时线 γ_{qp} 和从 r 到 q 的指向未来类时线 γ_{rq}. 令 $\gamma\equiv\gamma_{rq}\cup\gamma_{qp}$, 在 q 点附近可对 γ 适当"磨光"(round off)使成 C^1 类时线(图 11-6), 便有 $p\in \mathrm{I}^+(r)$. 磨光的可行性见 Penrose(1972)的 **2.23** 节第二段. (b)和(b′)的证明见 Penrose(1972)的 **2.18** 节. □

注 5[选读]　由于 γ_{rq} 和 γ_{qp} 非常任意, 即使限制在凸法邻域并使用黎曼法坐标也难以写出其具体方程, 因此磨光可行性的证明并不容易. 如果 γ_{rq} 和 γ_{qp} 是测地线, 方程就好写得多. 然而把类时线改为测地线将给出不等价的 $\mathrm{I}^+(p)$ 定义. 为了既用测地线又能得到等价定义, Penrose 想到用分段测地线代替类时线. "分段类时测地线"是由有限段指向未来类时测地线连接而成的连续曲线, 连接处可以不到 C^1. Penrose(1972)称之为一个**旅程**(trip). 用旅程代替 $\mathrm{I}^+(p)$ 定义中的"指向未来类时线"就得到 $\mathrm{I}^+(p)$ 的另一定义, 与原定义的等价性的证明见 Penrose (1972)的 **2.23** 节. 类似地, 把分段因果测地线称为一个**因果旅程**(causal trip), 用因果旅程代替 $\mathrm{J}^+(p)$ 定义中的"指向未来因果线"就得到 $\mathrm{J}^+(p)$ 的等价定义.

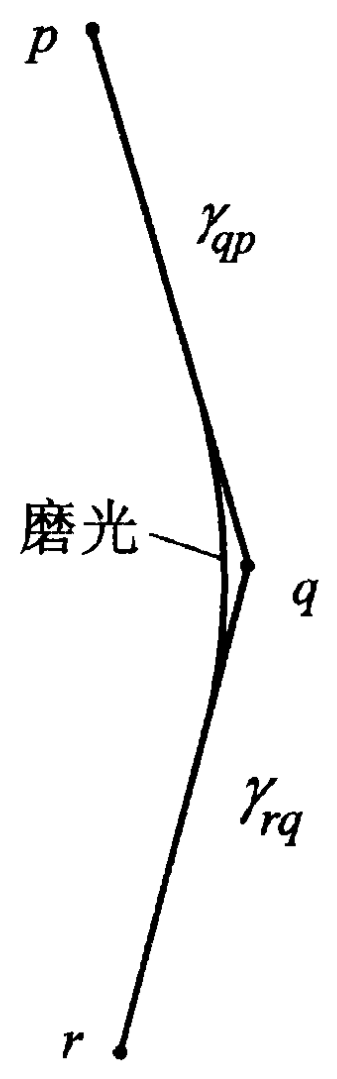


图 11-6　$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$ 示意

一般时空的整体因果特性(结构)可以比闵氏时空复杂. 例如, 设时空点 p,q 满足 $q\in \mathrm{I}^+(p)$, 若是闵氏时空, 就有唯一的测地线从 p 到 q, 它是指向未来类时线; 若是其他时空就未必(可能没有也可能有不止一条测地线从 p 到 q). 然而, 局域地看(在凸法邻域内), 任何时空的因果特性都与闵氏时空相当类似, 具体含义见如下命题.

命题 11-1-4　任意时空 (M,g_{ab}) 的任意点都有凸法邻域 N (见注 4②), 其中任意两点 q 与 p 必有 N 内唯一的测地线相连(凸邻域定义), 而且(本命题内容)

(a) 若 $q\in \mathrm{I}^+(p,N)$, 则 N 内从 p 到 q 的唯一测地线是指向未来类时线;

(b) 若 $q\in \mathrm{J}^+(p,N)-\mathrm{I}^+(p,N),\ q\neq p$, 则 N 内从 p 到 q 的唯一测地线是指向未来类光曲线;

(b′) 若 $q\in \mathrm{J}^+(p,N)-\mathrm{I}^+(p,N),\ q\neq p$, 则 N 内从 p 到 q 的指向未来因果线必为类光测地线.

这一直观看来很好接受的命题证来颇不简单，见选读 11-1-1，建议初学者暂时免读.

[选读 11-1-1]

命题 11-1-4 的证明需要如下引理.

引理 11-1-5 设 N 是 $p\in M$ 的凸法邻域，定义 $\sigma: N\to\mathbb{R}$ 为

$$\sigma(q):=g_{ab}v^a v^b,\quad \forall q\in N\text{，其中 } v^a\equiv\exp_p^{-1}(q),$$

$\forall K\in\mathbb{R}$ 令 $\Sigma_K\equiv\{q\in N\,|\,\sigma(q)=K\}$，则 (a) $K<0$ 时 Σ_K 是类空超曲面，$K>0$ 时 Σ_K 是类时超曲面，$\Sigma_0-\{p\}$ 是类光超曲面. (b) N 内从 p 到 q 的唯一测地线正交于过 q 的 Σ_K.

证明 借 p 点的任一正交归一基 $\{(e_\mu)^a\}$ 及其对偶基 $\{(e^\mu)_a\}$ 可在 N 上定义(黎曼)法坐标系 $\{x^\mu\}$，点 $q\in N$ 的 x^μ 定义为 $v^a(e^\mu)_a$，其中 $v^a\equiv\exp_p^{-1}(q)$. 于是

$$\sigma(q)\equiv g_{ab}v^a v^b=\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu=\eta_{\mu\nu}x^\mu(q)\,x^\nu(q).$$

令 $t\equiv x^0,\ x\equiv x^1,\ y\equiv x^2,\ z\equiv x^3$，便有 $\sigma=-t^2+x^2+y^2+z^2$ 及

$$\mathrm{d}\sigma=2(-t\mathrm{d}t+x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z),$$

故 σ 是 C^∞ 函数，且

$$\mathrm{d}\sigma|_{\Sigma_K(K\neq0)}\neq0,\quad \mathrm{d}\sigma|_{\Sigma_0-\{p\}}\neq0\ (\text{但 } \mathrm{d}\sigma|_p=0),$$

所以等 σ 面 $\Sigma_K(K\neq0)$ 及 $\Sigma_0-\{p\}$ 都是超曲面(图 11-7). 每一 $\hat{q}\in N$ 决定一张等 σ 面 Σ_K [其中 $K\equiv\sigma(\hat{q})$]，先讨论 $K<0$ 的情况. 令 $N_-\equiv\{q\in N\,|\,\sigma(q)<0\}$，则 $\Sigma_K(K<0)\subset N_-$. 因 N 是凸法邻域，故 $\forall q\in\Sigma_K$ 有 N 内唯一测地线 $\gamma(\rho)$ 从 p 到 q. 选仿射参数 ρ 使 $\rho(p)=0$，$\rho(q)=1$，则 $v^a\equiv\exp_p^{-1}(q)=(\partial/\partial\rho)^a|_p$. 令 $\alpha\in\mathbb{R}$，则 $\tau\equiv\alpha\rho$ 也是仿射参数，且 $(\partial/\partial\rho)^a=\alpha(\partial/\partial\tau)^a$. 总可选 α 使 τ 等于线长，于是

$$\sigma(q)\equiv g_{ab}v^a v^b=\alpha^2[g_{ab}(\partial/\partial\tau)^a(\partial/\partial\tau)^b]|_p=-\alpha^2=-[\tau(q)]^2,\quad \forall q\in\Sigma_K.$$

可见 $\Sigma_K(K<0)$ 上每点 q 与 p 所连测地线都是类时线，线长都等于常数 $(-K)^{1/2}$. 当 $\hat{q}$ 跑遍 N_- 时给出一个类时测地线汇，其切矢 $Z^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 构成 N_- 上的一个类时矢量场. 为证明任一 $\Sigma_K(K<0)$ 为类空超曲面只须证明 Z^a 是 Σ_K 的法矢场，为此可借用 Z^a 所产生的单参微分同胚局部群 $\{\phi_\tau\}$ (见选读 2-2-4). $\forall q\in\Sigma_K$，过 q 并躺在 Σ_K 上的任一曲线 $\mu_0(s)$ 可充当 §7.6 的横向曲线，因而在上述类时测地线汇中挑出一个单参测地线族 $\{\gamma_s(\tau)\}$，所有 $\gamma_s(\tau)$ 铺出一张 2 维面 $\mathscr{S}\subset N_-$. 以 $\mu_\tau(s)$ 代表 $\mu_0(s)$ 在 ϕ_τ 映射下的像，则随着 τ 的改变，$\mu_\tau(s)$ 的切矢 $\eta^a\equiv(\partial/\partial s)^a$ 构成 $\mathscr{S}$ 上

的一个矢量场(图 11-7)，而且与 Z^a 对易，于是 $g_{ab}\eta^a Z^b$ 沿任一 $\gamma_s(\tau)$ 为常数(见 §7.6)。此常数可借 p 点确定。虽然 $\sigma(p)=0$ 表明 $p \notin \mathscr{S}$，但可令 $\mathscr{S}$ 内的点沿任一 $\gamma_s(\tau)$ 无限逼近 p。注意到 $\mu_\tau(s)$ 在 $\tau \to (-K)^{1/2}$ 时缩为 p 点，便知 η^a(作为 $\mathscr{S}$ 上的矢量场)在逼近 p 时趋于零(不妨补定义 $\eta^a|_p = 0$)，所以常数 $g_{ab}\eta^a Z^b = 0$。由于横向曲线 $\mu_0(s)$ 的任意性，以上讨论说明 $Z^a|_q$ 是 Σ_K 的法矢，Z^a 的类时性因而表明 $\Sigma_K(K<0)$ 为类空超曲面。上述证明的要害是每条测地线 $\gamma_s(\tau)$ 上存在着在 p 点为零的雅可比场 η^a (见选读 7-6-3 首行)。类似手法也适用于证明 $\Sigma_K(K>0)$ 和 $\Sigma_0 - \{p\}$ 分别是类时和类光超曲面。 □

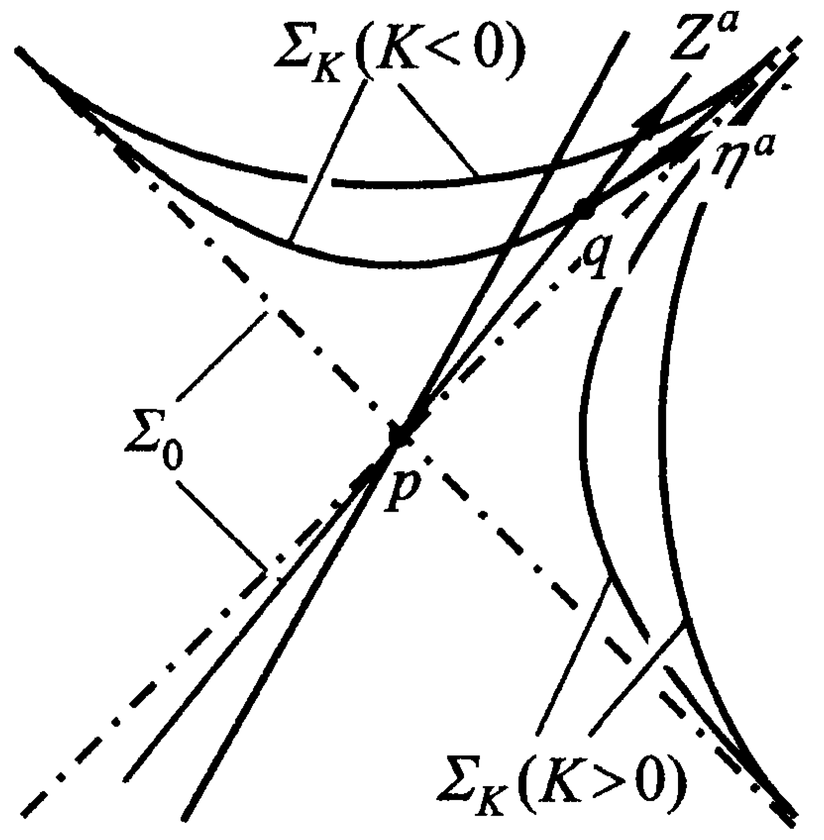


图 11-7　$K \neq 0$ 的每一 Σ_K 含两叶($K<0$ 时为上下叶，$K>0$ 时为左右叶)，图中各只示出一叶。Z^a 与 η^a 正交

命题 11-1-4 的证明[可参见 Hawking and Ellis(1973)命题 4.5.1 的证明]

(a)设 $\gamma(t)$ 是 N 内从 p 到 q 的指向未来类时线，$\gamma(0)=p$。借 p 的正交归一基在 N 上定义法坐标 x^μ，则 $\gamma(t)$ 的切矢 $(\partial/\partial t)^a|_p$ 类时导致 $[\eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}t)]_{t=0}<0$，加上 $x^\mu(p)=0$，便知 $\exists\, \varepsilon>0$ 使

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu(s)x^\nu(s)<0, \quad \forall s \in (0,\varepsilon]. \tag{11-1-6}$$

作为点 $\gamma(s)$ 的法坐标，$x^\mu(s)$ 无非是 $u^a \equiv \exp_p{}^{-1}[\gamma(s)]$ 的分量，故式(11-1-6)表明 u^a 类时，因而 $\sigma[\gamma(s)]<0$。可见 $\gamma(t)$ 至少有一段(称为初始段，但不含 p)进入 N_-，再由 $\sigma(p)=0$ 及中值定理便知初始段内至少有一点满足 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t<0$，这又导致 γ 各点都有 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t<0$。[否则 γ 线上有 $p_1=\gamma(t_1)$ 满足 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t|_{t=t_1}=0$，意味着 γ 线与过 p_1 的等 σ 面 $\Sigma_{\sigma(p_1)}$ 相切，而这不允许，因 $\Sigma_{\sigma(p_1)}$ 是类空超曲面(见引理 11-1-5)而 γ 是类时线]。所以 $\gamma(t)\subset N_-$，而且线上的 σ 值随 t 增加只能越来越负("越陷越深")，特别是有 $\sigma(q)<0$，表明 $\exp_p{}^{-1}(q)\in V_p$ 为类时，因而 N 内从 p 到 q 的唯一测地线(记作 ξ)是类时测地线。再用反证法证明 ξ 指向未来。设 ξ 竟然指向过去，则 $p\in I^+(q,N)$，与已知条件 $q\in I^+(p,N)$ 结合得 $p\in I^+(p,N)$，导致 $\sigma(p)<0$，与 $\sigma(p)=0$ 矛盾。可见

N 内从 p 到 q 的唯一测地线是指向未来类时线.

(b)以 η 代表 N 内从 p 到 $q\in J^+(p,N)-I^+(p,N)$ 的唯一测地线，现在用反证法证明 η 类光，即 $\sigma(q)=0$. 设 $\sigma(q)\neq 0$，则或者 $\sigma(q)>0$ 或者 $\sigma(q)<0$. 若 $\sigma(q)>0$，则过 q 点的等 σ 面是类时超曲面(引理 11-1-5)，故该面上存在从 q 到某点 r 的指向未来类时线，于是有 $\sigma(r)=\sigma(q)>0$ 和 $r\in I^+(q,N)$，后者与 $q\in J^+(p,N)$ 结合得 $r\in I^+(p,N)$，而这又导致 $\sigma(r)<0$ [见(a)的证明]，与 $\sigma(r)>0$ 矛盾. 又若 $\sigma(q)<0$，则 η 是类时测地线. 注意到 $q\notin I^+(p,N)$，可知 η 只能指向过去，导致 $p\in I^+(q,N)$，与 $q\in J^+(p,N)$ 结合又推出 $p\in I^+(p,N)$ 的矛盾. 以上证明了 $\sigma(q)=0$，因而 η 是类光测地线. 还应证明它是指向未来的，见(b′)的证明之末.

(b′)设 λ 是 N 内从 p 到 q 的指向未来因果线. 对 λ 上异于 p 的任一点 r，有 $r\in J^+(p,N)$，$q\in J^+(r,N)$. 假如 $r\in I^+(p,N)$，则 $q\in I^+(p,N)$，与已知条件矛盾，因此 $r\in J^+(p,N)-I^+(p,N)$，从而 $\sigma(r)=0$，于是 $\lambda\subset\Sigma_0$. 类光超曲面 $\Sigma_0-\{p\}$ 上不存在切于该面的类时矢量[见推论 11-1-2(1)]，所以 λ 的切矢处处类光，即 λ 是类光曲线. 设 n^a 是超曲面 $\Sigma_0-\{p\}$ 的类光法矢场，注意到类光超曲面上各点类光方向的唯一性[见推论 11-1-2(2)]，可知 λ 只能重合于 n^a 过 q 的积分曲线. 另一方面，(b)中已证明 N 内从 p 到 q 的唯一测地线 η 也是 $\Sigma_0-\{p\}$ 上的类光测地线，因而也重合于 n^a 过 q 的积分曲线. 于是 η 与 λ 重合，从而证明了 λ 是类光测地线. 由此又可反过来补证(b)中尚未证明的 η 的指向未来性：把 η 和 λ 记作 $\eta(t)$ 和 $\lambda(s)$，其中 t 和 s 是仿射参数，满足 $\eta(0)=\lambda(0)=p$，$\eta(1)=\lambda(1)=q$. 令 $v^a\equiv(\partial/\partial t)^a|_p$，$u^a\equiv(\partial/\partial s)^a|_p$，则 $\exp_p(v^a)=q=\exp_p(u^a)$，故 $v^a=u^a$，于是 u^a 的指向未来性(来自 λ 的指向未来性)保证了 v^a (因而 η)的指向未来性. □

[选读 11-1-1 完]

命题 11-1-6 把 $p\in M$ 的凸法邻域 N 看作拓扑空间 $(N,\mathscr{S})$，其中 $\mathscr{S}$ 是由 M 的拓扑 $\mathscr{T}$ 诱导的拓扑，则 $I^+(p,N)$ 是 M 的开集，$J^+(p,N)$ 是 N 的闭集.

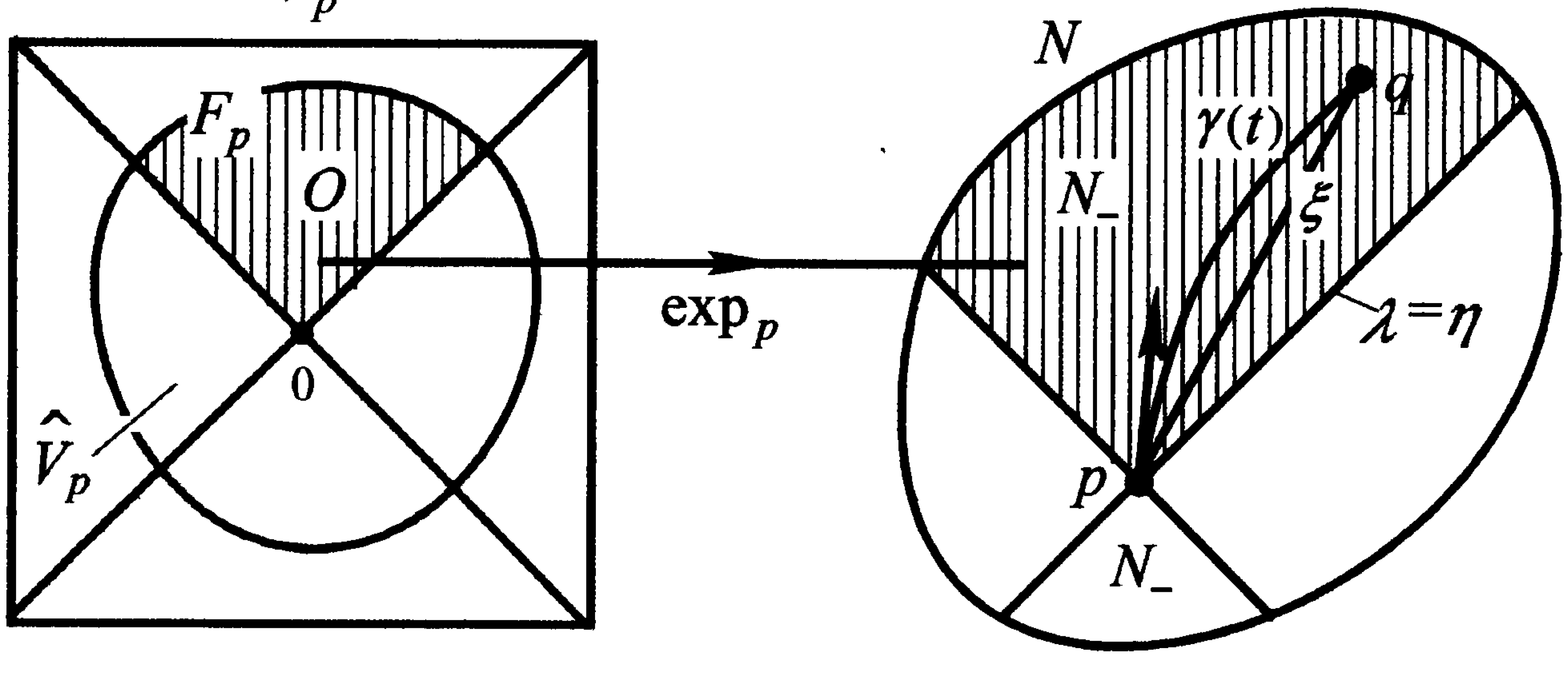


图 11-8 命题 11-1-6 证明用图. 右边的 ξ 和 η 是命题 11-1-4 证明中涉及的测地线

证明[选读]　由定理 3-3-7 可知 p 点的切空间 V_p 含开子集 $\hat{V}_p$ 使 $\exp_p: \hat{V}_p \to N$ 为微分同胚. 令 $F_p \equiv \{v^a \in V_p \mid v^a$ 为指向未来类时矢量$\}$, 则 $O \equiv F_p \cap \hat{V}_p$ 是 $\hat{V}_p$(作为拓扑空间)的开子集(图 11-8). 由命题 11-1-4 不难证明(习题) $I^+(p,N) = \exp_p[O]$ 及 $J^+(p,N) = \exp_p[\bar{O}]$, 其中 $\bar{O}$ 是把 O 看作 $\hat{V}_p$ 的子集时的闭包. 因 $O \subset \hat{V}_p$ 为开集, $\bar{O} \subset \hat{V}_p$ 为闭集, $\exp_p: \hat{V}_p \to N$ 是微分同胚, 故 $I^+(p,N)$ 和 $J^+(p,N)$ 依次是 N 的开集和闭集. 由注 4①可知 $N \in \mathscr{T}$, 不难证明这时诱导拓扑 $\mathscr{S}$ 的定义[式(1-2-2)]可简化为 $\mathscr{S} = \{V \subset N \mid V \in \mathscr{T}\}$, 所以 $I^+(p,N)$ 也是 M 的开集, 即 $I^+(p,N) \in \mathscr{T}$. □

命题 11-1-7　$\forall p \in M$ 有 $I^+(p) \in \mathscr{T}$ [即 $I^+(p)$ 是 M 的开集].

证明　设 $q \in I^+(p)$, γ 是从 p 到 q 的指向未来类时线, N 是 q 的凸法邻域, 则 $\exists r \in \gamma \cap N$ 使 $q \in I^+(r,N)$ (图 11-9). 由注 4③可知 N 也是 r 点的凸法邻域, 故命题 11-1-6 保证 $I^+(r,N) \in \mathscr{T}$. 可见任一 $q \in I^+(p)$ 有开邻域 $I^+(r,N) \subset I^+(p)$, 由定理 1-2-1 便知 $I^+(p) \in \mathscr{T}$. □

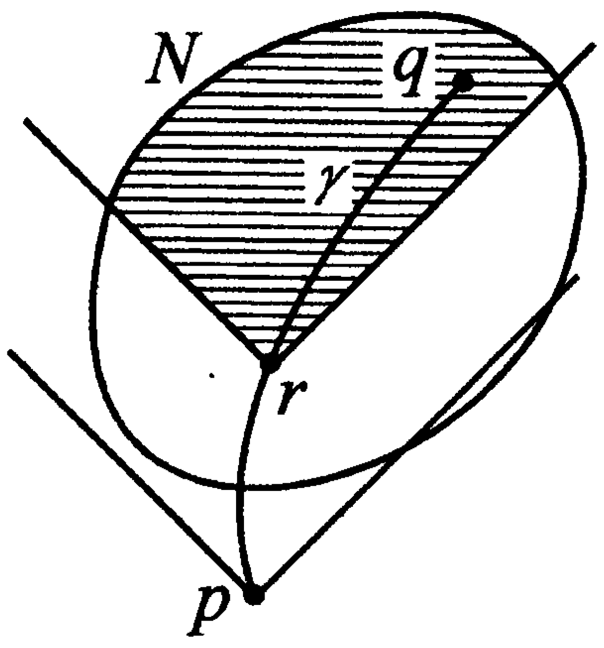


图 11-9　证明 $I^+(p)$ 为开集

命题 11-1-4 表明, 如果限制在凸法邻域以内, 任意时空的因果特性都与闵氏时空非常类似, 但越出凸法邻域就未必如此简单. 然而该命题的最后一个性质[即(b′)]却不受这一限制, 体现为如下命题.

命题 11-1-8　在任意时空中, 若 $q \in J^+(p) - I^+(p)$, 则从 p 到 q 的指向未来因果线必为类光测地线.

证明[选读]　设 λ 是从 p 到 q 的指向未来因果线. 若 λ 有一点的切矢为类时, 则它必含类时段, 于是由"I + J = I"会推出 $q \in I^+(p)$ 的矛盾, 故 λ 是类光曲线. 今欲证它是类光测地线. $\forall z \in \lambda$, 设 N_z 是 z 的凸法邻域, 则 $\{N_z \mid z \in \lambda\}$ 是 λ 的开覆盖. 因为 λ 是由紧致子集 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 到 M 的 C^1 映射的像, 所以 $\{N_z \mid z \in \lambda\}$ 存在有限子覆盖(图 11-10). 以 λ 进入的先后为序对子覆盖中的凸法邻域编号, 则子覆盖可表为 $\{N_1, N_2, \cdots, N_n\}$. 设 $x \in \lambda \cap N_1 \cap N_2$ (这样的 x 总存在), 则 $x \in J^+(p,N_1) - I^+(p,N_1)$, 于是由命题 11-1-4(b′)可知 λ_{px} 段为类光测地线. 对上述讨论作有限次重复, 便知 λ

为类光测地线.[①] □

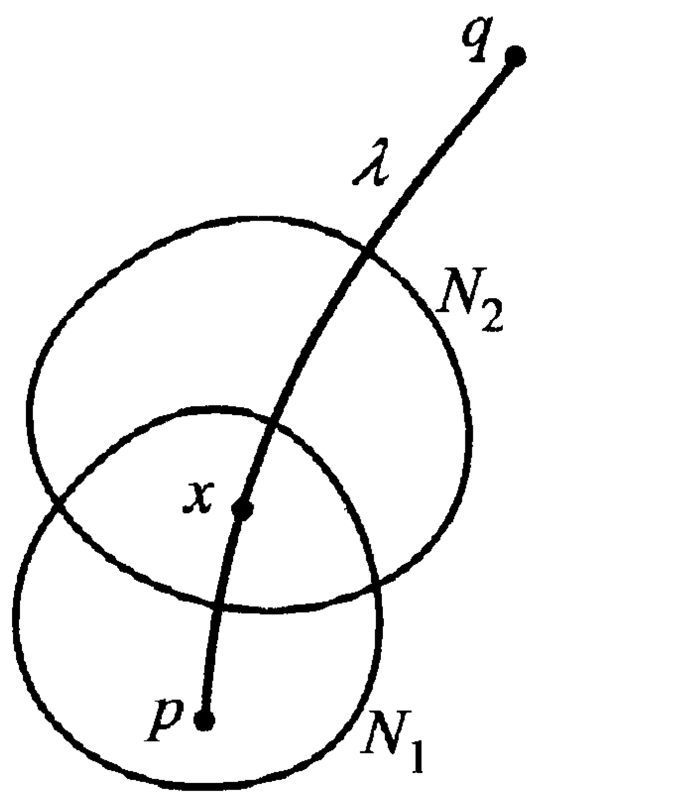


图 11-10　λ 的有限子覆盖中的两个凸法邻域

注 6　本命题等价于 Hawking and Ellis(1973)的命题 4.5.10, 该书提供了另一证明.

思考题　判断如下命题的真伪:若存在从 p 到 q 的指向未来类光测地线, 则 $q\in J^+(p)-I^+(p)$.

答　命题为伪. 图 11-11 便是反例:设 t, x 是 2 维闵氏时空的洛伦兹坐标, 把竖直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 认同, 令 $p=(0,0)$, $q=(2,0)$, 则存在从 p 到 q 的类光测地线 $\lambda_1\cup\lambda_2$, 而 $q\in I^+(p)$, 所以 $q\notin J^+(p)-I^+(p)$.

定义 7　M 的任一子集 S 的编时未来 $I^+(S)$ 定义为

$$I^+(S) := \bigcup_{p\in S} I^+(p) .$$

S 的编时过去 $I^-(S)$ 可对偶地定义.

注 7　由定义 7 和命题 11-1-7 可知 $I^+(S)$ 为开集.

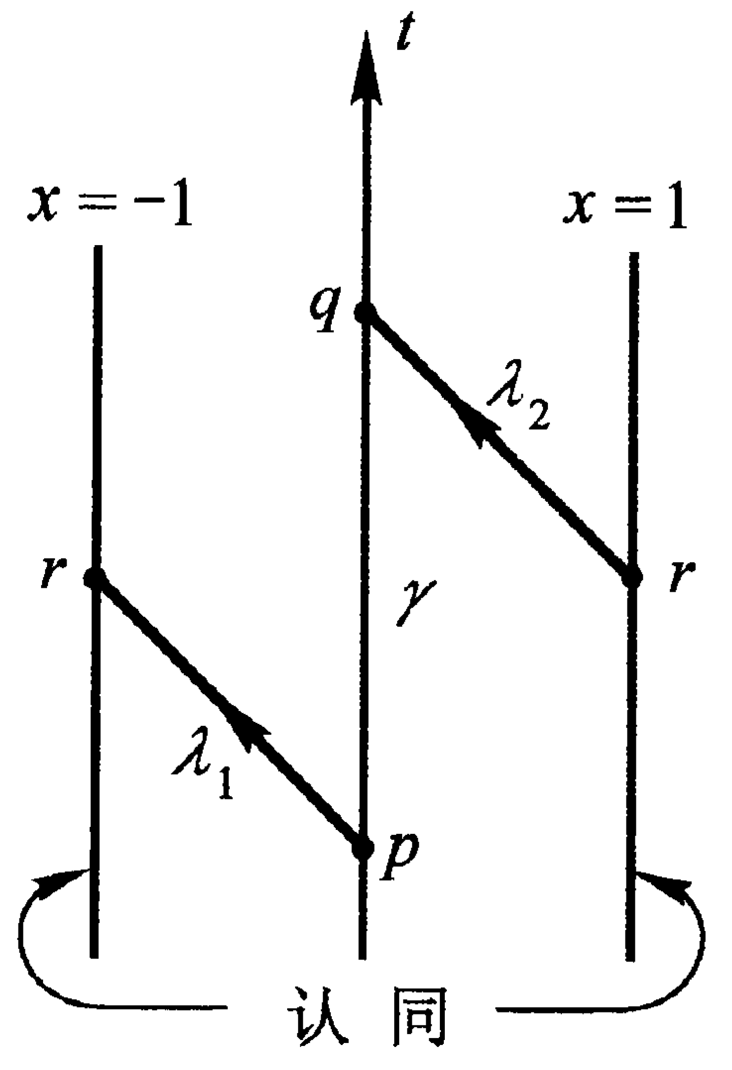


图 11-11　$q\in I^+(p)$ 不排斥有类光测地线从 p 到 q

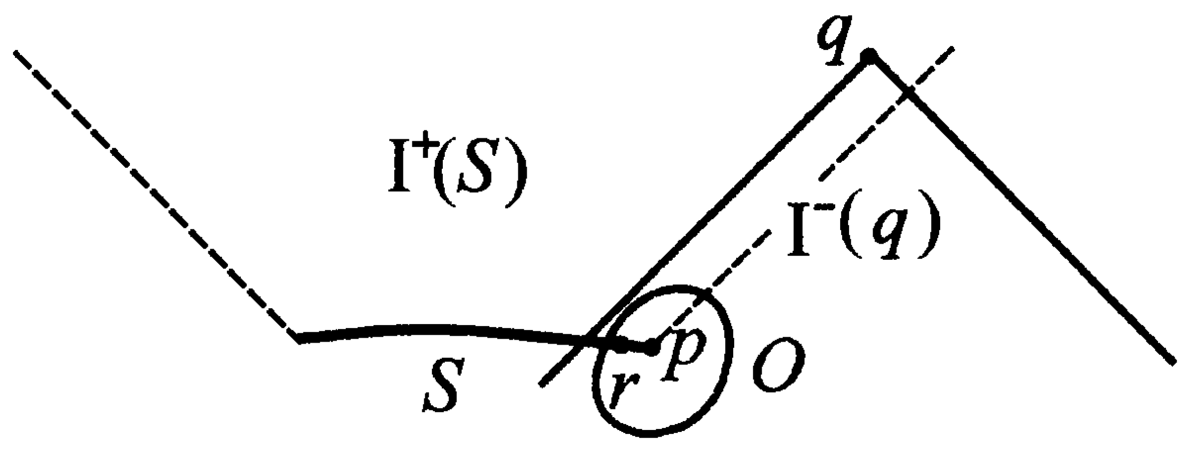


图 11-12　命题 11-1-4 证明(B)用图

命题 11-1-9　以 $\bar{S}$ 代表 $S\subset M$ 的闭包, 则 $I^+(\bar{S})=I^+(S)$.

证明　(A) 设 $q\in I^+(S)$, 则 $\exists p\in S$ 使 $q\in I^+(p)$. 但 $p\in S\Rightarrow p\in\bar{S}$, 故 $q\in I^+(\bar{S})$. (B)设 $q\in I^+(\bar{S})$, 则 $\exists p\in\bar{S}$ 使 $q\in I^+(p)$, 所以 $p\in I^-(q)$. 因 $I^-(q)$ 为开集, 故 $\exists p$ 的开邻域 $O\subset I^-(q)$, 见图 11-12. $p\in\bar{S}\Rightarrow O\cap S\neq\varnothing$(见第1章习题 15). 令 $r\in O\cap S$, 则 $r\in I^-(q)$, 故 $q\in I^+(r)\subset I^+(S)$. □

① 不排除如下可能:某些凸法邻域 N_z 把 $\lambda\cap N_z$ 分成若干不连通的段, 导致同一凸法邻域被多次编号. 为消除这种情况可采用如下做法:①取 λ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$,使每一 U_α 与 λ 之交只含一个连通段;②对每一 $\lambda\cap\bar{U}_\alpha$ 取由凸法邻域组成的开覆盖 $\{N_{\alpha z}\,|\,z\in\lambda\cap\bar{U}_\alpha\}$; ③所有 $\{N_{\alpha z}\}$ 的集合是 λ 的一个开覆盖, 必有有限子覆盖 $\{N_1, N_2,\cdots,N_n\}$, 而且 $\lambda\cap N_i\ (i=1,\cdots,n)$ 只含 λ 的一个连通段.

命题 11-1-10　$I^+[I^+(S)]=I^+(S)$.

证明　习题. □

由命题 11-1-6 可知闵氏时空任一点 p 的 $J^+(p)$ 是闭集. 然而一般时空未必如此. 设 p 是闵氏时空的一点, 把 $\dot{J}^+(p)$ 的一点挖去(见图 11-13), 则 $r\notin J^+(p)$, 故 $r\in\mathbb{R}-J^+(p)$. 但 r 的任一邻域都与 $J^+(p)$ 有交, 故由定理 1-2-1 可知 $\mathbb{R}-J^+(p)$ 不是开集, 因而 $J^+(p)$ 不是闭集. 后面(§11.5)将看到, 当时空满足一定条件(称为整体双曲条件)时, 任一时空点 p 的 $J^+(p)$ 都是闭集(见命题 11-5-12).

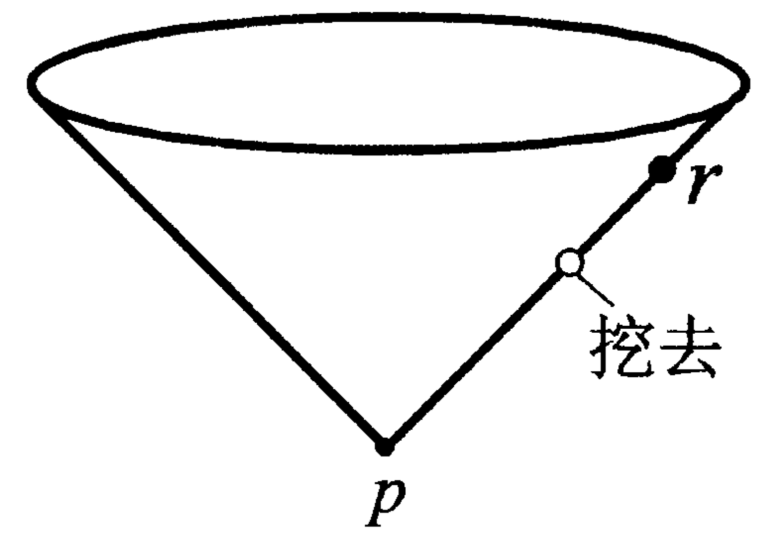


图 11-13　把 $\dot{J}^+(p)$ 的一点挖去后 $J^+(p)$ 不再是闭集

对闵氏时空作挖点和认同处理是相对论学者对许多貌似正确的伪命题举反例的惯用手法. 这种做法虽然有人为性, 但已足以证明在讨论时空因果结构时必须保持高度谨慎. 事实上, 本章讨论的时空 (M,g_{ab}) 多数并无物理意义, 例如, 我们并不在乎 g_{ab} 是否满足爱因斯坦方程. 这是因为经验表明在人为例子中出现的现象往往也出现于真实时空中(何况什么时空才算"真实时空"也是个不易讲清的问题). 况且, 理论研究本来就应该关心最一般的情况.

定义 8　M 的任一子集 S 的因果未来 $J^+(S)$ 定义为

$$J^+(S):=\bigcup_{p\in S}J^+(p).$$

S 的因果过去 $J^-(S)$ 可对偶地定义.

命题 11-1-11　$\forall S\subset M$, 以 $i[J^+(S)]$, $\overline{J^+(S)}$ 和 $\dot{J}^+(S)$ 分别代表 $J^+(S)$ 的内部、闭包和边界, 则

$$\text{(a)}\quad J^+(S)\subset\overline{I^+(S)};\qquad \text{(b)}\quad \overline{J^+(S)}=\overline{I^+(S)};$$

$$\text{(c)}\quad I^+(S)=i[J^+(S)];\qquad \text{(d)}\quad \dot{I}^+(S)=\dot{J}^+(S).$$

证明　因为(a)是(b)的结果, (d)是(b)和(c)的结果, 所以只须证明(b)和(c). 把(c)的证明留作习题, 下面仅证明(b).

由第 1 章习题 14 可知 $A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$, 因此 $I^+(S)\subset J^+(S)\Rightarrow\overline{I^+(S)}\subset\overline{J^+(S)}$. 于是只须证 $\overline{J^+(S)}\subset\overline{I^+(S)}$. 证明的关键是拓扑学的如下定理: 若 A 为拓扑空间的任一非空子集, 则 $x\in\bar{A}\Leftrightarrow x$ 的任一邻域与 A 有交(见第 1 章习题 15). 设 $p\in\overline{J^+(S)}$, 则该定理保证 p 的任一开邻域 N 与 $J^+(S)$ 有交. 令 $q\in N\cap J^+(S)$. $q\in N$ 导致

$N\cap \mathrm{I}^+(q)\neq\varnothing$，[①] 即 $\exists r\in N\cap \mathrm{I}^+(q)$．另一方面，$q\in \mathrm{J}^+(S)$ 则保证 $\exists x\in S$ 使 $q\in \mathrm{J}^+(x)$．于是由"$\mathrm{J}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$"便得 $r\in \mathrm{I}^+(x)\subset \mathrm{I}^+(S)$．可见 $r\in N\cap \mathrm{I}^+(S)$，说明 p 的任一邻域 N 与 $\mathrm{I}^+(S)$ 有交. 再用一次第 1 章习题 15 的结论便知 $p\in\overline{\mathrm{I}^+(S)}$．　□

定义 9　$S\subset M$ 称为**非编时集**(achronal set), 若不存在 $p,\ q\in S$ 使 $q\in \mathrm{I}^+(p)$．此条件亦可等价地表为 $\mathrm{I}^+(S)\cap S=\varnothing$．

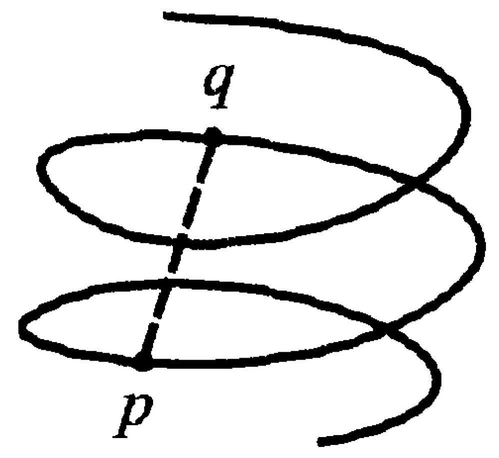


图 11-14　闵氏时空中不是非编时的类空曲线

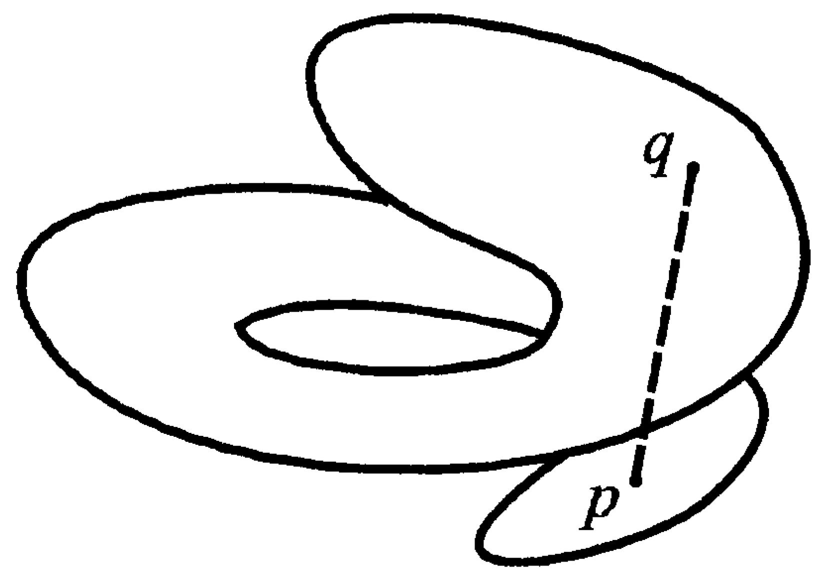


图 11-15　闵氏时空中不是非编时的类空超曲面

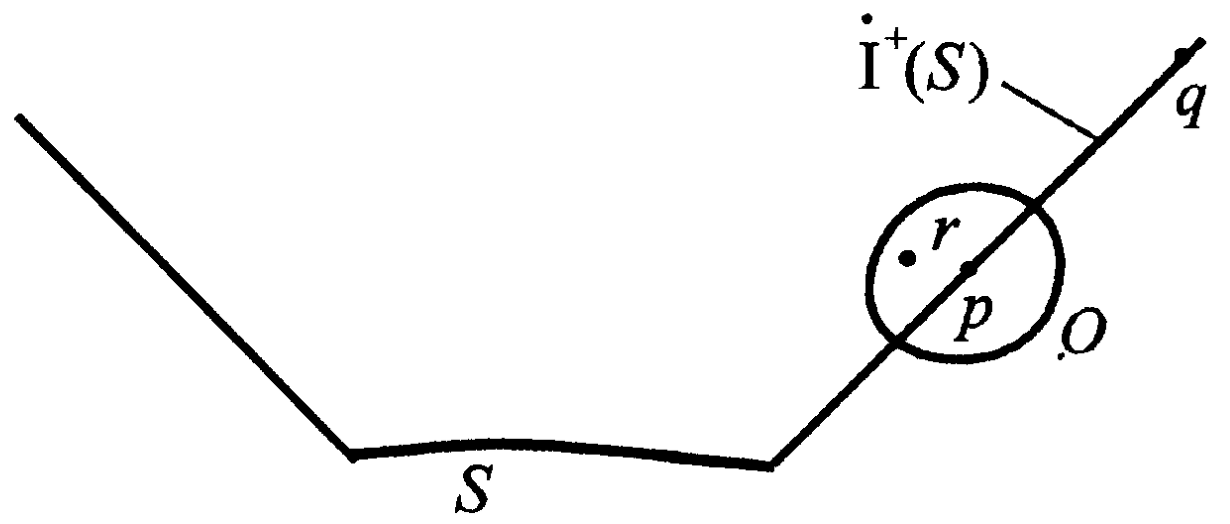


图 11-16　命题 11-1-11 证明用图

注 8　类时曲线和类时超曲面显然不是非编时的, 但类空曲线和类空超曲面也有不是非编时的, 如图 11-14 和 11-15. 不过, 大量非编时集是类空、类光的曲线和超曲面, 例如闵氏时空的类空超曲面 $t=t_0$，类光超曲面 $t=z$ 及类光超曲面 $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 等.

命题 11-1-12　$\forall\, S\subset M$，$\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ (如果非空)是 3 维 C^0 非编时嵌入子流形.

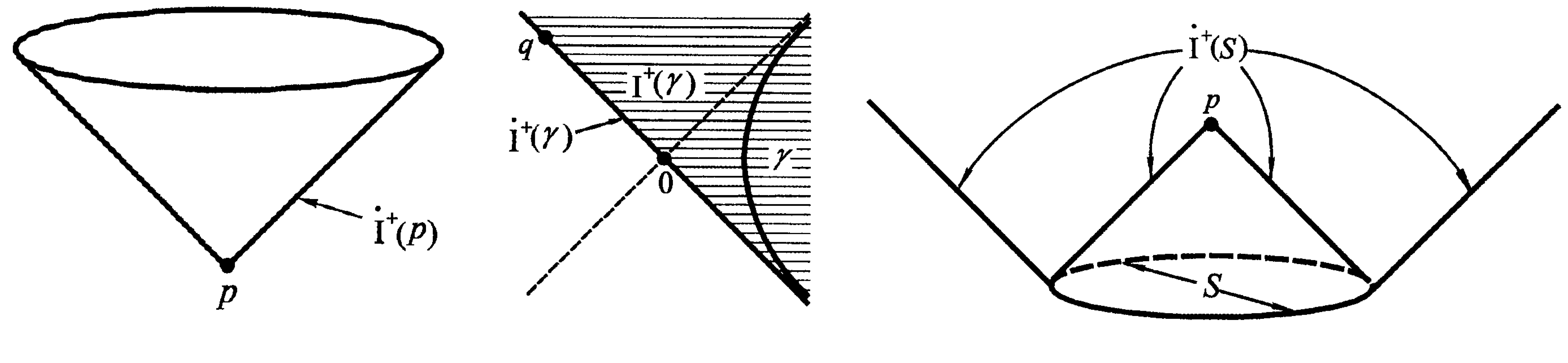
证明　设 $\exists\, p,q\in\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 使 $q\in \mathrm{I}^+(p)$，则 $p\in \mathrm{I}^-(q)$ (图 11-16). $\mathrm{I}^-(q)$ 为开保证存在 p 的开邻域 $O\subset \mathrm{I}^-(q)$．而 $p\in\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 则保证 O 与 $\mathrm{I}^+(S)$ 有交. 设 $r\in O\cap \mathrm{I}^+(S)$，则 $r\in O\Rightarrow r\in \mathrm{I}^-(q)$，同 $r\in \mathrm{I}^+(S)$ 结合得 $q\in \mathrm{I}^+(S)$，与 $q\in\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 矛盾[注意 $\mathrm{I}^+(S)$ 为开]. 故 $\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 为非编时集. $\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 的其他性质(3 维、C^0、嵌入子流形)的证明见 Wald(1984)P.192.　□

下面给出 4 维闵氏时空中三个非编时边界面 $\dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 的例子, t,x,y,z 是洛伦兹坐标.

例 1　$\forall p\in\mathbb{R}^4$ (把 $\{p\}$ 取作 S), $\dot{\mathrm{I}}^+(p)$ 是 3 维非编时超曲面(圆锥面), 它除 p 点外是 C^∞ 类光超曲面, 在 p 点只到 C^0 [压缩一维后如图 11-17(a)].

例 2　伪转动观者世界线 γ 由 $x=\sqrt{1+t^2}$，$y=z=0$ 定义, 把 γ 取作 S，则 $\dot{\mathrm{I}}^+(\gamma)$ 是 3 维 C^∞ 非编时类光超曲面[压缩两维后如图 11-17(b)].

① 这一直观上很好接受的论断的证明关键是: 过 q 的类时线是 C^1 曲线而且不是独点集.



(a) $S=\{p\}$ 为一点　　(b) $S=\gamma$ 是伪转动观者世界线　　(c) S 为类空圆周

图 11-17　4 维闵氏时空的三个 3 维非编时边界面 $\dot{I}^+(S)$ (维数有压缩)

例 3　用 $t=0,\ x^2+y^2+z^2=1$ 定义类空 2 球面 S，则 $\dot{I}^+(S)$ 是 3 维非编时超曲面，除 S 及 p 点外是 C^∞ 类光超曲面，在 S 及 p 点上只到 C^0 [压缩一维后如图 11-17(c)].

§ 11.2　不可延因果线

上节定义类时线和因果线时要求它们为 C^1 曲线，从现在起放宽到 C^0 曲线. 只要(局域地说) C^0 线上任意两点可被一条类时(或因果) C^1 线相连，就叫做类时(或因果)曲线. 准确定义见 Wald(1984)P.193.

定义 1　设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，$\lambda: I\to M$ 是指向未来的因果线. $p\in M$ 称为 λ 的**未来端点**(future endpoint)，若对 p 的任一邻域 O 有 $t_0\in I$ 使 $\lambda(t)\in O$ $\forall t\in I, t\geqslant t_0$. λ 的**过去端点**可对偶地定义.

例 1　施瓦西时空中最终掉进奇点的因果线无未来端点. (直观上的那个"未来端点"必有 $r=0$，而这已不属于时空本身.)

注 1

(1) 由时空背景流形 M 的 T_2 性(见 §1.3 定义 3)可证(习题)任一指向未来因果线最多有一个未来端点. 没学过 §1.3 的读者只须承认这一结论.

(2) 设 $\lambda: [0,1]\to M$ 为指向未来的因果线，则 $p\equiv\lambda(1)$ 是 λ 的未来端点. 考虑

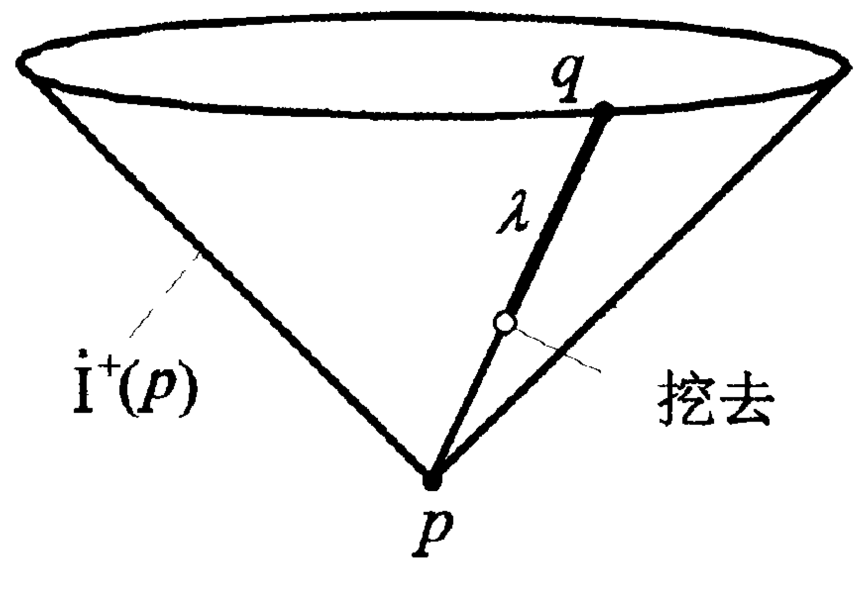


图 11-18 过 $q\in\dot{I}^+(p)$ 的过去不可延类光测地母线 λ (人为例子)

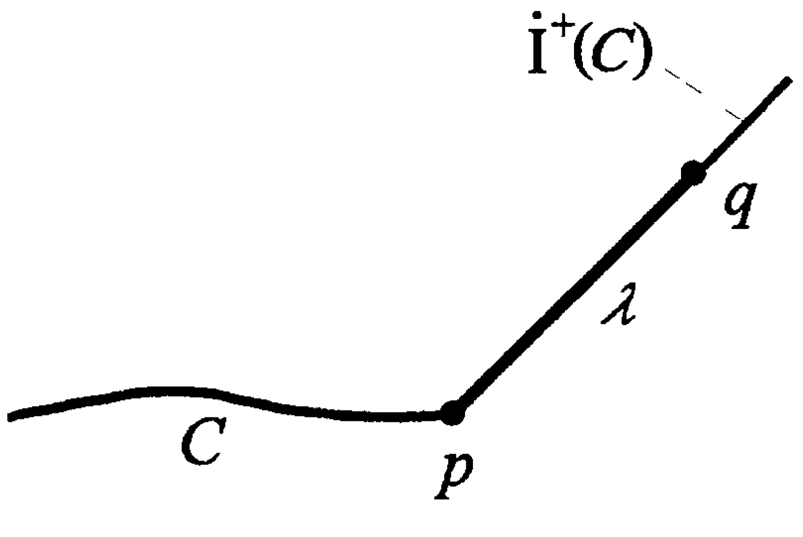


图 11-19　过 q 的类光测地母线 λ 以 $p\in C$ 为过去端点. 若在 λ 上挖去一点，则 λ 成为过去不可延的

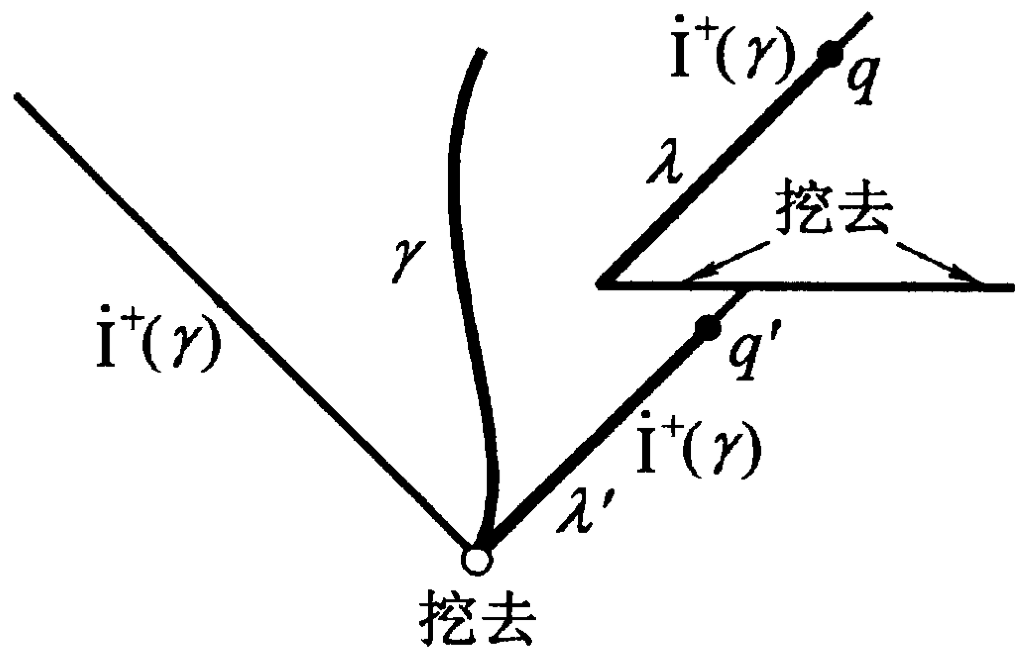


图 11-20　2 维闵氏时空挖去一点和一段直线. 类光测地母线 $\lambda\subset\dot{I}^+(\gamma)$ 和 $\lambda'\subset\dot{I}^+(\gamma)$ 都是过去不可延的

因果线 $\lambda':[0,1)\to M$，它与 λ 的唯一区别在于其定义域不含 $t=1$ 的点. 于是 $p\notin\lambda'(t)$，但由定义知 p 仍是 λ' 的未来端点. 可见未来端点可以不在因果线上.

(3) 若把上例的 p 从 M 中挖去，则 λ' 不再有未来端点. 挖前挖后有本质不同：λ' (及 λ)在挖点前的时空中是可延拓曲线，即可定义另一指向未来因果线 $\tilde{\lambda}:[0,b]\to M$ (其中 $b>1$)使 $\tilde{\lambda}(t)=\lambda(t)\ \ \forall t\in[0,1]$. 这 $\tilde{\lambda}$ 称为 λ' (及 λ)向未来延拓的结果. 但对挖去 p 点后的时空就不能类似地定义 λ' 的延拓 $\tilde{\lambda}$，即 λ' 无法向未来延拓. 于是有以下定义：

定义 2 没有未来端点的指向未来因果线称为**未来不可延的**(future inextendible).① **过去不可延因果线**可对偶地定义.

为了介绍下一命题，先看闵氏时空的一个简单特例. 设 $p\in\mathbb{R}^4$，则 $\dot{I}^+(p)$ (但 p 点除外)为非编时类光超曲面(上节例 1)，它是以过 p 点的类光测地线为母线产生的，就是说，$\forall q\in\dot{I}^+(p)$，必存在唯一的过 q 且躺在 $\dot{I}^+(p)$ 上的类光测地线，称为过 q 的**类光测地母线**(null geodesic generator). 这母线以 p 为过去端点. 然而，如果在线上挖去一点(图 11-18)，则过 q 的类光母线就不再以 p 为过去端点而成为过去不可延类光测地线. 以下命题是这一结论的推广.

命题 11-2-1 设 $C\subset M$ 为闭子集，则 $\forall q\in\dot{I}^+(C)$, $q\notin C$，有过 q 的一条类光测地母线 $\lambda\subset\dot{I}^+(C)$，它或是过去不可延的，或是在 C 上有过去端点(图 11-19).

证明 见 Wald(1984)定理 8.1.6 的证明. 也可参阅 Penrose(1972) **3.20** 节. □

例 2 ①设 q 为图 11-17(c)的 $\dot{I}^+(S)$ 的任一点，则过 q 的类光测地母线 $\lambda\subset\dot{I}^+(S)$ 有过去端点，而且在 S 上. ②设 q 为图 11-17(b)的 $\dot{I}^+(S)$ [即 $\dot{I}^+(\gamma)$]上的任一点，则过 q 的类光测地母线是过去不可延的. ③在图 11-20 的 $\dot{I}^+(\gamma)$ 上取 q 和 q' 点，则过它们的类光测地母线 $\lambda\subset\dot{I}^+(\gamma)$ 和 $\lambda'\subset\dot{I}^+(\gamma)$ 都是过去不可延的.

[选读 11-2-1]

直观看来，从任一时空点 p 发出的任一指向未来类光测地线 λ 必躺在 $\dot{I}^+(p)$ 上，其实不然. 图 11-11 就是反例：从 p 发出的 λ 在 r 点后离开 $\dot{I}^+(p)$ 进入 $I^+(p)$，表明从 p 发出的指向未来类光测地线 λ 与从 p 发出的指向未来类时线 γ 有可能相交. 注意到图 11-11 是相当人为的例子(通过人为认同把背景流形从 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 变为 $\mathbb{R}\times S^1$)，自然要问：这一现象是否也存在于不那么人为的时空中？(例如这样的时空，其度规是真空爱因斯坦方程的解，其流形是最简单的单连通流形 $\mathbb{R}^4$.) 答案是肯定

① 无未来端点(因而未来不可延)的常见情况是(a)当参数达到某值时曲线映射的“像点”是时空奇点；(本节例 1 属此情况. 挖点则是这种情况的人为实现.)(b)曲线映射的像点随参数增大而趋于无限远；(c)曲线的像点随参数增大而在有限范围内转来转去(曲线的像可能闭合也可能不闭合)，永无止境. 反之，在有未来端点的情况下，曲线之所以停在端点是因为定义映射时就没把它定义为越过该点，因而可通过重新定义而得以延拓.

的. Taub 的平面对称时空(见§8.6)就是一例, 见 Kuang et al.(1996). 应该指出, 从 p 发出的指向未来类光测地线进入 $I^+(p)$ 的现象在线上有共轭点对时必然发生. 更准确地说, 设 λ 是从 p 到 q 的指向未来类光测地线, $\tilde{p}\in\lambda$ 是 p 沿 λ 的共轭点, 则总可把 λ 稍加变形而成为一条从 p 到 q 的类时线[见 Wald(1984) P.232], 因此 $q\in I^+(p)$. 然而图 11-11 作为局域平直时空根本不存在共轭点对, Kuang et al.(1996)涉及的从 p 发出的指向未来类光测地线虽然存在与 p 共轭的点 $\tilde{p}$, 但它在到达 $\tilde{p}$ 之前就已进入 $I^+(p)$. 可见, 发自 p 的类光测地线 λ 上存在 p 的共轭点是 λ 进入 $I^+(p)$ 的充分而非必要条件. **[选读 11-2-1 完]**

§ 11.3 因 果 条 件

定义 1 时空叫做满足**编时条件**(chronological condition)**的**, 若它不存在闭合类时线.

把闵氏时空中某惯性系的两个同时面认同(图 11-4), 就得到一个不满足编时条件的时空. 这当然只是人为例子. 然而, 爱因斯坦方程确有存在闭合类时线的精确解, 例如 Godel 时空[Godel(1949)]、Kerr-Newman 时空的奇环附近(见小节 13.4.3)以及反德西特时空(见下册 § J.6). 当然, 爱因斯坦方程的精确解也不一定就代表真实时空.

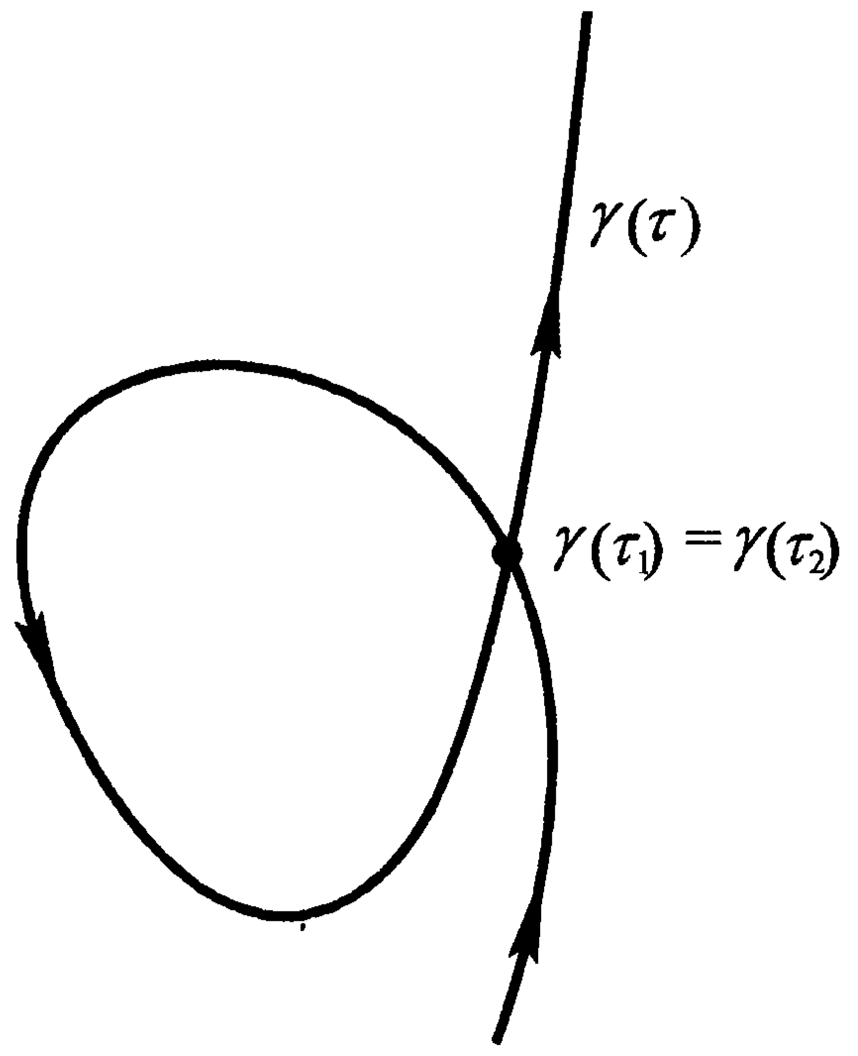


图 11-21 含有闭合段的世界线 $\gamma(\tau)$ 导致因果疑难

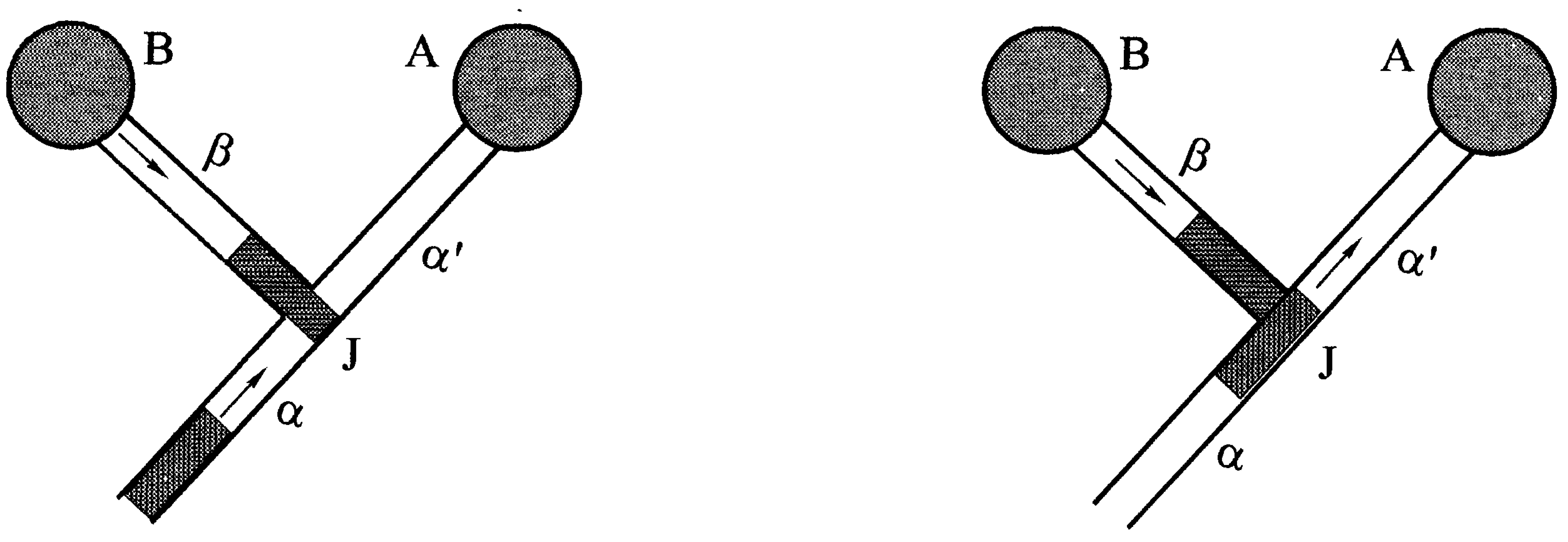
通常认为闭合类时线的存在会导致因果性疑难: 设观者 γ 的世界线 $\gamma(\tau)$ 含有一个闭合段(图 11-21), 则存在 $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}$ 满足 $\gamma(\tau_1)=\gamma(\tau_2)$. 假定 τ_1 代表观者 γ 为 15 岁的时刻, $\tau_2-\tau_1=50$(年), 则他在 65 岁时与 15 岁时属于同一事件! (用科幻作家的话说就是 65 岁的他可同 15 岁的自己握手并互道“你好”, 由此又可编造出许多“时间机器”一类的故事.) 这虽然看来十分不可能, 但理论上(至少广义相对论)

对此还无法排除. 事实上, 通过"时空虫洞"制造时间机器的可能性从1988年起正式登入科学研究殿堂, 成为广义相对论学家的一个严肃的研究课题. [Morris and Thorne(1988); Morris, Thorne, and Yurtsever(1988).] 1985年出版的著名小说 *Contact* 描写了一个通过虫洞作快速星际旅行的故事. 与大多数科幻小说不同, 该小说对星际旅行的描写同物理学家直至写作时为止对物理定律的认识完全一致. 小说初稿描写的是穿越黑洞的旅行. 作者 Sagan 曾把书稿寄给 Thorne, 请他协助把小说中涉及引力物理的部分尽可能加以准确化. Thorne 对黑洞微扰的各种计算结果非常熟悉, 深知穿越黑洞的旅行几乎无望, 便建议把黑洞改为虫洞(wormhole). 这一事件促使 Thorne 开始认真研究并找到有可能进行星际旅行的虫洞解, 但发现要撑开虫洞必须存在违反弱能量条件(见附录 D)的奇异(exotic)物质. 通俗地说, 虫洞是连接相距遥远的两个空间点的一条捷径, 物体从一个洞口进入再从另一洞口出来, 就有可能回到过去, 因而提供一部时间机器. 关于时间机器(存在闭合类时线)的常见悖论是: "如果我通过时间隧道回到我出生之前并杀死我娘, 那么还有我吗? 既然没有我, 我又怎能回去杀死我娘?"这可称为"弑母悖论". Thorne, Novikov 等若干学者指出:即使存在闭合类时线也不会出现弑母现象, 因为弑母过程是一种非自洽解, 由物理定律决定的任何演化过程都应该在逻辑上自洽, 任何人(或物)都不能通过回到过去来改变自己的历史. 在摒除所有非自洽解的同时, 他们在寻求自洽解的研究中不断取得很有意义的进展(见选读 11-3-1). 另一方面, Hawking 则在考虑量子效应后于 1992 年提出如下的**时序保护猜想**(chronology protection conjecture) [Hawking(1992)]:物理定律不允许闭合类时线存在. 这一问题的研究和争论仍在继续中.

[选读 11-3-1]

弑母悖论的提出反映这样一种信念:闭合类时线的存在使人们可以改变过去, 从而造成因果性的严重疑难. 其实并非如此. 弑母悖论是人们想象的一个非自洽过程, 它(以及人们能想出的所有非自洽过程)的成因是没有考虑未来对过去的影响. 为了避免矛盾, 应该要求所有过程都遵守自洽性原则:闭合类时线段上任意两个事件都以自洽的方式互相影响(自动调整到这样的方式):每个(物理)事件只发生一次, 而且不会被改变. 下面的有趣例子有助于理解这一问题[Novikov(1992)]. 一根Y形管以图 11-22(a)的方式与虫洞的两个洞口相连, 管的内壁非常光滑, 使管内的活塞得以无摩擦地运动. 选择初始位置和速率使活塞沿路径 α 和 α' 到达洞口 A, 穿过虫洞后从洞口 B 出来(回到过去), 继续沿路径 β 运动并赶在"较年轻"的自己到达之前占领接头 J, 挡住"较年轻"的自己, 使之不能到达洞口 A. 这显然是一个与弑母现象类似的非自洽过程. 然而计算表明在任意给定的初始条件下的确存在自洽过程(运动方程的自洽解), 大意是[图 11-22(b)]:活塞从与图 11-22(a)相同的初始位

置和速率出发，将近到达接头 J 时恰被从洞口 B 出来的“较老”的自己轻轻一碰(“较老”的活塞的头部与“较年轻”的活塞的侧面发生摩擦)，因而速率略有减小. 它以这较小的速率走过 α'，从 A 进洞再从 B 复出. 由于速率较小，它不能抢先挡住“较年轻”的自己的去路，只能对它轻轻一碰. 这显然是一个自洽的演化过程.



(a) 不自洽运动情况　　(b) 自洽运动情况

图 11-22　管内活塞穿过虫洞的两种运动情况(A、B 是虫洞的两个洞口)

图 11-22 只是许多类似例子中的一个. 事实上，Thorne 及其合作者研究的第一个例子是台球从洞口 A 进虫洞再从洞口 B 出来并与“较年轻”的自己相碰的情况(由 Bolchinski 首先提出的一个佯谬). 在证明给定初始条件必有自洽解的同时，他们发现对同一初始条件竟有无数自洽解. 这种怪事在无闭合类时线的情况下决不可能出现. 自然要问：给定初始条件后，台球到底按哪个自洽解运动？他们最后求助于量子力学(反正广义相对论最终必须与量子理论结合). 在量子理论中每种轨道都有一定的概率，我们无须像在经典理论中那样被迫回答“到底台球走哪条轨道?”的问题. 详见 Thorne(1994, 有中译本). **[选读 11-3-1 完]**

不满足编时条件的时空被认为是因果性最差的时空. 满足编时条件的时空虽然没有闭合类时线，却仍可能有闭合类光曲线. 注意到光子以类光曲线为世界线，可知有闭合类光曲线的时空的因果性也很差.

定义 2　时空叫做满足**因果条件**(causality condition)**的**，若它不存在闭合因果线(独点线除外). 满足因果条件的时空叫**因果时空**.

图 11-23 为非因果时空的一例. 把图中的 p 点挖去，就成为因果时空. 然而挖去 p 点的时空仍存在从 q 点出发的、无限接近(要多接近有多接近)闭合的因果线(实际是类时线)，如图 11-24 所示. 对度规的任何微扰都会导致闭合因果线的出现，故这种时空的因果性仍很差. 能避免这一缺点的时空的条件如下.

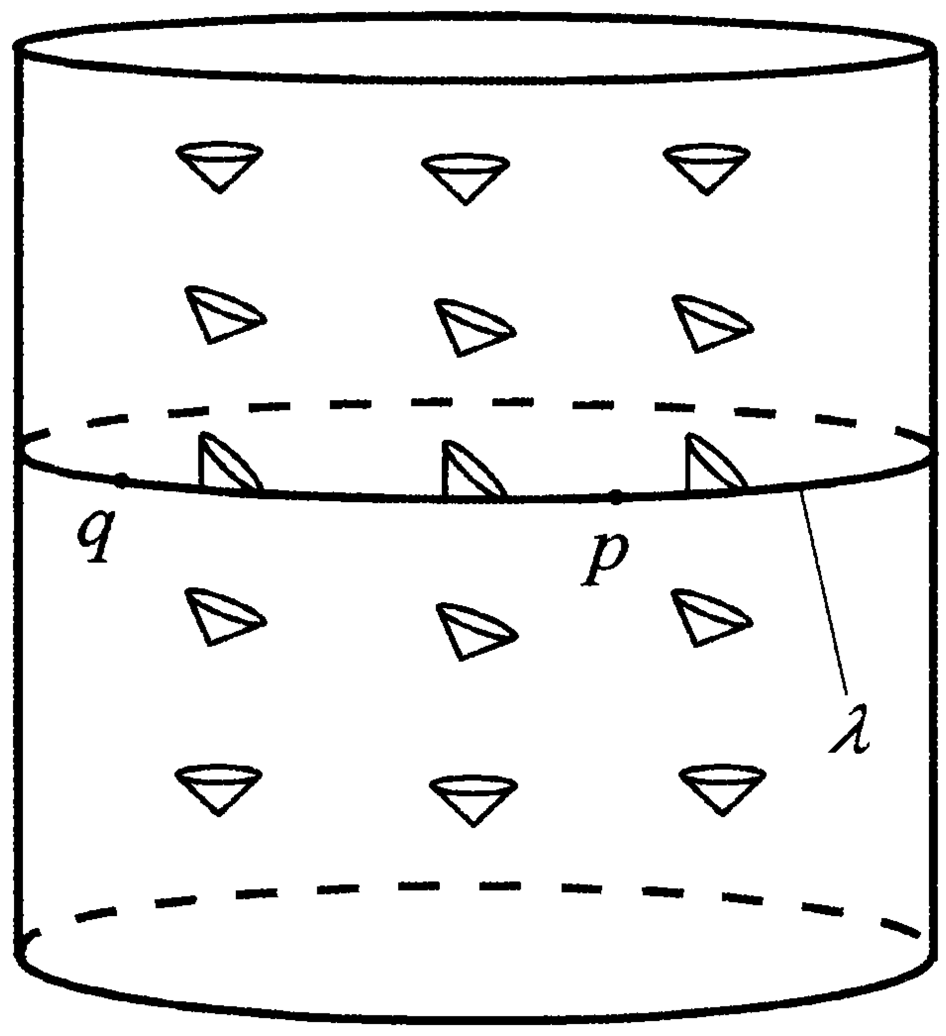


图 11-23 非因果时空一例

圆柱面是时空流形，面上各点的光锥大致反映面上的度规. 存在闭合因果线 λ

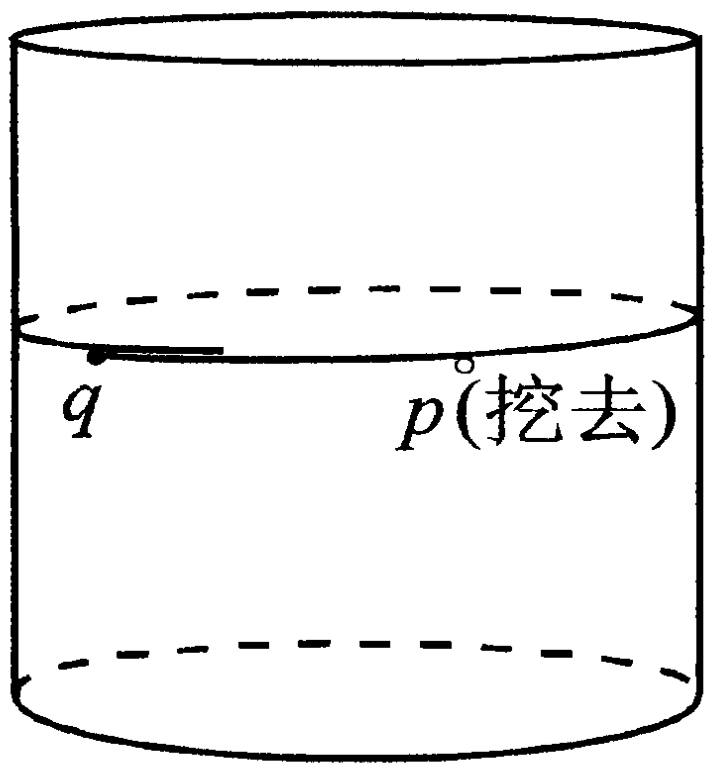


图 11-24 图 11-23 挖去 p 点所得的因果时空存在无限接近闭合的类时线

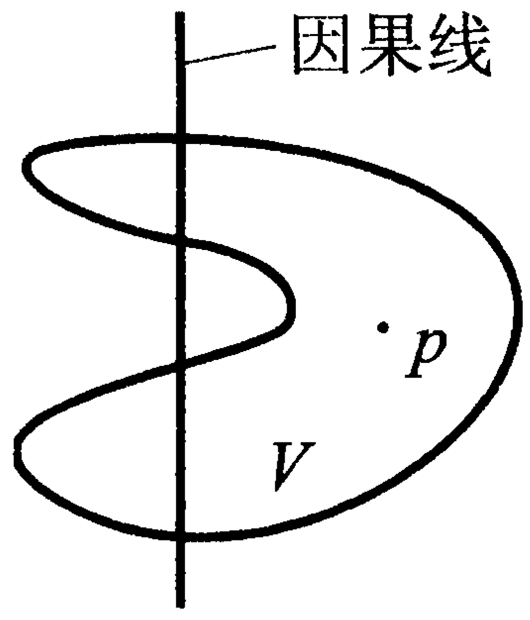


图 11-25 若用条件(2)代替定义 3 的条件，则连闵氏时空也不是强因果的

定义 3 时空 (M,g_{ab}) 叫做满足**强因果条件**(strong causality condition)**的**，若 $\forall p\in M$ 和 p 的任一邻域 O，$\exists\, p$ 的邻域 $V\subset O$ 使任何因果线与 V 相交不多于一次(即交集或者是一个连通线段或者是空集). 满足强因果条件的时空叫**强因果时空**.

注 1 对定义 3 的以下两种简化都不可取：

(1)"时空 (M,g_{ab}) 叫强因果时空，若任一 $p\in M$ 有邻域 V 使任何因果线与 V 相交不多于一次." 按此定义，任何时空都是强因果的，因为可取 $V=M$.

(2) "时空 (M,g_{ab}) 称为强因果时空，若 $\forall p\in M$ 和 p 的任一邻域 V，任何因果线与 V 相交不多于一次." 按此定义，连闵氏时空都不是强因果的，如图 11-25.

强因果时空的因果性虽然优于因果时空，但在某些情况下仍然处于因果性破坏的边缘. 图 11-26 就是一例. 这是 2 维闵氏时空经认同并挖去 3 段直线的结果. 它满足强因果条件，但若对度规作微扰，使每点的光锥都"张开一点点"，则闭合细直线 pqp 用新度规衡量就是类时线. 广义相对论很可能是某种(目前尚未有的)量子引力论的经典极限. 量子理论的不确定原理使每一时空点的度规没有确定值. 为了在物理上站得住脚，时空的任何性质都应有一定的稳定性，即经得起对度规的微扰. 因此还有必要引入因果性良好而且稳定的时空的定义.

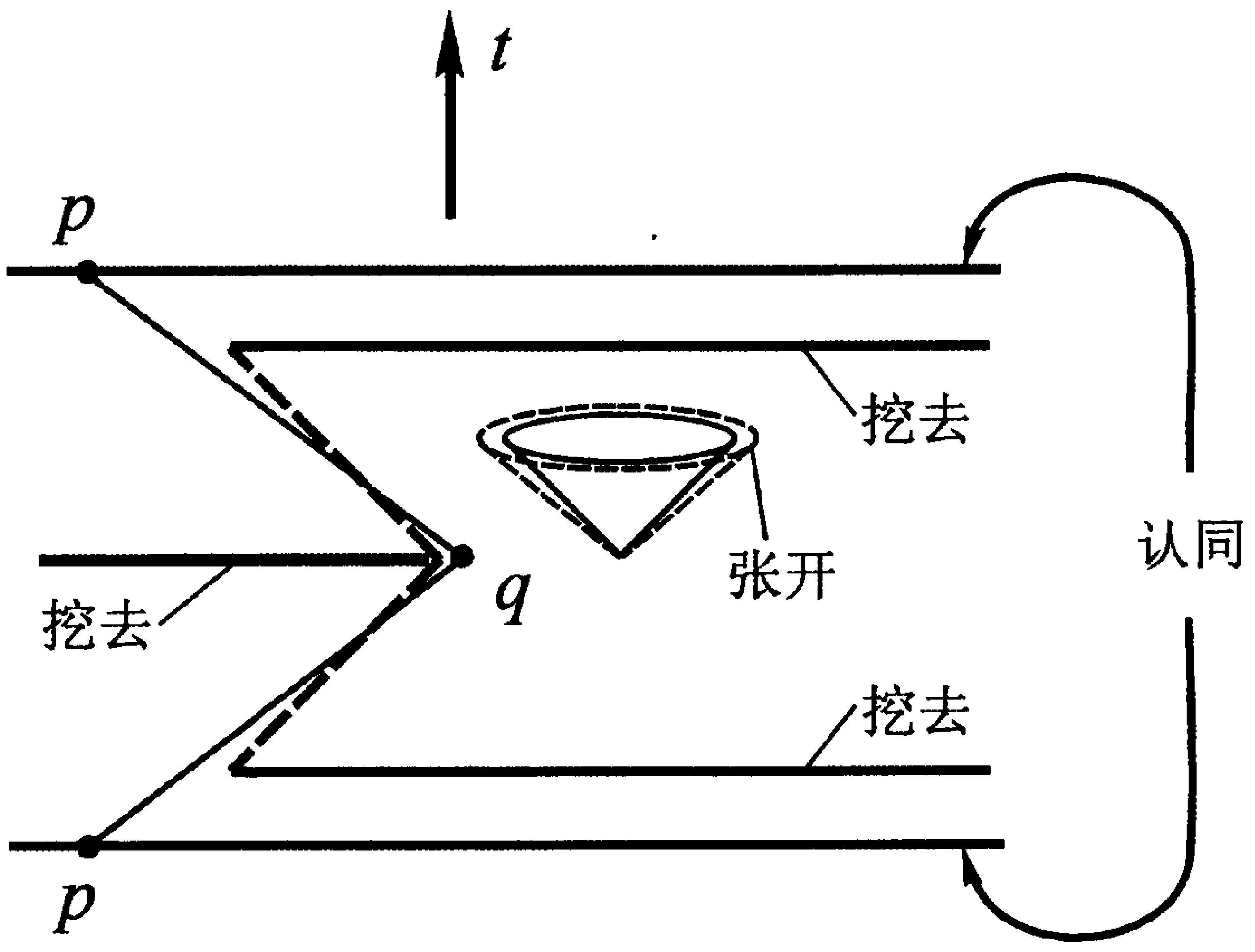


图 11-26　强因果时空一例. 若对度规微扰使每点光锥“张大一点点”，则闭合线 pqp 就是类时的

引理 11-3-1　设 (M,g_{ab}) 为时空，$p\in M$，$t^a\in V_p$ 为类时，$t_a\equiv g_{ab}t^b$，则对 p 点而言，

$$\tilde{g}_{ab}\equiv g_{ab}-t_a t_b \tag{11-3-1}$$

是洛伦兹度规，且其光锥“大于” g_{ab} 的光锥，准确含义是：$\forall v^a\in V_p$，$v^a\neq 0$ 有

$$g_{ab}v^a v^b\leqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{g}_{ab}v^a v^b<0 .$$

证明　由式(11-3-1)可知 $\forall v^a\in V_p$ 有

$$\tilde{g}_{ab}v^a v^b=g_{ab}v^a v^b-(t_a v^a)(t_b v^b) . \tag{11-3-2}$$

设 $\{(e_\mu)^a\}$ 为 $(V_p,g_{ab}|_p)$ 的正交归一基底，且 $t^a=\beta(e_0)^a$. 以 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 代表 $\tilde{g}_{ab}$ 在 $\{(e_\mu)^a\}$ 的分量，则对 p 点有

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\tilde{g}_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b=g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b-t_a(e_\mu)^a t_b(e_\nu)^b=\eta_{\mu\nu}-\beta^2\delta^0{}_\mu\delta^0{}_\nu ,$$

故 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 排成对角矩阵，对角元三正一负($\tilde{g}_{00}=-1-\beta^2<0$，$\tilde{g}_{11}=\tilde{g}_{22}=\tilde{g}_{33}=1$)，因而 $\tilde{g}_{ab}$ 是洛伦兹度规. 若 $g_{ab}v^a v^b<0$，则由式(11-3-2)不难看出 $\tilde{g}_{ab}v^a v^b<0$；若 $g_{ab}v^a v^b=0$，则命题 11-1-1(1)排除了 $t_a v^a=0$ 的可能性，故 $(t_a v^a)(t_b v^b)>0$，所以由式(11-3-2)仍有 $\tilde{g}_{ab}v^a v^b<0$.　□

下面介绍“(M,g_{ab}) 的因果性经得起微扰”的数学表述. 这里的“微扰”是指每点的光锥“张开一点点”，这个“一点点”的数学表述就是划定一个范围并要求所有扰动不得逾越. 既然 $\tilde{g}_{ab}\equiv g_{ab}-t_a t_b$ 的光锥比 g_{ab} 的大，一个类时矢量场 t^a 就对光锥的“张开”程度划定了一个范围. 如果限于此范围内的、对 g_{ab} 的扰动不破坏因果性，(M,g_{ab}) 的良好因果性就是稳定的. 而为此只需 $(M,\tilde{g}_{ab})$ 也有良好的因

果性，至少不能有闭合类时线. 于是有如下定义:

定义 4　(M,g_{ab}) 叫**稳定因果时空**(stably causal spacetime)，若 $\exists\, C^0$ 类时矢量场 t^a 使时空 $(M,\tilde{g}_{ab})$（其中 $\tilde{g}_{ab}\equiv g_{ab}-t_a t_b$）满足编时条件.

命题 11-3-2　时空 (M,g_{ab}) 为稳定因果时空的充要条件是 M 上存在可微函数 f 使 $\nabla^a f\equiv g^{ab}\nabla_b f$ 为类时矢量场. 这样的 f 叫**整体时间函数**(global time function).

证明

(A) 条件充分性的证明: 已知 $\nabla^a f$ 为类时矢量场，欲证 (M,g_{ab}) 是稳定因果时空. 取 $t^a\equiv\nabla^a f\equiv g^{ab}\nabla_b f$，$\tilde{g}_{ab}=g_{ab}-(\nabla_a f)\nabla_b f$，则容易验证

$$\tilde{g}^{ab}=g^{ab}+\frac{t^a t^b}{1+\alpha^2},$$

其中

$$-\alpha^2\equiv g_{ab}t^a t^b=g^{ab}(\nabla_a f)\nabla_b f=t^a\nabla_a f\,. \qquad (11\text{-}3\text{-}3)$$

设 γ 是 $(M,\tilde{g}_{ab})$ 中的任一指向未来类时线，① v^a 是其切矢，若能证明 $v^a\nabla_a f$ 恒为正(或负)，则 f 沿 γ 常增(或常减)，因此 γ 不会闭合，这就保证 $(M,\tilde{g}_{ab})$ 的编时性，从而保证 (M,g_{ab}) 的稳定因果性. 另一方面，

$$v^c\nabla_c f=\delta_a{}^c v^a\nabla_c f=\tilde{g}_{ab}v^a(\tilde{g}^{bc}\nabla_c f)\equiv\tilde{g}_{ab}v^a\tilde{t}^b,$$

其中 $\tilde{t}^b\equiv\tilde{g}^{bc}\nabla_c f$. 根据上式，注意到 v^a 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量为指向未来类时以及命题 11-1-1，可知欲证 $v^a\nabla_a f$ 恒为正(或负)只须证明 $\tilde{t}^b$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量为类时矢量场. 而这由下式显见:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ab}\tilde{t}^a\tilde{t}^b&=\tilde{g}_{ab}(\tilde{g}^{ac}\nabla_c f)\tilde{g}^{bd}\nabla_d f=\tilde{g}^{cd}(\nabla_c f)\nabla_d f\\&=g^{cd}(\nabla_c f)\nabla_d f+\frac{(t^c\nabla_c f)t^d\nabla_d f}{1+\alpha^2}=-\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}<0,\end{aligned}$$

其中第四步用到式(11-3-3).

(B) 条件必要性的证明见 Hawking and Ellis(1973). 证明梗概见 Wald(1984). □

命题 11-3-3　稳定因果时空必为强因果时空.

证明　见 Wald(1984)P.199.　□

命题 11-3-3 表明稳定因果条件是上述各种因果条件中之最强者. 事实上，整体时间函数的存在本身就表明稳定因果时空是因果表现良好的时空. 因为 $\nabla^a f$ 是等 f

① 默认把 (M,g_{ab}) 在每点 p 的指向未来部分自然"延拓"作为 $(M,\tilde{g}_{ab})$ 的指向未来部分.

面的法矢, $\nabla^a f$ 类时表明等 f 面为类空超曲面. 命题 11-3-2 表明稳定因果时空可用单参类空超曲面族 $\{\Sigma_f\}$ 分层(见小节 10.1.1), 每层可解释为"时刻 f"的全空间. 所以在稳定因果时空中可以整体地定义"时间"——每一时空点(事件)的 f 值就代表它发生的"时刻". 总可通过对 f 增减正负号使 $\nabla^a f$ 为指向未来类时, 从而保证 f 沿每一指向未来类时线(代表一个观者)严格常增. 这就排除了各种因果破坏的可能性. 关于"时间"的概念以及整体时间函数的用处, 可参阅 §14.4.

作为本节小结, 我们把讲过的时空因果性条件由强至弱排列如下(">"号代表"强于"):

稳定因果 > 强因果 > 因果 > 编时.

上式中的某些地方还可插入某些条件, 这反映更细致的排队. 习题 5 就是一例.

§ 11.4　依　赖　域

S 的编时未来 $I^+(S)$ [或因果未来 $J^+(S)$]又称为 S 的**未来影响域**(future domain of influence), 因为 $J^+(S)$ 中任一事件 p 都可能受到 S 上的事件的影响. [例如, 观者 G 可在同 S 交于 r 时扔出一颗手榴弹, (世界线为 γ, 见图 11-27.) 它在事件 $p\in I^+(S)$ 爆炸.] 就是说, $J^+(S)$ 是 S 的影响所及的全体事件的集合. 然而手榴弹也可能来自 x, 其世界线(虚线)与 S 不可能相交, 不会在 S 上留下印记, 因此在侦破 p 点的爆炸案时不能仅把 S 作为怀疑对象. 说得准确些, 设 S 是类空超曲面 Σ (代表初始时刻的全空间)的一部分, 则 S 上的数据(初值)不足以决定 $J^+(S)$ 内每点会发生什么. 反之, 下面介绍的 S 的未来依赖域 $D^+(S)$ 则是完全依赖于 S 的全体事件的集合, 域中任何事件都可在 S 上找到原因.

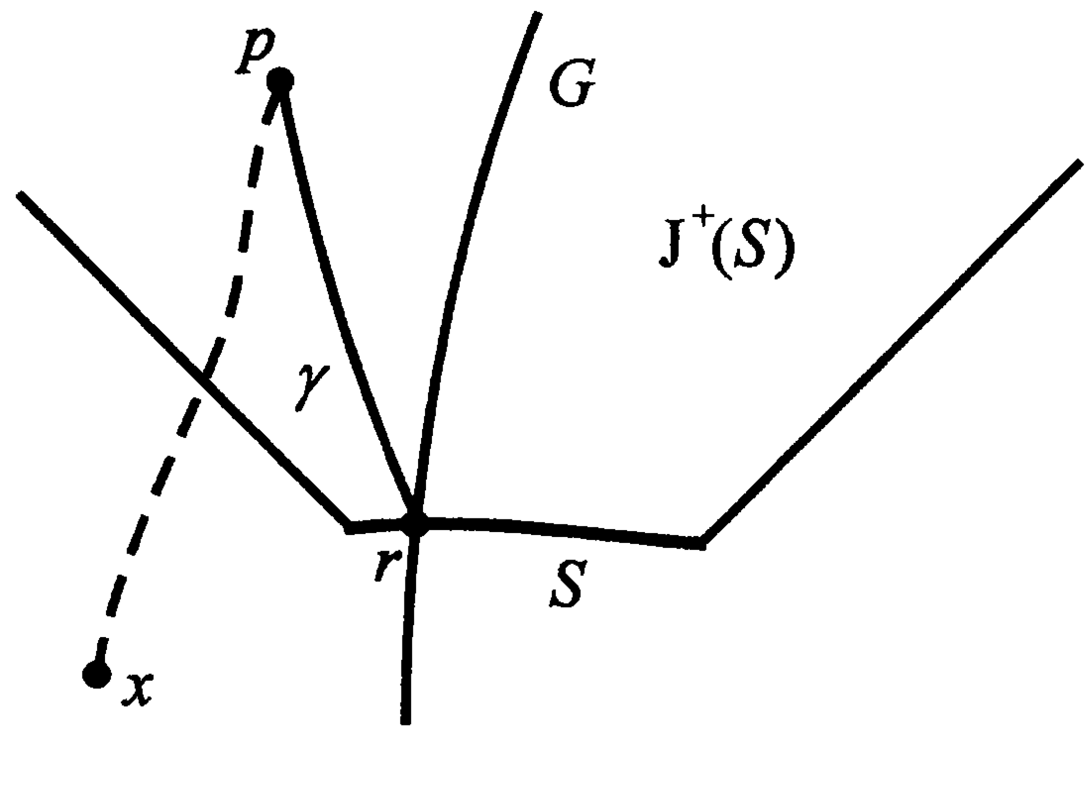


图 11-27　S 上的数据(初值)不足以决定 $J^+(S)$ 内每点会发生什么

定义 1　设 S 是 M 的非编时闭子集, 则 S 的**未来依赖域**(future domain of dependence) $D^+(S)$ 定义为

$$D^+(S) := \{p \in M \mid \text{起于}\ p\ \text{的任一过去不可延因果线与}\ S\ \text{有交}\}.$$

S 的**过去依赖域** $D^-(S)$ 可对偶地定义. S 的(总)**依赖域** $D(S)$ 则定义为

$$D(S) := D^+(S) \cup D^-(S).$$

注 1 ①定义 1 保证对事件 $p \in D^+(S)$ 有影响的一切信号都曾在 S 上作过登记. ②不难证明 $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$. ③除有重要物理意义外, $D^\pm(S)$ 作为一种纯数学结构也很有用.

例 1 设 S 是 4 维闵氏时空的 x 轴, 则 $D^+(S) = S$.

例 2 设 S 是 4 维闵氏时空的超平面 $t = 0$ 中的 3 维闭球体:

$$S = \{(t,x,y,z) \mid t = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}, \tag{11-4-1}$$

且把点 $(1/2,0,0,0)$ 从时空中挖去, 则 $D^+(S)$ 和 $D^-(S)$ 如图 11-28 所示. 以挖去点为锥顶的圆锥体不含于 $D^+(S)$.

例 3 设 S 是 4 维闵氏时空中由下式定义的类空旋转双曲面:

$$S \equiv \{(t,x,y,z) \mid t^2 - 1 = x^2 + y^2 + z^2,\ t < 0\},$$

则

$$D^+(S) = \{(t,x,y,z) \mid t^2 > x^2 + y^2 + z^2 \geqslant t^2 - 1,\ t < 0\},$$

$$D^-(S) = \{(t,x,y,z) \mid t^2 - 1 \geqslant x^2 + y^2 + z^2,\ t < 0\},$$

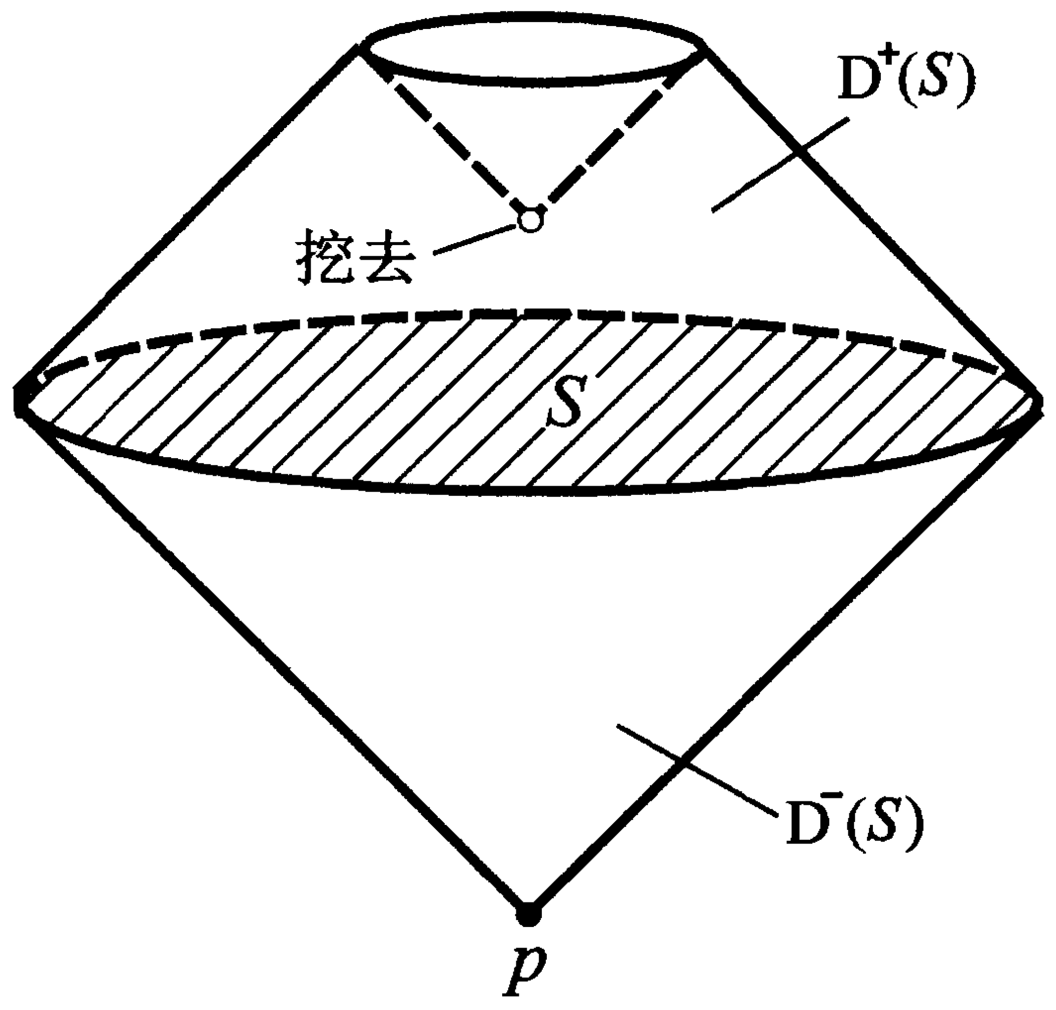


图 11-28 例 2 用图

如图 11-29 所示. 两条 45° 斜直线所代表的圆锥面不属于 $D^+(S)$.

例 4 设 S 是 4 维闵氏时空的 3 维类光超曲面 $t = z$, 则 $D^+(S) = S$.

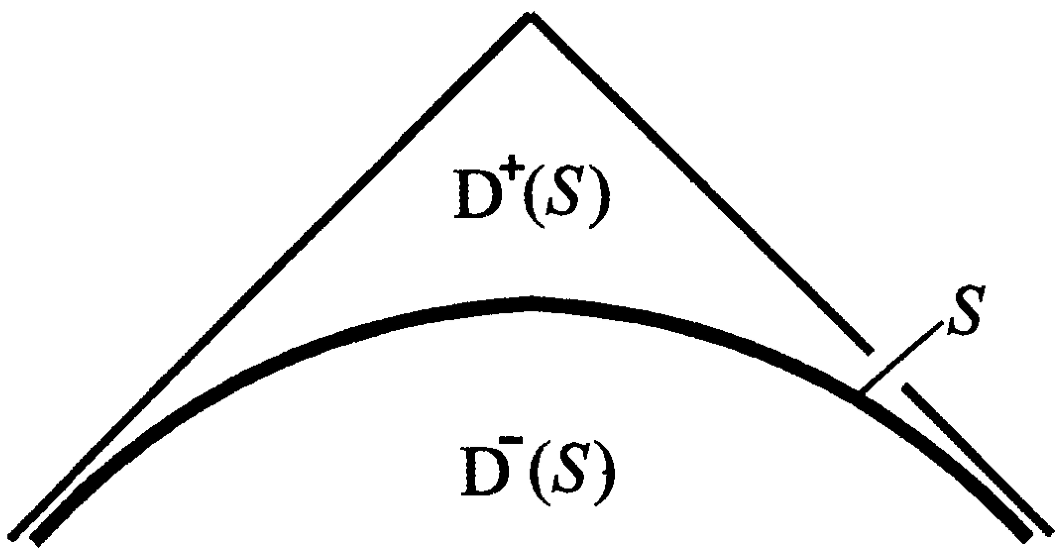


图 11-29　例 3 用图(压缩两维)

例 5　设 S 为施瓦西最大延拓时空中由 $T=0$ (T 为 Kruskal 时间坐标)定义的类空超曲面，则 $D(S)=M$.

注 2　依赖域 $D^{\pm}(S)$ 的概念是研究广义相对论整体问题(如奇性定理和初值问题)的有力工具. 把 $D^{\pm}(S)$ 的概念推广到不是非编时的子集 S 虽然允许，但不会带来真正好处(特别在物理方面)，却徒增不少麻烦. 把 S 限制为闭子集则主要是出自简单性考虑，而且，事实上只有当 S 为类空或类光 3 维面时 $D^{\pm}(S)$ 才真正有用武之地.

命题 11-4-1　$D^+(S)\cap I^-(S)=\varnothing$.

证明　设 $q\in D^+(S)\cap I^-(S)$. $q\in D^+(S)$ 表明起于 q 的任一过去不可延因果线 λ 都与 S 有交. 设 $p\in\lambda\cap S$，则 $p\in J^-(q)$. $q\in I^-(S)$ 则表明 $\exists r\in S$ 使 $q\in I^-(r)$，故 $p\in I^-(r)$，与 S 的非编时性矛盾. □

引理 11-4-2　设 λ 是过 p 的过去不可延因果线，则 $\forall p'\in I^+(p)$ $\exists$ 过 p' 的过去不可延类时线 $\gamma\subset I^+(\lambda)$ (见图 11-30).

证明　见 Wald(1984)引理 8.1.4 的证明. □

注 3　本引理很有用处. 它从过 p 的过去不可延因果线 λ 出发断定存在过 $p'\in I^+(p)$ 的过去不可延类时线 γ，而且 $\gamma\subset I^+(\lambda)$.

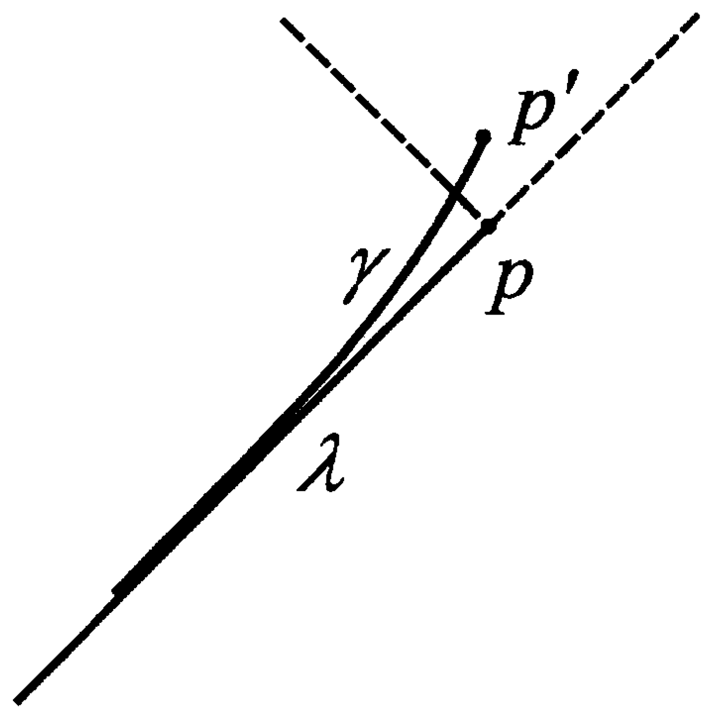


图 11-30　引理 11-4-2 图示

命题 11-4-3　$p\in\overline{D^+(S)}$ 的充要条件是起于 p 的任一过去不可延类时线与 S 有交.

证明[选读]

(A) 必要性的证明.基本思路是:设 $p\in\overline{D^+(S)}$，则 p 有邻点 $q\in D^+(S)$.若存在起于 p 的与 S 无交的过去不可延类时线，便可借它构造起于 q 的与 S 无交的过去不可延因果线，从而与 $q\in D^+(S)$ 矛盾.下面落实这一思路.若 $p\in S$，则显然起于 p 的任一过去不可延类时线与 S 有交.因此只须讨论 $p\notin S$，即 $p\in M-S$ 的情况. S 为闭集导致 $M-S$ 为开集，由定理 1-2-1 可知 p 有邻域 $U\subset M-S$.设存在起于 p 的与 S 无交的过去不可延类时线 γ (图 11-31).令 $r\in\gamma\cap U$ 且 $\gamma_{pr}\subset U(\gamma_{pr}$ 代表 γ 中介于

p, r 之间的一段[①]), 则 $p\in \mathrm{I}^+(r,U)$. $p\in \overline{\mathrm{D}^+(S)}$ 导致

$$\exists\ q\in \mathrm{I}^+(r,U)\cap \mathrm{D}^+(S).$$

$q\in \mathrm{I}^+(r,U)$ 则保证存在由 q 到 r 的指向过去类时线 $\alpha\subset U$. α 与 S 无交, 因为 $U\subset M-S$. 设 γ' 是 γ 中位于 r 点的过去的部分, 则 $\alpha\cup\gamma'$ 是起于 q 的与 S 无交的过去不可延类时线, 与 $q\in \mathrm{D}^+(S)$ 矛盾. 可见起于 p 的任一过去不可延类时线必与 S 有交.

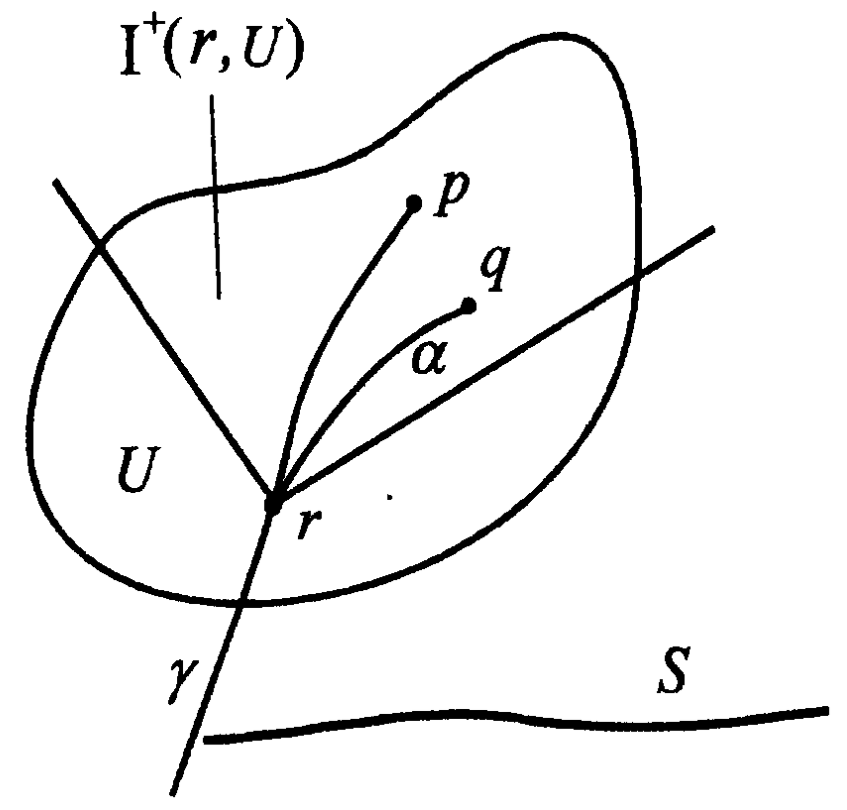


图 11-31 命题 11-4-3 证明(A)用图

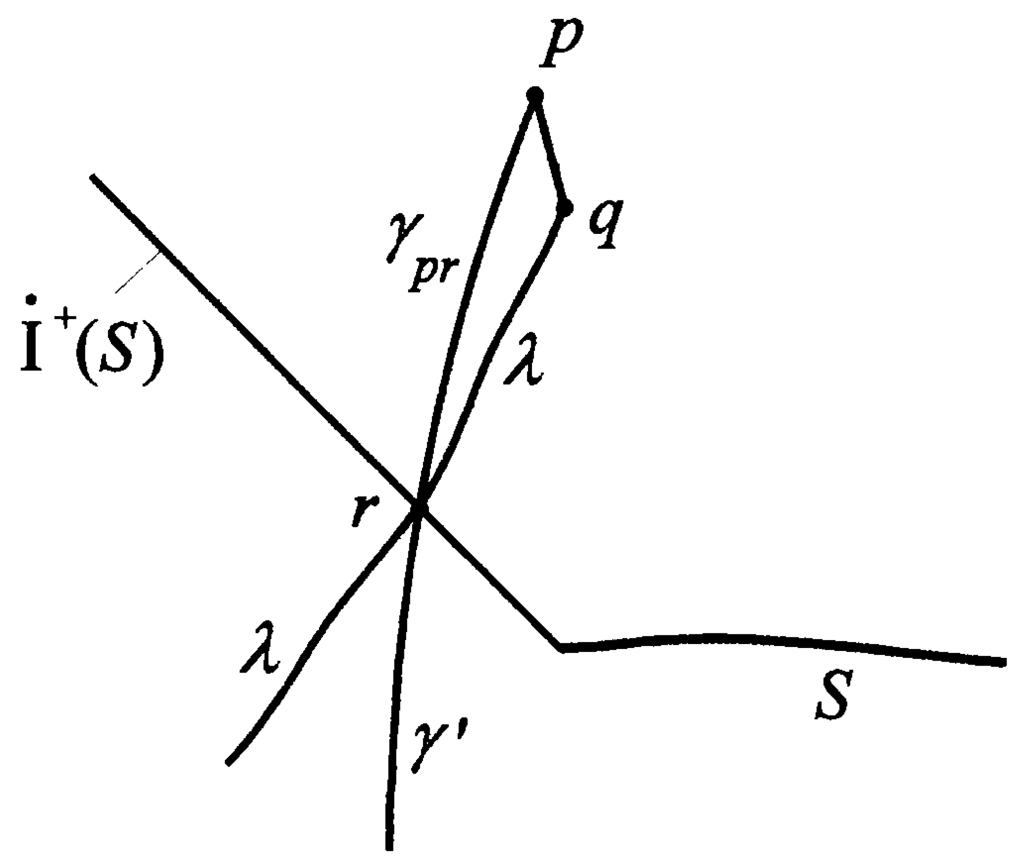


图 11-32 命题 11-4-3 证明(B)(b)用图

(B) 充分性的证明. 设起于 p 的任一过去不可延类时线与 S 有交, 则要么 $p\in S$, 要么 $p\in \mathrm{I}^+(S)$. 在 $p\in S$ 时自然有 $p\in S\subset \mathrm{D}^+(S)\subset \overline{\mathrm{D}^+(S)}$, 故只须讨论 $p\in \mathrm{I}^+(S)$ 的情况. 欲证 $p\in \overline{\mathrm{D}^+(S)}$, 只须证 p 的任一邻域与 $\mathrm{D}^+(S)$ 有交. 因 p 的任一邻域同 $\mathrm{I}^-(p)\cap \mathrm{I}^+(S)$ 有交, 只须证明 $\mathrm{I}^-(p)\cap \mathrm{I}^+(S)\subset \mathrm{D}^+(S)$. 用反证法. 设 $\exists q\in \mathrm{I}^-(p)\cap \mathrm{I}^+(S)$ 满足 $q\notin \mathrm{D}^+(S)$, 即 $\exists$ 起于 q 的与 S 无交的过去不可延因果线 λ, 则只有两个可能: (a) $\lambda\subset \mathrm{I}^+(S)$; (b) λ 在某点 $r\in \dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 处离开 $\mathrm{I}^+(S)$. 两者都能推出矛盾, 分别讨论如下:

(a) 根据引理 11-4-2, 由 $p\in \mathrm{I}^+(q)$ 可知 $\exists$ 过 p 的过去不可延类时线 $\gamma\subset \mathrm{I}^+(\lambda)$. 由 $\lambda\subset \mathrm{I}^+(S)$ 知 $\gamma\subset \mathrm{I}^+[\mathrm{I}^+(S)]=\mathrm{I}^+(S)$. 若 $\gamma\cap S\neq\varnothing$, 则 $\mathrm{I}^+(S)\cap S\neq\varnothing$, 与 S 的非编时性矛盾. 所以 $\gamma\cap S=\varnothing$, 即 γ 是起于 p 的与 S 无交的过去不可延类时线, 同本证明(B)的前提矛盾.

(b) λ 在点 $r\in \dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 离开 $\mathrm{I}^+(S)$. $r\in\lambda$ 导致 $r\in \mathrm{J}^-(q)$ (图 11-32). 由 $q\in \mathrm{I}^-(p)$ 和 "$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\mathrm{I}$" 可知 $r\in \mathrm{I}^-(p)$, 故存在由 p 到 r 的指向过去类时线 γ_{pr}. 若 $\exists x\in \gamma_{pr}\cap S$, 则 $x\neq r$ (否则 λ 与 S 有交点 x), 故

$$x\in \mathrm{I}^+(r)\subset \mathrm{I}^+[\dot{\mathrm{I}}^+(S)]\subset \mathrm{I}^+[\overline{\mathrm{I}^+(S)}]=\mathrm{I}^+[\mathrm{I}^+(S)]=\mathrm{I}^+(S),$$

① 因 γ 为 C^0 且 $p\in U$ 保证 p 有邻域含于 U, 这样的 r 点必存在.

与 $x \in S$ 结合得 $\mathrm{I}^+(S) \cap S \neq \varnothing$，同 S 的非编时性矛盾. 可见 γ_{pr} 与 S 无交. 因为 r 是 γ_{pr} 的过去端点，可将 γ_{pr} 向过去延拓(延长部分记作 γ')为过去不可延类时线 γ. 若 $\exists\, y \in \gamma' \cap S$，则 $r \in \mathrm{I}^+(y) \subset \mathrm{I}^+(S)$，同 $r \in \dot{\mathrm{I}}^+(S)$ 矛盾. 可见 γ 与 S 无交，即 γ 是起于 p 的与 S 无交的过去不可延类时线，同本证明(B)的前提矛盾. □

命题 11-4-4

$$\mathrm{i}[\mathrm{D}^+(S)] = \mathrm{I}^-[\mathrm{D}^+(S)] \cap \mathrm{I}^+(S),$$

$$\mathrm{i}[\mathrm{D}(S)] = \mathrm{I}^-[\mathrm{D}^+(S)] \cap \mathrm{I}^+[\mathrm{D}^-(S)].$$

证明　习题. □

§ 11.5　柯西面、柯西视界和整体双曲时空

定义 1　非编时闭集 $\Sigma \subset M$ 叫**柯西面**(Cauchy surface)，若 $\mathrm{D}(\Sigma) = M$.

例 1　闵氏时空中惯性坐标时 $t = t_0$(常数)的超曲面、施瓦西最大延拓时空中 $T = 0$ 的超曲面以及 RW 宇宙的均匀面都是柯西面. 但上节例 3 的类空旋转双曲面不是柯西面，因为由图 11-29 可知 $\mathrm{D}(S) \neq \mathbb{R}^4$.

一个自然的问题是：任何时空都有柯西面吗？答案是否定的. 闵氏时空挖去一点所得时空就没有柯西面. Taub 的平面对称时空也没有柯西面，由式(8-6-1′)可知该时空有时空奇性 $z = 0$(而且是 s.p.曲率奇性)，因此坐标取值范围为 $0 < z < \infty, -\infty < t, x, y < \infty$(图 11-33). 由于式(8-6-1′)的 $\mathrm{d}t^2$ 和 $\mathrm{d}z^2$ 的系数等值异号，$t \sim z$ 面内的类光测地线在图 11-33 中为 45° 斜直线，由此可证明任一非编时闭集 S 都不满足 $\mathrm{D}(S) = M$ 的要求. 例如，设 S 是 $t = 0$ 的类空超曲面，则 $\mathrm{D}^+(S)$ 和 $\mathrm{D}^-(S)$ 如图所示，

$$\mathrm{D}(S) \equiv \mathrm{D}^+(S) \cup \mathrm{D}^-(S) \neq M.$$

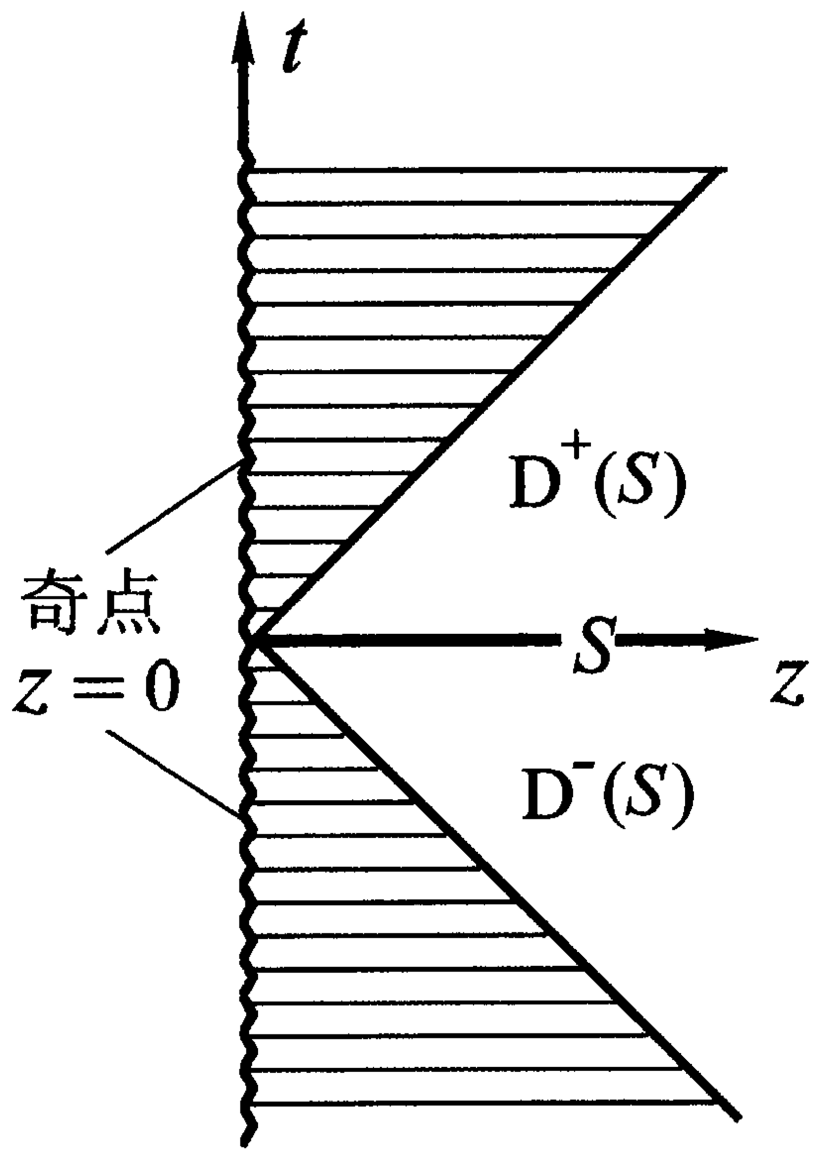


图 11-33　Taub 的平面对称时空没有柯西面

此外，Reissner-Nordstrom 时空的最大延拓(见图 13-1)也没有柯西面.

命题 11-5-1　设 Σ 为柯西面，则

$$M = \Sigma \cup \mathrm{I}^+(\Sigma) \cup \mathrm{I}^-(\Sigma). \tag{11-5-1}$$

证明　设 $p \in M$，由柯西面定义可知 $p \in \mathrm{D}^+(\Sigma)$ 或 $p \in \mathrm{D}^-(\Sigma)$. 若 $p \in \mathrm{D}^+(\Sigma)$，则起于 p 的任一过去不可延类时线必同 Σ 有交，因而 $p \in \Sigma$ 或 $p \in \mathrm{I}^+(\Sigma)$. 同理，若

$p \in \mathrm{D}^-(\Sigma)$，则 $p \in \Sigma$ 或 $p \in \mathrm{I}^-(\Sigma)$，故 $p \in \Sigma \cup \mathrm{I}^+(\Sigma) \cup \mathrm{I}^-(\Sigma)$，因而式(11-5-1)成立.

□

命题 11-5-2　设 Σ 为柯西面，则任一双向不可延因果线 λ 必同 Σ，$\mathrm{I}^+(\Sigma)$，$\mathrm{I}^-(\Sigma)$ 分别有交.

证明　由柯西面及 $\mathrm{D}(\Sigma)$ 的定义可知 λ 与 Σ 有交. 设 λ 与 $\mathrm{I}^-(\Sigma)$ 无交，则命题 11-5-1 表明 $\lambda \subset \Sigma \cup \mathrm{I}^+(\Sigma)$，由引理 11-4-2 可知存在过去不可延类时线

$$\gamma \subset \mathrm{I}^+(\lambda) \subset \mathrm{I}^+[\Sigma \cup \mathrm{I}^+(\Sigma)] = \mathrm{I}^+(\Sigma) \cup \mathrm{I}^+[\mathrm{I}^+(\Sigma)] = \mathrm{I}^+(\Sigma) \cup \mathrm{I}^+(\Sigma) = \mathrm{I}^+(\Sigma).$$

向未来方向延拓 γ 使成双向不可延类时线 $\tilde{\gamma}$，则

$$\tilde{\gamma} \subset \mathrm{I}^+(\gamma) \subset \mathrm{I}^+[\mathrm{I}^+(\Sigma)] = \mathrm{I}^+(\Sigma).$$

Σ 的非编时性要求 $\mathrm{I}^+(\Sigma)$ 与 Σ 无交，所以 $\tilde{\gamma}$ [作为 $\mathrm{I}^+(\Sigma)$ 的子集]也与 Σ 无交，但这同 Σ 是柯西面矛盾. 以上论述表明 λ 与 $\mathrm{I}^-(\Sigma)$ 有交. 同理可证 λ 与 $\mathrm{I}^+(\Sigma)$ 有交.　□

直观地说，柯西面是"无边无岸"的. 下面先对非编时闭集的"边缘"给出精确定义，再证明柯西面的确没有边缘.

定义 2　非编时闭集 S 的**边缘**(edge)定义为

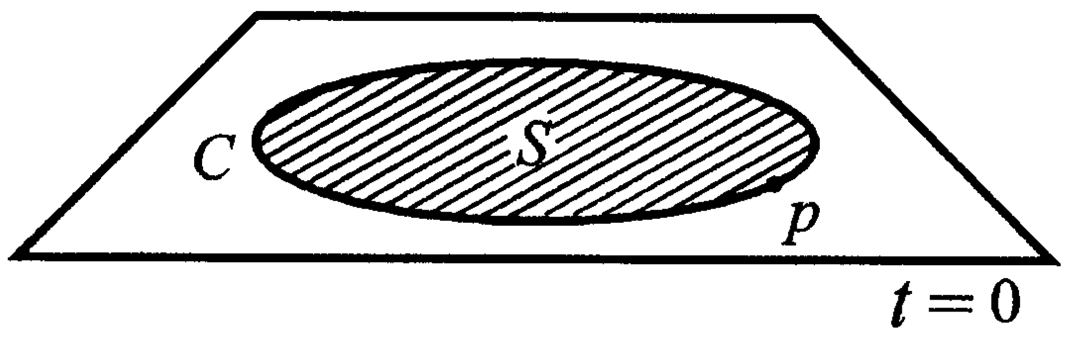
$$\mathrm{edge}(S) := \{ p \in S \mid \text{对 } p \text{ 的任一邻域 } O \text{ 有 } q \in \mathrm{I}^+(p,O),\ r \in \mathrm{I}^-(p,O),$$
$$\exists \text{ 由 } r \text{ 到 } q \text{ 的指向未来类时线 } \gamma \subset O \text{ 且 } \gamma \cap S = \varnothing \}.$$

例 2　设 S 为闵氏时空中由式(11-4-1)定义的 3 维闭球体，C 是 S 的表面[图 11-34(a)]，则 $C = \mathrm{edge}(S)$，因 C 上任一点 p 都满足定义 2 的条件[见图 11-34(b)]，且 $S - C$ 的任一点都不满足此条件. 另一方面，S 作为 4 维流形 $\mathbb{R}^4$ 的 3 维子集，由 §1.2 定义 10 知 S 的边界 $\dot{S} = S$. 可见边缘和边界是不同概念.

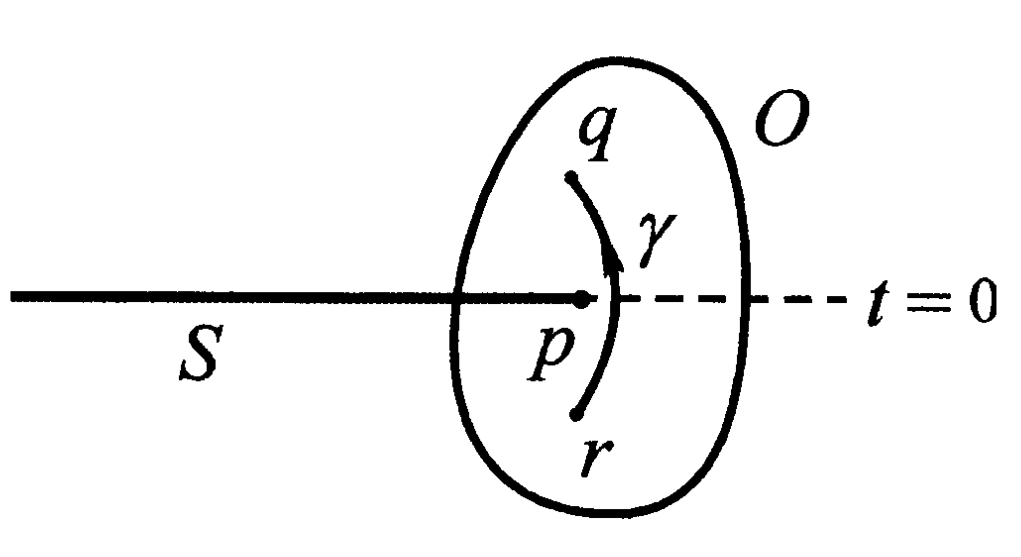
例 3　设 S 是 4 维闵氏时空的 x 轴，则 $\mathrm{edge}(S) = S$.

例 4　设 S 是 4 维闵氏时空的 3 维类光超曲面 $t - z = 0$，则 $\mathrm{edge}(S) = \varnothing$.

命题 11-5-3　设 Σ 为柯西面，则 $\mathrm{edge}(\Sigma) = \varnothing$.



(a) S 的 2 维周边 C (图中压缩一维)按定义就是 S 的边缘



(b) 对 $p \in C$ 的任一邻域 O 确有 $q \in \mathrm{I}^+(p,O)$，$r \in \mathrm{I}^-(p,O)$ 以及由 r 到 q 的指向未来类时线 $\gamma \subset O$ 且 $\gamma \cap S = \varnothing$

图 11-34　闵氏时空中 3 维类空闭球 S 的边缘 C

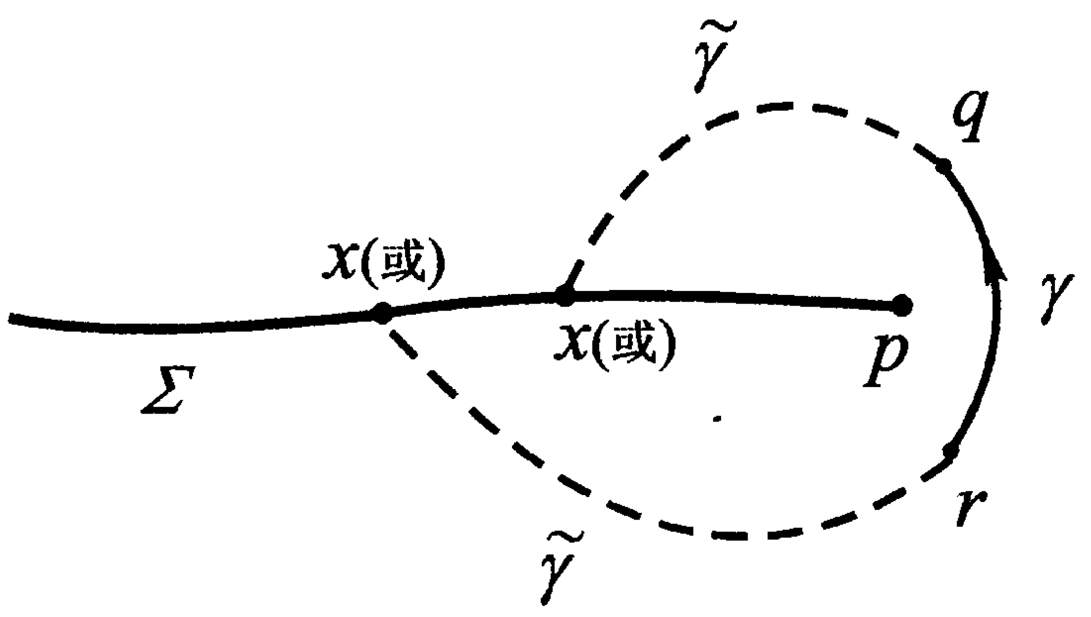


图 11-35　命题 11-5-3 证明示意

证明　设 $\exists p \in \text{edge}(\Sigma)$，则 $p \in \Sigma$. 取 M 作为定义 2 的邻域 O，则 $\exists\, q, r \in M$，$q \in \mathrm{I}^+(p)$，$r \in \mathrm{I}^-(p)$ 以及指向未来类时线 γ 由 r 到 q，且 $\gamma \cap \Sigma = \varnothing$. 把 γ 向过去和未来延拓成双向不可延类时线 $\tilde{\gamma}$，则由命题 11-5-2 知 $\tilde{\gamma} \cap \Sigma \neq \varnothing$（图 11-35). 设 $x \in \tilde{\gamma} \cap \Sigma$，则 $x \in \mathrm{I}^+(q)$ 或 $x \in \mathrm{I}^-(r)$，即

$$x \in \mathrm{I}^+(q) \cup \mathrm{I}^-(r).$$

注意到 $q \in \mathrm{I}^+(p)$，$r \in \mathrm{I}^-(p)$，得 $x \in \mathrm{I}^+(p) \cup \mathrm{I}^-(p)$，同 Σ 的非编时性矛盾. □

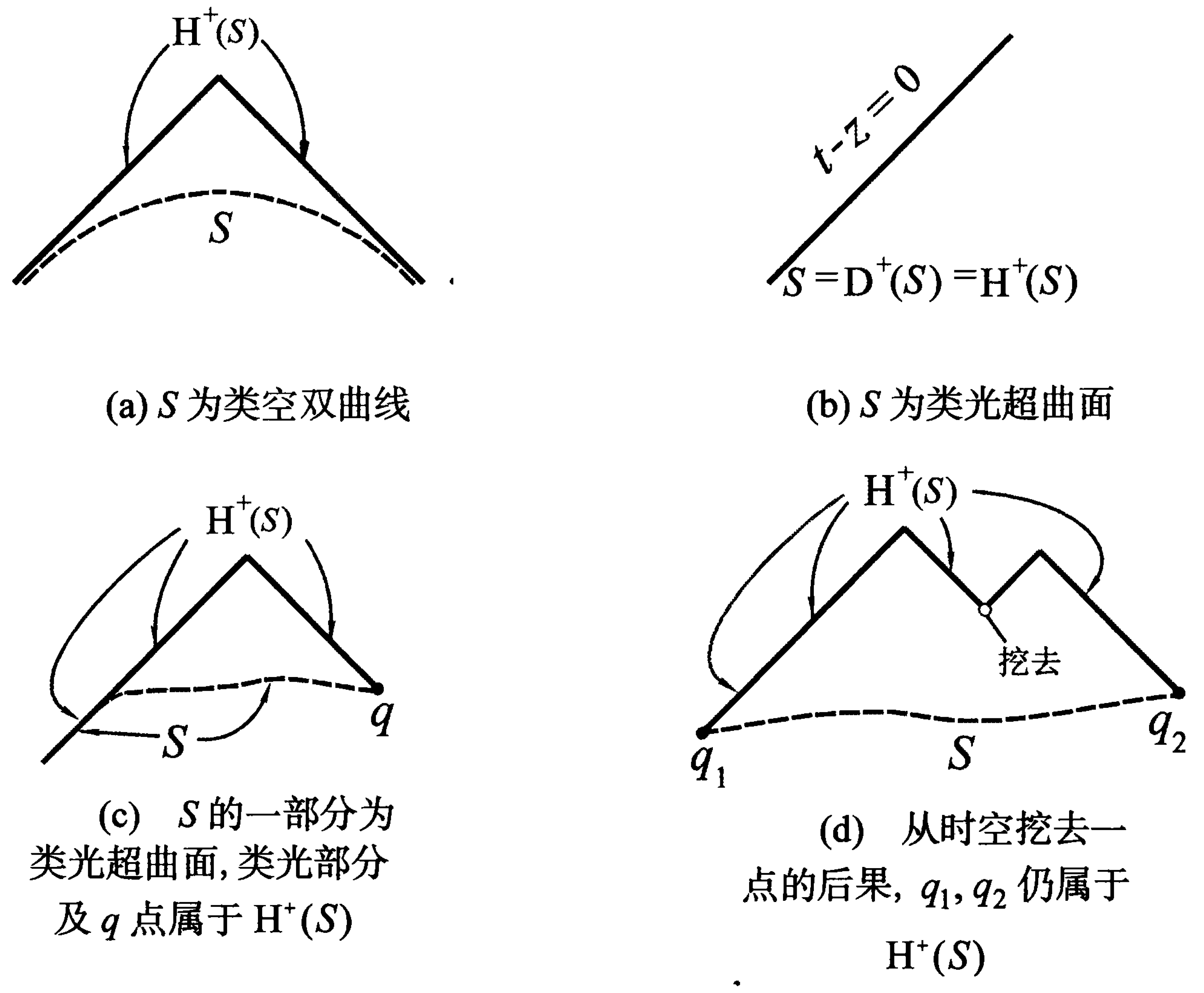
定义 3　非编时闭集 S 的**未来柯西视界**(future Cauchy horizon)定义为

$$\mathrm{H}^+(S) := \overline{\mathrm{D}^+(S)} - \mathrm{I}^-[\mathrm{D}^+(S)]. \tag{11-5-2}$$

S 的**过去柯西视界**可对偶地定义. S 的(总)**柯西视界**定义为

$$\mathrm{H}(S) := \mathrm{H}^+(S) \cup \mathrm{H}^-(S). \tag{11-5-3}$$

图 11-36 给出 2 维闵氏时空的几个非编时闭集 S 的 $\mathrm{H}^+(S)$.



(c)　S 的一部分为类光超曲面，类光部分及 q 点属于 $\mathrm{H}^+(S)$

(d)　从时空挖去一点的后果，q_1, q_2 仍属于 $\mathrm{H}^+(S)$

图 11-36　2 维闵氏时空中几个非编时闭集 S(虚线)的 $\mathrm{H}^+(S)$ (实线)

注 1 不宜把 $H^+(S)$ 定义为 $\dot{D}^+(S)$，这样会把 S（不论类光与否）包含在 $H^+(S)$ 内.（这是不希望的，见后.）也不宜把 $H^+(S)$ 定义为 $\dot{D}^+(S)-S$，这样会把 $edge(S)$ 及 S 的类光部分排除在 $H^+(S)$ 之外.

命题 11-5-4 $H^+(S)$ 为非编时闭集.

证明 由式 (11-5-2) 得 $I^-[H^+(S)]\subset I^-[\overline{D^+(S)}]=I^-[D^+(S)]$ 及 $I^-[D^+(S)]\subset M-H^+(S)$，故 $I^-[H^+(S)]\subset M-H^+(S)$，因而 $I^-[H^+(S)]\cap H^+(S)=\varnothing$，于是 $H^+(S)$ 为非编时集. 又因 $\overline{D^+(S)}$ 为闭集(记作 C)，$I^-[D^+(S)]$ 为开集(记作 O)，所以

$$H^+(S)=\overline{D^+(S)}-I^-[D^+(S)]=C-O=C\cap(M-O),$$

(其中最后一步用到第 1 章习题 1 的结论.) 因 C 和 $M-O$ 都为闭集，故 $H^+(S)$ 为闭集. □

既然 $H^+(S)$ 为非编时闭集，$D^+[H^+(S)]$，$H^+[H^+(S)]$，$H^-[H^+(S)]$ 以及 $edge[H^+(S)]$ 就都有意义. 请读者思考它们各是什么样的集.

命题 11-5-5
$$H^+(S)=[I^+(S)\cup S]\cap \dot{I}^-[D^+(S)]. \tag{11-5-4}$$

证明 习题. □

命题 11-5-6 $\forall p\in H^+(S)$，$\exists$ 过 p 的类光测地线 $\lambda\subset H^+(S)$，而且 λ 要么是过去不可延的，要么其过去端点在 $edge(S)$ 上.

证明 见 Wald(1984)定理 8.3.5 的证明. □

命题 11-5-7
$$H(S)=\dot{D}(S). \tag{11-5-5}$$

证明 习题. □

命题 11-5-8 设 Σ 为非空的非编时闭集，则 Σ 是柯西面 $\Leftrightarrow$ $H(\Sigma)=\varnothing$.

证明 由式(11-5-5)可知 $H(\Sigma)=\varnothing$ 等价于 $\dot{D}(\Sigma)=\varnothing$. 由 $\dot{D}(\Sigma)$ 的定义知 $\dot{D}(\Sigma)=\varnothing$ 等价于 $\overline{D(\Sigma)}=D(\Sigma)=i[D(\Sigma)]$，因此等价于 $D(\Sigma)$ 既开又闭. 时空流形 M 按定义是连通流形，所以 M 的既开又闭的子集只有 M 和 $\varnothing$ 两个. 而 $\Sigma\subset D(\Sigma)$ 保证 $D(\Sigma)\neq\varnothing$，可见 $D(\Sigma)$ 既开又闭等价于 $D(\Sigma)=M$，从而等价于 Σ 为柯西面.

□

命题 11-5-9 无边缘非编时闭集 Σ 为柯西面的充要条件是任一双向不可延类光测地线必与 Σ，$I^+(\Sigma)$ 及 $I^-(\Sigma)$ 分别有交.

证明[选读] (A)由命题 11-5-2 知条件的必要性成立. (B)用反证法证明充分性. 设 Σ 不是柯西面，则由命题 11-5-8 知 $H(\Sigma)\neq\varnothing$. 不失一般性，设 $H^+(\Sigma)\neq\varnothing$，即 $\exists p\in H^+(\Sigma)$. 由命题 11-5-6 及 $edge(\Sigma)=\varnothing$ 可知存在起自 p 点的过去不可延类光测地线 $\lambda\subset H^+(\Sigma)$. 因对任意非编时闭集 Σ 有 $H^+(\Sigma)\cap I^-(\Sigma)=\varnothing$（证明留作习题），故

$\lambda \cap \mathrm{I}^-(\Sigma)=\varnothing$. 把$\lambda$向未来延拓成为未来不可延类光测地线(以$\tilde{\lambda}$代表所延出的部分). 已知条件[任一双向不可延类光测地线与$\mathrm{I}^-(\Sigma)$有交]保证$\tilde{\lambda}\cap \mathrm{I}^-(\Sigma)=\varnothing$. 设$q\in\tilde{\lambda}\cap \mathrm{I}^-(\Sigma)$，由$q\in\tilde{\lambda}$可知$p\in \mathrm{J}^-(q)$，与$q\in \mathrm{I}^-(\Sigma)$结合得$p\in \mathrm{I}^-(\Sigma)$，于是$p\in \mathrm{H}^+(\Sigma)\cap \mathrm{I}^-(\Sigma)$，与$\mathrm{H}^+(\Sigma)\cap \mathrm{I}^-(\Sigma)=\varnothing$矛盾. □

定义 4　时空(M,g_{ab})叫**整体双曲的**(globally hyperbolic), 若它有柯西面.

整体双曲时空在物理上有非常重要的意义. 在通常情况下, 柯西面的非编时性使它可被解释为某一时刻的全空间. 柯西面的定义表明它上面的数据决定着整个时空将发生(以及发生了)什么. 因此, 整体双曲时空中所发生的一切被某一初始时刻(由一张柯西面代表)的数据决定. 反之, 非整体双曲时空则存在"决定论的破坏"问题, 就是说, 任一时刻的全部数据都不足以决定整个时空的全部"历史". 再者, 如果 Penrose 的强宇宙监督假设最终被证明成立, 则任何真实时空都只能是整体双曲时空(见 §E.3). 此外, 在整体双曲时空中可以建立良好的量子理论, 而在非整体双曲时空中能否这样做却还不太清楚. 因此, 整体双曲性有可能是物理学对时空提出的要求. 有理由认为物理真实的时空都是整体双曲时空. 然而对这个问题仍存在不同看法.

例 5　由例 1 及其后面的讨论可知闵氏时空、最大延拓的施瓦西时空以及 RW 宇宙都是整体双曲的, 闵氏时空挖去一点所得的时空、Taub 的平面对称时空以及最大延拓的 Reissner-Nordstrom 时空(见 § 13.1)都不是整体双曲的.

[选读 11-5-1]

相对论学者在研究整体双曲时空的过程中创造了一种巧妙的方法. 由于涉及较多的点集拓扑知识以及有关讨论过于抽象和复杂, 我们只介绍其基本思想和几个重要结论. 有兴趣的读者可参阅 Wald(1984) 8.3 节.

设(M,g_{ab})为强因果时空，$p,q\in M$，令

$$C(p,q) := \{\lambda \mid \lambda \text{ 是从 } p \text{ 到 } q \text{ 的指向未来的 } C^0 \text{ 因果线}\},$$

则$C(p,q)\neq\varnothing$当且仅当$q\in \mathrm{J}^+(p)$. 对集合$C(p,q)$定义适当的拓扑, 使得一个抽象的拓扑空间. 借助于对这一拓扑空间的研究可以得到许多关于(M,g_{ab})的重要结论. 例如, 可以证明：若(M,g_{ab})为整体双曲时空, 则$C(p,q)$为紧致$\forall p,q\in M$，由此又可反回来证明$\mathrm{J}^+(p)\cap \mathrm{J}^-(q)$是拓扑空间$M$的紧致子集, 即

命题 11-5-10　设(M,g_{ab})为整体双曲时空, 则$\mathrm{J}^+(p)\cap \mathrm{J}^-(q)$为紧致子集$\forall\ p,\ q\in M$.

证明　见 Wald(1984)命题 8.3.10 的证明. □

由于M为T_2空间(见 §1.3 定义3), 根据定理1-3-2, 由$\mathrm{J}^+(p)\cap \mathrm{J}^-(q)$为紧致可知

它为闭集，即

命题 11-5-11 设 (M,g_{ab}) 为整体双曲时空，则 $J^+(p)\cap J^-(q)$ 为闭集 $\forall p, q\in M$.

由此可得如下命题(及相应的对偶命题)：

命题 11-5-12 设 (M,g_{ab}) 为整体双曲时空，则 $J^+(p)$ 为闭集 $\forall p\in M$.

证明 根据定理 1-2-3(a)，欲证 $J^+(p)$ 为闭集只须证明 $J^+(p)=\overline{J^+(p)}$. 设 $r\in\overline{J^+(p)}$. 取 $q\in I^+(r)$ ，则 $r\in\overline{J^+(p)}\cap I^-(q)\subset\overline{J^+(p)\cap I^-(q)}\subset\overline{J^+(p)\cap J^-(q)}=J^+(p)\cap J^-(q)$. [第一个 $\subset$ 号可用 $I^-(q)$ 为开集证明(习题)，最后一步(等号)用到命题 11-5-11.] 于是 $r\in J^+(p)$. 这表明 $\overline{J^+(p)}\subset J^+(p)$ ，因而 $\overline{J^+(p)}=J^+(p)$. □

注 2 命题 11-1-10 之后曾指出 $J^+(p)$ 为闭集的结论对任意时空未必成立. 现在由命题 11-5-12 看到这一结论对任意整体双曲时空都成立. 不但如此，命题 11-5-12 还可强化为如下命题：

命题 11-5-13 设 (M,g_{ab}) 为整体双曲时空，$K\subset M$ 为紧致，则 $J^+(K)$ 为闭集.

证明 要用到前面不曾讲过的手法，略. □

注 3 把 $p\in M$ 看作独点子集，即 $\{p\}\subset M$ ，则它是紧致子集(见 §1.3 例 1). 可见命题 11-5-12 只是命题 11-5-13 的特例. **[选读 11-5-1 完]**

利用以上一系列结果还可证明一个非常重要的命题：

命题 11-5-14 整体双曲时空 (M,g_{ab}) 必为稳定因果时空. 再者，存在整体时间函数 f (见命题 11-3-2)使每个等 f 面都是柯西面. 就是说，整体双曲时空可用柯西面分层，而且 M 的拓扑为(即同胚于) $\mathbb{R}\times\Sigma$ ，其中 Σ 代表任一柯西面.

证明 见 Wald(1984)定理 8.3.14 的证明(梗概). □

注 4 逆命题不成立，即稳定因果时空未必是整体双曲时空. 例如，Taub 的平面对称时空虽然是稳定因果时空[因为式(8-6-1′)的 t 可用作整体时间函数]，但由于没有柯西面(见图 11-33 及其所在段)，所以不是整体双曲时空.

整体双曲性的概念是 Leray 为证明双曲方程的解的存在唯一性而最先(1952)提出的. 当时并不知道它与时空整体因果特性的联系. 在广义相对论中引入柯西面概念的第一人大概是 Penrose(1965)，对依赖域 D(S) 的最早研究者则有 Hawking (1966 和 1967 年)，Seifert(1967 年)，Geroch(1970 和 1971 年) 以及 Kundt, Penrose 和 Choquet- Bruhat 等. 他们的工作揭示了依赖域概念同 Leray 的整体双曲性的密切联系.

习　题

1. 试证命题 11-1-10.

~2. 试证命题 11-1-11(c). 提示:利用 $A\subset B \Rightarrow \mathrm{i}(A)\subset \mathrm{i}(B)$.

3. 由时空背景流形 M 的 T_2 性出发按 §11.2 定义 1 证明任一指向未来因果线最多有一个未来端点.

4. 下列 5 个都是貌似正确的伪命题. 试用对闵氏时空挖空和认同的手法各举一反例以否定之[见 Geroch and Horowitz(1979)].

~(a) $q\in \dot{I}^-(p) \Rightarrow$ 从 q 出发的躺在 $\dot{I}^-(p)$ 上的指向未来类光测地线必到达 p.

~(b) $I^-(q)\subset I^-(p) \Rightarrow I^+(p)\subset I^+(q)$. 提示:从 2 维闵氏时空挖去 x 轴的一段使 $I^+(q)$ “小”到连与 $I^+(p)$ 相交都不可能.

~(c) $I^-(p)=I^-(q) \Rightarrow p=q$. 提示:借用图 11-4.

~(d) $q\notin I^-(p) \Rightarrow \exists$ 起自 q 的永不进入 $I^-(p)$ 的过去不可延因果线. [提示:从 2 维闵氏时空挖去一直线段使 $q\in \dot{I}^-(p)$.]

*(e) $q\in \dot{I}^+(p)\cap \dot{I}^-(p) \Rightarrow q=p$. 提示:见 Geroch and Horowitz(1979).

~5. 时空 (M,g_{ab}) 称为**未来可区分的**(future distinguishing), 若 $\forall p,q\in M$, $p\neq q$ 有 $I^+(p)\neq I^+(q)$. 试证非因果时空不是未来可区分的.

~6. 设 γ 为未来不可延类时线, λ 是 $\dot{I}^-(\gamma)$ 的一条类光测地母线,

(a)试证 $I^-(\lambda)\subset I^-(\gamma)$.

(b) 举一反例证明命题 $I^-(\lambda)=I^-(\gamma)$ 为伪. 提示: 参看图 11-20.

7. 设 $\{t,x,y,z\}$ 是闵氏时空的惯性系, S 为满足 $t=z=0$ 的点的集合, 求 $D^+(S)$ 和 $\mathrm{edge}(S)$.

*8. 试证命题 11-4-4.

*9. 试证命题 11-5-5 和 11-5-7.

10. 设 S 为非编时集, 试证 $H^+(S)\cap I^-(S)=\varnothing$ [命题 11-5-9 证明(B)中用到].

11.设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间, $A,B\subset X$.

(a) 试证 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(b) 举例说明命题 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ 不成立.

(c) 若 B 为开, 试证 $\bar{A}\cap B\subset\overline{A\cap B}$(命题 11-5-12 证明中用到).

第 12 章　渐近平直时空

§ 12.1　共 形 变 换

定义 1　设流形 M 上有(号差任意的)度规场 g_{ab} 和 $\tilde{g}_{ab}$. 若 M 上存在 C^∞ 的、处处为正的函数 Ω 使 $\tilde{g}_{ab}=\Omega^2 g_{ab}$，则称 $\tilde{g}_{ab}$ 为由 g_{ab} 经**共形变换**(conformal transformation)而得的度规场(也说 $\tilde{g}_{ab}$ 共形于 g_{ab}), Ω 称为这一变换的**共形因子**(conformal factor).

注 1　设 $\tilde{g}_{ab}=\Omega^2 g_{ab}$, 则容易验证 $\tilde{g}^{ab}=\Omega^{-2}g^{ab}$.

当问题涉及共形变换时, 同一流形 M 上有两个度规场 g_{ab} 和 $\tilde{g}_{ab}$, 因此凡与度规有关的概念和操作都要说明所用的是哪个度规. 例如, 设 v^a 是 M 上的矢量场, 则 v_a 就意义含糊, 因为它既可能代表 $g_{ab}v^b$ 又可能代表 $\tilde{g}_{ab}v^b$. 为明确起见, 可以酌情采用以下两种措施之一: ①索性不用记号 v_a 而直接写 $g_{ab}v^b$ 或 $\tilde{g}_{ab}v^b$；②仍用记号 v_a, 但说明它是用哪个度规降指标的结果. 此外, 以 ∇_a 和 $\tilde{\nabla}_a$ 分别代表与 g_{ab} 和 $\tilde{g}_{ab}$ 适配的导数算符, 则它们的差别可用一个下标对称的张量场 $C^c{}_{ab}$ 刻画[见式(3-1-6)], 即

$$\tilde{\nabla}_a\omega_b=\nabla_a\omega_b-C^c{}_{ab}\omega_c\,,\qquad \forall\,\omega_b\in\mathscr{F}(0,\ 1)\,. \tag{12-1-1}$$

由 $\tilde{\nabla}_a\tilde{g}_{bc}=0$ 得[参见式(3-2-10)的推导]

$$C^c{}_{ab}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}(\nabla_a\tilde{g}_{bd}+\nabla_b\tilde{g}_{ad}-\nabla_d\tilde{g}_{ab})\,. \tag{12-1-2}$$

此式与式(3-2-10)的微小差别源于式(12-1-1)与(3-1-6)的非本质差别(∇_a 与 $\tilde{\nabla}_a$ 互换). 另一方面,

$$\nabla_a\tilde{g}_{bd}=\nabla_a(\Omega^2 g_{bd})=2\Omega g_{bd}\nabla_a\Omega\,, \tag{12-1-3}$$

其中最后一步用到 $\nabla_a g_{bc}=0$. 把式(12-1-3)代入式(12-1-2)得

$$\begin{aligned} C^c{}_{ab}&=\Omega^{-1}g^{cd}(g_{bd}\nabla_a\Omega+g_{ad}\nabla_b\Omega-g_{ab}\nabla_d\Omega)\\ &=2\delta^c{}_{(a}\nabla_{b)}\ln\Omega-g_{ab}g^{cd}\nabla_d\ln\Omega\,. \end{aligned} \tag{12-1-4}$$

设 (M,g_{ab}) 为任一时空, $\tilde{g}_{ab}$ 是与 g_{ab} 共形的度规场, v^a 是任一矢量场, 则

$\tilde{g}_{ab}v^a v^b = 0$ 当且仅当 $g_{ab}v^a v^b = 0$，而且 $\tilde{g}_{ab}v^a v^b$ 与 $g_{ab}v^a v^b$ 恒同号，故共形变换不改变矢量场的类时、类空、类光性. 若用 g_{ab} 衡量曲线 γ 为类时(类空、类光)，则用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量也一样. 这表明共形变换不改变因果关系. 然而，如果 γ 用 g_{ab} 衡量是测地线，用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量还是测地线吗? 换句话说，测地线是否有共形不变性?下述命题将给出答案.

命题 12-1-1　类光测地线是共形不变的，(但仿射参数要变，除非 Ω 为常数.) 类时和类空测地线一般没有共形不变性.

证明　设 $\gamma(\lambda)$ 用 g_{ab} 衡量是测地线，λ 是仿射参数，则其切矢 $T^a \equiv (\partial/\partial\lambda)^a$ 满足 $T^a\nabla_a T^b = 0$. 因 $\tilde{\nabla}_a T^b = \nabla_a T^b + C^b{}_{ac}T^c$，故

$$\begin{aligned} T^a\tilde{\nabla}_a T^b &= T^a\nabla_a T^b + C^b{}_{ac}T^a T^c = C^b{}_{ac}T^a T^c \\ &= 2T^a T^c \delta^b{}_{(a}\nabla_{c)} \ln\Omega - T^a T^c g_{ac} g^{bd}\nabla_d \ln\Omega \\ &= 2T^b T^c \nabla_c \ln\Omega - (g_{ac}T^a T^c) g^{bd}\nabla_d \ln\Omega , \end{aligned} \tag{12-1-5}$$

设 $\gamma(\lambda)$ 是类光测地线，则 $g_{ac}T^a T^c = 0$，故上式成为 $T^a\tilde{\nabla}_a T^b = 2T^b T^c\nabla_c \ln\Omega = \alpha T^b$，其中 $\alpha \equiv 2T^c\nabla_c \ln\Omega$ 是 $\gamma(\lambda)$ 上的函数. 上式表明，用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量，$\gamma(\lambda)$ 为非仿射参数化的测地线，总可选择适当参数 $\tilde{\lambda}$ 使其成为仿射参数化的测地线(见定理 3-3-2). 不难证明(习题) $\tilde{\lambda}$ 与 λ 满足如下关系:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda} = c\Omega^2. \quad (c\text{ 为非零常数}) \tag{12-1-6}$$

类光测地线在这个意义上是共形不变的. 然而，若 $\gamma(\lambda)$ 为非类光测地线，则式(12-1-5)一般不能表为 $T^a\tilde{\nabla}_a T^b = \alpha T^b$ 的形式. 因此 $\gamma(\lambda)$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量一般不是测地线.　□

命题 12-1-2　$\tilde{\nabla}_a$ 的曲率张量 $\tilde{R}_{abc}{}^d$ 与 ∇_a 的曲率张量 $R_{abc}{}^d$ 有如下联系:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d &+ 2\delta^d{}_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c \ln\Omega - 2g^{de}g_{c[a}\nabla_{b]}\nabla_e \ln\Omega + 2(\nabla_{[a}\ln\Omega)\delta^d{}_{b]}\nabla_c \ln\Omega \\ &- 2(\nabla_{[a}\ln\Omega)g_{b]c}g^{df}\nabla_f \ln\Omega - 2g_{c[a}\delta^d{}_{b]}g^{ef}(\nabla_e \ln\Omega)\nabla_f \ln\Omega . \end{aligned} \tag{12-1-7}$$

证明　把 $\tilde{\nabla}_b\omega_c$ 看作 (0, 2) 型张量场，用 $\tilde{\nabla}_a$ 作用得

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(\tilde{\nabla}_b\omega_c) &= \nabla_a(\tilde{\nabla}_b\omega_c) - C^e{}_{ab}\tilde{\nabla}_e\omega_c - C^e{}_{ac}\tilde{\nabla}_b\omega_e \\ &= \nabla_a(\nabla_b\omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d) - C^e{}_{ab}\tilde{\nabla}_e\omega_c - C^e{}_{ac}(\nabla_b\omega_e - C^d{}_{be}\omega_d) \\ &= (\nabla_a\nabla_b\omega_c - \omega_d\nabla_a C^d{}_{bc} - C^d{}_{bc}\nabla_a\omega_d) - C^e{}_{ab}\tilde{\nabla}_e\omega_c - C^e{}_{ac}\nabla_b\omega_e + C^e{}_{ac}C^d{}_{be}\omega_d . \end{aligned}$$

对 a, b 反称化，注意到 $\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\omega_c = \tilde{R}_{abc}{}^d\omega_d/2$，$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d/2$，$C^e{}_{[ab]} = 0$，有

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{abc}{}^d\omega_d &= R_{abc}{}^d\omega_d - 2\omega_d\nabla_{[a}C^d{}_{b]c} - 2C^d{}_{c[b}\nabla_{a]}\omega_d - 2C^e{}_{c[a}\nabla_{b]}\omega_e + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}\omega_d \\ &= R_{abc}{}^d\omega_d - 2\omega_d\nabla_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}\omega_d, \quad \forall\omega_d,\end{aligned}$$

故

$$\tilde{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}. \tag{12-1-8}$$

再把式(12-1-4)代入上式便得式(12-1-7). □

命题 12-1-3 $\tilde{\nabla}_a$ 与 ∇_a 的里奇张量 $\tilde{R}_{ac}$ 与 R_{ac} 有如下联系：

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ac} &= R_{ac} - (n-2)\nabla_a\nabla_c\ln\Omega - g_{ac}g^{de}\nabla_d\nabla_e\ln\Omega \\ &\quad + (n-2)(\nabla_a\ln\Omega)\nabla_c\ln\Omega - (n-2)g_{ac}g^{de}(\nabla_d\ln\Omega)\nabla_e\ln\Omega,\end{aligned} \tag{12-1-9}$$

其中 n 是流形的维数.

证明 由式(12-1-7)对指标 d, b 缩并可证. □

命题 12-1-4 $\tilde{\nabla}_a$ 与 ∇_a 的标量曲率 $\tilde{R}\,(\equiv \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab})$ 与 $R\,(\equiv g^{ab}R_{ab})$ 有如下联系：

$$\tilde{R} = \Omega^{-2}[R - 2(n-1)g^{ac}\nabla_a\nabla_c\ln\Omega - (n-2)(n-1)g^{ac}(\nabla_a\ln\Omega)\nabla_c\ln\Omega]. \tag{12-1-10}$$

证明 由式(12-1-9)与 $\tilde{g}^{ac} = \Omega^{-2}g^{ac}$ 缩并可证. □

命题 12-1-5 外尔张量 $C_{abc}{}^d$ 是共形不变的，即

$$\tilde{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d, \tag{12-1-11}$$

其中 $C_{abc}{}^d \equiv g^{de}C_{abce}$，$\tilde{C}_{abc}{}^d \equiv \tilde{g}^{de}\tilde{C}_{abce}$，而 C_{abce} 和 $\tilde{C}_{abce}$ 的定义见式(3-4-14).

证明 练习. □

注 2 由式(12-1-11)易得 $\tilde{C}_{abcd} = \Omega^2 C_{abcd}$，可见 C_{abcd} 不是共形不变的. 共形不变的外尔张量是指 $C_{abc}{}^d$. 张量 $C_{abc}{}^d$ 因此也称为**共形张量**(conformal tensor).

定义 2 度规场 g_{ab} 称为**共形平直的**(conformally flat)，若 g_{ab} 共形于平直度规场 η_{ab} (此处的 η_{ab} 代表任何号差的平直度规场).

命题 12-1-6 2 维广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 必局域共形平直.

证明 设 α 为 (M, g_{ab}) 的某开域中的一个谐和函数，即 $\nabla^a\nabla_a\alpha = 0$ (其中 ∇_a 与 g_{ab} 适配)，ε_{ab} 为与 g_{ab} 适配的体元，则 $\omega_a \equiv \varepsilon_{ab}\nabla^b\alpha$ 是闭的(证明留作习题)，因而至少是局域恰当的，即存在局域定义的函数 β 使 $\omega_a = (\mathrm{d}\beta)_a = \nabla_a\beta$. 此 β 满足

$$\nabla^a\nabla_a\beta = \nabla^a\omega_a = \varepsilon_{ab}\nabla^a\nabla^b\alpha = \varepsilon_{[ab]}\nabla^{(a}\nabla^{b)}\alpha = 0,$$

其中倒数第二步用到 ε_{ab} 的反称性和 ∇_a 的无挠性. 上式表明 β 也是谐和函数(称为共轭于 α 的谐和函数). 因 $\nabla_a\alpha$ 和 $\nabla_b\beta$ 分别是等 α 线和等 β 线的法余矢，而

$$g^{ab}(\nabla_a\alpha)\nabla_b\beta = g^{ab}(\nabla_a\alpha)\varepsilon_{bc}\nabla^c\alpha = \varepsilon_{bc}(\nabla^b\alpha)\nabla^c\alpha = \varepsilon_{[bc]}(\nabla^{(b}\alpha)\nabla^{c)}\alpha = 0,$$

可见等α线与等β线处处正交. 选α,β为局域坐标, 则g^{ab}在此系的分量为

$$g^{12} = g^{21} = 0,$$

$$g^{22} = g^{ab}(\mathrm{d}\beta)_a(\mathrm{d}\beta)_b = g^{ab}(\varepsilon_{ac}\nabla^c\alpha)(\varepsilon_{bd}\nabla^d\alpha) = \varepsilon_{ac}\varepsilon^{ad}(\nabla^c\alpha)\nabla_d\alpha$$
$$= (-1)^s\delta^d{}_c(\nabla^c\alpha)\nabla_d\alpha = (-1)^s g^{cd}(\mathrm{d}\alpha)_c(\mathrm{d}\alpha)_d,$$

故$g^{22} = (-1)^s g^{11}$. 以上结果导致$g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = (-1)^s g_{11}$. 因而

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}\alpha^2 + g_{22}\mathrm{d}\beta^2 = g_{11}[\mathrm{d}\alpha^2 + (-1)^s\mathrm{d}\beta^2].$$

令$\Omega^2(\alpha,\beta) \equiv \pm g_{11}$, ($g_{11} > 0$时取+, 反之取−.)则$g_{ab}$在坐标系$\{\alpha,\beta\}$的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = \pm\Omega^2[\mathrm{d}\alpha^2 + (-1)^S\mathrm{d}\beta^2].$$

上式方括号内是平直线元, 可见g_{ab}至少在$\{\alpha,\beta\}$的坐标域内共形平直.① □

命题 12-1-7　$n>3$的n维度规场为局域共形平直的充要条件是其 Weyl 张量为零.

证明　条件的必要性是显然的(由命题 12-1-5), 充分性的证明见 Eisenhart (1997). □

注 3　上述命题不适用于$n=3$. $n=3$时局域共形平直的充要条件见 Eisenhart(1997).

定义 3　设(M,g_{ab})和$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$是广义黎曼空间. 微分同胚映射$\psi: M\to\tilde{M}$称为**等度规映射**, 若$\tilde{g}_{ab} = \psi_* g_{ab}$(其中$\psi_*$理解为$\psi^{-1*}$); ψ称为**共形等度规映射**, 若$\tilde{M}$上存在C^∞的、处处为正的函数Ω使$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2\psi_* g_{ab}$.

注 4　此处定义的等度规映射是§4.3 定义的同一流形上的等度规映射的自然推广.

[选读 12-1-1]

我们特别关心 4 维洛伦兹号差的共形平直度规$g_{ab} = \Omega^2\eta_{ab}$. 设$\{x^\mu\}\equiv\{t,x,y,z\}$是$\eta_{ab}$的洛伦兹坐标系, 则$g_{ab}$在该系的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = \Omega^2(x^\mu)(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \qquad (12\text{-}1\text{-}12)$$

---

① 本证明尚有疏漏: 若α为常数, 则$\nabla_a\alpha = 0 = \nabla_a\beta$, 这时$\alpha,\beta$都不能充当坐标. 此外, 若$g_{ab}$为洛伦兹度规且$\nabla^a\alpha$类光, 则$g^{ab}(\nabla_a\beta)(\nabla_b\beta) = -g^{ab}(\nabla_a\alpha)(\nabla_b\alpha) = 0$, 再由$g^{ab}(\nabla_a\alpha)(\nabla_b\beta) = 0$可知存在函数$\lambda$使$\nabla^a\beta = \lambda\nabla^a\alpha$, 因此$\{\alpha,\beta\}$也不能充当坐标系. 然而, 可以证明, $\forall p\in M\ \exists p$的邻域$U$, 其上有函数$\alpha$, 它在$U$上点点满足$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\alpha = 0$和$g^{ab}(\nabla_a\alpha)(\nabla_b\alpha)\neq 0$. 以此$\alpha$为本证明的$\alpha$, 则证明严密.

若 Ω 是常数，一个简单的坐标变换 $\hat{x}^\mu = \Omega x^\mu$ 便把上式变为

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2,$$

可见 Ω 为常数的共形平直线元必平直. 然而，即使 Ω 是 x^μ 的函数，式(12-1-12)也未必不是平直线元. 下面给出共形平直线元为平直线元的充要条件. [①]

命题 12-1-8 洛伦兹号差的共形平直 4 维线元(12-1-12)是平直线元的充要条件是 $\Omega(x^\mu)$ 可表为 $\Omega(x^\mu) = C/Q(x^\mu)$，其中 C 为常数，函数 $Q(x^\mu)$ 取以下三种形式中之任一:

(a) $Q(x^\mu) = -(t+\rho^0)^2 + (x+\rho^1)^2 + (y+\rho^2)^2 + (z+\rho^3)^2$,

其中 $\rho^\mu (\mu = 0,1,2,3)$ 为常数;

(b) $Q(x^\mu) = t + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \lambda$,

其中 $\gamma_i (i=1,2,3)$ 及 λ 为常数且 $\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1$.

(c) $Q(x^\mu) =$ 常数.

证明 见下册 §J. 1 末. □

[选读 12-1-1 完]

§ 12.2 闵氏时空的共形无限远

什么是无限远? 衡量远近的通常标准是距离，然而两个时空点之间不存在最短线(见 §3.3)，距离概念无法定义. 为了给闵氏时空的无限远赋予意义，先作如下考虑. 设 r 是 3 维欧氏空间的径向坐标，则一点的 r 等于该点与原点的距离. r 也是过原点的任一测地线(直线)的仿射参数. 因此，从原点出发沿任一完备测地线前进，当仿射参数趋于无限大时就趋于无限远. 这种以测地线为“探针”来探测无限远的做法可推广到 4 维闵氏时空. 不同的是，闵氏时空的测地线分为类空、类光和类时三大类，相应地也就有类空、类光和类时无限远. 加之类光和类时测地线都有指向过去和未来之分，于是共有 5 种无限远. “远”字的含义已作了延伸:类时无限远实际代表“无限久”. 后面将给出这 5 种无限远的准确定义.

无限远不是一个时空点，也不是一个时空区，而是描写时空点某种变动趋势的概念，因此无法指着某点或某区域说“这就是无限远”. 这使得有关无限远的讨论往往涉及极限过程，由此带来诸多不便. 考虑到共形变换可以改变度规(尺度)，Penrose 找到一个共形因子 Ω，其特征是“越远”越小(趋于无限远时趋于零)，

① 根据 Fulton et al.(1962)所述，Haantjes 曾于 1937 年发表过对这个问题的研究结果. 他先给出共形变换保持曲率张量不变的充要条件，然后把这个条件应用于闵氏时空，见 Haantjes(1937).

用闵氏度规η_{ab}衡量是“很远”的点用共形度规$\tilde{g}_{ab} \equiv \Omega^2\eta_{ab}$衡量就可大大“拉近”. 于是可以指着一个延拓了的流形(见后)上的某些点说“它们代表闵氏时空的无限远”，从而大大便于讨论. 为找到这个Ω, 可先通过若干坐标变换把闵氏度规用适当线元表出. 从闵氏度规在球坐标系$\{t,r,\theta,\varphi\}$的线元

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{12-2-1}$$

出发定义新坐标

$$v \equiv t + r, \quad u \equiv t - r, \tag{12-2-2}$$

则式(12-2-1)变为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \frac{1}{4}(v-u)^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{12-2-3}$$

由式(12-2-2)知v和u的取值范围是

$$-\infty < v < \infty, \ -\infty < u < \infty, \ v \geqslant u\ (\text{因}\ r \geqslant 0)\,. \tag{12-2-4}$$

再定义新坐标

$$T \equiv \arctan(v) + \arctan(u)\,, \quad R \equiv \arctan(v) - \arctan(u)\,, \tag{12-2-5}$$

其逆变换为

$$v = \tan[(T+R)/2], \ u = \tan[(T-R)/2]\,, \tag{12-2-6}$$

则式(12-2-3)变为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4\cos^2[(T+R)/2]\cos^2[(T-R)/2]}[-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}R^2 + \sin^2 R\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]\,. \tag{12-2-7}$$

由式(12-2-6)、(12-2-4)可看出T, R的取值范围是

$$-\pi < T + R < \pi, \ -\pi < T - R < \pi\ \text{及}\ R \geqslant 0\,.$$

[见图 12-1 的阴影部分O, 其中每点($r=0$的点除外)代表一个2维球面.] 坐标变换(12-2-5)似乎已把无限远($|v|=\infty$, $|u|=\infty$)拉到有限处(斜直线$T+R=\pi$和$T-R=-\pi$), 但这只是表面现象. 这两条斜直线不属于闵氏度规η_{ab}的定义域: 由式(12-2-7)可知$T+R=\pi$和$T-R=-\pi$都使$\mathrm{d}s^2$的分母为零. 因此, 它们是“可望而不可及”的. 然而式(12-2-7)为引进适当共形变换提供了线索. 令

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 \equiv -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}R^2 + \sin^2 R\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,, \tag{12-2-8}$$

$$\Omega \equiv 2\cos[(T+R)/2]\cos[(T-R)/2], \tag{12-2-9}$$

则

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \Omega^2 \mathrm{d}s^2. \tag{12-2-10}$$

以 $\tilde{g}_{ab}$ 代表与线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 相应的(非平直)度规, 则

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}. \tag{12-2-11}$$

由式(12-2-8)可知 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ (因而 $\tilde{g}_{ab}$)在两条斜直线 $T+R=\pi$ 和 $T-R=-\pi$ 上表现良好, 从而可延拓 $\tilde{g}_{ab}$ 的定义域使这两条斜线也含于域内. 共形变换 $\eta_{ab} \mapsto \tilde{g}_{ab}$ 把尺度标准作了实质性改变, 使两斜线用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量的确在有限处,① 它们"既可望又可及", 可以指着两线上任一点说三道四而无须借助极限过程. (例如可谈及电磁场在两线上的表现, 这是研究物理场无限远行为的巧妙手法.) 因为 η_{ab} 的定义域为图 12-1 的阴影部分 O, 所以式(12-2-11)只在 O 上成立. 然而 $\tilde{g}_{ab}$ 却有大得多的定义域. 事实上, 把式(12-2-8)同(10-2-43)相比可知 $\tilde{g}_{ab}$ 是 $\Lambda=1$ 的爱因斯坦静态宇宙度规, 其定义域是 $\mathbb{R}\times S^3$. ② 为了图示 $\mathbb{R}\times S^3$, 只能压缩维数. 先看如何图示 S^3, 为此先谈 S^2. 设 S^2 的标准角度坐标为 θ 和 φ, 则 S^2 在压缩一维后可用图 12-2 的半圆周表示. φ 所在的一维已被压掉, 半圆周的每点($\theta=0, \pi$ 两点除外)代表原 S^2 的一条纬线(一个 S^1). 你也可把此图看作 S^3 的图示, 只须认为每点(首末两点除外)代表一个 S^2. 可见爱因斯坦静态宇宙 $\mathbb{R}\times S^3$ 在压缩两个维数后成为图 12-3(a)的半圆柱面, 面上一点($R=0, \pi$ 除外)代表某时刻 T 的全空间 S^3 中的某个球面(S^2). 然而, 为了后面的需要, 又常把半圆柱面画成整圆柱面, 即图 12-3(b), 这时只好说面上一点代表时刻 T 的全空间 S^3 中的"半个"球面. 以上讨论表明式(12-2-8)代表的 $\tilde{g}_{ab}$ 的定义域不但可包含图 12-1 的两斜

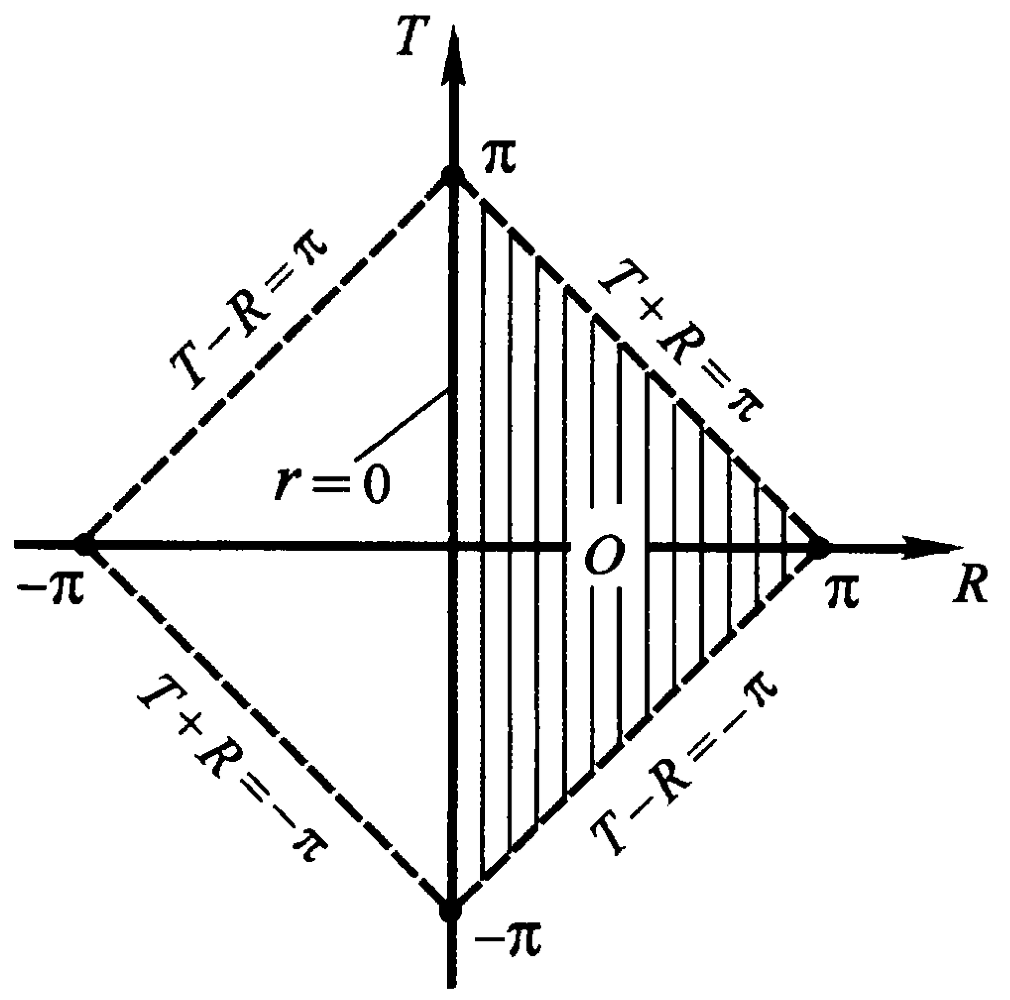


图 12-1 $\mathrm{d}s^2$ 的定义域是阴影部分 O (不含两条斜边), 每点($r=0$ 的点除外)代表一个 S^2

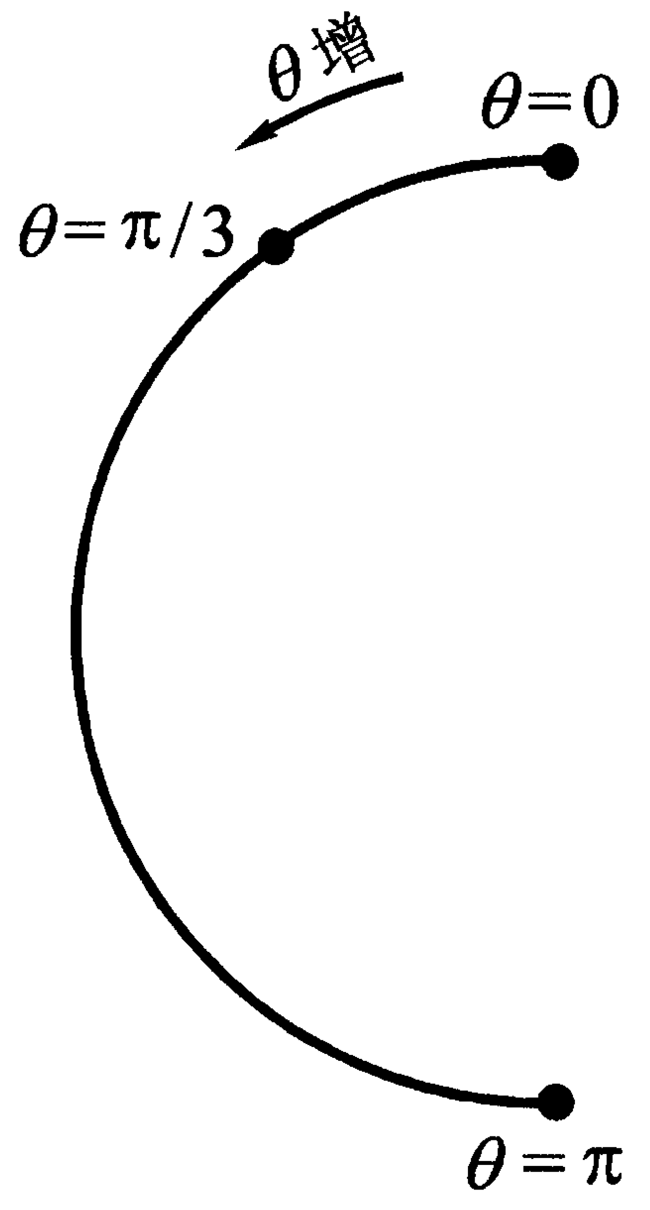
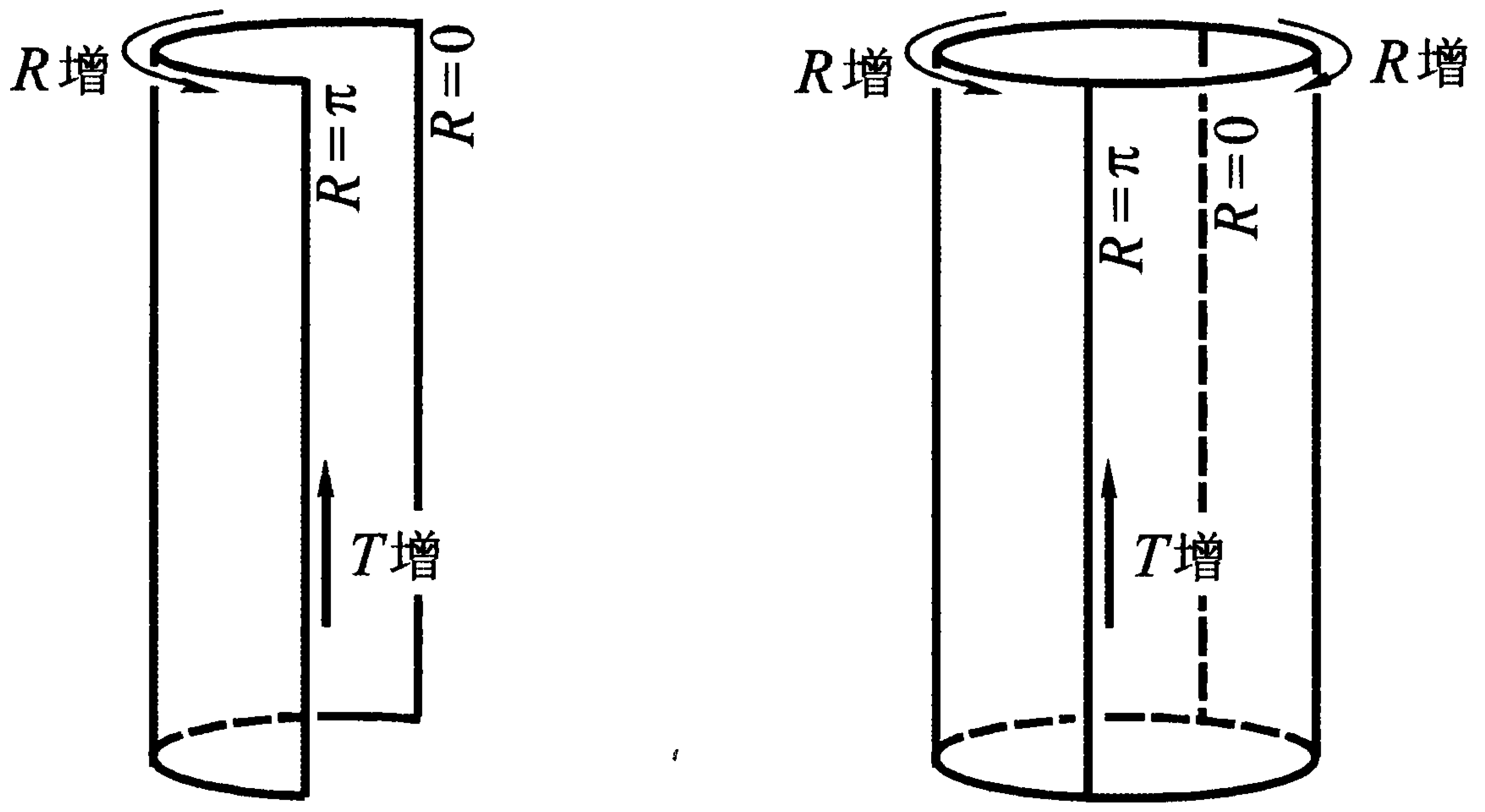


图 12-2 S^2 压缩一维的图示

① 指到达斜线的任一类时线以 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量的线长有限.

② 2 维球面线元 $r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$ 当然不能覆盖整个球面, 但其相应的度规在整个球面上有定义. 与此类似, 虽然式(12-2-8)的线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 也有类似问题, 但爱因斯坦静态度规 $\tilde{g}_{ab}$ 在图 12-3 的整个圆柱面上有定义[式(12-2-8)的 T 的取值范围是 $(-\infty,\infty)$].



(a)用半圆柱面代表 $\mathbb{R}\times S^3$　　(b)用圆柱面代表 $\mathbb{R}\times S^3$

图 12-3　爱因斯坦静态宇宙 $\mathbb{R}\times S^3$ 压缩两维的图示

线, 而且可延拓至图 12-3(b)的整个圆柱面(见图 12-4). 由于 O 中每点($r=0$ 除外)代表一个球面而图 12-3(b)的圆柱面上每点($R=0,\ \pi$ 除外)代表半个球面, 图 12-1 的"等腰三角形" O 改画到图 12-4 中就成为"卷起来的正方形". 以上是用延拓观点看问题, 即把图12-4的圆柱面看作"卷起来的正方形"的最大延拓. 也可改用镶嵌(映射)的观点看问题, 即认为存在共形等度规嵌入映射

$$\psi:\mathbb{R}^4\to\psi[\mathbb{R}^4]\subset\mathbb{R}\times S^3\,,$$

其中 $\mathbb{R}^4$ 就是图 12-1 的 O, 而图 12-4 的"卷起来的正方形"则代表映射的像 $\psi[\mathbb{R}^4]$. 由此便可自然地把 $\psi[\mathbb{R}^4]$("正方形")的边界 $\partial(\psi[\mathbb{R}^4])$ 称为闵氏时空的**共形无限远**(conformal infinity), 从而把无限远变成一个可以被指着说三道四的点集. 它是爱因斯坦静态宇宙(而非闵氏时空)的子集. 实现这一转变的关键在于引进以 Ω 为共形因子的共形变换, 由式(12-2-9)可知 Ω 在趋于无限远时趋于零, 即"对无限远作了无限大的尺度压缩", 所以才"把无限远拉至有限处". $\partial(\psi[\mathbb{R}^4])$ 又可进一步分为 5 个部分(见图 12-4):

(1) **过去类时无限远** i^-(是一个点), 定义为 $T=-\pi$, $R=0$;

(2) **未来类时无限远** i^+(是一个点), 定义为 $T=\pi$, $R=0$;

(3) **类空无限远** i^0, (亦称**空间无限远**, 是一个点.) 定义为 $T=0$, $R=\pi$;

(4) **过去类光无限远** $\mathscr{I}^-$(是一个 3 维面), 定义为 $T-R=-\pi$, $0<R<\pi$;

(5) **未来类光无限远** $\mathscr{I}^+$(是一个 3 维面), 定义为 $T+R=\pi$, $0<R<\pi$.

可以证明 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量都是类光超曲面(练习).

以下命题有助于理解五种无限远的含义.

命题 12-2-1 闵氏时空的指向未来类时测地线起于i^-止于i^+；指向未来类光测地线起于$\mathscr{I}^-$止于$\mathscr{I}^+$；类空测地线起于i^0止于i^0.

注 1 严格地说，上述三种测地线前都应冠以“不可延”(或“最大延拓”)一词.

证明 设 $\{t,x^i\}$ 为惯性坐标系，λ为测地线的仿射参数，取值范围是$-\infty<\lambda<\infty$，则测地线(直线)的参数式为

$$t=a_0\lambda+b_0,\quad x^i=a_i\lambda+b_i,\ 其中\ a_0,b_0,a_i,b_i\ (i=1,2,3)\ 为常数. \tag{12-2-12}$$

先讨论类时测地线. 由类时要求可知$a_0{}^2>\sum a_i{}^2$. 由“指向未来”要求可知$a_0>0$.

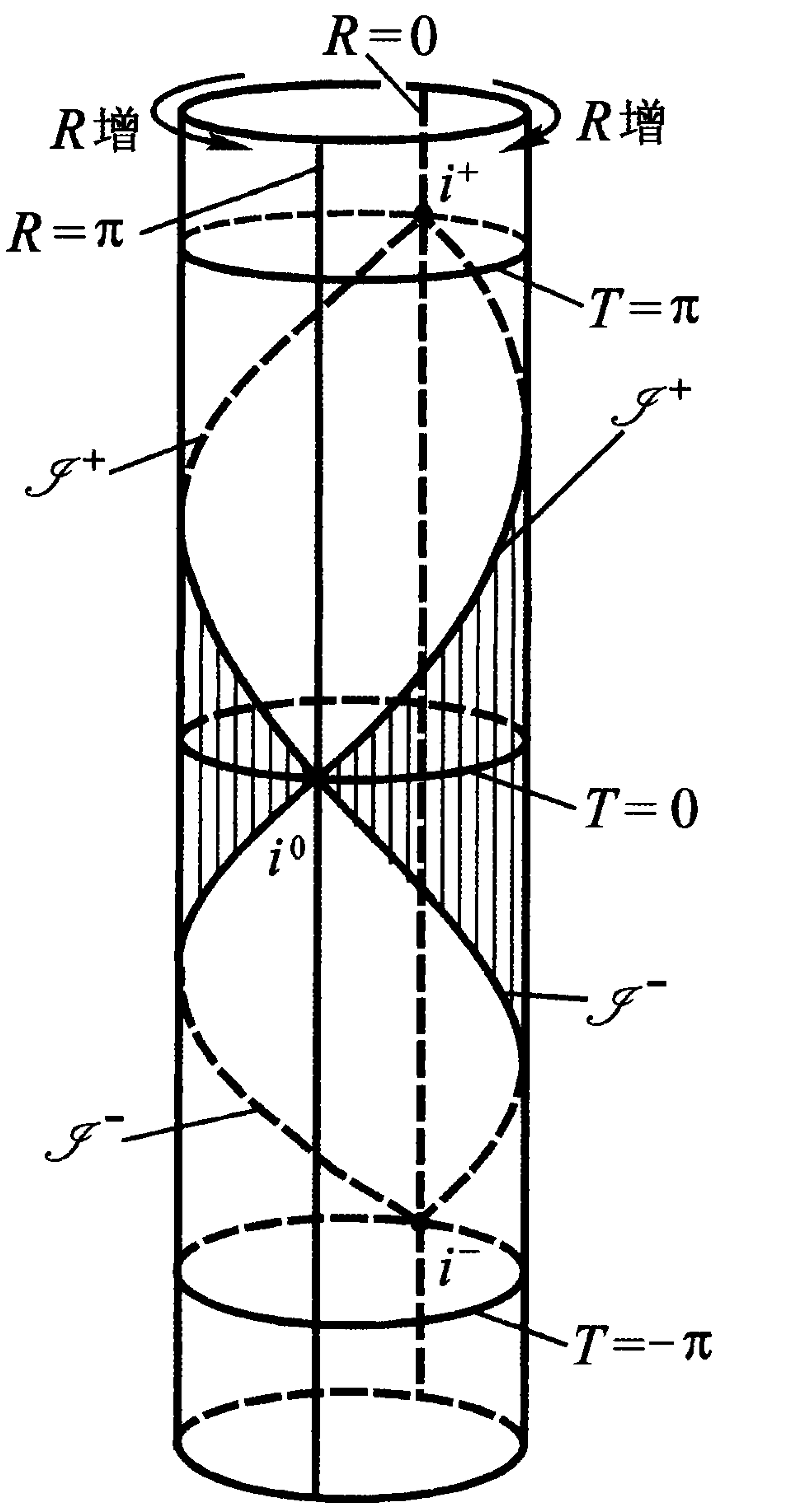


图 12-4 “卷起来的正方形”对应于图 12-1 的O，正方形内部代表闵氏时空，边界代表其共形无限远

因为$i^+\Leftrightarrow T=\pi, R=0\Leftrightarrow v=u=\infty$，所以欲证类时测地线止于$i^+$只须证明$\lambda\to\infty$时$v,u\to\infty$. 由式(12-2-12)可知$\lambda\to\infty$时$t\to\infty$，故$v\equiv t+r$当然趋于无限. 另一方面，

$$u\equiv t-r=a_0\lambda+b_0-\sqrt{\sum(a_i\lambda+b_i)^2}$$
$$=\left[a_0-\sqrt{\sum(a_i+b_i\lambda^{-1})^2}\right]\lambda+b_0.$$

当$\lambda\to\infty$时方括号内趋于$a_0-\sqrt{\sum a_i^2}>0$，故$u\to\infty$. 同理可证类时测地线起于i^-. 关于类空和类光测地线的结论由读者自证. □

由命题12-2-1可知$i^-(i^+)$，i^0和$\mathscr{I}^-(\mathscr{I}^+)$确实分别代表过去(未来)类时无限远、类空无限远和过去(未来)类光无限远. 请注意非测地线不满足命题12-2-1，例如，类时非测地线可以起于$\mathscr{I}^-$和止于$\mathscr{I}^+$. 类光无限远$\mathscr{I}^\pm$对研究电磁波有重要帮助. 电磁波对应于大量光子，光子的世界线是类光测地线，因此传向无限远的电磁波的每一光子都奔向$\mathscr{I}^+$.

把闵氏时空的整个类空无限远压缩为一点i^0是很特别的做法. 设想时空中有一“静止”点电荷Q，[①] 它在某一时刻t的电场线指向四面八方(图 12-5)，任意两线彼此不断远离. 然而，根据类空测地线必起、止于i^0的命题，它们共形嵌入图 12-4

---

① 3 维语言物理学的“静止”、“运动”、“加速”等词都默认相对于某一惯性系而言. 例如“静止点电荷”Q就是指世界线为测地线的点电荷. 设$\mathscr{R}$是以Q为一个观者的那个惯性系，则Q相对于惯性系$\mathscr{R}$当然静止. 又如所有电动力学书都说“只有加速电荷才有辐射”，这“加速”也是相对于某惯性系而言，因此“加速电荷”就是世界线为非测地线的点电荷.

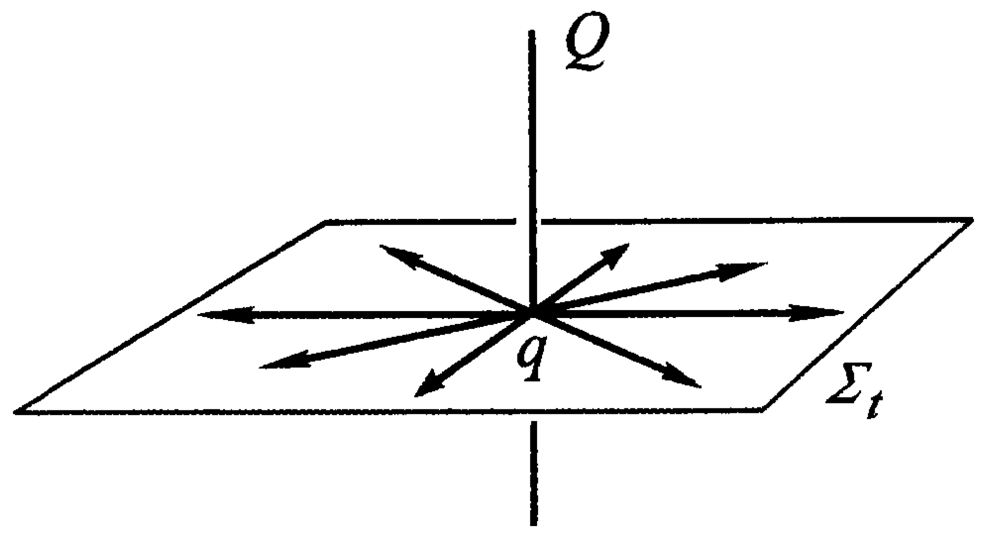


图 12-5　静止点电荷 Q 在时刻 t 的电场线指向四面八方

后“最终”竟“相会在 i^0 点”.[①] 理解这一“怪”现象的关键是注意图 12-4 描述的是闵氏时空共形嵌入的结果[无限远经“无限大压缩”后成为 $\partial(\psi[\mathbb{R}^4])$]，详见选读 12-2-1.

[选读 12-2-1]

下面的简单例子有助于理解这一问题.

2 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 在极坐标系的线元为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 . \tag{12-2-13}$$

用下式定义新坐标 θ：

$$r = \tan\frac{\theta}{2}, \tag{12-2-14}$$

则由 $r \geqslant 0$ 得 $0 \leqslant \theta < \pi$. 式(12-2-13)在坐标系 $\{\theta, \varphi\}$ 中取如下形式：

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^4(\theta/2)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \tag{12-2-15}$$

令
$$d\tilde{s}^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 , \tag{12-2-16}$$

$$\Omega \equiv 2\cos^2(\theta/2) , \tag{12-2-17}$$

则
$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 . \tag{12-2-18}$$

由式(12-2-16)知 $d\tilde{s}^2$ 正是球面度规(记作 $\tilde{g}_{ab}$，是 $\mathbb{R}^3$ 的欧氏度规在其子集 S^2 上的诱导度规)在球面坐标系 $\{\theta, \varphi\}$ 的线元式，可见 $\mathbb{R}^2$ 的欧氏度规 δ_{ab} 共形于球面度规 $\tilde{g}_{ab}$(图 12-6)：

$$\delta_{ab} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{ab} . \tag{12-2-19}$$

从 $r = 0$ 点出发的射线($\varphi =$ 常数)都对应于球面上从 $\theta = 0$ 点出发的经线. 然而，$\theta \to \pi$ 意味着 $r \to \infty$，即不存在 r 值与 $\theta = \pi$ 对应，故球面上 $\theta = \pi$ 的点不对应于

① 不仅从 q 出发、躺在 Σ_t 上的直线最终到达 i^0，而且从 q 出发、躺在其他惯性系的同时面 $\Sigma_{t'}$ (图中未画出)上的直线也到达 i^0.

$(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 的任一点. 这也可从式(12-2-17)和(12-2-19)看出：因为 $\tilde{g}_{ab}$ 在整个球面上表现良好(不为零), $\Omega|_{\theta=\pi}=0$ 表明 δ_{ab} 在 $\theta=\pi$ 点没有定义(发散). 这些都说明 $\theta=\pi$ 点代表 $(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$ 的“整个无限远”，是“无限远”经“无限压缩”$(\Omega=0)$而得的一点(是球面 S^2 而非 $\mathbb{R}^2$ 的点). 由此不难理解闵氏时空的“整个空间无限远”被压缩为一点 i^0.

[选读 12-2-1 完]

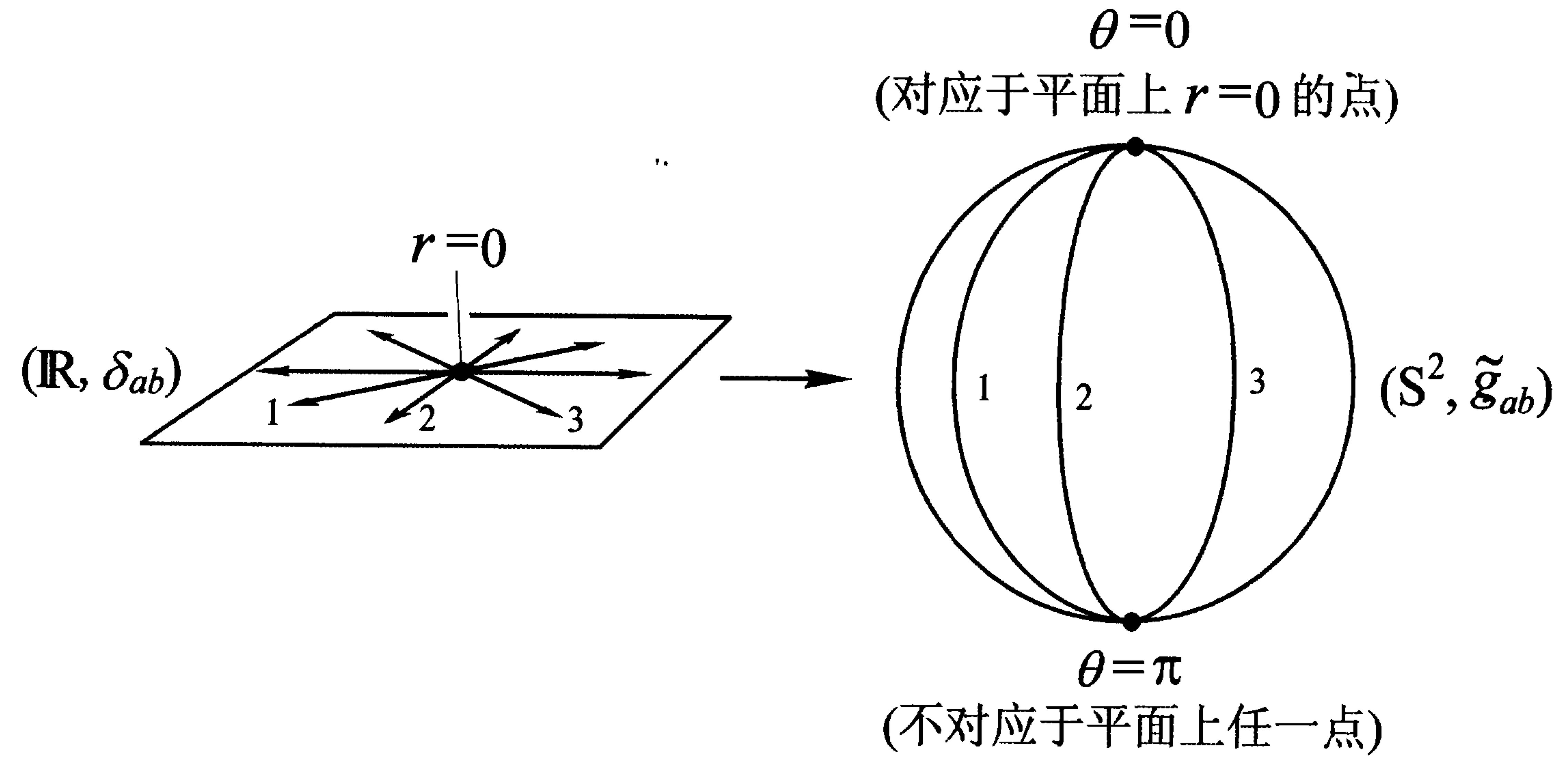


图 12-6　欧氏平面到球面的共形等度规映射

在作图表示闵氏时空的无限远时, 除图 12-4 外, 也可简单画成图 12-7 或图 12-8(a). 图 12-8(a)比图 12-7 多一维, 对某些问题的描述较为直观, 例如从 $\mathscr{I}^-$ 到 $\mathscr{I}^+$ 的类光测地线在图 12-7 中只能画成折线, 而在图 12-8(a)中则为直线. 但图 12-8(a)的一大缺点是容易误以为 i^0 是一个圆周, 其实它只是一个点. 为克服此缺点也可改用图 12-8(b), 它当然也有缺点. 细观图 12-7 发现有以下特征：①能描述时空的共形无限远；②45°斜直线表示类光超曲面和径向(θ, φ 为常数)类光测地线. 通常把具有这两个特征的图称为**彭罗斯图**(Penrose diagram)或**共形图**(conformal diagram). Penrose 图的特征①是关键特征, 特征②则使曲线和超曲面的类时、类空和类光性一目了然, 不像某些时空图那样容易使人“上当”. 例如, 如果在图 9-19 的 $r<2M$ 区画一条竖直线, 则它竟然不是类时的!

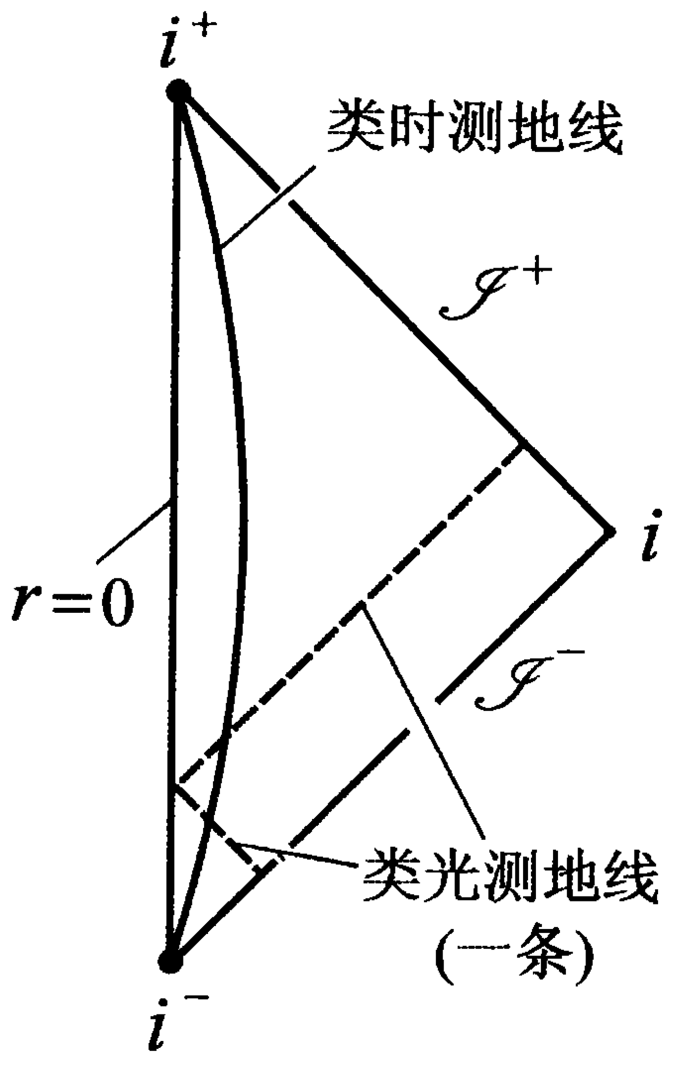
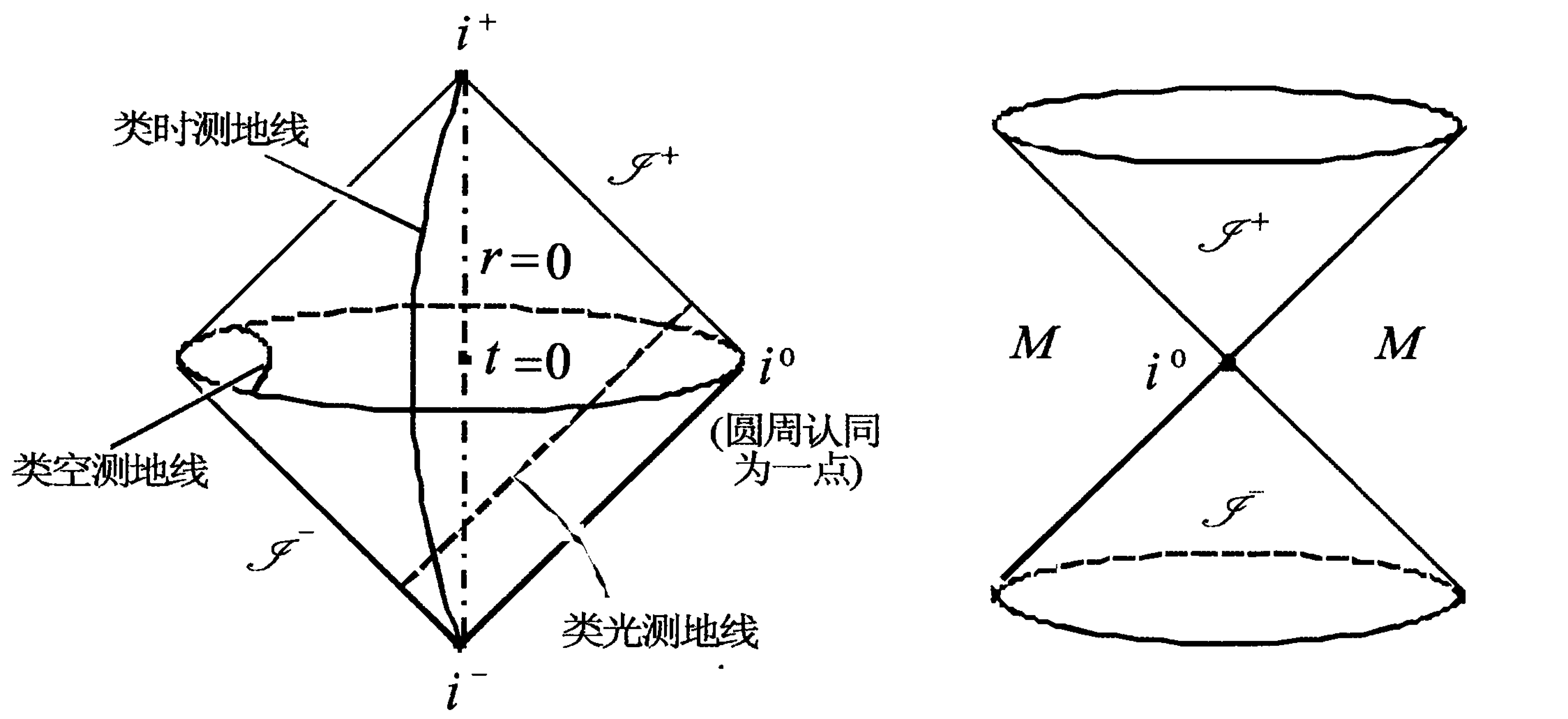


图 12-7　闵氏时空及其共形无限远. 从 $\mathscr{I}^-$ 到 $\mathscr{I}^+$ 的类光测地线只能画成折线



(a) 必须把整个圆周看作一点，即 i^0　　(b) 物理时空 M 由圆锥外区域代表

图 12-8　闵氏时空及其共形无限远的另外两种表示

§ 12.3　施瓦西时空的共形无限远

施瓦西最大延拓时空在 Kruskal 坐标系中的线元为[见式(9-4-28)]

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}(-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (12\text{-}3\text{-}1)$$

仿照式(12-2-6)，用下式定义新坐标 ξ, χ：

$$T + X = \tan(\xi + \chi), \qquad T - X = \tan(\xi - \chi), \qquad (12\text{-}3\text{-}2)$$

则式(12-3-1)变为

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\frac{-d\xi^2 + d\chi^2}{\cos^2(\xi+\chi)\cos^2(\xi-\chi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (12\text{-}3\text{-}3)$$

因为 T 和 X 的取值范围是 $-\infty < T < \infty$，$-\infty < X < \infty$，$T^2 - X^2 < 1$，所以 ξ 和 χ 的取值范围是 $-\pi/2 < \xi + \chi < \pi/2$，$-\pi/2 < \xi - \chi < \pi/2$，$-\pi/4 < \xi < \pi/4$，借助于坐标 ξ, χ 便可画出施瓦西最大延拓时空的 Penrose 图(图 12-9). 图中 A 和 A′ 是两个渐近平直区，两区的 i^0，$i^\pm$，$\mathscr{I}^\pm$ 的定义由图可见($\mathscr{I}^\pm$ 不含 i^0 和 $i^\pm$). 每个 $\mathscr{I}$ 的拓扑都是 $S^2 \times \mathbb{R}$. 应该指出，至今的唯一操作不过是坐标变换，它虽然形式上把无限远“拉近”，但尚未进行共形压缩，施瓦西线元在 $\mathscr{I}^\pm$，$\mathscr{I}'^\pm$，$i^\pm$，$i'^\pm$，i^0，i'^0 处没有意义. 为选择适当的共形因子，可借用内向 Eddington 坐标系 $\{v, r, \theta, \varphi\}$，其中 $v \equiv t + r_*$ [r_* 是由式(9-4-19)定义的乌龟坐标]. 施瓦西度规在此坐标系的线元为[参见式(9-4-51)]

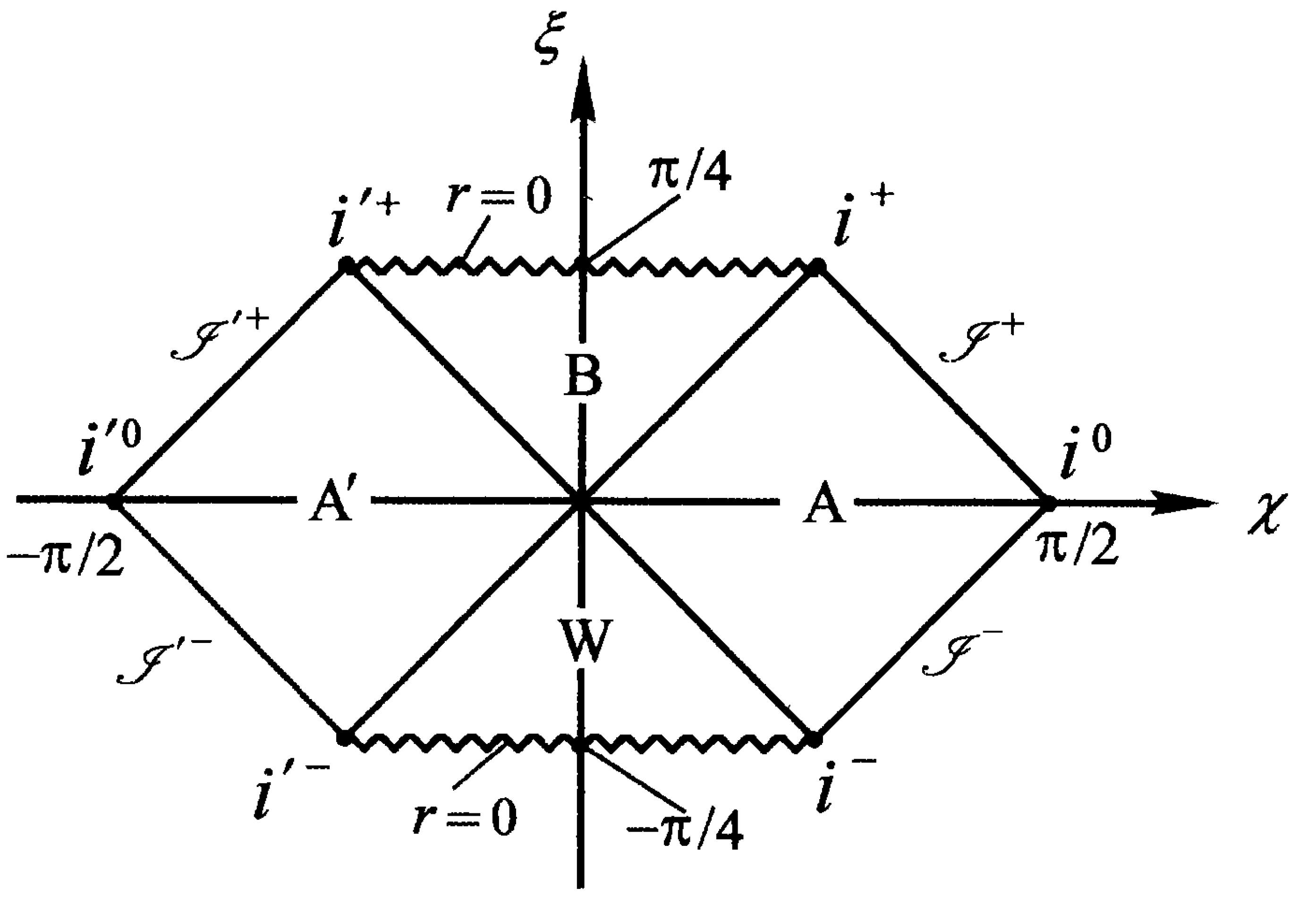


图12-9　施瓦西最大延拓时空的Penrose图

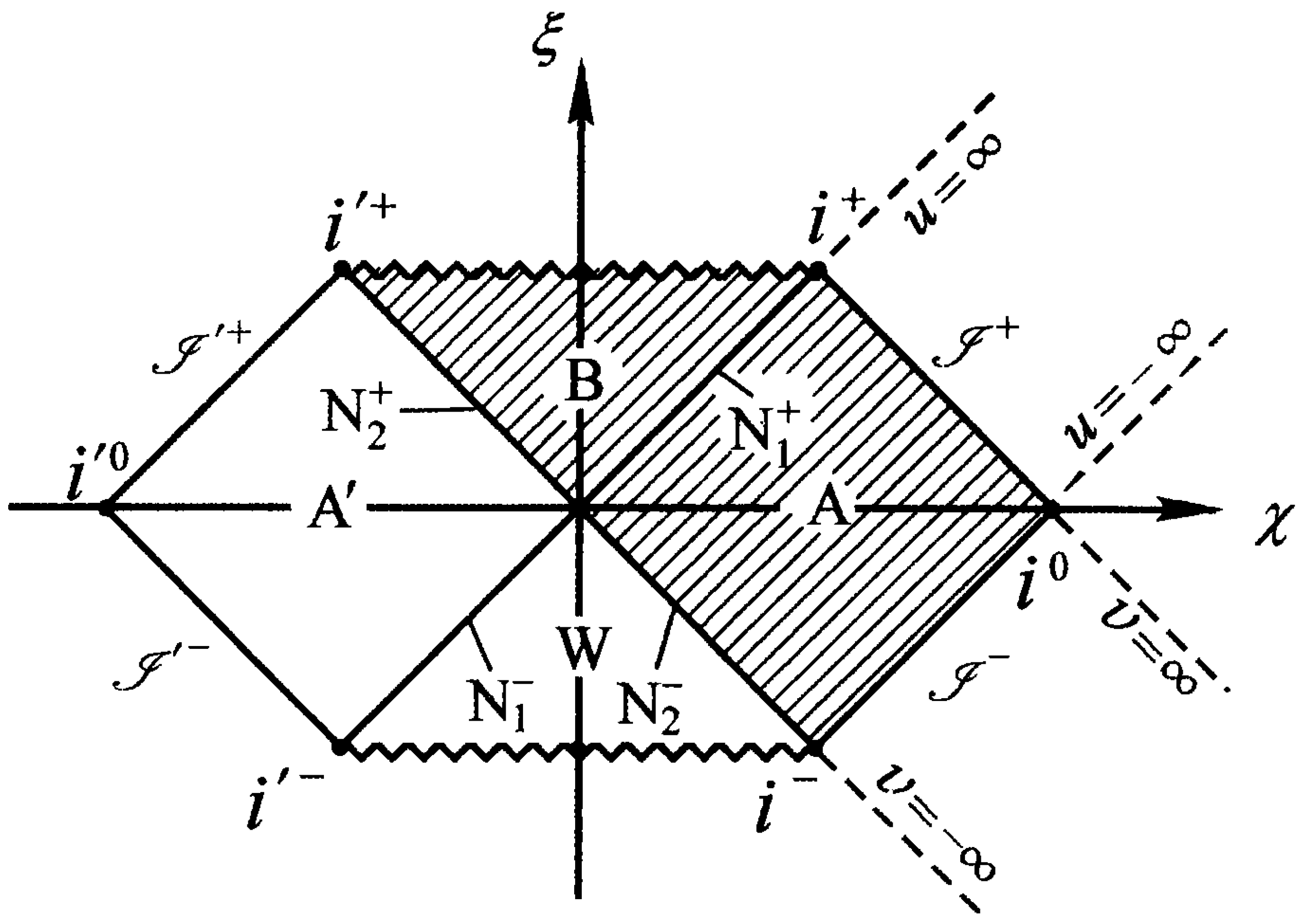


图12-10　坐标v，Ω在阴影部分(含$\mathscr{I}^-$)有定义

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\ (1-2Mr^{-1})\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}r\mathrm{d}v + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\varphi^2) \\
&= r^2[-(r^{-2}-2Mr^{-3})\mathrm{d}v^2 + 2r^{-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}v + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \qquad (12\text{-}3\text{-}4)
\end{aligned}
$$

选共形因子$\Omega = r^{-1}$，令

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 \equiv -(r^{-2}-2Mr^{-3})\mathrm{d}v^2 + 2r^{-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}v + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, \qquad (12\text{-}3\text{-}5)$$

则

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \Omega^2\mathrm{d}s^2. \qquad (12\text{-}3\text{-}6)$$

把Ω看作坐标，则式(12-3-5)又可在坐标系$\{v,\Omega,\theta,\varphi\}$中表为

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = -(\Omega^2-2M\Omega^3)\mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}v + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \qquad (12\text{-}3\text{-}7)$$

上式在$\mathscr{I}^-$(定义为$\Omega=0$, $-\infty<v<\infty$，见图 12-10)上表现良好(为C^∞). 事实上，$\mathrm{d}\tilde{s}^2$在整个 A 区，B区(黑洞区)及两区间的事件视界N_1^+上都表现良好，可见坐标系$\{v,\Omega,\theta,\varphi\}$能覆盖$A\cup N_1^+\cup B\cup\mathscr{I}^-$. 为了覆盖$\mathscr{I}^+$(那里$v=\infty$)，可改用外向 Eddington 坐标系$\{u,r,\theta,\varphi\}$，施瓦西度规在此系的线元为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\ (1-2Mr^{-1})\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}r\mathrm{d}u + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \\
&= r^2[-(r^{-2}-2Mr^{-3})\mathrm{d}u^2 - 2r^{-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}u + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \qquad (12\text{-}3\text{-}8)
\end{aligned}
$$

仍选$\Omega = r^{-1}$，令

$$\mathrm{d}\tilde{s}'^2 = \Omega^2\mathrm{d}s^2, \qquad (12\text{-}3\text{-}9)$$

则 $$\mathrm{d}\tilde{s}'^2 = -(\Omega^2-2M\Omega^3)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}u + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \qquad (12\text{-}3\text{-}10)$$

不难看出$\mathrm{d}\tilde{s}'^2$在$A\cup N_2^-\cup W\cup\mathscr{I}^+$上表现良好. 可见$\mathrm{d}\tilde{s}'^2$和$\mathrm{d}\tilde{s}^2$在 A 区都表现良好，且由式(12-3-6)、(12-3-9)可知在 A 区有$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mathrm{d}\tilde{s}'^2$. 对 A′ 区也可作类似讨论. 由此可知在施瓦西最大延拓时空的流形上存在共形因子Ω，用它对施瓦西度规

g_{ab} 作共形变换所得度规 $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ 不但在施瓦西最大延拓时空的流形上(即图 12-10 的"菱形"内部)有定义, 而且在"菱形"的部分边界(即 $\mathscr{I}^{\pm}$ 和 $\mathscr{I}'^{\pm}$)上也有定义. 把"菱形"内部记作 M, 把 M 与 $\mathscr{I}^{\pm}$, $\mathscr{I}'^{\pm}$ 之并记作 $\tilde{M}$, 则可认为施瓦西最大延拓时空 (M, g_{ab}) 被共形等度规地镶嵌进更大的时空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 中, 因而 $\mathscr{I}^{\pm}$ 及 $\mathscr{I}'^{\pm}$ 分别称为 A 及 A′ 的过去和未来共形类光无限远是恰当的. 整个做法与把闵氏时空共形等度规地镶嵌进爱因斯坦静态宇宙的做法相似.

$i^{\pm}$ 点以及 $\mathscr{I}^{\pm}$ 上的点都不是时空本身的点, 但与时空有密切联系, 因此称为时空的**理想点**(ideal point). 进一步还可把奇性所在点($r=0$ 的点, 都在图 12-10 的两条波纹线上)称为时空的理想点, 于是施瓦西时空的理想点分为**无限远理想点**(infinity ideal point)和**奇异理想点**(singular ideal point)两类. 闵氏时空只有无限远理想点而没有奇异理想点. 理想点的准确定义和详细讨论见§E.3.

§ 12.4　孤立体系和渐近平直时空

第 10 章曾指出宇宙是"无所不包"的最大时空. 这一时空的弯曲情况是如此复杂, 以至在宇宙论中只能关心它在宇观尺度上抹匀后的几何, 即 Robertson-Walker 度规. 然而, 除宇宙论外, 广义相对论的应用对象都只是宇宙中的一个局部区域(宇宙的一个子系统), 例如一个或数个黑洞、一颗近似孤立的恒星或一个近似孤立的双星系. 这时必须而且可以使用孤立体系的模型, 其实质是把宇宙中在体系以外的物质对体系内物质的作用加以忽略. 正如 Geroch(1977)所指出的, 只有学会使用孤立体系才能理解宇宙的各个子系统并把广义相对论与物理学的其他分支联系起来, 否则讨论任一物理客体时都必须考虑来自所有其他客体的作用, 结果只能是一事无成. 在研究引力辐射以及系统的总能量、总动量和总角动量时, 孤立体系模型尤其不可或缺.

施瓦西时空是广义相对论中孤立体系的最简单例子. 任何球对称恒星在模型化语言中都可看作时空的一条世界线 L. 如果 L 周围存在一个时空区域 D, 其他物质在 D 内的引力场同 L 的引力场相比较可忽略, 而且 D 内离 L 足够远(半径 r 足够大)处由 L 提供的引力场也足够弱, 就可认为 D 是一个施瓦西时空. 孤立体系意味着"很远处"引力场很弱, 时空"越远越平直", 所以孤立体系在广义相对论中相当于渐近平直时空. 用施瓦西坐标表述的施瓦西线元在 r 越大时越接近闵氏线元, 这是人们最早认识的渐近平直时空. 由此看来渐近平直时空可以这样定义: 时空 (M, g_{ab}) 称为渐近平直的, 若存在坐标系 $\{x^{\mu}\}$ 使度规分量 $g_{\mu\nu}$ 在坐标值很大时表现适当: 令 $r \equiv [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$, 则当 r 沿类空或类光方向趋于无限远时

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1})$. ① 然而这种借助坐标语言的定义存在一大缺点，就是对每一结论都要检查它是否具有在坐标变换下的不变性. 此外，在许多场合中要计算物理量在"很远处"的数值，这可通过求 $r \to \infty$ 的极限得到，然而找到与坐标系无关的求极限手续并非易事，特别是求极限与求导的可交换性难以证明. 因此，人们早就开始对渐近平直时空的概念寻求一个不用坐标语言的定义. 虽然孤立体系的概念在除广义相对论外的任一物理分支中都不难定义(容易到使人在用这个概念时往往意识不到正在用它的程度)，然而在广义相对论中却困难得多. 这与许多在非广义相对论中不难而在广义相对论中很难的问题(如奇点定义)有同一起因：在广义相对论中，度规场 g_{ab} 既是时空背景场("舞台")又是描述物理过程的动力学场("演员"). "渐近平直时空"的一个满意定义至少要满足两个要求：①所提条件应强到使渐近平直时空具有足够丰富的结构；②所提条件应弱到使足够多的时空(特别是那些从物理考虑认为应是渐近平直的时空)可被称为渐近平直时空. 经过许多学者的努力，至今已有不止一个比较满意的定义(不完全等价). 本书介绍 Ashtekar 的定义.

渐近平直的直观含义是越远越平直，因而同无限远密切相关. 闵氏时空中趋于无限远的方式有三种，于是有类空无限远 i^0、类光无限远 $\mathscr{I}^{\pm}$ 和类时无限远 $i^{\pm}$ 之分. 孤立体系的特征是引力场在很远处很弱，却不要求很久以前或很久以后很弱，因此渐近平直时空的定义只应涉及 i^0 和 $\mathscr{I}^{\pm}$，两者各有其重要性，视所关心的问题而定. 例如，由于辐射问题涉及类光测地线，$\mathscr{I}^{\pm}$ 在讨论同辐射有关的问题时(包括电磁、引力辐射和黑洞的 Hawking 量子辐射)就非常重要. 既然把闵氏时空共形等度规地嵌入爱因斯坦静态宇宙可以定义闵氏时空的共形无限远，自然希望有待定义为渐近平直时空的 (M, g_{ab}) 可以共形等度规地嵌入一个比它"大"(至少多出可被记作 i^0 和 $\mathscr{I}^{\pm}$ 的部分)的"时空" $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 中. 如果满足这一条件，便可指着 i^0 或 $\mathscr{I}^{\pm}$ 的一点说"这是 (M, g_{ab}) 的共形无限远点". 如果 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 进一步满足某些条件，从而使 g_{ab} 在趋近无限远时趋于平直，就可以说 (M, g_{ab}) 是渐近平直的. 以上直观思考导致 Ashtekar 的以下(专业性颇强的)定义[见 Ashtekar(1980)；Wald(1984)].

定义 1 真空时空 (M, g_{ab}) (指 g_{ab} 满足真空爱因斯坦方程 $R_{ab} = 0$)称为在类光和空间无限远处**渐近平直的**(asymptotically flat)，若

(a)存在"时空" $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$，满足：

(a1) $M \subset \tilde{M}$；(a2) $\exists\, i^0 \in \tilde{M}$ 使 $\overline{J^+(i^0)} \cup \overline{J^-(i^0)} = \tilde{M} - M$；[因果符号 J^+ 和 J^- 的含义见 §11.1，条件 (a2) 表明 i^0 与 M 的任一点都无因果联系，因而可把 i^0 称为**空间**

① 之所以要求 $g_{\mu\nu}$ 至少以 r^{-1} 的速率趋于 $g_{\mu\nu}$，是为保证与下面用几何语言定义的渐近平直时空(定义 1)的表现一致.

无限远点；还表明 M 的边界 $\dot{M}=\mathscr{I}^{+}\cup\mathscr{I}^{-}\cup\{i^{0}\}$，其中 $\mathscr{I}^{\pm}\equiv \dot{J}^{\pm}(i^{0})-\{i^{0}\}$. 读者不妨以图 12-4(去掉 $i^{\pm}$)为例来找感觉.] (a3) $\tilde{g}_{ab}$ 在 $\tilde{M}-\{i^{0}\}$ 为 C^{∞}，在 i^{0} 为 $C^{>0}$.（$C^{>0}$ 表示强于 C^{0}，定义及动机见选读 12-4-1.）

(b) $\tilde{M}$ 上有函数 Ω，满足:

(b1)在 M 上有 $\tilde{g}_{ab}=\Omega^{2}g_{ab}$；(b2) Ω 在 $\tilde{M}-\{i^{0}\}$ 上为 C^{∞}，在 i^{0} 上为 C^{2}；(b3) $\Omega|_{M}>0$， $\Omega|_{\dot{M}}=0$；(b4) $\tilde{\nabla}_{a}\Omega|_{\mathscr{I}^{\pm}}\neq 0$, $\lim_{\to i^{0}}\tilde{\nabla}_{a}\Omega=0$；(其中 $\tilde{\nabla}_{a}$ 是与 $\tilde{g}_{ab}$ 适配的导数算符. 因为 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^{0} 可能连 C^{1} 也不够，$\tilde{\nabla}_{a}$ 在 i^{0} 未必有意义，所以不写 $\tilde{\nabla}_{a}\Omega|_{i^{0}}=0$.) (b5) $\lim_{\to i^{0}}\tilde{\nabla}_{a}\tilde{\nabla}_{b}\Omega=2\tilde{g}_{ab}(i^{0})$.

(c) $\dot{M}$ 有开邻域 U 且 $(U,\tilde{g}_{ab})$ 满足强因果条件(见 §11.3).

(d)其他. [包含(d1)和(d2), 见 Wald(1984); Ashtekar(1980).] 我们将在后面适当地方介绍这两个条件的实质性要求.

注 1 条件(a)要求 (M,g_{ab}) 可嵌入一个“比它大”的“时空” $(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$ 中，条件(b)则要求这种嵌入是共形等度规的(并对共形因子 Ω 提出适当要求)，如同闵氏时空可以共形等度规地嵌入爱因斯坦静态宇宙那样. 更准确地应说“存在共形等度规映射 ψ : $(M,g_{ab})\to(\psi[M]\subset\tilde{M},\ \tilde{g}_{ab})$”，但通常更愿意把 $\psi[M]$ 简写为 M，把 $\tilde{g}_{ab}=\Omega^{2}\psi_{*}g_{ab}$ 简写为 $\tilde{g}_{ab}=\Omega^{2}g_{ab}$. 为便于区别，把 (M,g_{ab}) 和 $(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$ 分别称为**物理时空**和**非物理(unphysical)时空**.

注 2 条件(b3)表明在 M 的边界 $\dot{M}$ 处尺度受到无限压缩，因此 $\dot{M}$ 可解释为 (M,g_{ab}) 的被“拉至有限处”的共形无限远.

注 3 条件(c)要求无限远附近没有病态因果特性.

注 4 定义 1 对时空的真空要求可放宽为“在无限远附近为真空”，就是说，$\dot{M}$ 有开邻域 U 使 $U\cap M$ 中有 $T_{ab}=0$. 这一要求还可进一步放宽为: T_{ab} 虽不为零但在趋于 $\dot{M}$ 时足够快地趋于零，准确地说就是要求 $\Omega^{-2}T_{ab}$ 可以光滑地延拓到 $\mathscr{I}^{\pm}$ 上，并在趋于 i^{0} 时有足够好的极限行为.

注 5 在很多情况下只需要“时空在空间无限远为渐近平直”或“时空在类光无限远为渐近平直”的定义，这两个定义原则上可通过“拆分”定义1 而获得，详见 Wald(1984)P.282.

[选读 12-4-1]

与闵氏时空的 i^{0} 类似，渐近平直时空的 i^{0} 也是一个点(把“整个空间无限远”压缩为一点)，这就导致一些特别的结果. 例如，与 $\mathscr{I}^{\pm}$ 不同，如果要求 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^{0} 点为 C^{∞}，则大量在物理上认为是渐近平直的时空(包括施瓦西时空)都无法达到. 事实上，虽然闵氏时空的 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^{0} 是 C^{∞} 的，它上面的物理场在 i^{0} 也远不能达到 C^{∞} 的要求. 以点电荷 $q>0$ 的库仑场为例. 设 q 静止于惯性参考系 $\mathscr{R}$ 中，选 $\mathscr{R}$ 内的惯性坐

标系 $\{t,x,y,z\}$ 使 q 的世界线有 $x=y=z=0$.令 r,θ,φ 是与 x,y,z 相应的球坐标，则 q 的电磁场张量为

$$F_{ab}=-qr^{-2}(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}r)_b\,, \qquad (12\text{-}4\text{-}1)$$

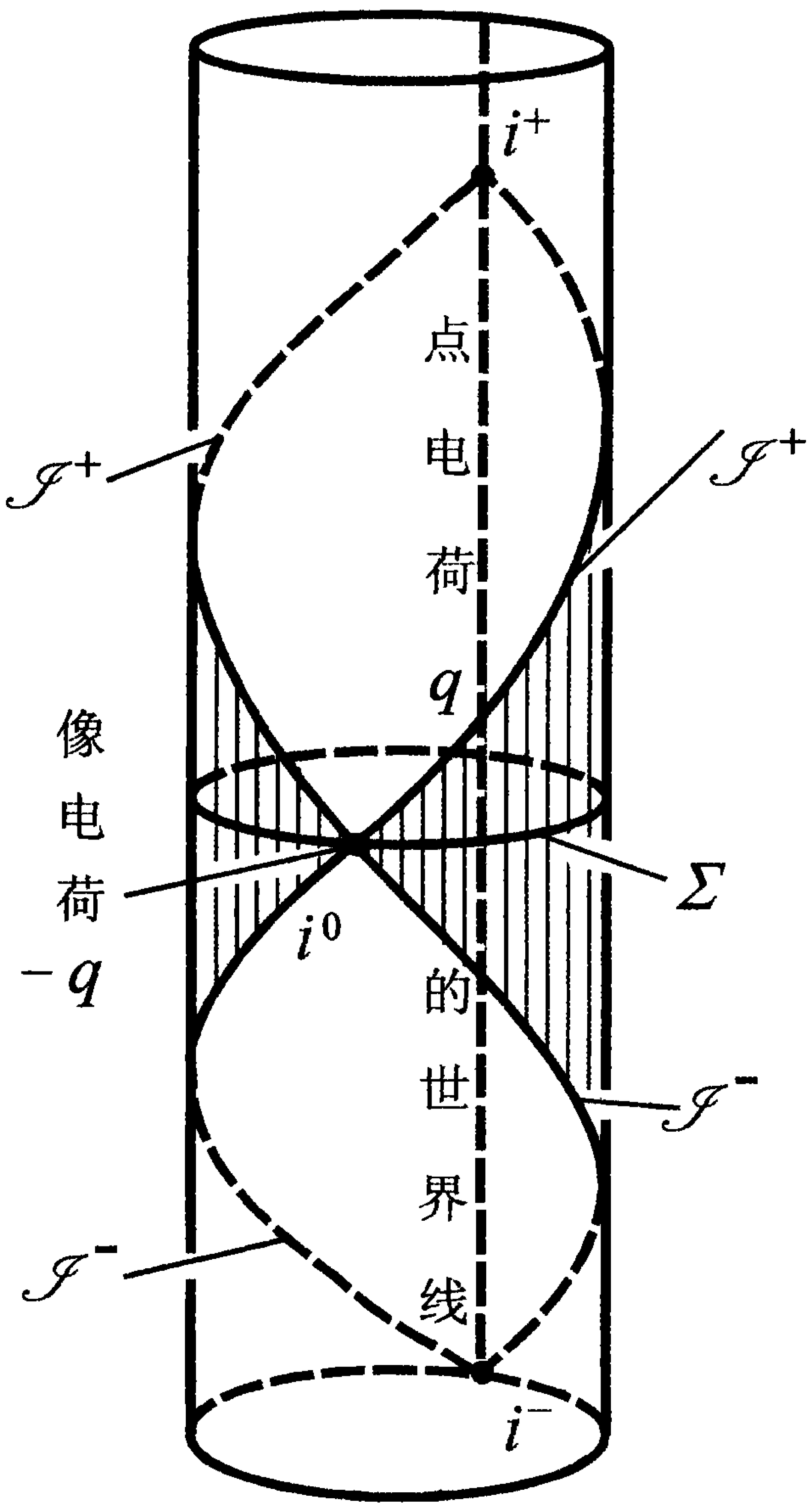


图 12-11　闵氏时空的静止点电荷 q. Σ 是 q 所在惯性系的同时面, $\Sigma\cup i^0$ 微分同胚于 3 维球面. i^0 处有像电荷 $-q$

所以当 $r\to 0$ 时 $F_{ab}\to\infty$. 为了消除发散性，可以用 r^2 乘 F_{ab} ，其结果 $r^2F_{ab}=-q(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}r)_b$ 在沿任一径向类空测地线趋于 $r=0$ 时都有极限. 然而极限值与所选测地线(亦即与趋于 $r=0$ 的方向)有关，所以说 r^2F_{ab} 在 $r\to 0$ 时存在方向依赖的极限. 这与如下物理图象一致：电场线(代表电场方向)从 q 所在处向四面八方发出. 再看与 $r\to 0$ 相反的另一极端，即 $r\to\infty$ 的情况. 计算表明(见下段)，与 $r\to 0$ 类似，F_{ab} 在 $r\to\infty$ 时也发散，但 ΩF_{ab} 则有方向依赖的极限. 物理直观：电场线从四面八方会聚到 i^0 ，因此也说 i^0 点存在“像电荷” $-q$. (见图 12-11. 请注意像电荷 $-q$ 只存在于一点 i^0 ，而源电荷 q 却由一条竖直线代表.) 弯曲度规(如施瓦西度规)在“空间很远处”的表现与此有类似之处，① 因此在渐近平直时空的定义中不宜对 $\tilde{g}_{ab}$ 提出在 i^0 点也为 C^∞ 的要求. 研究表明，比较适当的要求是 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 为 $C^{>0}$ ，其含义是：(a) $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 为 C^0 ；(b) $\tilde{g}_{ab}$ 沿任一到达 i^0 的类空曲线的一阶导数在趋于 i^0 时有方向依赖的极限，而且这一极限对方向(角度)的依赖是 C^∞ 的. [准确含义见 Wald(1984)；Ashtekar(1980)；Ashtekar and Hansen(1978).]②

上面讲闵氏时空的电磁场时只说了“ ΩF_{ab} 在趋于 i^0 时有方向依赖极限”的结

① §12.3 的 Ω 是为把施瓦西时空的类光无限远作共形拉近而引入的，它在 i^0 处不满足本节定义 1 的要求. [顺便一提，§12.2 给闵氏时空引入的 Ω 也不满足 $\lim_{\to i^0}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega=2\tilde{g}_{ab}(i^0)$ 的要求. 不过，为满足此要求只须改选 $\Omega'=\Omega/2$.] 然而可以验证最大延拓施瓦西时空的 A(或 A′)区作为子时空的确是渐近平直时空，为此只须给 A (或 A′)补上适当的 i^0 和 $\mathscr{I}^\pm$ 以获得非物理时空流形 $\tilde{M}$ ，满足定义 1 的 Ω 则可在 Ashtekar and Hansen(1978)附录 C 中找到，其与 r 的关系为 $\Omega\sim r^{-2}$. 施瓦西解是真空解，有 $R_{ab}=0$ ，故 $R_{abc}{}^d=C_{abc}{}^d$ ，由第 9 章习题 10 结果知 $C^{abcd}C_{abcd}\sim r^{-6}$ ，利用 $\tilde{C}_{abcd}=\Omega^2C_{abcd}$ 得 $\tilde{C}^{abcd}\tilde{C}_{abcd}\sim r^2$ ，故 $\tilde{C}_{abcd}$ 在趋于 i^0 时发散，可见施瓦西时空的 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 点表现不良.

② 既然 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 的可微性只要求到 $C^{>0}$ ，流形 $\tilde{M}$ 在 i^0 的可微性也相应地只要求到 $C^{>1}$ ，详见 Ashtekar and Hansen(1978).

论, 但未给出证明. 这个证明涉及冗长的计算. 为省篇幅, 此处只介绍思路及若干关键公式. 思路很简单: 找一个能覆盖 i^0 点的坐标系. $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 当然不能, $\{T,R,\theta,\varphi\}$ 似乎可以, 因为它是爱因斯坦静态宇宙(图 12-11 的圆柱面代表的 4 维时空)的坐标系. 不幸的是坐标 R 在 i^0 点的值为 π, 所以 i^0 偏偏是该系的坐标奇点(该点的 θ,φ 无定义). 于是想到把 3 球面上的 $\{R,\theta,\varphi\}$ 转一角度以得到新的球面坐标系 $\{R',\theta',\varphi'\}$, 它在 i^0 点不奇异. 然而 3 球面上 R 的变换必然导致 θ 和 φ 的相应变换("牵一发则动全身"), 从而带来冗长的计算. 下面对计算和证明做一高浓缩介绍. 用下式定义新坐标 $T', R', \theta', \varphi'$:

$$T' \equiv T, \qquad R' \equiv \arccos(\sin R \sin\theta \sin\varphi),$$

$$\theta' \equiv \arccos\left(\frac{\sin R\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2 R\,\sin^2\theta\,\sin^2\varphi}}\right),$$

$$\varphi' \equiv \arccos\left(\frac{\sin R\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2 R+\sin^2 R\,\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}}\right), \quad 若\ \frac{\pi}{2}\leqslant R<\pi,$$

$$\varphi' \equiv 2\pi-\arccos\left(\frac{\sin R\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2 R+\sin^2 R\,\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}}\right), \quad 若\ 0<R<\frac{\pi}{2}, \tag{12-4-2}$$

则 i^0 的新坐标为$(0, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$, 因而无奇性. 由式(12-2-9)定义的Ω可表为

$$\Omega = \cos T' - \Lambda, \qquad 其中\ \Lambda \equiv \sin R' \sin\theta' \sin\varphi', \tag{12-4-3}$$

F_{ab} 可表为
$$F_{ab} = q(1-\Lambda^2)^{-3/2}(\mathrm{d}T')_a \wedge (\mathrm{d}\Omega)_b. \tag{12-4-4}$$

因为① $\Omega(1-\Lambda^2)^{-1}$及$(1-\Lambda^2)^{-1/2}\cos R', (1-\Lambda^2)^{-1/2}\cos\theta', (1-\Lambda^2)^{-1/2}\cos\varphi'$ 都有方向依赖极限; ②1 形式场 $\mathrm{d}T', \mathrm{d}R', \mathrm{d}\theta', \mathrm{d}\varphi'$ 在 i^0 附近都光滑, 所以 ΩF_{ab} 在趋近 i^0 时有方向依赖的极限. **[选读 12-4-1 完]**

我们以 $\mathscr{I}^+$ 为代表讨论 $\mathscr{I}^\pm$ 的性质. 首先, $\Omega|_{\mathscr{I}^+}$ 为常数(零)及 $\tilde\nabla_a\Omega|_{\mathscr{I}^+}\neq 0$ 表明 $\mathscr{I}^+$ 是超曲面, 且 $\tilde\nabla_a\Omega$ 是 $\mathscr{I}^+$ 的法余矢. Ω 及 $\tilde g_{ab}$ 在 $\tilde M-\{i^0\}$ 为 C^∞ 保证 $\tilde g^{ab}(\tilde\nabla_a\Omega)\tilde\nabla_b\Omega$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上表现良好. 但 $\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$ 使 Ω^{-1} 在趋于 $\mathscr{I}^+$ 时发散, 所以 M 上函数 $\Omega^{-1}\tilde g^{ab}(\tilde\nabla_a\Omega)\tilde\nabla_b\Omega$ 在趋于 $\mathscr{I}^+$ 时有无极限还成问题. 下面的命题不但对此给出肯定答案, 而且结论更强.

命题 12-4-1　$\Omega^{-1}\tilde g^{ab}(\tilde\nabla_a\Omega)\tilde\nabla_b\Omega$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上的 C^∞ 函数[准确地说就是 $\Omega^{-1}\tilde g^{ab}(\tilde\nabla_a\Omega)\tilde\nabla_b\Omega$ 可被光滑地延拓至 $\mathscr{I}^+$].

证明　设 R_{ab} 和 $\tilde R_{ab}$ 分别是 g_{ab} 和 $\tilde g_{ab}$ 的里奇张量, 把式(12-1-9)的 g_{ab} 与 $\tilde g_{ab}$ 作角色互换(并相应以 Ω^{-1} 代替 Ω), 可知在 M 上有

$$R_{ab}=\tilde{R}_{ab}+2\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega+\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}[\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega-3\Omega^{-2}(\tilde{\nabla}_c\Omega)\tilde{\nabla}_d\Omega].$$

真空爱因斯坦方程 $R_{ab}=0$(见第 7 章习题 6)以及 Ω 的非零性保证在 M 上有

$$0=\Omega\tilde{R}_{ab}+2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega+\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}[\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega-3\Omega^{-1}(\tilde{\nabla}_c\Omega)\tilde{\nabla}_d\Omega].\qquad(12\text{-}4\text{-}5)$$

$\tilde{g}_{ab}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 为 C^∞ 导致 $\tilde{R}_{ab}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 为 C^∞，故由 $\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$ 知 $\Omega\tilde{R}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}=0$. 取式(12-4-5)趋于 $\mathscr{I}^+$ 的极限便知在 $\mathscr{I}^+$ 上有

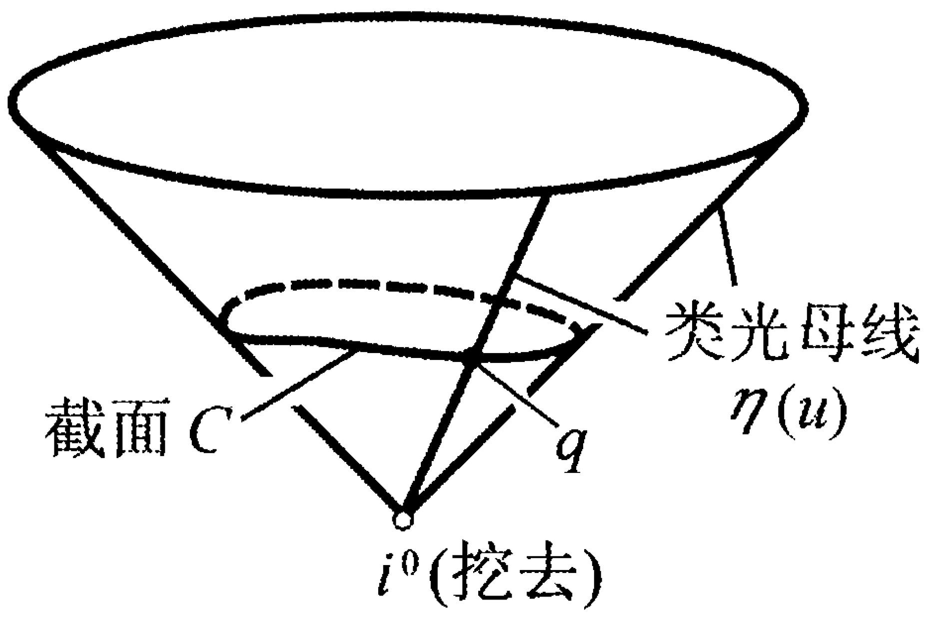
$$2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega+\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega=3\tilde{g}_{ab}[\Omega^{-1}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_c\Omega)\tilde{\nabla}_d\Omega].\qquad(12\text{-}4\text{-}6)$$

Ω 和 $\tilde{g}_{ab}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 为 C^∞ 导致上式左边在 $\mathscr{I}^+$ 为 C^∞，故右边方括号内的量在 $\mathscr{I}^+$ 也为 C^∞. □

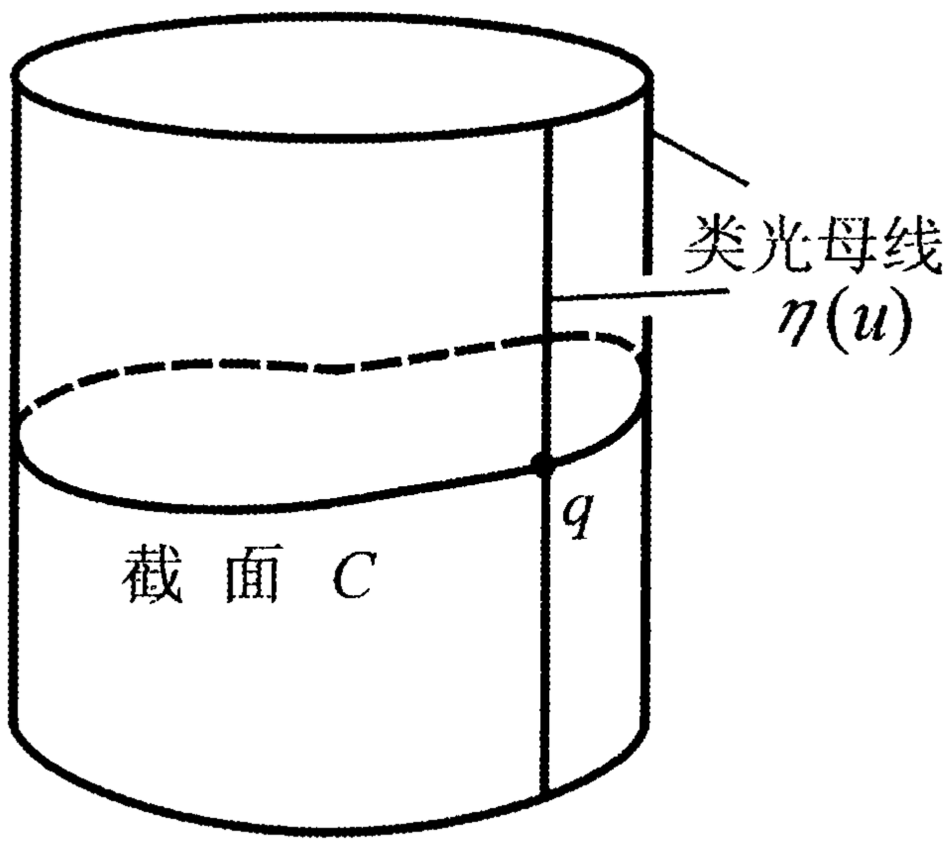
令

$$n_b:=\tilde{\nabla}_b\Omega,\quad n^a:=\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_b\Omega,\qquad(12\text{-}4\text{-}7)$$

则 $\mathscr{I}^+$ 上的 n_b 和 n^a 分别是 $\mathscr{I}^+$ 的法余矢场和法矢场. 命题 12-4-1 表明，虽然 $\Omega^{-1}|_{\mathscr{I}^+}$ 发散，但 $(\Omega^{-1}\tilde{g}^{ab}n_a n_b)|_{\mathscr{I}^+}$ 仍是光滑函数，可见 $(\tilde{g}^{ab}n_a n_b)|_{\mathscr{I}^+}=0$，即 $(\tilde{g}_{ab}n^a n^b)|_{\mathscr{I}^+}=0$，说明 $n^a|_{\mathscr{I}^+}$ 是类光矢量场，因而 $\mathscr{I}^+$ 是 $\tilde{M}$ 中的类光超曲面. 这同 $\mathscr{I}^+$ 的定义 $\mathscr{I}^+\equiv \dot{J}^+(i^0)-\{i^0\}$ 暗示的结果一致. 由于类光超曲面的法矢场也切于该超曲面，n^a 过 $\mathscr{I}^+$ 上任一点的积分曲线 $\eta(u)$ 都躺在 $\mathscr{I}^+$ 上，称为 $\mathscr{I}^+$ 的**类光母线**(null generator). 定义 1 条件(d)的(d1)对 $\mathscr{I}^+$ 的整体拓扑结构提出如下要求：$\mathscr{I}^+$ 上 n^a 的每条不可延积分曲线 $\eta(u)$ 都从 i^0 发出(因而 $\mathscr{I}^+$ 同胚于 $S^2\times\mathbb{R}$)，如图 12-12(a)或(b)所示. $\mathscr{I}^+$ 上的一个 2 维面 C 称为一个**截面**(cross section)，若它与每一类光母线相交且仅交于一点(而且任一母线都不切于 C). $\mathscr{I}^+$ 同胚于 $S^2\times\mathbb{R}$ 意味着每一截面 C 同胚于 S^2 (2 维球面).



(a) 用挖去顶点的锥面代表 $\mathscr{I}^+$



(b) 用柱面代表 $\mathscr{I}^+$

图 12-12　$\mathscr{I}^+$ 及其类光母线(压缩一维，用 $S\times\mathbb{R}$ 代表 $S^2\times\mathbb{R}$)

伴随于同一渐近平直时空 (M,g_{ab}) 的非物理时空 $(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$ 可以很多. 在 $\tilde{M}$ 选定时 $\tilde{g}_{ab}$ 也还可以有无限多种选择，因为不难证明如下命题：

命题 12-4-2　设 $(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$ 是 (M,g_{ab}) 的非物理时空(共形因子为 Ω), 则 $(\tilde{M},\omega^2\tilde{g}_{ab})$ 也是 (M,g_{ab}) 的非物理时空(共形因子为 $\omega\Omega$), 如果 ω 是 $\tilde{M}$ 上的正函数, 在 $\tilde{M}-\{i^0\}$ 为 C^∞, 在 i^0 为 $C^{>0}$, $\omega(i^0)=1$.

证明　练习. 提示: 令 $\Omega'\equiv\omega\Omega$, $\tilde{g}'_{ab}\equiv\omega^2\tilde{g}_{ab}=\Omega'^2 g_{ab}$, 只须验证 $\tilde{g}'_{ab}$ 和 Ω' 满足定义 1 对 $\tilde{g}_{ab}$ 和 Ω 的要求. 由于定义 1 对条件(d)并无陈述, 只要求读者验证条件(a)~(c). 条件中的 $\tilde{\nabla}_a$ 原则上应一律改为 $\tilde{\nabla}'_a$, 即与 $\tilde{g}'_{ab}$ 适配的导数算符. 利用 Ω' 的标量场性质可把 $\tilde{\nabla}'_a\Omega'$ 换为 $\tilde{\nabla}_a\Omega'$, 但 $\tilde{\nabla}'_a\tilde{\nabla}'_b\Omega'$ 至多只可换为 $\tilde{\nabla}'_a\tilde{\nabla}_b\Omega'$. □

注 6　可见共形因子 Ω 的选择存在规范任意性. 我们把每种选择称为一个**共形规范**. 选择适当规范有助于简化讨论. 下面介绍一种对讨论 $\mathscr{I}^+$ 很有用的规范(但不适用于 i^0).

命题 12-4-3　令 $\Phi\equiv\Omega^{-1}\tilde{g}^{ab}n_a n_b$(并延拓至 $\mathscr{I}^+$ 上), 则总可选择共形规范使 $\Phi|_{\mathscr{I}^+}=0$. 满足这一条件的规范称为 **Bondi 规范**.

证明　设原规范满足 $\Phi|_{\mathscr{I}^+}\neq 0$, 只须证明存在适当 ω 使新规范 $\Omega'\equiv\omega\Omega$ 满足 $\Phi'|_{\mathscr{I}^+}\equiv(\Omega'^{-1}\tilde{g}'^{ab}n'_a n'_b)|_{\mathscr{I}^+}=0$. 由 $\tilde{g}'_{ab}=\omega^2\tilde{g}_{ab}$ 得 $\tilde{g}'^{ab}=\omega^{-2}\tilde{g}^{ab}$, 故

$$\Phi'|_{\mathscr{I}^+}=[\omega^{-1}\Phi+2\omega^{-2}n^a\tilde{\nabla}_a\omega+\omega^{-3}\Omega\tilde{g}^{ab}(\tilde{\nabla}_a\omega)\tilde{\nabla}_a\omega]|_{\mathscr{I}^+}. \qquad (12\text{-}4\text{-}8)$$

上式右边第二项可化为 $2\omega^{-1}n^a\tilde{\nabla}_a\ln\omega$, 而 $\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$, $\omega|_{\mathscr{I}^+}>0$ 以及 ω 在 $\tilde{M}-\{i^0\}$ 为 C^∞ 则保证第三项为零, 故欲得 $\Phi'|_{\mathscr{I}^+}=0$ 只须选 ω 使在 $\mathscr{I}^+$ 上有

$$2n^a\tilde{\nabla}_a\ln\omega=-\Phi. \qquad (12\text{-}4\text{-}9)$$

$\mathscr{I}^+$ 上的函数 Φ 和 ω 通过每条不可延积分曲线 $\eta(u)$ 分别诱导出一元函数 $\Phi(u)$ 和 $\omega(u)$. 在 $\mathscr{I}^+$ 上又有 $n^a=(\partial/\partial u)^a$, 故式(12-4-9)可改写为

$$2\,\mathrm{d}\ln\omega(u)/\mathrm{d}u=-\Phi(u). \qquad (12\text{-}4\text{-}10)$$

任取截面 C_0, 把每条类光母线与 C_0 的交点选为该母线的 u 的零点, 任意指定 C_0 上的光滑标量场 ω 作为初始条件, 对每条母线 $\eta(u)$ 便得方程(12-4-10)的唯一解 $\omega(u)$, 从而得到 $\mathscr{I}^+$ 上的光滑标量场 ω,① 相应的 $\Omega'\equiv\omega\Omega$ 满足 $\Phi'|_{\mathscr{I}^+}=0$. □

命题 12-4-4　Bondi 规范 $\Phi|_{\mathscr{I}^+}=0$ 还有以下两种等价表述:

$$\text{(a)}\,\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0;\qquad \text{(b)}\,\mathscr{L}_n\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}=0.$$

---

① 还应把所得 ω 延拓为 $\tilde{M}$ 上的函数. 然而这样求得的 ω 在趋近 i^0 时的极限表现不满足命题 12-4-1 的要求, 从而 Ω' 不满足定义 1 条件(b5), 不过在只关心 $\mathscr{I}^\pm$ 时这无关紧要.

证明 用$\tilde{g}^{ab}$缩并式(12-4-6)得$2\Phi|_{\mathscr{I}^+}=(\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega)|_{\mathscr{I}^+}$，代回式(12-4-6)给出

$$2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}^+}=(\Phi\tilde{g}_{ab})|_{\mathscr{I}^+}. \tag{12-4-11}$$

而

$$\mathscr{L}_n\tilde{g}_{ab}=2\tilde{\nabla}_{(a}n_{b)}=2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega,$$

故

$$\Phi|_{\mathscr{I}^+}=0\Leftrightarrow\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0\Leftrightarrow\mathscr{L}_n\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}=0.$$ □

命题 12-4-5 在 Bondi 规范下，n^a在$\mathscr{I}^+$上的积分曲线(类光母线)$\eta(u)$是类光测地母线，且u是仿射参数.

证明 在$\mathscr{I}^+$上有$n^a\tilde{\nabla}_a n_b=n^a\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega=0$，(其中第二步用到 Bondi 规范条件$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$)，故$n^a=(\partial/\partial u)^a$的积分曲线$\eta(u)$是$(\mathscr{I}^+,\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+})$上的(类光)测地线，$u$是仿射参数. □

定义1条件(d)的(d2)的含义为：Bondi规范下的$n^a=(\partial/\partial u)^a$是$\mathscr{I}^+$上的完备矢量场，就是说，$n^a$的不可延积分曲线$\eta(u)$的参数$u$的取值范围是全$\mathbb{R}$，亦即$\eta(u)$是完备的类光测地线. 现在就可论证如下结论：渐近平直时空(M,g_{ab})的度规g_{ab}在趋近$\mathscr{I}^+$时渐近闵氏，① 就是说，在$\mathscr{I}^+$的一个邻域内存在"渐近洛伦兹坐标系"$\{t,x,y,z\}$使g_{ab}的线元为

$$ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2+\Delta_1, \tag{12-4-12}$$

其中Δ_1的系数在趋于$\mathscr{I}^+$时趋于零.事实上还可论证更强的结论：Δ_1的系数在趋于$\mathscr{I}^+$时以$O(r^{-1})$的速率趋于零[与本节开头(第二段)的提法一致]，详见选读 12-4-2.

[选读 12-4-2]

本选读证明上述重要结论，即：在$\mathscr{I}^+$的一个邻域内存在"渐近洛伦兹坐标系"$\{t,x,y,z\}$使g_{ab}的线元为

$$ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2+\Delta_1,$$

其中Δ_1的系数在趋于$\mathscr{I}^+$时趋于零.待证结论只涉及物理度规g_{ab}，但可借助于非物理度规$\tilde{g}_{ab}$协助证明.为简便起见，约定所选的$\tilde{g}_{ab}=\Omega^2 g_{ab}$满足Bondi 规范条件.

如果$\mathscr{I}^+$为类时或类空超曲面，则$\tilde{g}_{ab}$在$\mathscr{I}^+$上的限制$\tilde{h}_{ab}$(只允许作用于与$\mathscr{I}^+$相切的矢量)就是$\mathscr{I}^+$上的诱导度规. 然而$\mathscr{I}^+$是类光超曲面，这时$\tilde{h}_{ab}$的号差为$(0,+,+)$，因而退化(见定理 4-4-4). 不过，$\tilde{h}_{ab}$在$\mathscr{I}^+$的任一截面C_0上的限制$\tilde{q}_{ab}$

① g_{ab}在趋近i^0时也是渐近平直度规，见Ashtekar and Hansen (1978). 该文还给出了i^0附近渐近平直线元的具体坐标形式[式(C21)].

却可充当 C_0 上的(2 维)诱导正定度规. 设 S^2 是 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 中的单位球面, p_{ab} 是 δ_{ab} 在 S^2 上的诱导度规, 则任一微分同胚 $\psi:\mathrm{S}^2\to C_0$ 都给 C_0 赋予一个球面度规

$$j_{ab}\equiv\psi_*p_{ab}\,. \tag{12-4-13}$$

C_0 是 2 维流形, 仿照命题 12-1-6 的证明手法可以证明(颇复杂, 略): 存在适当的 ψ 使 C_0 上有光滑非零标量场 f 满足

$$\tilde{q}_{ab}=f^2j_{ab}\,. \tag{12-4-14}$$

此 ψ 把 S^2 的球面坐标诱导到 C_0 上(记作 θ,φ), 由式(12-4-13)及 p_{ab} 的定义得

$$j_{ab}=(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b\,,\ (\text{定义在 } C_0 \text{ 上})$$

与式(12-4-14)结合便给出

$$\tilde{q}_{ab}=f^2[(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b]\,.\ (\text{定义在 } C_0 \text{ 上})$$

用类光测地母线把 C_0 上的 θ,φ 坐标携带到 $\mathscr{I}^+$, 再选这些母线的仿射参数 u 为另一坐标便得 $\mathscr{I}^+$ 上的局域坐标系 $\{u,\theta,\varphi\}$. 我们首先证明, 利用选择 Bondi 规范的自由性, 总可重选 Bondi 规范 $\Omega'\equiv\omega\Omega$ 使 $\tilde{g}'_{ab}=\omega^2\tilde{g}_{ab}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上的限制 $\tilde{h}'_{ab}$ 取如下简单形式:

$$\tilde{h}'_{ab}=(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b\,.\ (\text{在 } \mathscr{I}^+ \text{ 上成立}) \tag{12-4-15}$$

重选 Ω' 就是选 ω. 先选 $\omega|_{C_0}=f^{-1}$, 再要求 ω 在每条类光母线上为常数就在 $\mathscr{I}^+$ 上选了 ω. 这 ω 显然满足方程(12-4-10)(左右边皆为零), 故由它决定的 $\Omega'\equiv\omega\Omega$ 也是 Bondi 规范, 于是由命题 12-4-4(b)可知 $(\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$, 其中 $n'^a\equiv\tilde{g}'^{ab}\tilde{\nabla}_b\Omega'$. 为证式(12-4-15)还须先从 $(\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$ 推出 $\mathscr{L}_n\tilde{h}'_{ab}=0$, 而第一步是从 $(\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$ 推出 $(\mathscr{L}_n\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$: 不难证明 $n^a=\omega n'^a-\Omega m^a$, 其中 $m^a\equiv\omega\tilde{g}'^{ab}\tilde{\nabla}_b\omega$, 所以

$$\mathscr{L}_n\tilde{g}'_{ab}=\mathscr{L}_{\omega n'}\tilde{g}'_{ab}-\mathscr{L}_{\Omega m}\tilde{g}'_{ab}\,.$$

上式右边的两个李导数可借如下公式计算: 设 α, v^a 和 T_{ab} 依次是任一广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 上的标量场、矢量场和 $(0,2)$ 型张量场, 则易证

$$\mathscr{L}_{\alpha v}T_{ab}=\alpha\mathscr{L}_vT_{ab}+v^cT_{cb}\nabla_a\alpha+v^cT_{ac}\nabla_b\alpha\,.$$

把上式用于现在的具体情况便得

$$\mathscr{L}_{\omega n'}\tilde{g}'_{ab}=\omega\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab}+2n'^c\tilde{g}'_{c(b}\tilde{\nabla}_{a)}\omega=\omega\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab}+2(\tilde{\nabla}_{(b}\Omega')\tilde{\nabla}_{a)}\omega$$

$$=\omega\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab}+2\Omega(\tilde{\nabla}_b\omega)\tilde{\nabla}_a\omega+2\omega(\tilde{\nabla}_{(b}\Omega)\tilde{\nabla}_{a)}\omega,$$

$$\mathscr{L}_{\Omega m}\tilde{g}'_{ab}=\Omega\mathscr{L}_m\tilde{g}'_{ab}+2m^c\tilde{g}'_{c(b}\tilde{\nabla}_{a)}\Omega=\Omega\mathscr{L}_m\tilde{g}'_{ab}+2\omega(\tilde{\nabla}_{(b}\omega)\tilde{\nabla}_{a)}\Omega,$$

因而

$$\mathscr{L}_n\tilde{g}'_{ab}=\omega\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab}+2\Omega(\tilde{\nabla}_b\omega)\tilde{\nabla}_a\omega-\Omega\mathscr{L}_m\tilde{g}'_{ab}.$$

上式在 $\mathscr{I}^+$ 上取值，利用 $(\mathscr{L}_{n'}\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$ 及 $\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$ 便得 $(\mathscr{L}_n\tilde{g}'_{ab})|_{\mathscr{I}^+}=0$.第二步就可证明 $\mathscr{L}_n\tilde{h}'_{ab}=0$：

$$\mathscr{L}_n\tilde{h}'_{ab}=\mathscr{L}_n(\tilde{g}'_{ab}\text{ 在 }\mathscr{I}^+\text{上的限制})=(\mathscr{L}_n\tilde{g}'_{ab})\text{ 在 }\mathscr{I}^+\text{上的限制}=0,$$

上式的第二步用到一个结论:对下指标张量场求限制与求李导数的操作可交换(证明见下册§16.3).

注意到坐标系 $\{x^\alpha\}=\{x^0\equiv u, x^2\equiv\theta, x^3\equiv\varphi\}$ 是矢量场 $n^a=(\partial/\partial u)^a$ 的适配系，由 $\mathscr{L}_n\tilde{h}'_{ab}=0$ 便知 $\tilde{h}'_{ab}$ 在该系的分量 $\tilde{h}'_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=0,2,3)$ 满足 $\partial\tilde{h}'_{\alpha\beta}/\partial u=0$，即 $\tilde{h}'_{\alpha\beta}$ 在母线上为常数. $\forall q\in\mathscr{I}^+$，令 q_0 为过 q 的母线同 C_0 的交点，就有

$$\tilde{h}'_{\alpha\beta}|_q=\tilde{h}'_{\alpha\beta}|_{q_0}=(\omega^2\tilde{h}_{\alpha\beta})|_{q_0},\quad \alpha,\beta=0,2,3,$$

其中第二步用到 $\tilde{g}'_{ab}=\omega^2\tilde{g}_{ab}$. 上式在 $\alpha=0$ 及 $\alpha\beta=ij$ (其中 i,j 从 2 取到 3)时依次给出

$$\tilde{h}'_{0\beta}|_q=(\omega^2\tilde{h}_{0\beta})|_{q_0}=\left[\omega^2\tilde{h}_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)^b\right]_{q_0}=0\quad[\text{因 }\tilde{h}_{ab}(\partial/\partial u)^a=\tilde{h}_{ab}n^a=0]$$

及

$$\tilde{h}'_{ij}|_q=(\omega^2\tilde{h}_{ij})|_{q_0}=\left[\omega^2\tilde{h}_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b\right]_{q_0}$$

$$=\left[\omega^2\tilde{q}_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b\right]_{q_0}=(\omega^2f^2j_{ab})|_{q_0}=j_{ij}|_{q_0},$$

其中第三步用到限制的定义以及 $(\partial/\partial x^i)^a$ 切于 C_0，第四、五步依次用到 $\tilde{q}_{ab}=f^2j_{ab}$ 及 $\omega|_{C_0}=f^{-1}$.

以上结果也可用下式表述:

$$\tilde{h}'_{uu} = \tilde{h}'_{u\theta} = \tilde{h}'_{u\varphi} = \tilde{h}'_{\theta\varphi} = 0\,,\quad \tilde{h}'_{\theta\theta} = 1\,,\quad \tilde{h}'_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\,.$$

此即待证的等式(12-4-15).以下就选此 Ω' 为共形因子并略去全部有关量的 ′ 号,因而式(12-4-15)改写为

$$\tilde{h}_{ab} = (\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b\,.\ (\text{在}\ \mathscr{I}^+\ \text{上成立}) \qquad (12\text{-}4\text{-}15')$$

因 $\tilde{\nabla}_a\Omega$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上处处非零,故可取 Ω 为 $\mathscr{I}^+$ 的邻域的一个坐标,再按以下方法把 $u,\ \theta,\ \varphi$ 携带出 $\mathscr{I}^+$ 以构成 4 维坐标系.对 $\mathscr{I}^+$ 的任一点 q 选正交归一 4 标架 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_2)^a, (e_3)^a$ 和 $(e_0)^a-(e_1)^a$ 分别平行于 q 点的 $(\partial/\partial\theta)^a$, $(\partial/\partial\varphi)^a$ 和 n^a,则 $l^a \equiv (e_0)^a+(e_1)^a$ 为类光矢量(图 12-13).由 (q, l^a) 决定的类光测地线 ξ 可作为 $u,\ \theta,\ \varphi$ 的携带者,借此又可在 $\mathscr{I}^+$ 的 $\{u,\theta,\varphi\}$ 坐标域的某开邻域内定义 4 维坐标系 $\{\Omega,u,\theta,\varphi\}$. $\mathscr{I}^+$ 上任一点 q 的 $\tilde{g}_{ab}$ 在此系的分量依次为

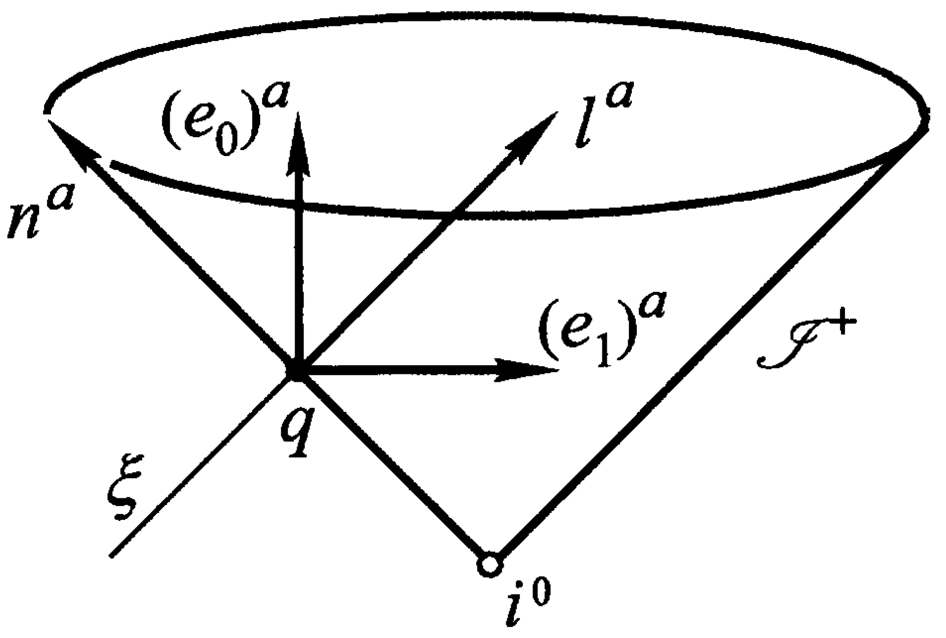


图 12-13　$\mathscr{I}^+$ 上 q 点的类光矢量 n^a 和 l^a.
$(e_2)^a$ 和 $(e_3)^a$ 都同纸面垂直

$\tilde{g}_{\Omega\Omega} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\Omega)^a(\partial/\partial\Omega)^b = 0$ [Ω 坐标线与 ξ 重合表明坐标基矢 $(\partial/\partial\Omega)^a$ 类光],

$\tilde{g}_{\Omega u} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\Omega)^a(\partial/\partial u)^b = \tilde{g}_{ab}n^b(\partial/\partial\Omega)^a = n_a(\partial/\partial\Omega)^a = (\partial/\partial\Omega)^a\tilde{\nabla}_a\Omega = 1$,

$\tilde{g}_{\Omega\theta} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\Omega)^a(\partial/\partial\theta)^b = 0$ [因 l^a 与 $(e_2)^a$ 正交], $\tilde{g}_{\Omega\varphi} = 0$ (理由同上),

$\tilde{g}_{uu} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial u)^a(\partial/\partial u)^b = \tilde{g}_{ab}n^a n^b = 0$,

$\tilde{g}_{u\theta} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial u)^a(\partial/\partial\theta)^b = 0$ [因 $(\partial/\partial u)^a = n^a$ 为 $\mathscr{I}^+$ 的法矢且 $(\partial/\partial\theta)^b$ 切于 $\mathscr{I}^+$],

$\tilde{g}_{u\varphi} = 0$ (理由同上),

$\tilde{g}_{\theta\theta} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\theta)^a(\partial/\partial\theta)^b = \tilde{h}_{ab}(\partial/\partial\theta)^a(\partial/\partial\theta)^b = 1$ [末步用到式(12-4-15′)],

$\tilde{g}_{\theta\varphi} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\theta)^a(\partial/\partial\varphi)^b = \tilde{h}_{ab}(\partial/\partial\theta)^a(\partial/\partial\varphi)^b = 0$ (理由同上),

$\tilde{g}_{\varphi\varphi} = \tilde{g}_{ab}(\partial/\partial\varphi)^a(\partial/\partial\varphi)^b = \tilde{h}_{ab}(\partial/\partial\varphi)^a(\partial/\partial\varphi)^b = \sin^2\theta$ (理由同上).

于是 $\tilde{g}_{ab}$ 在 $\mathscr{I}_+$ 上的线元为

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2\big|_{\mathscr{I}^+} = 2\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}u + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\,. \qquad (12\text{-}4\text{-}16)$$

但在偏离 $\mathscr{I}^+$ 时上式不严格成立而应补上附加项 $\tilde{\Delta}$:

$$d\tilde{s}^2 = 2\,d\Omega\,du + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 + \tilde{\varDelta}, \tag{12-4-17}$$

所以物理度规 g_{ab} 在此坐标域内的线元为

$$ds^2 = \Omega^{-2}d\tilde{s}^2 = 2\,\Omega^{-2}d\Omega\,du + \Omega^{-2}(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \Omega^{-2}\tilde{\varDelta}. \tag{12-4-18}$$

令 $v \equiv 2\Omega^{-1}$, $\varDelta \equiv \Omega^{-2}\tilde{\varDelta}$, 则

$$ds^2 = -\,dv\,du + \frac{1}{4}v^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \varDelta \cdot \tag{12-4-19}$$

再令

$$t \equiv \frac{1}{2}(v+u), \qquad r \equiv \frac{1}{2}(v-u), \tag{12-4-20}$$

则 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \left[\frac{1}{4}(2uv - u^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \varDelta\right].$

再令 $x \equiv r\sin\theta\cos\varphi$, $y \equiv r\sin\theta\sin\varphi$, $z \equiv r\cos\theta$, 则

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left[\frac{1}{4}(2uv - u^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \varDelta\right]. \tag{12-4-21}$$

以 $\{x^\mu\}$ 简记 $\{t,x,y,z\}$, 则方括号内可表为 dx^μ 的 2 次式 $\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. 因为在趋于 $\mathscr{I}^+$ 时 $O(r^{-1})$ 相当于 $O(v^{-1})$, ① 所以只须证明 $\hat{g}_{\mu\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,3)$ 按 $O(v^{-1})$ 或 $O(\Omega)$ 趋于零. 方括号内第一项不构成困难. 由 $\varphi = \arctan(y/x)$ 可知 $d\varphi = (x^2 + y^2)^{-1}(-y dx + x dy) = O(v^{-1})dx$ 和 $d\varphi^2 = O(v^{-2})dx^2$, 乘以方括号内第一项的因子 $(2uv - u^2)$ 后其系数为 $O(v^{-1})$. 此结论对 $d\theta^2$ 也适用. 麻烦来自 $\varDelta \equiv \Omega^{-2}\tilde{\varDelta}$ 中的一项. $\tilde{\varDelta}$ 原则上应含 10 项, 即

$$\begin{aligned}\tilde{\varDelta} = {} & \tilde{k}_{uu}du^2 + 2\tilde{k}_{u\theta}du d\theta + 2\tilde{k}_{u\varphi}du d\varphi + \tilde{k}_{\Omega\Omega}d\Omega^2 + 2\tilde{k}_{\Omega u}d\Omega du \\ & + 2\tilde{k}_{\Omega\theta}d\Omega d\theta + 2\tilde{k}_{\Omega\varphi}d\Omega d\varphi + \tilde{k}_{\theta\theta}d\theta^2 + 2\tilde{k}_{\theta\varphi}d\theta d\varphi + \tilde{k}_{\varphi\varphi}d\varphi^2 .\end{aligned} \tag{12-4-22}$$

式(12-4-17)的 $d\tilde{s}^2$ 要趋于(12-4-16)的 $d\tilde{s}^2|_{\mathscr{I}^+}$, 故 $\tilde{k}_{\mu\nu} \sim \Omega^\chi(\chi > 0)$. 若 χ 为分数, 由求导可知 $\tilde{k}_{\mu\nu}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上不会为 C^∞, 所以 $\tilde{k}_{\mu\nu} = O(\Omega^1)$. 由规范条件 $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}^+} = 0$ 还可证明(提示见习题 5)其中的 4 个以更大的速率趋于零, 即 $\tilde{k}_{uu}, \tilde{k}_{u\theta}, \tilde{k}_{u\varphi}, \tilde{k}_{u\Omega} = O(\Omega^2)$. 仿照式(12-4-22)把 $\varDelta \equiv \Omega^{-2}\tilde{\varDelta}$ 展为 10 项, 最后一项的表现为

$$k_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = \Omega^{-2}\tilde{k}_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \sim \Omega^{-2}\tilde{k}_{\varphi\varphi}(v^{-1}\,dx)^2 \sim \tilde{k}_{\varphi\varphi}dx^2 .$$

---

①"趋于 $\mathscr{I}^+$" 可沿任意曲线, 只要求该线能到达 $\mathscr{I}^+$. 这意味着 u 沿线不发散, 故 r 与 v 同量级. (作为渐近平直时空的特例, 闵氏时空中 $u \to -\infty$ 的曲线到达 i^0 而非 $\mathscr{I}^+$.)

因 $\tilde{k}_{\varphi\varphi} = \mathrm{O}(\Omega)$，故 $k_{\varphi\varphi}$ 不构成麻烦. 同理[注意到 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{O}(v^{-2})\mathrm{d}v$]可知 Δ 的后 7 项都无问题. 由 $\tilde{k}_{u\theta}, \tilde{k}_{u\varphi} = \mathrm{O}(\Omega^2)$ 得 $k_{u\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u \sim \Omega\mathrm{d}x^2 \sim k_{u\varphi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u$，故 Δ 的第二、三项也不成问题. 真正的麻烦来自 Δ 的第一项，即 $\tilde{k}_{uu}\mathrm{d}u^2 = \Omega^{-2}k_{uu}\mathrm{d}u^2 \sim \mathrm{d}x^2$. 为克服此困难可在式 (12-4-20) 前插入一步. 令 $\bar{v} \equiv v - F(u,\theta,\varphi)$ 并选光滑函数 F 使 $F_u \equiv \partial F/\partial u = \lim_{\Omega\to 0} k_{uu}(\Omega,u,\theta,\varphi)$. 此举结果为

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}\bar{v}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\bar{v}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$
$$+\frac{1}{4}(F^2 + 2F\bar{v})(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - F_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u - F_\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u + \Delta'\ ,$$

其中 $\Delta' \equiv \Delta - F_u\mathrm{d}u^2 = (k_{uu} - F_u)\mathrm{d}u^2 + \cdots$ 中 $\mathrm{d}u^2$ 的系数 $k_{uu} - F_u$ 在 $\lim_{\Omega\to 0}$ 下为零. 虽然多出了 $F_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u$ 和 $F_\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u$ 项，但不会带来麻烦. 现在再执行从式(12-4-20)开始的步骤(所有 v 换为 $\bar{v}$)，便得式(12-4-12)，其中

$$\Delta_1 \equiv \frac{1}{4}(2u\bar{v} - u^2 + F^2 + 2F\bar{v})(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - F_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u - F_\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u + \Delta'$$

的所有系数以 $\mathrm{O}(r^{-1})$ 的速率趋于零.

结论：$\mathscr{I}^+$ 存在一个邻域，其上可定义“渐近洛伦兹坐标系” $\{t,x,y,z\}$ 使 g_{ab} 的线元为 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \Delta_1$，其中 Δ_1 的系数在趋于 $\mathscr{I}^+$ 时以速率 $\mathrm{O}(r^{-1})$ 趋于零. **[选读 12-4-2 完]**

§ 12.5　$\mathscr{I}^\pm$ 和 i^0 上的对称性，BMS 群和 SPI 群

时空 (M,g_{ab}) 在等度规映射 $\phi: M \to M$ 下满足 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$，即度规 g_{ab} 在映射 ϕ 下有不变性，故等度规映射称为时空的**对称性**(symmetry). 流形 M 上的一个光滑矢量场 v^a 生出 M 上的一个单参微分同胚群[①] $\phi: \mathbb{R}\times M \to M$，即每一实数 t 对应于一个微分同胚映射 $\phi_t: M \to M$. 因此也说 v^a 是单参微分同胚群 $\phi: \mathbb{R}\times M \to M$ 的**无限小生成元**. 如果流形 M 上指定了度规场 g_{ab}，则还可问及每一微分同胚 ϕ_t 是否为等度规映射. 如果是，则 $\phi: \mathbb{R}\times M \to M$ 升格为单参等度规群，而且生成此群的矢量场 v^a 称为 Killing 矢量场(改记为 ξ^a). 既然 Killing 场 ξ^a 是单参等度规群(对称性群)的无限小生成元，一个 Killing 矢量场 ξ^a 也就称为 (M,g_{ab}) 上的一个**无限小对称性**(infinitesimal symmetry). 在此基础上就可介绍 $\mathscr{I}^+$ 上的对

① 当 v^a 不是完备矢量场时只能生出单参微分同胚局部群，见选读 2-2-4.

称性概念. 渐近平直时空的定义只对时空的渐近(无限远)特性提出要求, 因此一个渐近平直时空可以根本没有Killing矢量场, 即根本没有对称性. 然而, 由于时空"越远越接近闵氏", 可以期望存在这样的矢量场ξ^a, 它们虽非 Killing, 但"越远越接近 Killing". 就是说, 它们虽不是无限小对称性, 却是渐近的无限小对称性. 初看起来, 代表无限小渐近对称性的矢量场ξ^a可定义如下: $\mathscr{L}_\xi g_{ab}$虽不为零, 但在趋于$\mathscr{I}^+$时趋于零. 然而这一要求仍然很难满足, 因此还应适当降低. 研究表明, 一个尽可能高而又可以达到(一般渐近平直时空都能满足)的要求是$\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ab}$在趋于$\mathscr{I}^+$时趋于零. 因此, 粗略地说, 满足$\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ab}\to 0$的矢量场$\xi^a$就可称为一个无限小渐近对称性. 准确地说, 若渐近平直时空(M,g_{ab})的矢量场ξ^a满足两个条件: (a) ξ^a可光滑延拓至$\mathscr{I}^+$(从而得到$\mathscr{I}^+$上的一个切于$\mathscr{I}^+$的光滑矢量场$\hat{\xi}^a$); (b) $\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ab}$也可光滑延拓至$\mathscr{I}^+$, 且$\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ab}|_{\mathscr{I}^+}=0$, 则称$\xi^a$为$(M,g_{ab})$的**无限小渐近对称性**, 称$\hat{\xi}^a$为$\mathscr{I}^+$**上的无限小对称性**. 可见$(M,g_{ab})$的任一无限小渐近对称性$\xi^a$给出$\mathscr{I}^+$上的一个无限小对称性$\hat{\xi}^a$. 然而$\mathscr{I}^+$上的一个无限小对称性$\hat{\xi}^a$却对应于$(M,g_{ab})$上不止一个无限小渐近对称性, 因为$(M,g_{ab})$上的不同矢量场$\xi_1{}^a$和$\xi_2{}^a$只要满足上述条件(a)和(b)而且$\xi_1{}^a|_{\mathscr{I}^+}=\xi_2{}^a|_{\mathscr{I}^+}=\hat{\xi}^a$就给出$\mathscr{I}^+$上的同一无限小对称性$\hat{\xi}^a$. 满足上述要求的$\xi_1{}^a$和$\xi_2{}^a$称为**等价的**. 既然$\hat{\xi}^a$被称为$\mathscr{I}^+$上的无限小对称性, 自然要问$\hat{\xi}^a$是否也能产生$\mathscr{I}^+$上的类似于单参等度规群的变换群. 答案是肯定的, 但应先明确"类似于"的含义. $\mathscr{I}^+$是$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$中的类光超曲面, $\tilde{g}_{ab}$在$\mathscr{I}^+$上的限制$\tilde{h}_{ab}$(作为 3 维张量)是退化的[号差为$(0,+,+)$], 因而不能充当$\mathscr{I}^+$的诱导度规. 这使"等度规映射"一词失去意义. 然而, $\tilde{h}_{ab}$限制在任一截面上(作为 2 维张量)的号差为$(+,+)$, 可以解释为$\tilde{g}_{ab}$在该截面的诱导度规. $\mathscr{I}^+$的类光性是$\tilde{h}_{ab}$(作为 3 维张量)的退化性(因而不足以描写$\mathscr{I}^+$的几何)的"罪魁祸首", 然而正是类光性使$\mathscr{I}^+$的法矢$n^a|_{\mathscr{I}^+}$切于$\mathscr{I}^+$(因而给$\mathscr{I}^+$提供了另一几何量), 这一$n^a|_{\mathscr{I}^+}$补偿了$\tilde{h}_{ab}$的不足, 它们结合起来恰恰足以描写$\mathscr{I}^+$的几何. 更巧妙的做法是用$\tilde{h}_{ab}$和n^a定义$\mathscr{I}^+$上的一个张量场[Geroch(1977)] $\Gamma^{ab}{}_{cd}\equiv n^a n^b \tilde{h}_{cd}$ [其中$n^a n^b$实为$(n^a n^b)|_{\mathscr{I}^+}$], 不难证明(习题), 虽然$n^a$和$\tilde{h}_{ab}$都与共形规范有关, [设对共形因子$\Omega$有$(n^a,\tilde{h}_{ab})$, 对共形因子$\Omega'=\omega\Omega$有$(n'^a,\tilde{h}'_{ab})$, 则$n'^a\neq n^a$, $\tilde{h}'_{ab}\neq\tilde{h}_{ab}$.] $\Gamma^{ab}{}_{cd}$却规范不变(即$\Gamma'^{ab}_{cd}=\Gamma^{ab}{}_{cd}$). 还可证明$\Gamma^{ab}{}_{cd}$对任何渐近平直时空都"一样", 含义为: 设$(M,g_{ab})$和$(\underline{M},\underline{g}_{ab})$是任意两个渐近平直时空, $(\mathscr{I}^+,\Gamma^{ab}{}_{cd})$和

$(\underline{\mathscr{I}}^+, \underline{\Gamma}^{ab}{}_{cd})$ 分别是它们的未来类光无限远，则存在微分同胚 $\psi: \mathscr{I}^+ \to \underline{\mathscr{I}}^+$ 使 $\psi_* \Gamma^{ab}{}_{cd} = \underline{\Gamma}^{ab}{}_{cd}$.[①] 因此，$\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 代表了渐近平直时空的 $\mathscr{I}^+$ 的普适(universal)几何结构，(同物理时空的结构无关，物理时空的物理学要用其他场描述.) 它虽然不是度规，但在描述 $\mathscr{I}^+$ 的几何性质方面起到与度规类似的作用. 特别是，$\mathscr{I}^+$ 上的无限小对称性 $\hat{\xi}^a$ 作为 $\mathscr{I}^+$ 上的切矢场必然满足 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$ (证明见选读 12-5-1). 与 Killing 矢量场的定义 $\mathscr{L}_\xi g_{ab} = 0$ 比较，可知 $\hat{\xi}^a$ 的确无愧于"无限小对称性"的称号. 与此对应，微分同胚 $\phi: \mathscr{I}^+ \to \mathscr{I}^+$ 称为 **$\mathscr{I}^+$ 上的对称性**，若 $\phi_* \Gamma^{ab}{}_{cd} = \Gamma^{ab}{}_{cd}$. $\mathscr{I}^+$ 的所有对称性的集合是一个群. (称为对称性群，对应于时空的等度规群，可参见§8.2 定义 1 前的一段.) $\mathscr{I}^+$ 的几何结构 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 的普适性保证任一渐近平直时空都有相同的对称性群，这个群称为 **BMS 群**(Bondi-Metzner-Sachs group)，在本书中记作 B. 闵氏时空的对称性群(等度规群)是一个 10 维李群(Poincaré 群). (关于李群可参阅附录 G. 不懂李群的读者不必深究，只须知道这是一个有 10 个参数的群，即要确定一个群元必须指定 10 个实数.) 相应地，闵氏时空的所有无限小对称性(即所有 Killing 矢量场)的集合是一个 10 维矢量空间(因 Killing 方程有线性性)，而且还是一个 10 维李代数. (以 Killing 矢量场的对易子运算作为李括号，见§G.3 及§G.6. 不懂李代数的读者不必深究，只须知道李代数是带有某种附加结构的矢量空间.) 既然渐近平直时空的度规是渐近平直的，看来 BMS 群也应是 10 维李群. 然而正确答案竟如此出人意料：BMS 群是个无限维李群. 相应地，$\mathscr{I}^+$ 上所有无限小对称性的集合是个无限维李代数，称为 **BMS 代数**，记作 $\mathscr{B}$. BMS 群是专业性很强的内容，选读 12-5-1 将作一定篇幅的介绍. 为了便于后面讲解时空的 4 动量，此处先给一个有关结论. 前已提到闵氏时空全体 Killing 矢量场的集合是一个 10 维矢量空间(更进一步，10 维李代数). 由于平移 Killing 场的线性组合也是平移 Killing 场，闵氏时空的全体平移 Killing 矢量场的集合是上述矢量空间的 4 维子空间(4 维李子代数)，称为**平移李子代数**. 与此类似，BMS 李代数 $\mathscr{B}$ 也自然含有一个 4 维李子代数(见选读 12-5-1)，其结构与闵氏时空的平移李子代数一样，称为 **BMS 李代数 $\mathscr{B}$ 的平移李子代数**，记作 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$.

前面讲过，广义相对论的许多困难都源于度规 g_{ab} 的双重角色性. 狭义相对论没有这个困难，因为闵氏度规 η_{ab} 只扮演一个角色——充当背景. 现在看到，对渐近平直时空而言，如果只关心它的 $\mathscr{I}^+$ ，问题就可简化，因为 $\mathscr{I}^+$ 上的 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 只起背景作用，所有动力学场量(例如电磁场)都与 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 分开，许多问题也就因而变得简单.

---

① 证：选读 12-4-2 已证明每个 $\mathscr{I}^+$ 上都有坐标系 $\{u,\theta,\varphi\}$. 定义 $\psi: \mathscr{I}^+ \to \underline{\mathscr{I}}^+$ 为 $\psi(p) := \underline{p}\ \forall p \in \mathscr{I}^+$,其中 p 和 $\underline{p} \in \underline{\mathscr{I}}^+$ 的对应坐标值相等，便有 $\psi_* \Gamma^{ab}{}_{cd} = \underline{\Gamma}^{ab}{}_{cd}$.

以上介绍的是类光无限远 $\mathscr{I}^{\pm}$ 的对称性. 空间无限远 i^0 的对称性则由 Ashtekar and Hansen(1978) 及 Ashtekar (1980)作了详细研究, 它由一个称为 **SPI 群** (SPI 是 spatial infinity 的缩写)的群描述, 这也是一个无限维李群, 结构与 BMS 群非常相似, 详见选读 12-5-2.

在 Ashtekar and Hansen(1978)发表之前, 类光和类空无限远虽都曾被研究过, 但两者并无关联, 互相分隔, 其中一个重要原因是前者的研究用 4 维语言, 后者则用 "3+1 分解" 的语言. Ashtekar and Hansen(1978)首次指出把两者统一起来的必要性和可能性, 提出 "根据美学考虑, 应该修改的自然是对空间无限远的表述" 的建议, 并建立起一套关于 $\mathscr{I}^{\pm}$ 和 i^0 的 4 维语言统一表述. 本书介绍的就是这一表述.

[选读 12-5-1]

本选读对 BMS 李代数作深入一步的介绍(假定读者已学过§G.3). 更详细的讨论见 Geroch(1977). 因为只涉及物理时空 M 和未来类光无限远, 本选读中所有 $\tilde{M}$ 都应理解为 $M \cup \mathscr{I}^+$. $\mathscr{I}^+$ 作为 $\tilde{M}$ 中的类光超曲面, 其实是从某个 3 维流形 I 到 $\tilde{M}$ 的嵌入映射 $\varsigma: I \to \tilde{M}$ 的像. I 是一个既代表 $\mathscr{I}^+$ 又从 $\tilde{M}$ 中剥离出来的独立流形, 其上各种张量场代表时空 (M, g_{ab}) 的渐近几何和物理结构. $\tilde{M}$ 上的张量场在 $\mathscr{I}^+$ 上的值当然是 $\mathscr{I}^+$ 上的(4 维)张量场, 但未必对应于独立流形 I 上的张量场. 拉回映射 ς^* 可把 $\tilde{M}$ 上任一下指标张量场 $T_{a\cdots}$ 变为 I 上的同型张量场 $\varsigma^*(T_{a\cdots})$ [又常把 $\varsigma^*(T_{a\cdots})$ 认同于 $T_{a\cdots}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上的限制(见§5.2 定义 5), 故下指标场的拉回即限制.] 然而上指标张量场却未必可拉回. 以矢量场 v^a 为例. 如果 $v^a|_{\mathscr{I}^+}$ 不切于 $\mathscr{I}^+$, 则它便不对应于 I 上的矢量场, 即 v^a 是不可拉回的. Geroch(1977)给出 $\tilde{M}$ 上张量场可拉回性(及其拉回)的数学定义, 有如下性质: (a)可拉回张量场之和(及张量积)仍可拉回, 且拉回之和(积)等于和(积)之拉回; (b)下指标场(含标量场)都可拉回(与§4.1 的拉回一样); (c) $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}|_{\mathscr{I}^+}=0 \Rightarrow \varsigma^*(T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d})=0$; (d)(可拉回充分条件) $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ 是可拉回的, 若 $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}|_{\mathscr{I}^+}$ 的每一上标(以 a 为例)与 n_a 缩并为零; (e) 若 $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ 和 v^a 可拉回, 则 $\mathscr{L}_v T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ 也可拉回, 且 ς^* 与 $\mathscr{L}_v$ 对易:

$$\varsigma^*(\mathscr{L}_v T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}) = \mathscr{L}_{\varsigma^*(v)}[\varsigma^*(T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d})]. \tag{12-5-1}$$

因为可拉回张量场 $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ 的拉回 $\varsigma^*(T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d})$ 可被认同于 $\mathscr{I}^+$ 上的张量场 $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}|_{\mathscr{I}^+}$, 今后将把 $\varsigma^*(T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d})$ 与 $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}|_{\mathscr{I}^+}$ 视为一样.

例 1

(1) n^a 因为切于 $\mathscr{I}^+$ 而显然可拉回, 即 $\varsigma^*(n^a)$ 有意义, 认同于 $n^a|_{\mathscr{I}^+}$.

(2)无限小渐近对称性 ξ^a 可光滑延拓至 $\mathscr{I}^+$ (且切于 $\mathscr{I}^+$), 故可拉回, $\varsigma^*(\hat{\xi}^a)$ 简记为 $\hat{\xi}^a$.

(3) $\tilde{g}_{ab}$, 作为 $\tilde{M}$ 上的下指标张量场, 当然可拉回, $\varsigma^*(\tilde{g}_{ab})$ 简记为 $\tilde{h}_{ab}$, 可看作 $\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}$ 的限制. 在 Bondi 规范下 $\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}$ 的线元可表为式(12-4-16), 等价于

$$\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}=(\mathrm{d}\Omega)_a(\mathrm{d}u)_b+(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}\Omega)_b+(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b, \quad (12\text{-}5\text{-}2)$$

故 $\tilde{g}_{ab}$ 的拉回(即限制) $\tilde{h}_{ab}$ 为(只须验证它与 $\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}^+}$ 对切于 $\mathscr{I}^+$ 的矢量的作用结果相等)

$$\tilde{h}_{ab}=(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b. \quad (12\text{-}5\text{-}3)$$

(4) $n^a n^b \tilde{g}_{cd}$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上的值分别与 n_a, n_b 的缩并为零, 故可拉回, 记 $\varsigma^*(n^a n^b \tilde{g}_{cd})$ 为 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$.

在以上基础上就可介绍 BMS 李代数.

定义 1　$\mathscr{I}^+$ 上的光滑切矢场 $\hat{\xi}^a$ 叫 $\mathscr{I}^+$ **上的无限小对称性**, 若 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$.

由李导数定理 $\mathscr{L}_{[v,u]}=\mathscr{L}_v\mathscr{L}_u-\mathscr{L}_u\mathscr{L}_v$ (见第 4 章习题 9)可知 $\mathscr{I}^+$ 上全体无限小对称性的集合以矢量场对易子为李括号构成李代数, 称为 **BMS 李代数**, 记作 $\mathscr{B}$.

注 1　此定义与正文中关于 $\mathscr{I}^+$ 上的无限小对称性的定义等价. 下面证明从正文的定义可推出 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$.

命题 12-5-1　设 ξ^a 是 (M, g_{ab}) 的一个按正文条件(a)和(b)定义的无限小渐近对称性, 则其在 $\mathscr{I}^+$ 上的延拓 $\hat{\xi}^a\equiv\xi^a|_{\mathscr{I}^+}$ 满足 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$.

证明　在 M 上有

$$\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{cd}=\mathscr{L}_\xi(\Omega^2 g_{cd})=\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{cd}+2\lambda\tilde{g}_{cd}, \text{ 其中 } \lambda\equiv\Omega^{-1}\xi^a n_a, \quad (12\text{-}5\text{-}4)$$

当 M 上的动点趋近 $\mathscr{I}^+$ 时 $\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{cd}\to 0$ [ξ^a 满足的条件(b)], 所以

$$(\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{cd}-2\lambda\tilde{g}_{cd})|_{\mathscr{I}^+}=0. \quad (12\text{-}5\text{-}5)$$

而 $\tilde{g}_{cd}$ 及 $\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{cd}$ 为 C^∞, 故 $\lambda|_{\mathscr{I}^+}\equiv(\Omega^{-1}\xi^a n_a)|_{\mathscr{I}^+}$ 为 C^∞, 加上 $\Omega|_{\mathscr{I}^+}=0$, 便知 $\xi^a n_a|_{\mathscr{I}^+}=0$, 于是 $\hat{\xi}^a\equiv\xi^a|_{\mathscr{I}^+}$ 切于 $\mathscr{I}^+$.① 注意到

① 可见无限小渐近对称性 ξ^a 的定义条件(a)只须要求 ξ^a 可光滑延拓至 $\mathscr{I}^+$ 而不必要求 $\hat{\xi}^a$ 切于 $\mathscr{I}^+$ (可被推出).

$$\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=\mathscr{L}_{\varsigma^*(\xi)}[\varsigma^*(n^a n^b\tilde{g}_{cd})]=\varsigma^*[\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})], \tag{12-5-6}$$

[其中第二步用到式(12-5-1).] 欲证 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$ 只须证 $\varsigma^*[\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})]=0$，而由性质(c)可知为此只须证 $[\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})]_{\mathscr{I}^+}=0$. 因为在 M 上有

$$\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})=n^a n^b\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{cd}+2\tilde{g}_{cd}n^{(a}\mathscr{L}_\xi n^{b)}, \tag{12-5-7}$$

所以在有了 $\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{cd}$ 的表达式(12-5-4)后还应在 M 上计算 $\mathscr{L}_\xi n^b$，结果为

$$\mathscr{L}_\xi n^b=-\lambda n^b+\Omega\tilde{g}^{be}\tilde{\nabla}_e\lambda-n^f\tilde{g}^{be}(\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ef}). \tag{12-5-8}$$

[证明留作练习. 提示: ①用 $\tilde{\nabla}_a$ 表出 $\mathscr{L}_\xi n^b$；②写出 $\Omega\tilde{g}^{be}\tilde{\nabla}_e\lambda$ 的展开式；③两式相减并利用 $\mathscr{L}_\xi\tilde{g}_{ab}=\tilde{\nabla}_a\xi_b+\tilde{\nabla}_b\xi_a$ (其中 $\xi_a\equiv\tilde{g}_{ab}\xi^b$) 便得式(12-5-8).] 把式(12-5-4)和(12-5-8)代入(12-5-7), 便知在 M 上有

$$\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})=n^a n^b(\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{cd})+2\tilde{g}_{cd}[\Omega\, n^{(a}\tilde{g}^{b)e}\tilde{\nabla}_e\lambda-n^f n^{(a}\tilde{g}^{b)e}(\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ef})].$$

上式右边可光滑延拓至 $\mathscr{I}^+$ 且每项在 $\mathscr{I}^+$ 上都为零, 故 $\mathscr{L}_\xi(n^a n^b\tilde{g}_{cd})|_{\mathscr{I}^+}=0$. □

命题 12-5-2 $\mathscr{I}^+$ 上的切矢场 $\hat{\xi}^a$ 是无限小对称性($\hat{\xi}^a\in\mathscr{B}$)的充要条件为 $\mathscr{I}^+$ 上有标量场 K 使得在 $\mathscr{I}^+$ 上有

$$\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{ab}=2K\tilde{h}_{ab},\qquad \mathscr{L}_{\hat{\xi}}n^a=-Kn^a. \tag{12-5-9}$$

证明

$$\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=n^a n^b\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{cd}+2\tilde{h}_{cd}n^{(a}\mathscr{L}_{\hat{\xi}}n^{b)}. \tag{12-5-10}$$

若式(12-5-9)成立, 则由(12-5-10)易见 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$，即 $\hat{\xi}^a\in\mathscr{B}$. 反之, 若 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd}=0$，设 ξ^a 是 M 上满足 $\hat{\xi}^a=\xi^a|_{\mathscr{I}^+}$ 的无限小渐近对称性, 则 ξ^a 满足(12-5-5)和(12-5-8). 令 $K=\lambda|_{\mathscr{I}^+}$，由式(12-5-5)[注意到式(12-5-1)]得 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{ab}=2K\tilde{h}_{ab}$. 把式(12-5-8)延拓至 $\mathscr{I}^+$ 又得 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}n^a=-Kn^a$. □

定义 2 $\mathscr{I}^+$ 上的无限小对称性 $\hat{\xi}^a$ 称为 $\mathscr{I}^+$ 上的无限小超平移(supertranslation), 若 $\mathscr{I}^+$ 上有标量场 α 使

$$\hat{\xi}^a=\alpha n^a. \tag{12-5-11}$$

全体无限小超平移的集记作 $\mathscr{S}$ ($\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$).

命题 12-5-3 设 ξ^a 是 (M,g_{ab}) 的无限小渐近对称性, 则它按命题 12-5-1 产生的无限小对称性 $\hat{\xi}^a$ 是无限小超平移($\hat{\xi}^a\in\mathscr{S}$)的充要条件为

$$\lim_{\to \mathscr{I}^+} \Omega^2 g_{ab}\xi^a\xi^b = 0 \, . \tag{12-5-12}$$

证明　$\lim_{\to \mathscr{I}^+} \Omega^2 g_{ab}\xi^a\xi^b = 0 \Leftrightarrow \xi^a|_{\mathscr{I}^+}$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量为类光 $\Leftrightarrow \xi^a|_{\mathscr{I}^+} = \alpha n^a$，

最末一步是由于 3 维类光超曲面 $\mathscr{I}^+$ 上每点只有一个类光方向. □

注 2　把这一命题用于 4 维闵氏时空, 请读者验证平移 Killing 场给出超平移而转动和伪转动 Killing 场则否. “超平移”正是由此得名.

由定义可知 BMS 代数的性质与共形规范无关. 然而在讨论某些问题时借用 Bondi 规范可简化结论和证明.

命题 12-5-4　在使用 Bondi 规范的前提下, $\alpha n^a \in \mathscr{B}$ (从而 $\alpha n^a \in \mathscr{S}$)的充要条件为 $n^a\tilde{\nabla}_a\alpha = 0$ (即 α 在每条类光母线上为常数).

证明　由命题 12-5-2 知

$$\alpha n^a \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{h}_{ab} = 2k\tilde{h}_{ab}, \ \mathscr{L}_{\alpha n} n^a = -kn^a \, . \tag{12-5-13}$$

为求 $\mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{h}_{ab}$ 可先将 α 任意延拓为 $\tilde{M}$ 上的光滑函数并求 $\mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{g}_{ab}$：

$$\mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{g}_{ab} = \alpha \mathscr{L}_n \tilde{g}_{ab} + n^c\tilde{g}_{cb}\tilde{\nabla}_a\alpha + n^c\tilde{g}_{ac}\tilde{\nabla}_b\alpha \, ,$$

在 $\mathscr{I}^+$ 上取值并取限制, 注意到 $n^c = (\partial/\partial u)^c$ 和式(12-5-3)导致 $n^c\tilde{h}_{cb} = 0$，得

$$\mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{h}_{ab} = \alpha \mathscr{L}_n \tilde{h}_{ab} = 0 \, .$$ (第二步用到 Bondi 规范条件 $\mathscr{L}_n\tilde{h}_{ab} = 0$)

与式(12-5-13)右边对比得 $k = 0$，故在 Bondi 规范下 $\alpha n^a \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{L}_{\alpha n} n^a = 0$. 而

$$\mathscr{L}_{\alpha n} n^a = -\mathscr{L}_n(\alpha n^a) = -\alpha\mathscr{L}_n n^a - n^a\mathscr{L}_n\alpha = -n^a n^b\tilde{\nabla}_b\alpha \, ,$$

因而在 Bondi 规范下 $\alpha n^a \in \mathscr{B} \Leftrightarrow n^a\tilde{\nabla}_a\alpha = 0$. □

注 3　本命题只对 Bondi 规范成立. 习题 7 将给出一个非 Bondi 规范的 $\alpha n^a \in \mathscr{S}$ 不满足 $n^a\tilde{\nabla}_a\alpha = 0$ 的简单例子.

命题 12-5-5　$\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{B}$ 的阿贝尔李子代数, $\dim\mathscr{S} = \infty$.

证明　容易验证 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{B}$ 的矢量子空间. 设 C 为 $\mathscr{I}^+$ 的一个截面, 因为在 Bondi 规范下 $\alpha n^a \in \mathscr{S}$ 中的 α 在每条类光母线上为常数, 所以一个无限小超平移 αn^a 对应于 C 上的一个标量场. 而 C 上的全体标量场的集合是无限维矢量空间, 可见 $\dim\mathscr{S} = \infty$. 以对易子为李括号, 注意到

$$[\alpha n, \beta n]^a = \mathscr{L}_{\alpha n}(\beta n^a) = \beta\mathscr{L}_{\alpha n} n^a + n^a\mathscr{L}_{\alpha n}\beta = 0 \in \mathscr{S}$$ (也用了 Bondi 规范),

可知 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{B}$ 的李子代数, 而且是阿贝尔李子代数. □

注 4　本命题的结论当然与规范无关, 只是为简化证明才借用 Bondi 规范. 作

为练习，请读者给出不借用任何规范的证明.

命题 12-5-6　$\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$ 是理想(理想的定义见 § G.3 定义 4).

证明　设 $\hat{\xi}^a\in\mathscr{B}$, $\alpha n^a\in\mathscr{S}$，则

$$[\hat{\xi},\alpha n]^a=\mathscr{L}_{\hat{\xi}}(\alpha n^a)=(\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\alpha-\alpha k)\,n^a\equiv\beta n^a ,$$

其中第二步用到式(12-5-9). 由 $\hat{\xi}^a, \alpha n^a\in\mathscr{B}$ 可知 $[\hat{\xi},\alpha n]^a\in\mathscr{B}$，今又知 $[\xi,\alpha n]^a=\beta n^a$，故由定义 2 便知 $[\hat{\xi},\alpha n]^a\in\mathscr{S}$，因而 $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$ 是理想. □

既然 $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$ 是理想，就可构造商李代数 $\mathscr{B}/\mathscr{S}$ (见定理 G-3-4)，它代表了"$\mathscr{B}$ 中除 $\mathscr{S}$ 外的其余部分"，因此有必要加以研究. 略去讨论过程，我们只给出如下结论：

命题 12-5-7
$$\mathscr{B}/\mathscr{S}=\mathscr{L}, \tag{12-5-14}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是洛伦兹李代数, $\dim\mathscr{L}=6$ (详见小节 G.9.2).

注 5　本命题与 Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 的下述命题有诸多类似之处：

$$\mathscr{P}/\mathscr{T}=\mathscr{L}\quad(\text{其中}\ \mathscr{T}\ \text{代表}\ \mathscr{P}\ \text{的 4 维平移子代数}). \tag{12-5-15}$$

式(12-5-14)和(12-5-15)可分别看作下述李群结论用李代数语言的表述(P, T 和 L 分别代表 Poincaré 群、其平移子群和洛伦兹子群)：

$$B=S\otimes_{\rm s} L\quad(S\ \text{代表超平移子群}), \tag{12-5-14$'$}$$

$$P=T\otimes_{\rm s} L\quad(\otimes_{\rm s}\ \text{代表半直积}). \tag{12-5-15$'$}$$

注 6　注意到 $\dim\mathscr{L}=6\neq\infty$，可知 $\dim\mathscr{S}=\infty$ 是造成 $\dim\mathscr{B}=\infty$ 的唯一原因.

BMS 代数同 Poincaré 代数的类似之处还可再深挖一步. 为此先要对 Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 的 4 维平移子代数 $\mathscr{T}$ 和 6 维洛伦兹李子代数 $\mathscr{L}$ 的一个区别有所了解. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的一个洛伦兹系，$\xi^\mu(\mu=0,1,2,3)$ 为常数，则 $\xi^a=\xi^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a$ 是一个平移 Killing 矢量场. 全体平移 Killing 矢量场的集合

$$T\equiv\{\xi^a=\xi^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a\mid \xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3\in\mathbb{R}\}$$

自然是 $\mathscr{P}$ 的平移子代数. 若改用另一洛伦兹系 $\{x'^\mu\}$，所得集合

$$\mathscr{T}'\equiv\{\xi^a=\xi^\mu(\partial/\partial x'^\mu)^a\mid \xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3\in\mathbb{R}\}$$

与 $\mathscr{T}$ 是否相同？因为洛伦兹系之间的坐标变换(包括平移、转动和伪转动)是线性变换，容易证明 $\mathscr{T}'=\mathscr{T}$，可见平移子代数与人为因素无关. 就是说，$\mathscr{P}$ 有一个定义明确的 4 维子代数 $\mathscr{T}$，可以指着 $\mathscr{P}$ 的任一元素问："这是 $\mathscr{T}$ 的元素吗？"答案非是则

否，泾渭分明. 然而 $\mathscr{P}$ 的洛伦兹子代数却并不如此. 在 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中任取一点 p，则子集 $\mathscr{P}_p \equiv \{\xi^a \in \mathscr{P} \,|\, \xi^a|_p = 0\} \subset \mathscr{P}$ 便是与 $\mathscr{L}$ 同构的一个李子代数. 直观理解：取 p 点为原点建立洛伦兹坐标系 $\{t,x,y,z\}$，则每一转动 Killing 矢量场[例如 $-y(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial y)^a$]及每一伪转动 Killing 场[如 $x(\partial/\partial t)^a + t(\partial/\partial x)^a$]都在 p 点为零. 反之，任何非零的平移 Killing 场在 p 点都不为零. 但因 p 点完全任意，这样的李子代数很多(太多)，没有一个是自然的.(特殊的，与众不同的.) 因此，与 $\mathscr{T}$ 不同，$\mathscr{P}$ 可以存在许多子集，每个都有资格代表洛伦兹子代数 $\mathscr{L}$，没有一个是特殊的.

BMS 代数 $\mathscr{B}$ 的情况也相当类似. 首先，从 $\mathscr{S}$ 的定义可知它天生就是 $\mathscr{B}$ 的一个子代数(而且是由全体超平移组成的唯一子代数). 在这个意义上 $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}$ 与 $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}$ 对应. 前已讲过，$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的每一平移 Killing 场给出 $\mathscr{I}^+$ 上的一个无限小超平移. 既然前者的集合 $\mathscr{T}$ 是 4 维李代数而后者的集合 $\mathscr{S}$ 是无限维李代数，显然 $\mathscr{S}$ 含有大量不能由 $\mathscr{T}$ 的元素给出的元素. 我们希望找到一个只用渐近几何表述的自然标准，用它可在 $\mathscr{S}$ 中挑出一个 4 维阿贝尔李子代数，它就是由 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的全体平移 Killing 矢量场给出的那些无限小超平移的集合，记作 $\mathscr{T}_{\text{BMS}} \subset \mathscr{S}$. 研究表明这一标准的确存在，并可用下式表出：

$$\mathscr{T}_{\text{BMS}} = \{\alpha(\theta,\varphi)\text{是 } l=0 \text{ 和 } l=1 \text{ 的球谐函数}$$

$$[\text{指 } Y_{0,0},\ Y_{1,0},\ Y_{1,1}+Y_{1,1}{}^*,\ \mathrm{i}(Y_{1,1}-Y_{1,1}{}^*)\,]\text{的线性组合}\}.$$

结论：虽然 $\mathscr{S}$ 有无限维，但它存在一个自然的、与众不同的 4 维阿贝尔李子代数 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$，称为 **BMS 平移子代数**，其元素称为**(无限小)BMS 平移**.

再讨论 $\mathscr{B}$ 中的"其余部分"，即 $\mathscr{B}/\mathscr{S} = \mathscr{L}$. 问：$\mathscr{B}$ 中是否存在与洛伦兹李代数 $\mathscr{L}$ 同构的李子代数?答：不但存在，而且太多(注意与 $\mathscr{P}$ 的类似性). 在 $\mathscr{I}^+$ 上任取一截面 C，令

$$\mathscr{B}_C \equiv \{\eta^a \in \mathscr{B} \,|\, \eta^a|_C \text{ 切于 } C\} \subset \mathscr{B}. \tag{12-5-16}$$

作为独立流形，C 上两个切矢场的对易子也是 C 上的切矢场(即 $\eta_1{}^a, \eta_2{}^a$ 切于 $C \Rightarrow [\eta_1,\eta_2]^a$ 切于 C)，故 $\mathscr{B}_C$ 是 $\mathscr{B}$ 的李子代数. 设 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}$，则 $\forall q \in C$，有唯一的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使 $\eta^a|_C \equiv (\hat{\xi}^a - \alpha n^a)|_C$ 切于 C. 由此得 C 上函数 α，用类光母线携带出去便得 $\mathscr{I}^+$ 上的唯一函数 α，满足 $n^a \tilde{\nabla}_a \alpha = 0$. 于是 $\alpha n^a \in \mathscr{S} \subset \mathscr{B}$，加之 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}$，所以 $\eta^a \equiv \hat{\xi}^a - \alpha n^a \in \mathscr{B}$. 又因 $\eta^a|_C$ 切于 C，便知 $\eta^a \in \mathscr{B}_C$. 可见每一 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}$ 给出唯一的 $\eta^a \in \mathscr{B}_C$，且 η^a 与 $\hat{\xi}^a$ 属于同一等价类. 由 $\eta^a|_C$ 切于 C 的要求不难证明每一等价类

有且仅有一个η^a,等价类中任一元素$\hat{\xi}^a$所给出的η^a都是这个η^a.所以存在映射$\psi:\mathscr{B}\to\mathscr{B}_C$,而且$\eta^a\in\mathscr{B}_C$(看作独点子集)的“逆像”$\psi^{-1}[\eta^a]$等于$\eta^a$所在的等价类.于是可把$\psi^{-1}$看作从$\mathscr{B}_C$到$\mathscr{B}/\mathscr{S}$的一一到上映射,不难证明这是个李代数同构.可见选定一个截面C就找到$\mathscr{B}$中与$\mathscr{L}$同构的一个李子代数$\mathscr{B}_C$.然而C的选择非常任意,所以$\mathscr{B}$不存在与众不同的与$\mathscr{L}$同构的李子代数.

[选读 12-5-1 完]

[选读 12-5-2]

本选读介绍i^0上的对称性. 更深入的讨论可参阅 Ashtekar and Hansen(1978).

$\mathscr{I}^+$是 3 维超曲面, 其上有内禀几何结构$(n^a,\tilde{h}_{ab})$, 保结构的矢量场便是无限小对称性. 但i^0只是一点, 何谈结构和矢量场? 不过, 正如$\mathscr{I}^+$上的每一点可看作(M,g_{ab})中的类光测地线的“端点”那样, i^0是(M,g_{ab})中各种类空测地线的“端点”. 把到达i^0的类空测地线分成许多等价类, 以每类作为一个元素构成的集合记作S(下面将看到它是 4 维流形), 就相当于把i^0“吹胀”为S, 这S也有内禀几何结构, 保结构的矢量场就可定义为S(代表i^0)的无限小对称性. 然而, 与类光测地线不同, 类空测地线并非共形不变. 渐近平直时空(M,g_{ab})存在无数共形规范Ω, 其中没有一个与众不同, 无法自然选定一个$\tilde{g}_{ab}$来定义类空曲线的测地性. 与众不同的度规倒也有一个, 即物理度规g_{ab}, 可惜它在i^0连定义也没有. 这个两难问题可用下法解决:先在i^0外用g_{ab}写出条件, 再用$\tilde{g}_{ab}$重新表述, 然后求极限并证明极限与共形规范无关. 具体说, 设$\gamma(\lambda)$是以i^0为端点、关于g_{ab}的类空测地线(但λ未必是仿射参数), 即$\eta^a\nabla_a\eta^b=\alpha\eta^b$($\alpha$为线上函数). 令$A^b\equiv\eta^a\nabla_a\eta^b$[称为$\gamma(\lambda)$相对于$g_{ab}$的 4 加速], 则易见$\eta^{[a}A^{b]}=0$. 反之, 以$g_{ac}\eta^c$缩并$\eta^{[a}A^{b]}=0$便得$\eta^a\nabla_a\eta^b=\alpha\eta^b$, 可见$\eta^{[a}A^{b]}=0$等价于$\gamma(\lambda)$为测地线. 利用$\nabla_a$与$\tilde{\nabla}_a$的关系可把$\eta^{[a}A^{b]}=0$改写为(推导留作练习)

$$\eta^{[a}\tilde{A}^{b]}+\Omega^{-1}\chi\eta^{[a}\tilde{\nabla}^{b]}\Omega=0, \tag{12-5-17}$$

其中$\tilde{A}^b\equiv\eta^a\tilde{\nabla}_a\eta^b$, $\chi\equiv\tilde{g}_{ab}\eta^a\eta^b$. 设$p\in\gamma$, V_p是p的切空间, W_p代表与$\eta^a|_p$正交的 3 维子空间, 则$\tilde{h}_{ab}|_p\equiv(\tilde{g}_{ab}-\chi^{-1}\eta_a\eta_b)|_p$(其中$\eta_a\equiv\tilde{g}_{ab}\eta^b$)是$\tilde{g}_{ab}|_p$在$W_p$的诱导度规. 式(12-5-17)可用$\tilde{h}_{ab}$表为

$$\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b+\chi\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega)=0. \tag{12-5-17'}$$

上式就是“$\gamma(\lambda)$是用g_{ab}衡量的类空测地线”这一要求用带～量的表述. 补充要求

$\chi|_{i^0}=1$，再求极限便得 $\lim_{\to i^0}\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b+\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega)=0$. 虽然 $\tilde{A}^b$ 规范依赖，但上式作为整体是规范无关的(请读者验证). 满足上述要求的类空曲线称为**正规线**，准确定义如下.

定义 3 $(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$ 上的类空曲线 $\gamma(\lambda)$ 叫**正规的**(regular)，若

(a) $\gamma(\lambda)$ 在 i^0 为 $C^{>1}$，在其他点为 C^3；

(b) $\gamma(0)=i^0$，$\gamma(\lambda)$ 在 i^0 的切矢 $\eta^a|_{i^0}$ 为单位长(即 $\chi|_{i^0}=1$)；

(c) $$\lim_{\to i^0}\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b+\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega)=0 \tag{12-5-18}$$

注 7 ①因为任意两个规范 Ω 与 $\Omega'=\omega\Omega$ 之间的 ω 必须满足 $\omega(i^0)=1$(见命题 12-4-2)，所以条件(b)与共形规范无关. 前已说明(c)也与规范无关. ② 条件(c)完全决定了正规线的 $\tilde{A}^b$ 在 i^0 的横向(与 η^a 正交的方向)分量，而它的纵向分量 $\tilde{g}_{ab}\eta^a\tilde{A}^b|_{i^0}$ 则完全不受约束.

定义 4 正规线 γ 和 γ' 叫**等价的**，若 $\eta^a|_{i^0}=\eta'^a|_{i^0}$，$\tilde{A}^a|_{i^0}=\tilde{A}'^a|_{i^0}$，[①] 就是说，$\gamma$ 和 γ' 等价当且仅当它们在 i^0 有相同的 4 速和 4 加速.

定义 5 $S\equiv\{$所有正规线的等价类$\}$称为 i^0 的**吹胀**(blowing up)，S 是 CPI(即 Spatial Infinity)的缩写.

注 8 S 的一点由两个因素决定：①等价类的共同切矢 $\eta^a|_{i^0}$，②等价类的共同 4 加速纵向分量 $\tilde{g}_{ab}\eta^a\tilde{A}^b|_{i^0}$.

为了找出 S 的几何结构，还须对 $i^0\in\tilde{M}$ 的切空间 V_{i^0} 作进一步讨论. V_{i^0} 配以 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 的值(但现在略去抽象指标)，即 $(V_{i^0},\tilde{g}|_{i^0})$，是带洛伦兹度规的 4 维矢量空间. ($\tilde{g}|_{i^0}$ 与共形规范无关，因为 $\tilde{g}'=\omega^2\tilde{g}$ 保证 $\tilde{g}'|_{i^0}=\tilde{g}|_{i^0}$.) 任选一个正交归一基底 $\{e_\mu\}$ 后，V_{i^0} 的任一元素 x (也略去抽象指标)便有 4 个分量 x^μ，故 V_{i^0} 可看作流形 $\mathbb{R}^4$，其中 x^μ 充当坐标. [②] 坐标系 $\{x^\mu\}$ 在流形 V_{i^0} 上有坐标基底场 $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$. x 作为流形 V_{i^0} 的一点，有切空间 V_x，其中有一个特别元素，即 $[x^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a]_x$，可以称为 x 点(相对于 V_{i^0} 的零元)的**位矢**(position vector). 借 $\{x^\mu\}$ 系的对偶坐标基矢用下式在流形 V_{i^0} 上定义度规：

$$\eta_{ab}:=\eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b,$$

---

① $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 虽依赖于规范，但 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 相等的正规线的 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 相等与否却同规范无关，所以等价性的定义合法.

② 可以证明以后的实质性结论都同基底 $\{e_\mu\}$ 的选择无关.

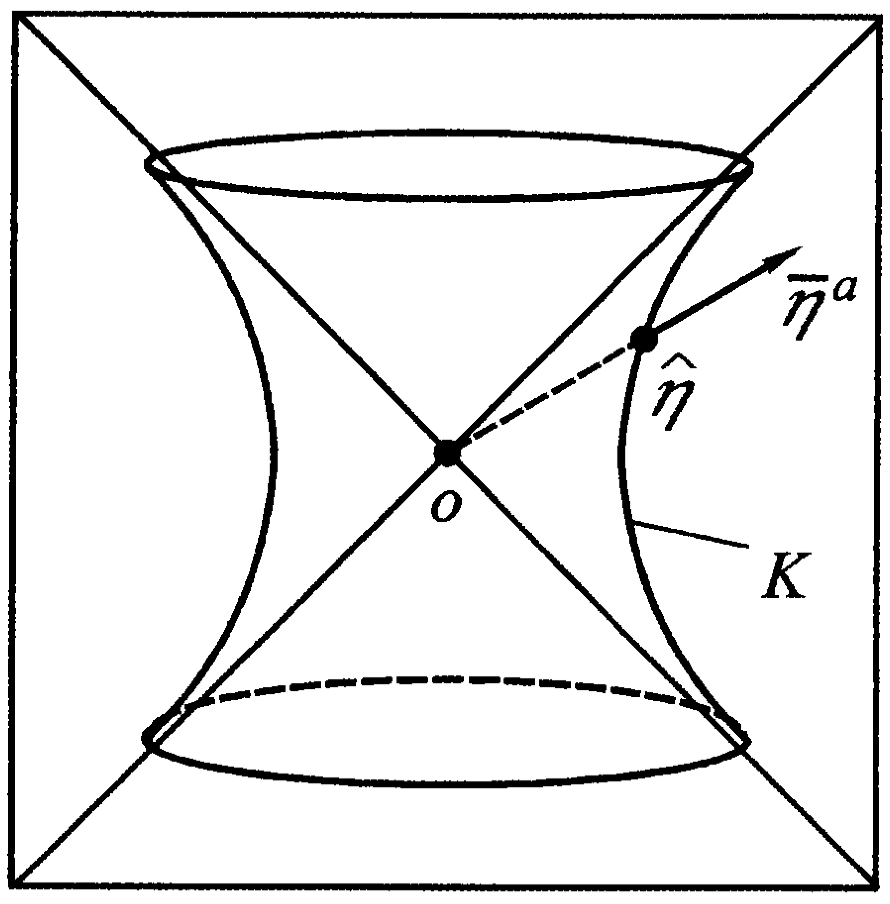


图 12-14　V_{i^0} 可看作闵氏时空. 全体单位类空矢量 $\hat{\eta}^a$ 的子集是类时超曲面 K. 位矢 $\overline{\eta}^a$ 是 K 上的单位法矢场

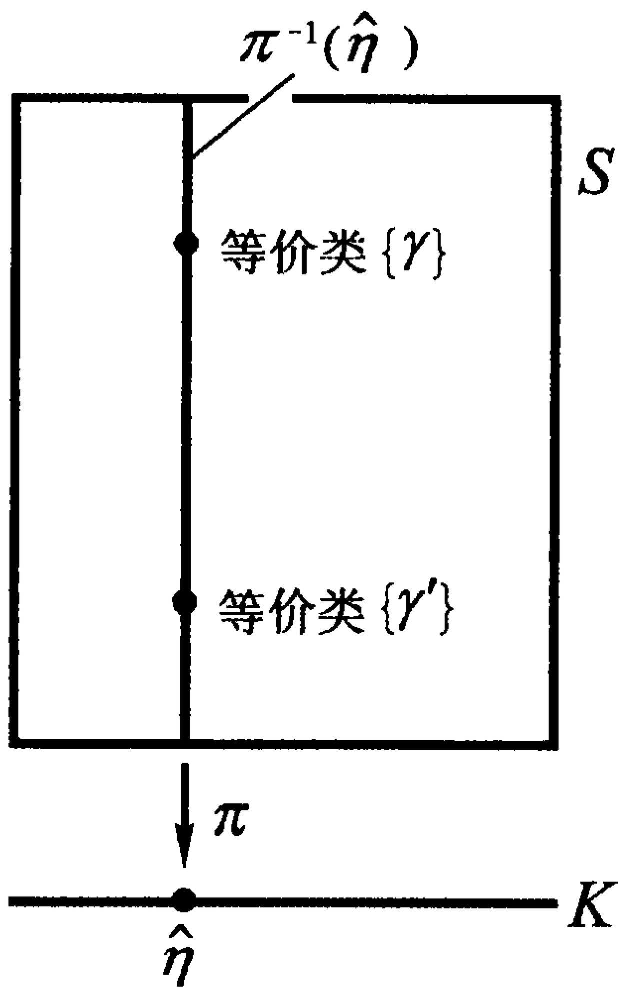


图 12-15　正规线等价类 $\{\gamma\}$ 与 $\{\gamma'\}$ 有相同的 $\eta^a|_{i^0}$ 而不同的 $\tilde{A}^a|_{i^0}$，它们是 S 的不同元素，却对应于 K 的同一元素

则 (V_{i^0}, η_{ab}) 可看作闵氏时空. 定义 V_{i^0} 的 3 维子集(图 12-14)

$$K := \{\hat{\eta} \in V_{i^0} | \ \tilde{g}|_{i^0}(\hat{\eta}, \hat{\eta}) = 1\},$$

则每条正规线的切矢 η^a 在 i^0 的值给出一点 $\hat{\eta} \in K \subset V_{i^0}$，以 $\overline{\eta}^a$ 代表点 $\hat{\eta}$ 的位矢, 它是 K 上的一个矢量场(但不切于 K). 读者应能证明: ① K 是由类时双曲线生成的 3 维类时旋转双曲面, ② $\overline{\eta}^a$ 与 K 正交[可参见第 7 章习题 5(b)], 而且是 K 的单位法矢场. S 的一个元素(正规线的一个等价类)自然对应于 K 的一点, 因此存在自然的到上映射 $\pi: S \to K$. 因为 S 的两个不同元素只要有相同的 $\eta^a|_{i^0}$ 就对应于 K 的同一点, 所以 π 是多一映射(投影映射, 见图 12-15). 由于正规线的条件(c)完全决定了 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 的横向分量, 图中 γ 和 γ' 的差别只能体现为一个实数(两线 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 的纵向分量之差); 又因为条件(c)对 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 的纵向分量毫无约束, 取定 $\{\gamma\}$ 后, 令 $\{\gamma'\}$ 跑遍图中竖线 $\pi^{-1}(\hat{\eta}^a)$，描述 $\{\gamma'\}$ 与 $\{\gamma\}$ 的差别的实数便可跑遍 $\mathbb{R}$. 这表明 S 是 4 维流形, 而且是 K 上的一个纤维丛, 每一 $\hat{\eta}^a \in K$ 对应于 S 的一个子集 $\pi^{-1}(\hat{\eta}^a)$，称为一条纤维. (不懂纤维丛的读者对此也不难大致理解, 不必深究. ①) 这个 S 天生就有两个内禀结

① 虽然 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 的纵向分量(记作 $\tilde{\alpha}$)依赖于规范, 但同一纤维上的任二点的 $\tilde{\alpha}$ 之差却与规范无关. 这一性质(加上其他好性质)足以保证 S 是以 1 维李群 $\mathbb{R}$ 为结构群的主纤维丛. 下册 § I.1 对主纤维丛及其结构群有详细讲述.

构.① 首先, S 上的每一纤维是一个 1 维流形(曲线), 所有纤维上各点切于纤维的切矢 v^a(以 $\tilde{A}^a|_{i^0}$ 的纵向分量为参数)构成 S 上的一个与众不同的、处处非零的矢量场, 称为**竖直**(vertical)**矢量场**. 下面将看到 v^a 在一定程度上类似于 $\mathscr{I}^+$ 上的 n^a. 其次, K 作为 (V_{i^0}, η_{ab}) 的类时超曲面, 存在由 η_{ab} 诱导的度规场 $\bar{h}_{ab}$ (凡 K 上张量场都在顶上加"–"), 它又可被映射 π^* 拉回而成为 S 的 (0,2) 型对称张量场 $h_{ab} \equiv \pi^* \bar{h}_{ab}$. 这是 S 上的第二个内禀结构. 与 $\mathscr{I}^+$ 上的 $\tilde{h}_{ab}$ 类似, S 上的 h_{ab} 也退化, 因为 S 上存在非零矢量场 v^a(竖直矢量场)使得对 S 上任一矢量场 u^a 有

$$h_{ab} v^a u^b = (\pi^* \bar{h})_{ab} v^a u^b = \bar{h}_{ab} (\pi_* v)^a (\pi_* u)^b = 0,$$

其中最末一步是因为:作为竖直(切于纤维)矢量场, v^a 在推前映射 π_* 作用下的像为零.

定义 6 S 上的矢量场 ξ^a 叫 $\boldsymbol{i^0}$ **上的无限小对称性**, 若

$$\text{(a)} \mathscr{L}_\xi h_{ab} = 0, \quad \text{(b)} \mathscr{L}_\xi v^a = 0. \tag{12-5-19}$$

由李导数定理 $\mathscr{L}_{[v,u]} = \mathscr{L}_v \mathscr{L}_u - \mathscr{L}_u \mathscr{L}_v$ 可知 i^0 上全体无限小对称性的集合以矢量场对易子为李括号构成李代数, 称为 **SPI 李代数**, 记作 $\mathscr{G}$.

为简单起见, 下面以 $x, y, \cdots$ 代表 K 的点(不再记作 $\hat{\eta}, \cdots$), 以 $p, q, \cdots$ 代表 S 的点.设 $x \in K$, $p, q \in \pi^{-1}(x)$, ξ^a 代表 S 上任一矢量场, 则 $\pi_*(\xi^a|_p)$ 未必等于 $\pi_*(\xi^a|_q)$, 因此无法从 ξ^a 自然定义(诱导) K 上的一个矢量场. 然而, 若 $\xi^a \in \mathscr{G}$, 则有如下命题:

命题 12-5-8 每一 $\xi^a \in \mathscr{G}$ 自然诱导出 K 上的一个矢量场 $\bar{\xi}^a$.

证明 由 $\xi^a \in \mathscr{G}$ 知 $\mathscr{L}_v \xi^a = 0$. $\forall x \in K$, 设 $p, q \in \pi^{-1}(x)$. 以 $\psi: \mathbb{R} \times S \to S$ 代表 v^a 对应的单参微分同胚群, 则 $\exists t \in \mathbb{R}$ 使 $q = \psi_t(p)$ (图 12-16). 由 $\mathscr{L}_v \xi^a = 0$ 得 $\psi_{t*} \xi^a = \xi^a$, 故

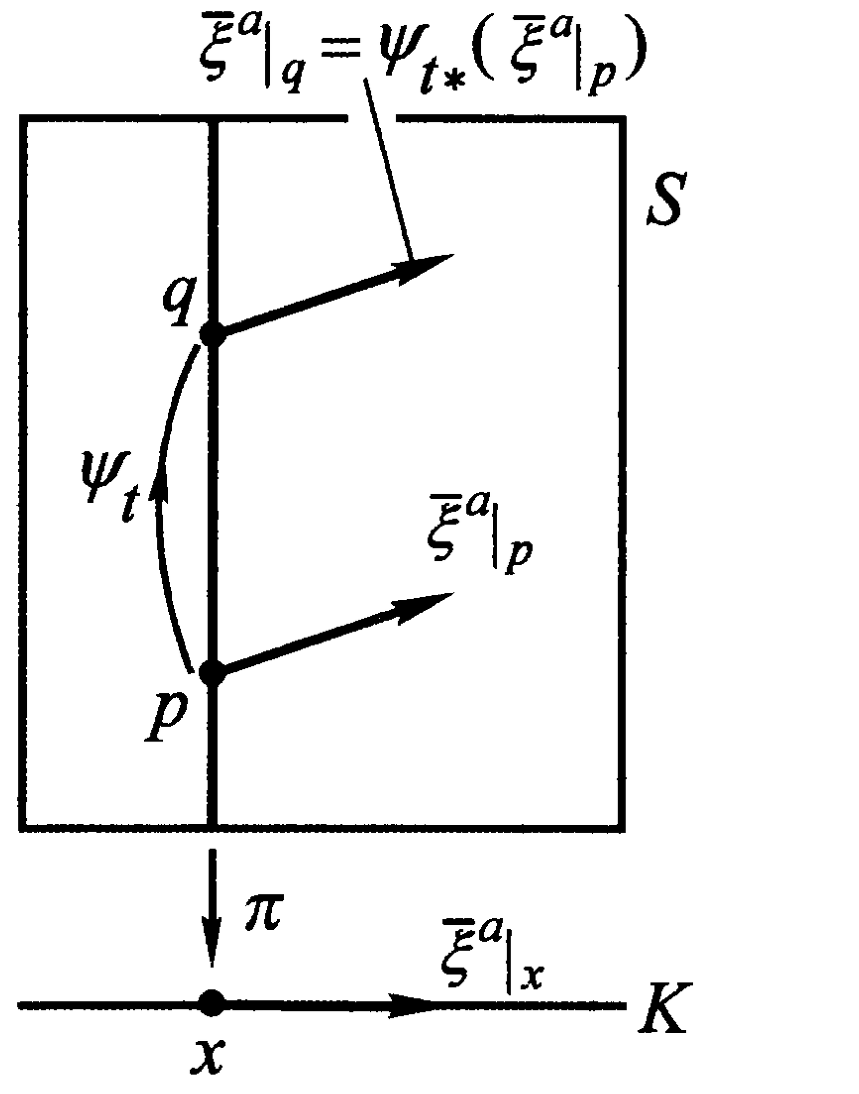


图 12-16 命题 12-5-8 证明用图

① 这是对渐近平直时空定义的内涵充分挖掘的结果. 假若把定义中关于 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 为 $C^{>0}$ 的要求减弱为 C^0, 则 $\eta^a \tilde{\nabla}_a$ 在 i^0 无意义, 正规线的条件(c)就无从提出, 正规线等价性条件的第二条(即 $\tilde{A}^a|_{i^0} = \tilde{A}'^a|_{i^0}$)就要删去, i^0 就只能被"吹胀"为 3 维流形 K. 然而渐近平直时空的定义要求 $\tilde{g}_{ab}$ 在 i^0 为 $C^{>0}$. 虽然由于未到 C^1 而不能保证 $\tilde{\nabla}_a$ 在 i^0 有意义, 但"方向依赖导数"有意义, 因此正规线条件(c)有意义. 作为结果, i^0 就被吹胀为 4 维流形 S.

$$\pi_*(\xi^a|_q) = \pi_*(\psi_{t*}(\xi^a|_p)) = (\pi\circ\psi_t)_*(\xi^a|_p) = \pi_*(\xi^a|_p).$$

于是对$\xi^a \in \mathscr{G}$可定义K上对应的矢量场$\bar{\xi}^a$如下：$\forall x\in K$，$\bar{\xi}^a|_x := \pi_*(\xi^a|_p)$，其中$p$为$\pi^{-1}(x)$上任一点. □

命题 12-5-9　若S上的矢量场ξ^a能通过π诱导出K上的矢量场$\bar{\xi}^a$，则

$$\mathscr{L}_\xi h_{ab} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_{\bar{\xi}} \bar{h}_{ab} = 0.$$

证明　练习. 提示：利用第 4 章习题 5 的结果.

定义 7　$\xi^a \in \mathscr{G}$叫**无限小 SPI 超平移**，若S上有光滑函数f使$\xi^a = f v^a$. 全体无限小 SPI 超平移的集记作$\mathscr{S}$(注意$\mathscr{S}\subset\mathscr{G}$).

命题 12-5-10　设f是S上的光滑函数，$\xi^a = f v^a$，则

$$\xi^a \in \mathscr{G}(\text{从而}\ \xi^a \in \mathscr{S}) \Leftrightarrow \mathscr{L}_v f = 0 .$$

证明　因为$\xi^a = f v^a \Rightarrow \bar{\xi}^a = 0 \Rightarrow \mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{h}_{ab} = 0 \Rightarrow \mathscr{L}_\xi h_{ab} = 0$，所以在$\xi^a = f v^a$的前提下$\xi^a \in \mathscr{G} \Leftrightarrow \mathscr{L}_\xi v^a = 0$. 而$\mathscr{L}_\xi v^a = -\mathscr{L}_v \xi^a = -\mathscr{L}_v(f v^a) = -(\mathscr{L}_v f) v^a$，故$\mathscr{L}_\xi v^a = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_v f = 0$. 结论：只要$\xi^a = f v^a$，则$\xi^a \in \mathscr{G} \Leftrightarrow \mathscr{L}_v f = 0$. □

命题 12-5-11　$\mathscr{S}$与K上全体标量场的集合有一一对应关系.

证明　$\forall \xi^a \in \mathscr{S}$，有$S$上函数$f$使$\xi^a = f v^a$，且$f$在每一纤维上为常数，故诱导出$K$上的如下函数$\bar{f}$：$\forall x\in K$，$\bar{f}|_x := f|_p$，其中$p$为$\pi^{-1}(x)$的任一点. 反之，设$\bar{f}$为$K$上任一函数，则$f \equiv \pi^* \bar{f}$是$S$上这样的函数，它在每一纤维为常数，于是对应于一个$f v^a \in \mathscr{S}$. □

命题 12-5-12　$\mathscr{S}\subset\mathscr{G}$是阿贝尔理想，$\dim\mathscr{S} = \infty$.

证明　$\mathscr{S}$显然是子空间. 下面证明它还是李子代数：

$$[fv, f'v]^a = \mathscr{L}_{fv}(f'v^a) = f v^b \nabla_b (f' v^a) - f' v^b \nabla_b (f v^a)$$

$$= f f'(v^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b v^a) = 0.$$

(其中∇_a是S上任一无挠导数算符.) 可见$\mathscr{S}$不但是李子代数，而且是阿贝尔李子代数. 再证$\mathscr{S}$为理想：$\forall \xi^a \in \mathscr{G}$，$f v^a \in \mathscr{S}$，有

$$[\xi, fv]^a = \mathscr{L}_\xi (f v^a) = v^a \mathscr{L}_\xi f + f \mathscr{L}_\xi v^a = (\mathscr{L}_\xi f) v^a .$$

因$[\xi, fv]^a \in \mathscr{G}$，今又知$[\xi, fv]^a = (\mathscr{L}_\xi f) v^a$，故由定义 7 知$[\xi, fv]^a \in \mathscr{S}$. 此外，命题 12-5-11 表明$\dim\mathscr{S} = \infty$. □

注 9　本命题表明 SPI 超平移理想很像 BMS 超平移理想，不同之处体现在"大小"上：SPI 超平移理想与 3 维流形 K 上的函数一一对应，而 BMS 超平移理想则与 $\mathscr{I}^+$ 的截面(2 维球面)上的函数一一对应.

命题 12-5-13　$\mathscr{G}/\mathscr{S}=\mathscr{L}$(洛伦兹李代数).　(12-5-20)

证明　设 $\{\xi^a\}\in\mathscr{G}/\mathscr{S}$，则 $\{\xi^a\}$ 中任意两元素 ξ^a，ξ'^a 满足

$$\xi'^a-\xi^a=fv^a\in\mathscr{S}.$$

ξ^a 和 ξ'^a 都是 S 上的矢量场，可经 π_* 投影为 K 上矢量场 $\bar{\xi}^a$ 和 $\bar{\xi}'^a$. 下面证明 $\bar{\xi}^a=\bar{\xi}'^a$. $\forall x\in K$，令 $p\in\pi^{-1}(x)$，则

$$\bar{\xi}'^a|_x=\pi_*(\xi'^a|_p)=\pi_*(\xi^a|_p+(fv^a)|_p)=\pi_*(\xi^a|_p)=\bar{\xi}^a|_x.$$

此外，$\xi^a\in\mathscr{G}\Rightarrow\mathscr{L}_\xi h_{ab}=0\Rightarrow\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{h}_{ab}=0\Rightarrow\bar{\xi}^a$ 是 $(K,\bar{h}_{ab})$ 上的 Killing 场.

以 $\mathscr{K}$ 代表 $(K,\bar{h}_{ab})$ 上全体 Killing 矢量场的集合，则以上讨论表明存在线性映射 ν：$\mathscr{G}/\mathscr{S}\to\mathscr{K}$. 因为 $\mathscr{G}/\mathscr{S}$ 的非零元素的像必为 $\mathscr{K}$ 的非零元素，所以 ν 是一一映射. 映射 $\sigma:K\to S$ 称为 S 的一个截面(section)，若 $\pi\circ\sigma:K\to K$ 为恒等映射且 $v^a|_{\sigma[K]}$ 不与 $\sigma[K]$ 相切. $\forall\,\bar{\xi}^a\in\mathscr{K}$，令 $\xi^a|_{\sigma(K)}$ 为截面 $\sigma[K]$ 上的矢量场，满足 $\pi_*\xi^a=\bar{\xi}^a$. 以此为初值，借用竖直矢量场 v^a 可生成 S 上的矢量场 ξ^a，满足 $\mathscr{L}_\xi v^a=0$. 易见 $\xi^a\in\mathscr{G}$，它代表的等价类 $\{\xi^a\}$ 满足 $\nu(\{\xi^a\})=\bar{\xi}^a$，这就证明了 ν 的到上性，因而 $\mathscr{G}/\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{K}$(作为矢量空间)同构. $\mathscr{S}$ 是理想保证 ν 还保李括号，于是 $\mathscr{G}/\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{K}$ 可视为相同的李代数. 注意到 4 维闵氏时空 (V_{i^0},η_{ab}) 的空间转动和伪转动 Killing 场过 K 的每点的积分曲线都躺在 K 上，可知这些 Killing 场在 K 上取值后就是 $(K,\bar{h}_{ab})$ 上的 Killing 场. $\dim K=3$ 保证 $(K,\bar{h}_{ab})$ 不能有其他的 Killing 矢量场. 可见

$$\mathscr{K}=\{(K,\bar{h}_{ab})\text{ 上全体空间转动和伪转动 Killing 场的线性组合}\},$$

而等号右边正是洛伦兹李代数 $\mathscr{L}$，所以 $\mathscr{G}/\mathscr{S}=\mathscr{L}$.　□

SPI 李代数同 BMS 李代数的类似性还可深挖一步.

命题 12-5-14　SPI 超平移李代数 $\mathscr{S}$ 中可挑出一个 4 维李子代数 $\mathscr{T}_{\text{SPI}}\in\mathscr{S}$，称为 **SPI 平移子代数**，它是 $\mathscr{G}$ 的理想.

证明　设 $\omega\in V_{i^0}{}^*$，$\{e_\mu\}$ 是 V_{i^0} 的、用以把 V_{i^0} 看成 4 维流形的那个基底，$\{e^\mu\}$ 是其对偶基底，ω_μ 是 ω 在 $\{e^\mu\}$ 的分量，$\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$ 是流形 V_{i^0} 与 $\{e^\mu\}$ 对应的坐标基底场，则 $\omega_a\equiv\omega_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a$ 是流形 V_{i^0} 上的常对偶矢量场，即 $\partial_a\omega_b=0$ (∂_a 与 V_{i^0} 的闵

氏度规适配). 把K上点的位矢$\overline{\eta}^a \equiv x^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a$自然延拓为$V_{i^0}$上点的位矢$\eta^a$, 则$\omega_a\eta^a$是$V_{i^0}$上的标量场. 以$\overline{\omega}_a$代表$\omega_a$在$K$上的值, 则$\bar{f}(\omega)\equiv\overline{\omega}_a\overline{\eta}^a$是$K$上的标量场, 因而$f(\omega)\equiv\pi^*\bar{f}(\omega)$是$S$上的标量场, 满足$\mathscr{L}_v f(\omega)=0$. 可见每一$\omega\in V_{i^0}{}^*$对应于一个无限小超平移$f(\omega)v^a\in\mathscr{S}$. 这种特殊的无限小超平移称为无限小 SPI 平移. 全体无限小 SPI 平移的集合$\mathscr{T}_{\text{SPI}}\subset\mathscr{S}$显然是$\mathscr{S}$的子空间, 而且是阿贝尔李子代数. 决定一个$\omega\in V_{i^0}{}^*$要用 4 个实数, 所以$\dim\mathscr{T}_{\text{SPI}}=4$. $\forall\xi^a\in\mathscr{G}$, $f(\omega)v^a\in\mathscr{T}_{\text{SPI}}$, 有

$$[\xi, f(\omega)v]^a=\mathscr{L}_\xi[f(\omega)v^a]=[\mathscr{L}_\xi f(\omega)]v^a, \tag{12-5-21}$$

所以欲证$\mathscr{T}_{\text{SPI}}$是$\mathscr{G}$的理想只须证$[\mathscr{L}_\xi f(\omega)]v^a\in\mathscr{T}_{\text{SPI}}$, 为此只须证明$V_{i^0}$上存在常对偶矢量场$\omega'_a$, 其在$K$上的值$\overline{\omega}'_a$在$S$上对应的标量场$f(\omega')$满足$\mathscr{L}_\xi f(\omega)=f(\omega')$, 或者$\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega)=\bar{f}(\omega')$. $\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega)$可展开为

$$\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega)=\mathscr{L}_{\bar{\xi}}(\overline{\omega}_a\overline{\eta}^a)=\bar{\xi}^b\partial_b(\omega_a\eta^a)=\omega_a\bar{\xi}^b\partial_b\eta^a=\omega_a\bar{\xi}^b\delta_b{}^a=\omega_a\bar{\xi}^a=\overline{\omega}_a\bar{\xi}^a, \tag{12-5-22}$$

其中倒数第三步用到位矢η^a的一个有用性质:

$$\partial_b\eta^a=\partial_b[x^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a]=(\partial/\partial x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\mu)_b=\delta^a{}_b. \tag{12-5-23}$$

作为$(K,\bar{h}_{ab})$上的 Killing 矢量场, $\bar{\xi}^a$不过是转动和伪转动的线性组合, 可自然延拓为(V_{i^0},η_{ab})上的 Killing 场, 记作$\tilde{\xi}^a$. 令$\omega'_b\equiv\omega_a\partial_b\tilde{\xi}^a$, 则$\partial_c\omega'_b=\omega_a\partial_c\partial_b\tilde{\xi}^a=0$ [其中第二步用到第 4 章习题 14(a)的结果以及(V_{i^0},η_{ab})的平直性]. 可见ω'_b是(V_{i^0},η_{ab})上的常对偶矢量场. 此外, 下式表明这一ω'_b正是所需要的:

$$\bar{f}(\omega')\equiv\overline{\omega}'_b\overline{\eta}^b=\overline{\omega}_a\overline{\eta}^b\partial_b\bar{\xi}^a=-\overline{\omega}_a\overline{\eta}_b\partial^a\bar{\xi}^b=\overline{\omega}_a\bar{\xi}^b\partial^a\overline{\eta}_b=\overline{\omega}_a\bar{\xi}^a=\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega),$$

其中第三步用到$\bar{\xi}^a$的 Killing 性,第四步用到$\bar{\xi}^a$切于K,即$\bar{\xi}^b\overline{\eta}_b=0$,第五步用到式(12-5-23),第六步用到式(12-5-22). □

注 10 还可证明, 与$\mathscr{I}^+$上的$\mathscr{B}$类似, 物理时空(M,g_{ab})的每一无限小对称性(Killing 矢量场)给出一个确定的$\xi^a\in\mathscr{G}$, 而且, 如果(M,g_{ab})是闵氏时空, 则由每一平移 Killing 矢量场给出的$\xi^a\in\mathscr{G}$正是无限小 SPI 平移, 即$\mathscr{T}_{\text{SPI}}$的元素.

[选读 12-5-2 完]

§12.6　引力能量的非定域性

能量、动量和角动量及其守恒律对物理学的重要性是众所周知的. 物理学家对它们的认识经历过(甚至还在经历着)一个漫长的、由浅入深的过程. Leibnitz 最早引进的动能可看作能量概念的雏形. 质点的完全弹性碰撞问题可用动能守恒讨论. 然而在许多情况下动能并不守恒, 于是又对有势力场引进势能概念并得到有用得多的机械能守恒律. 可以说, 物理学发展的一个重要特征就是借助于引进新的能量品种来推广能量守恒律. 例如, 在认识电磁场后人们发现只有给电磁场定义能量才能维持能量守恒. 电磁场不但有能量, 而且可定域化, 含义是: 对场中任一点可明确定义电磁场能密度, 它在任一空间区域 V 的积分等于该域的电磁场能. 能量守恒的一个重要表现就是 V 内总能量的时间变化率等于单位时间内从外部流入 V 内的能量. 电磁场能动张量 T_{ab} 的存在可看作电磁场能量(及动量、角动量)可定域化的一种标志. 与此不同, 广义相对论的一个棘手问题正是引力场能量(以及动量、角动量)的非定域性. 为便于讲解, 我们从电荷守恒和闵氏时空的守恒律讲起.

12.6.1　电荷与电荷守恒

本小节讨论弯曲时空的电荷守恒律. 弯曲时空 (M, g_{ab}) 的电动力学通常涉及两个物质场: ①由 2 形式场 F_{ab} 描述的电磁场; ②由矢量场 J^a 描述的带电粒子场. 它们要满足麦氏方程组: $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$, $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ (其中 ∇_a 满足 $\nabla_a g_{bc} = 0$), 可用微分形式改写为如下更为简洁的形式(见选读 7-2-2):

$$(a)\ \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0, \qquad (b)\ \mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\, {}^*\boldsymbol{J}, \tag{12-6-1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 分别是 2 形式场 F_{ab} 和 1 形式场 $J_a \equiv g_{ab}J^b$ 的简写, ${}^*\boldsymbol{F}$ 和 ${}^*\boldsymbol{J}$ 分别代表 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的对偶微分形式. 由式(12-6-1b)立即得到

$$\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{J} = 0, \tag{12-6-2}$$

而这又等价于

$$\nabla_a J^a = 0, \tag{12-6-2'}$$

这是因为 $\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{J}$ 是与 0 形式场 $\nabla_a J^a$ 对偶的 4 形式场, 即(证明留作习题)

$$(\mathrm{d}{}^*J)_{abcd} = (\nabla_e J^e)\varepsilon_{abcd}. \tag{12-6-3}$$

对闵氏时空, $\nabla_a J^a = 0$ 即 $\partial_a J^a = 0$ (其中 ∂_a 满足 $\partial_a \eta_{bc} = 0$), 它给出连续性方程, 即

电荷守恒律. 类似地, $\nabla_a J^a = 0$ 或 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{J} = 0$ 给出弯曲时空的电荷守恒律. 为了看出这点, 先要引入弯曲时空中电荷(作为物理量)的定义. 设 Σ 是 (M, g_{ab}) 的类空超曲面(代表某时刻的某空间区域), 则 Σ 的电荷 $Q(\Sigma)$ 定义为

$$Q(\Sigma) := \int_\Sigma {}^*\boldsymbol{J}. \tag{12-6-4}$$

(这是 3 形式场 $^*\boldsymbol{J}$ 在 3 维流形 Σ 上的积分. 积分涉及定向, 关于 Σ 的定向见选读 12-6-1.) 下面说明这一抽象定义对闵氏时空而言与熟知的电荷概念一致. 根据对偶形式的定义, $^*\boldsymbol{J}$ 应为

$${}^*J_{abc} = J^d \varepsilon_{dabc}. \quad (\varepsilon_{dabc} \text{ 是与 } g_{ab} \text{ 适配的体元}) \tag{12-6-5}$$

设 n^a 为 Σ 的指向未来单位法矢(物理上代表同 Σ 正交的观者的 4 速), 则 J^d 可作 $3+1$ 分解:

$$J^d = \rho n^d + j^d, \tag{12-6-6}$$

其中 ρ 和 j^d 分别解释为观者测得的电荷及 3 电流密度. 代入式(12-6-5)得

$${}^*J_{abc} = (\rho n^d + j^d)\varepsilon_{dabc} = \rho\varepsilon_{abc} + j^d\varepsilon_{dabc}, \tag{12-6-7}$$

其中 $\varepsilon_{abc} \equiv n^d \varepsilon_{dabc}$ 是 Σ 上与诱导度规 $h_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b$ 适配的体元. 因为 $\int_\Sigma {}^*\boldsymbol{J}$ 中的 $^*\boldsymbol{J}$ 应理解为 $^*J_{abc}$ 在 Σ 上的限制 $^*\tilde{J}_{abc}$, 而由 j^d 的空间性 ($j^d n_d = 0$)不难看出 $j^d \varepsilon_{dabc}$ 的限制为零, 所以式(12-6-7)代入式(12-6-4)给出

$$Q(\Sigma) = \int_\Sigma {}^*\tilde{\boldsymbol{J}} = \int_\Sigma \rho\varepsilon_{abc}. \tag{12-6-8}$$

上式表明 $Q(\Sigma)$ 是电荷密度的体积分(对应于大众化写法的 $\int_V \rho \mathrm{d}V$), 因此把 $Q(\Sigma)$ 称为 Σ 的电荷是合理的.

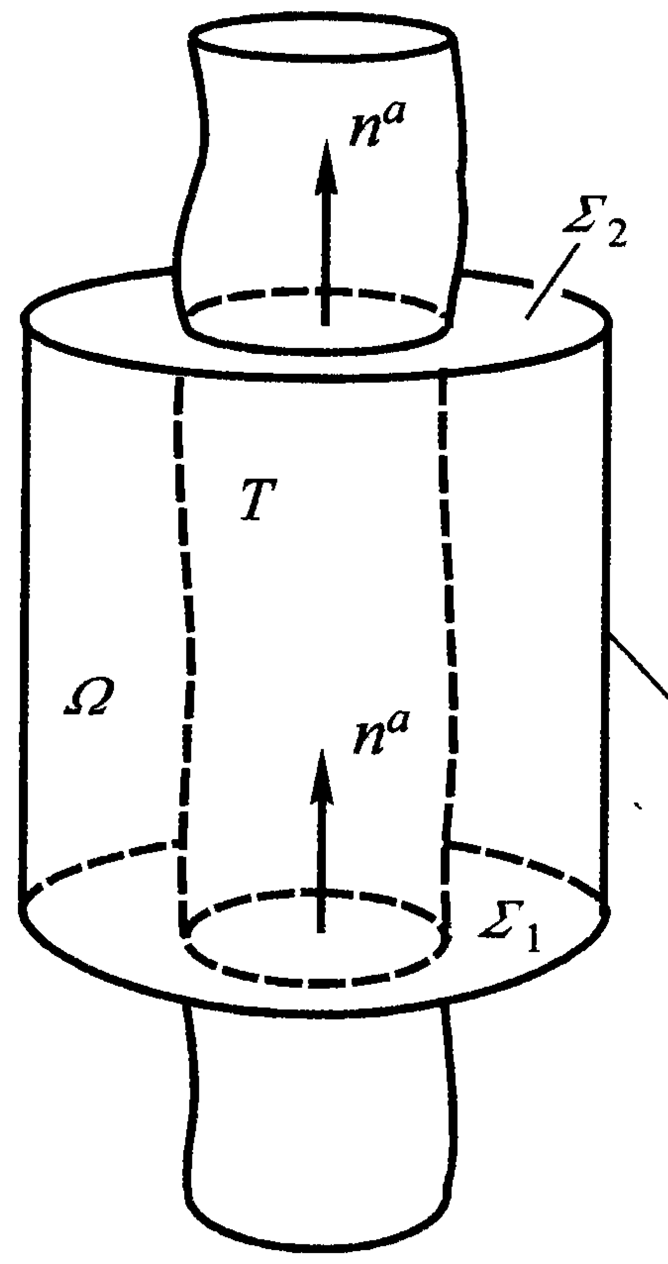


图 12-17　证明电荷守恒所用的时空图

设带电粒子只存在于空间的有限范围内, 我们来证明 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{J} = 0$ 蕴涵电荷守恒. 以 T 代表所有带电粒子世界线组成的世界管(图 12-17), Ω 代表任一满足以下条件的 4 维开域: ① Ω 的边界 $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Delta$, 其中 Σ_1 和 Σ_2 是两个类空超曲面, Δ 是以类时曲线为母线生成的 3 维曲面(Ω 的 "侧面"); ②世界管 T 与 $\partial\Omega$ 只交于 Σ_1 和 Σ_2, 即 4 电流密度 J^a 在 Δ 上任一点为零, 则

$$0 = \int_\Omega \mathrm{d}^*\boldsymbol{J} = \int_{\partial\Omega} {}^*\boldsymbol{J} = \int_{\Sigma_1} {}^*\boldsymbol{J} + \int_{\Sigma_2} {}^*\boldsymbol{J} = -Q(\Sigma_1) + Q(\Sigma_2). \tag{12-6-9}$$

(其中第二步用到 Stokes 定理, 最后一步的正负号的理由见选读 12-6-1.) Σ_1 和 Σ_2 可看作某一空间区域在两个不同时刻的表现, 所以 $Q(\Sigma_1)=Q(\Sigma_2)$ 的物理意义就是电荷守恒. 以上讨论可以推广至 J^a 在 Δ 上非零的情况(参见选读 6-4-2). 请注意 Σ_1 和 Σ_2 在这两种情况下还都只代表一个有限的空间区域(在两个时刻的表现), 更进一步的讨论是令 Σ_1 和 Σ_2 代表两个时刻的“全空间”, 由 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{J}=0$ 可以证明, 只要 Σ_1 和 Σ_2 都是柯西面(见§11.5), 而且 J^a 在趋于无限远时以足够高的速率趋于零, 则 Σ_1 和 Σ_2 的电荷必定相等, 这可看作全局意义下的电荷守恒律.

利用麦氏方程(12-6-1b)又可把式(12-6-4)表为

$$Q(\Sigma)=\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{d}^*\boldsymbol{F}\ . \tag{12-6-10}$$

设 S 是 Σ 的边界, 则上式又可用 Stokes 定理改写为

$$Q=\frac{1}{4\pi}\int_S {}^*\boldsymbol{F}\ . \tag{12-6-11}$$

从式(12-6-4)到(12-6-11)是一种巧妙的转变: 为求 3 维空间 Σ 的总电荷, 可以不管电荷的空间分布(密度)而径直对电荷分布在空间边界面 S 上留下的印记(场 ${}^*\boldsymbol{F}$)做积分. 物体的电荷是指任一包围它但不包围其他物体的闭曲面 S 上的积分 $(4\pi)^{-1}\int_S {}^*\boldsymbol{F}$. 请读者用上式计算静态球对称带电恒星的电荷, 结果应等于星外 RN 度规的电荷参量 Q.

设 E^c 是与 Σ 正交的观者测得的电场强度, 即 $E_c\equiv F_{cd}n^d$, N^c 是 S (作为 Σ 的闭包 $\bar{\Sigma}$ 中的 2 维超曲面)的外向单位法矢(图 12-18), $\varepsilon_{ab}\equiv N^c\varepsilon_{cab}$ 是 ε_{abc} 在 S 诱导的体元, 则式(12-6-11)又可改写为(习题)

$$Q=\frac{1}{4\pi}\int_S E^c N_c \varepsilon_{ab}\ , \tag{12-6-12}$$

上式还可改为更大众化的写法: 把 E^cN_c 改写为 $\vec{E}\cdot\vec{N}$, 把 ε_{ab} 改写为 $\mathrm{d}S$, 则

$$Q=\frac{1}{4\pi}\int_S \vec{E}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S\ . \tag{12-6-12$'$}$$

再把式(12-6-8)的积分也写成大众化的 $\int_V \rho\mathrm{d}V$, 便有

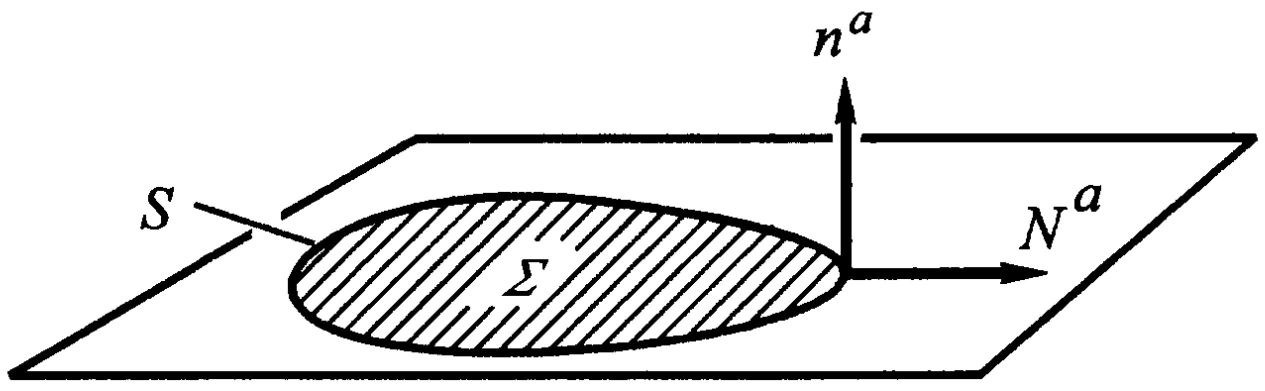


图 12-18　n^a 是 3 维面 Σ 的法矢, N^a 是 $\bar{\Sigma}$ 中 2 维超曲面 S 的外向法矢

$$\int_{\Sigma} \rho \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi} \int_{S} \vec{E} \cdot \vec{N} \mathrm{d}S,$$

这可看作电磁学的高斯定理在弯曲时空的推广. 与式(12-6-8)相比, 式(12-6-12)[因而(12-6-12′)]的好处在于计算电荷时不必求 3 维体积分(因此不必考虑电荷的分布状况)而只须求 2 维面积分. (只须考虑电荷在远处造成的印记, 即远处的电场.) 这对后面关于渐近平直时空总能量的讨论有重要启发.

若 Σ 同胚于 $\mathbb{R}^4$ 中的 3 维球面 S^3(例如闭合宇宙模型中每一时刻的全宇宙), 则它没有边界, 但可用其上的一个 2 维曲面 S 把它分为 Σ_1 和 Σ_2 两部分(图 12-19), 注意到 S 是 Σ_1 和 Σ_2 的共同边界, 由 Stokes 定理得

$$Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mathrm{d}^*\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\Sigma_1} \mathrm{d}^*\boldsymbol{F} + \int_{\Sigma_2} \mathrm{d}^*\boldsymbol{F}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\oint_S {}^*\boldsymbol{F} - \oint_S {}^*\boldsymbol{F}\right) = 0.$$

由上式可知与 S^3 同胚的 Σ 的总电荷恒为零. 图 12-11 是本结论的一个简单应用例子: 因为 $\Sigma \cup i^0$ 同胚于 S^3, 其总电荷必为零, 可见 i^0 处的像电荷必为 $-q$, 以保证 $-q+q=0$. (本例的详细讨论涉及电磁场的共形变换等问题, 略.)

[选读 12-6-1]

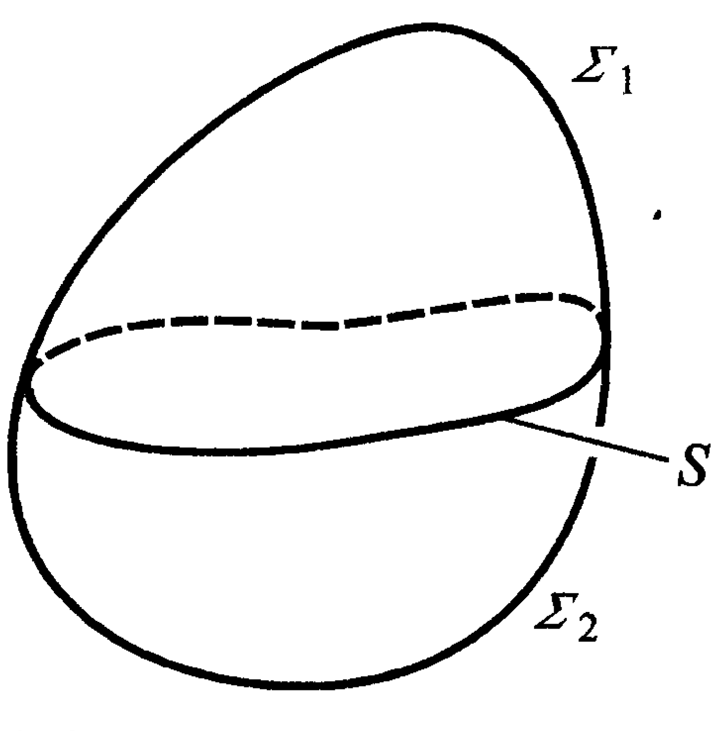


图 12-19　3 维闭合面 Σ 被其上的2维面 S 分为 Σ_1 和 Σ_2 两部分

式(12-6-4)把 $Q(\Sigma)$ 定义为积分 $\int_{\Sigma} {}^*\boldsymbol{J}$, 而积分的正负取决于定向, 因此有必要补充以下明确规定: $Q(\Sigma)$ 定义中的积分 $\int_{\Sigma} {}^*\boldsymbol{J}$ 所用的定向是 $\varepsilon_{abc} \equiv n^d \varepsilon_{dabc}$, 其中 n^d 指向未来. 另一方面, 式(12-6-9)的 $\int_{\partial\Omega} {}^*\boldsymbol{J}$ 的定向则是由 Ω 的定向 ε_{dabc} 在 $\partial\Omega$ 上诱导的定向 $\bar{\varepsilon}_{abc}$, 由选读 5-5-1 可知 $\bar{\varepsilon}_{abc} \equiv n^d(外)\varepsilon_{dabc}$, 其中 $n^d(外)$ 代表 $\partial\Omega$ 的单位外法矢. 由图 12-17 可知对 Σ_1 有 $n^d(外) = -n^d$, 对 Σ_2 有 $n^d(外) = n^d$, 因此对 Σ_1 和 Σ_2 分别有 $\bar{\varepsilon}_{abc} = -\varepsilon_{abc}$ 和 $\bar{\varepsilon}_{abc} = \varepsilon_{abc}$. 式(12-6-9)中的 $\int_{\Sigma_1} {}^*\boldsymbol{J}$ 和 $\int_{\Sigma_2} {}^*\boldsymbol{J}$ 都应以 $\bar{\varepsilon}_{abc}$ 为定向, 故有 $\int_{\Sigma_1} {}^*\boldsymbol{J} = -Q(\Sigma_1)$ 和 $\int_{\Sigma_2} {}^*\boldsymbol{J} = -Q(\Sigma_2)$.

[选读 12-6-1 完]

[选读 12-6-2]

本选读对磁荷概念作一介绍. 设 $\boldsymbol{F}$ 是 4 维流形 M 上的 2 形式场, 则其对偶形式 ${}^*\boldsymbol{F}$ 也是 2 形式场. 由二元组 $(\boldsymbol{F}, {}^*\boldsymbol{F})$ 可定义新的 2 形式场 $\boldsymbol{F}' \equiv \boldsymbol{F}\cos\alpha + {}^*\boldsymbol{F}\sin\alpha$ (其中 $\alpha \in [0, 2\pi]$ 为常实数), 易见其对偶形式为 ${}^*\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}\sin\alpha + {}^*\boldsymbol{F}\cos\alpha$. 变换

$$\boldsymbol{F}' \equiv \boldsymbol{F}\cos\alpha + {}^*\boldsymbol{F}\sin\alpha, \quad {}^*\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}\sin\alpha + {}^*\boldsymbol{F}\cos\alpha \qquad (12\text{-}6\text{-}13)$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的、角度为 α 的**对偶变换**(duality transformation), 它把二元组 $(\boldsymbol{F}, {}^*\boldsymbol{F})$ 变为

二元组 $(\boldsymbol{F}', {}^*\boldsymbol{F}')$. 变换矩阵与 2 维空间的转动矩阵相同, 故式(12-6-13)又称**对偶转动**. 由式(12-6-13)容易看出 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{F}=0, \mathrm{d}\boldsymbol{F}=0 \Leftrightarrow \mathrm{d}^*\boldsymbol{F}'=0, \mathrm{d}\boldsymbol{F}'=0$, 可见, $\boldsymbol{F}$ 为某时空 (M,g_{ab}) 的无源电磁场当且仅当 $\boldsymbol{F}'$ 为 (M,g_{ab}) 的无源电磁场. 进一步也不难证明(见第 8 章习题 6) $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'$ 有相同的能动张量, 即 $T'_{ab}=T_{ab}$. 因此, 例如, 设 $\boldsymbol{F}$ 是与某 RN 度规相应的无源电磁场, 则 $\boldsymbol{F}'$ 也是, 两者等效. 具体说, 考虑参数为 M, Q 的 RN 时空, 根据§8.4, 其电磁场为

$$F_{ab}=-Q\,r^{-2}(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}r)_b\,. \tag{12-6-14}$$

对 F_{ab} 做角度为 α 的对偶变换, 便得一个单参电磁场族 $\{F_{ab}(\alpha)\}$, 其中

$$F_{ab}(\alpha)=F_{ab}\cos\alpha+{}^*F_{ab}\sin\alpha\,,\quad F_{ab}(0)=F_{ab}\,. \tag{12-6-15}$$

因为任一 α 的 $F_{ab}(\alpha)$ 都有相同的 T_{ab}, 所以都可充当该 RN 度规相应的电磁场. § 8.4 末曾证明静态观者测 F_{ab} 的结果是有电场无磁场, 即 F_{ab} 给出 $\vec{E}\neq 0, \vec{B}=0$, 但由式(12-6-13)易得

$$\vec{E}'\equiv E\cos\alpha-\vec{B}\sin\alpha,\quad \vec{B}'=\vec{E}\sin\alpha+\vec{B}\cos\alpha\,, \tag{12-6-16}$$

于是 $\vec{E}\neq 0, \vec{B}=0$ 给出 $\vec{E}'\neq 0, \vec{B}'\neq 0$ (除非 $\alpha=0,\pi$). 静态恒星中静止带电粒子的电荷怎能激发磁场?答案是: 当 $\alpha\neq 0,\pi$ 时应认为带电粒子还带有磁荷, 正是它激发磁场. 为帮助理解, 我们转而讨论有源麦氏方程. 大家熟知的麦氏方程 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\boldsymbol{J}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=0$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 和 ${}^*\boldsymbol{F}$ (因而关于 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$)是不对称的, 其物理意义是任何粒子只有电荷而无磁荷. 然而不妨假定粒子也有磁荷并考察其后果. 分别以 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{\vec{j}}$ 代表磁荷和磁流密度(组成 4 磁流密度 $\hat{J}^a\equiv\hat{\rho}Z^a+\hat{j}^a$), 并把麦氏方程推广为如下对称形式:

$$\text{(a)}\ \mathrm{d}^*\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\boldsymbol{J},\quad \text{(b)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\hat{\boldsymbol{J}}\,. \tag{12-6-17}$$

对闵氏时空的惯性系, 这相当于把 3 维形式的麦氏方程推广为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=4\pi\hat{\rho},\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-4\pi\hat{\vec{j}}-\partial\vec{B}/\partial t,\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=4\pi\vec{j}+\partial\vec{E}/\partial t\,.$$

不难证明(习题), 如果在对 $(\boldsymbol{F}, {}^*\boldsymbol{F})$ 作式(12-6-13)的对偶变换[变为 $(\boldsymbol{F}', {}^*\boldsymbol{F}')$]的同时对二元组 $(\boldsymbol{J},\hat{\boldsymbol{J}})$ 作如下的对偶变换[变为 $(\boldsymbol{J}',\hat{\boldsymbol{J}}')$]:

$$\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{J}\cos\alpha-\hat{\boldsymbol{J}}\sin\alpha\,,\quad \hat{\boldsymbol{J}}'=\boldsymbol{J}\sin\alpha+\hat{\boldsymbol{J}}\cos\alpha\,, \tag{12-6-18}$$

则方程(12-6-17)形式不变, 即 $\boldsymbol{F}', \boldsymbol{J}'$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}'$ 满足

$$\text{(a)}\ \mathrm{d}^*\boldsymbol{F}'=4\pi{}^*\boldsymbol{J}',\quad \text{(b)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{F}'=4\pi{}^*\hat{\boldsymbol{J}}'\,. \tag{12-6-17'}$$

有源麦氏方程(12-6-17)是电磁场的演化方程, 反映场源对场的影响. 反之, 电磁场

则通过施加洛伦兹力影响带电粒子的运动. 考虑磁荷后, 闵氏时空中带电粒子所受洛伦兹力的公式要相应修改为

$$\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})+\hat{q}(\vec{B}-\vec{u}\times\vec{E}), \tag{12-6-19}$$

其中 $q, \hat{q}$ 和 $\vec{u}$ 分别代表粒子的电荷、磁荷及 3 速, 第二项代表粒子因为有磁荷而受到的电磁场力. 为便于推广至弯曲时空, 可将上式改写为 4 维形式

$$F^a=qF^a{}_bU^b-\hat{q}\,{}^*F^a{}_bU^b, \tag{12-6-20}$$

其中 $F^a{}_b\equiv g^{ac}F_{cb}$, U^a 为粒子 4 速, F^a 为粒子所受 4 洛伦兹力. 直接计算表明洛伦兹力 $\vec{f}$ 和 F^a 在联合对偶变换(12-6-13)、(12-6-18)下不变, 就是说, 设 $\vec{f}'$ 和 F'^a 分别是粒子在变换后所受的洛伦兹 3 力和 4 力, 即

$$\vec{f}'=q'(\vec{E}'+\vec{u}\times\vec{B}')+\hat{q}'(\vec{B}'-\vec{u}\times\vec{E}'), \tag{12-6-19$'$}$$

$$F'^a=q'F'^a{}_bU^b-\hat{q}'\,{}^*F'^a{}_bU^b, \tag{12-6-20$'$}$$

则

$$\vec{f}'=\vec{f}, \qquad F'^a=F^a. \tag{12-6-21}$$

我们关心弯曲(含平直)时空中的有源电磁场, 这里存在三者的相互作用:①电磁场, ②带电粒子场, ③时空度规场. 电磁场受到的来自其他两者的影响体现在有源麦氏方程(12-6-17)中, 反之, 电磁场通过洛伦兹力影响带电粒子场, 通过 T_{ab} 影响度规场. 麦氏方程、洛伦兹力以及 T_{ab} 在联合对偶变换(12-6-13)、(12-6-18)下的不变性说明对偶变换是一种不改变物理实质的变换, 没有可观测的物理效应. 再回到 RN 时空. 由式(12-6-18)得

$$\rho'=\rho\cos\alpha-\hat{\rho}\sin\alpha, \quad \hat{\rho}'=\rho\sin\alpha+\hat{\rho}\cos\alpha, \tag{12-6-22}$$

§8.4 关于星体有电荷无磁荷($\rho\neq 0, \hat{\rho}=0$)的说法只适用于 $\alpha=0$ 或 π 的情况, 由上式可知对偶变换后对其他 α 值有 $\hat{\rho}'=\rho\sin\alpha\neq 0$, 即星体有磁荷. 如果有人说 RN 时空的星体既有电荷又有磁荷($\rho'\neq 0, \hat{\rho}'\neq 0$), 你只要做一个 $\tan\alpha=-\hat{\rho}/\rho$ 的对偶变换便成为有电荷无磁荷($\rho\neq 0, \hat{\rho}=0$)的情况, 两者等效(见习题 12). 所以"粒子只有电荷没有磁荷"的习惯说法其实只是一种方便的说法. 然而有一个实质性问题: 星体中既有质子又有电子, 而上式中的 α 取决于 $\hat{\rho}/\rho$, 如果质子的磁荷电荷比 $k\equiv\hat{q}/q$ 不等于电子的磁荷电荷比, 就不存在一个统一的 α 把 $\rho'\neq 0, \hat{\rho}'\neq 0$ 变为 $\rho\neq 0, \hat{\rho}=0$. 可见问题的实质不在于粒子是否可以有磁荷而在于是否所有粒子都有相同的磁荷电荷比 $k\equiv\hat{q}/q$. 如果有相同 k 值, 就可选适当角度 α 通过对偶变换实现 $\hat{\rho}=0$, 相应于所有粒子都无磁荷. 或者, 在所有粒子都有相同 k 值的情况下也可说电子、质子除电荷外还有磁荷, 而且你想说它们的磁荷是多少就是多少(只须

保证它们的 k 相同). 测试表明电子、质子和中子的 k 值在非常高的精度下相等, 但其他(不稳定)粒子的 k 值是否也与它们一样则还有待进一步实验研究. Dirac 在 1931 年提出, 只要存在一个有磁荷而没有电荷的粒子(称为**磁单极子**, 即 magnetic monopole), 则电荷的量子性(电荷只能是某一基本单位的整数倍)这一从未被解释过的实验事实就可得到解释[见 Dirac(1948); Jackson(1975)]. 由此引发了寻找磁单极子的无数实验, 但至今尚未出现完全肯定的结果. 我们不拟进一步涉及这一实质性问题(简称为"磁单极子存在性"问题)的理论探讨和观测验证, 只想说明, 如果所有粒子都有相同 k 值(这意味着磁单极子不存在), 则麦氏方程既可写成含磁荷的对称形式也可写成不含磁荷的原始形式; 反之, 则麦氏方程必须写成含磁荷的形式(对原始麦氏方程必须做实质性修改), 但仍可说电子、质子、中子等的磁荷为零. 把熟知的麦氏方程推广为式(12-6-17)后, 便可仿照式(12-6-4)定义任一类空超曲面 Σ 的总磁荷为

$$\hat{Q}(\Sigma) := \int_\Sigma {}^*\hat{\boldsymbol{J}} , \tag{12-6-23}$$

若用麦氏方程的通常形式, 则 $\hat{Q}$ 显然为零. 由式(12-6-17b)易见上式又可改写为

$$\hat{Q}(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{F} , \tag{12-6-24}$$

设 S 是 Σ 的边界, 则又有

$$\hat{Q}(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_S \boldsymbol{F} . \tag{12-6-25}$$

作为简单例子, 请读者对静态球对称带电恒星(电荷为 Q)外的电磁场 F_{ab} 作一对偶变换再计算恒星的电荷 Q' 和磁荷 $\hat{Q}'$, 你将发现 $\hat{Q}'$ 可以非零, 而且 $\hat{Q}'^2 + Q'^2 = Q^2$.

[选读 12-6-2 完]

12.6.2 闵氏时空的守恒量

仿照电荷的定义方式, 可在闵氏时空中方便地定义一批守恒量. 设 T_{ab} 是闵氏时空中物质场的能动张量,① ξ^a 是任一 Killing 矢量场, 定义 1 形式场

$$L_a := -T_{ab}\xi^b , \tag{12-6-26}$$

则 T_{ab} 的对称性 $T_{ab} = T_{(ab)}$、无散性 $\partial^a T_{ab} = 0$ 以及 ξ^a 的 Killing 性导致

① 忽略 T_{ab} 造成的时空弯曲, 近似地认为时空仍为闵氏时空. 这是狭义相对论的基本处理手法.

$$\partial_a L^a = -T^{ab}\partial_a \xi_b = -T^{(ab)}\partial_{[a}\xi_{b]} = 0 . \tag{12-6-27}$$

仿照式(12-6-3)有

$$(\mathrm{d}^* L)_{abcd} = (\partial_e L^e)\,\varepsilon_{abcd} = 0 , \tag{12-6-28}$$

可见 $^*\boldsymbol{L}$ 类似于上小节的 $^*\boldsymbol{J}$. 仿照电荷 Q 的定义, 对每一 Killing 场 ξ^a 定义一个物理量

$$P_\xi := \int_\Sigma {}^*\boldsymbol{L} \ , \tag{12-6-29}$$

(Σ 是任一类空柯西面, 当 T_{ab} 满足无限远条件使积分存在时此定义有意义.) 则 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{L} = 0$ 保证 P_ξ 同所选柯西面无关, 因而是守恒量. 以 n^a 代表 Σ 的指向未来单位法矢, 则 ε_{abcd} 在 Σ 上的诱导体元为 $\varepsilon_{abc} = n^d \varepsilon_{dabc}$, $^*\boldsymbol{L}$ 在 Σ 上的限制 $^*\tilde{\boldsymbol{L}}$ 可表为 $(L^d \varepsilon_{dabc})^\sim = \mu\varepsilon_{abc}$, 以 ε^{abc} 缩并, 右边给出 6μ, 左边给出

$$\varepsilon^{abc}(L^d \varepsilon_{dabc})^\sim = \varepsilon^{abc} L^d \varepsilon_{dabc} = n_e \varepsilon^{eabc} L^d \varepsilon_{dabc} = -6 n_d L^d ,$$

(读者应能根据 ε_{abc} 是 Σ 的体元说明第一步的理由.) 由此得 $\mu = -L_a n^a$, 从而

$$(L^d \varepsilon_{dabc})^\sim = -n^d L_d \varepsilon_{abc} = T_{de}\xi^e n^d \varepsilon_{abc} ,$$

于是式(12-6-29)便可表为

$$P_\xi = \int_\Sigma T_{ab} n^a \xi^b . \tag{12-6-30}$$

P_ξ 的物理意义取决于定义 $\boldsymbol{L}$ 时所用的 ξ^a 是哪一类 Killing 矢量场, 分类列举如下 [为方便起见, 取 Σ 为任一惯性系 $\{t, x^i\}$ 的同时面, 这时 $n^a = (\partial/\partial t)^a$].

1. 若 $\xi^b = (\partial/\partial t)^b$ (类时平移 Killing 场), 则

$$P_\xi = \int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \int_\Sigma \rho\, \mathrm{d}^3 x = E , \tag{12-6-31}$$

其中 ρ 和 E 分别是所用惯性系测得的物质场能密度和 Σ 的总能量. P_ξ 守恒即能量守恒.

2. 若 $\xi^b = (\partial/\partial x^i)^b$ (类空平移 Killing 场), 则

$$P_\xi = \int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = \int_\Sigma T_{0i}\, \mathrm{d}^3 x = -\int_\Sigma w_i\, \mathrm{d}^3 x , \tag{12-6-32}$$

其中 w_i 是所选惯性系测得的物质场的 3 动量密度的 i 分量, P_ξ 守恒即 3 动量守恒.

3. 若 $\xi^b = -x^2(\partial/\partial x^1)^b + x^1(\partial/\partial x^2)^b$ (空间转动 Killing 场), 则

$$-P_\xi = \int_\Sigma (x^1 w_2 - x^2 w_1)\mathrm{d}^3 x = \text{该系测得的 } \Sigma \text{ 的角动量的第 3 分量}, \qquad (12\text{-}6\text{-}33)$$

其他两个分量的讨论仿此. 所以 P_ξ 守恒即角动量守恒.

4. 若 $\xi_i{}^b = t(\partial/\partial x^i)^b + x^i(\partial/\partial t)^b$ (伪转动 Killing 场), 则

$$T_{ab}(\partial/\partial t)^a \xi_i{}^b = -t\, w_i + \rho x^i .$$

因每一等 t 面都是 3 维欧氏空间, $(\partial/\partial x^i)^a$ 是切于 Σ 的矢量场, 不妨使用 3 维矢量语言(以箭头代表 3 矢). 令 $\vec{w} \equiv w^i(\partial/\partial x^i)^a$, $\vec{r} \equiv x^i(\partial/\partial x^i)^a$ (场点的位矢), 以及 $\vec{P} \equiv P_{\xi_i}(\partial/\partial x^i)^a$, 则

$$\vec{P} = \int_\Sigma (-t\vec{w} + \rho\vec{r})\mathrm{d}^3 x = -t\vec{W} + \int_\Sigma \rho\vec{r}\,\mathrm{d}^3 x , \qquad (12\text{-}6\text{-}34)$$

其中 $\vec{W} \equiv \int_\Sigma \vec{w}\,\mathrm{d}^3 x$ 是物质场在 t 时刻的总动量. P_{ξ_i} 守恒给出 $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = 0$. 以 $\vec{R}$ 代表场的质心的位矢, 则

$$\vec{R} \equiv \frac{\int_\Sigma \rho\vec{r}\,\mathrm{d}^3 x}{\int_\Sigma \rho\,\mathrm{d}^3 x} = \frac{\int_\Sigma \rho\vec{r}\,\mathrm{d}^3 x}{E} = \frac{t\vec{W} + \vec{P}}{E} , \qquad (12\text{-}6\text{-}35)$$

由式(12-6-34)、(12-6-35)及 $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = 0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[(t\vec{W} + \vec{P})/E]}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{W}}{E} = \text{常矢量}, \text{(因已知 } E \text{ 和 } \vec{W} \text{ 是守恒量)}$$

所以 P_{ξ_i} 守恒给出: 物质场的质心作匀速直线运动, 速度为 $\vec{W}/E$.

若 Σ 是惯性系 $\{t, x^i\}$ 的同时面而 Σ' 是任一其他柯西面(图 12-20), Killing 矢量场 ξ^b 仍选为 $(\partial/\partial t)^b$, 则 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{L} = 0$ 保证

$$\int_\Sigma T_{ab} n^a \xi^b = \int_{\Sigma'} T_{ab} n'^a \xi^b , \qquad (12\text{-}6\text{-}36)$$

虽然被积函数 $T_{ab} n'^a \xi^b$ 不再能解释为某观者(或某参考系)测得的能量密度, 但仍把 $\int_{\Sigma'} T_{ab} n'^a \xi^b$ 定义为 Σ' (关于 ξ^b)的能量, 以使式(12-6-36)仍代表能量守恒. 一个有

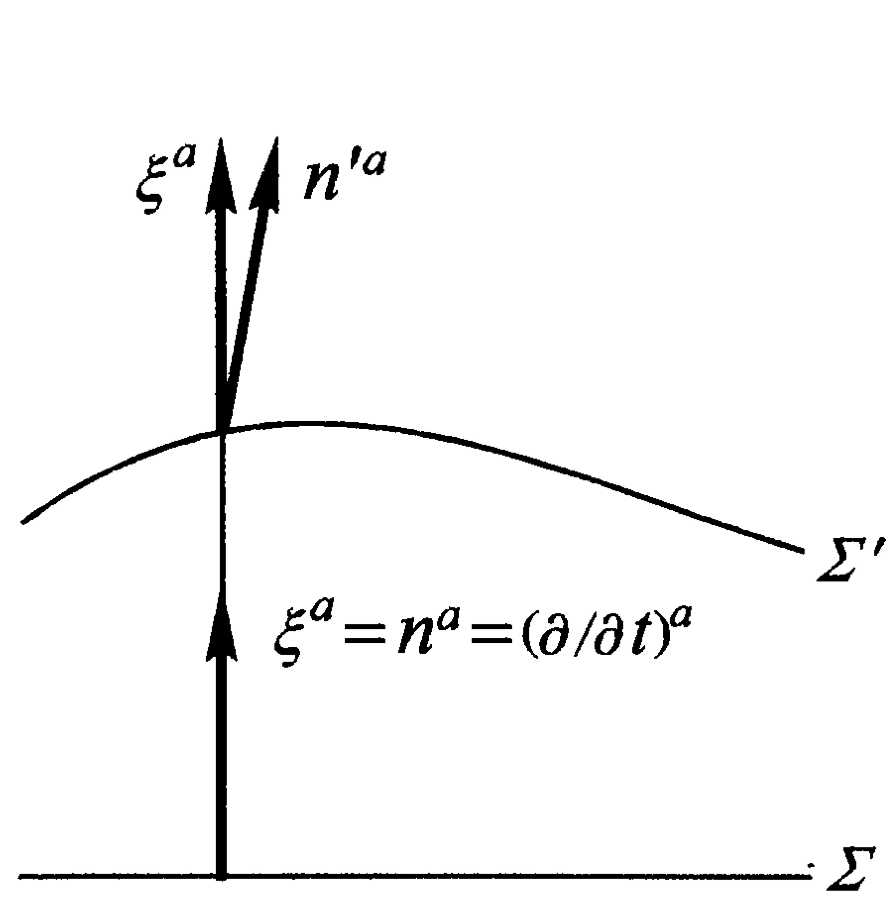


图 12-20　柯西面 Σ 和 Σ'

趣的特例是当 Σ' 为另一惯性系 $\{t',x'^i\}$ 的同时面的情况. 这时式(12-6-36)右边可以表为 $\int_{\Sigma'} T_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial t)^b$，而该式左边原已表为 $\int_\Sigma T_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b = E$，故

$$\int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b, \qquad (12\text{-}6\text{-}37)$$

两者相等的关键原因是两者涉及同一平移 Killing 矢量场 ξ^b，即 $(\partial/\partial t)^b$. 然而, 如果把 ξ^b 改为 $\xi'^b \equiv (\partial/\partial t')^b$，则有

$$\int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b = \int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b, \qquad (12\text{-}6\text{-}38)$$

而且与式(12-6-37)的量不等. $T_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial t')^b \equiv \rho'$ 可解释为 $\{t',x'^i\}$ 系测得的能量密度, 所以式(12-6-38)右边可解释为柯西面 Σ' 关于 ξ'^b 的总能量 E'，它一般不等于 Σ' 关于 ξ^b 的总能量 $E \equiv \int_{\Sigma'} T_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial t)^b$. 总之, 选定一个类时平移单位 Killing 场 ξ^b 后就有一个确定的能量 $E \equiv \int_\Sigma T_{ab}n^a\xi^b$ (Σ 为任意柯西面), E 与柯西面 Σ 的无关性就可解释为能量的守恒性.

以 $\mathscr{T}$ 代表闵氏时空全体平移 Killing 矢量场的集合, 则它是个 4 维矢量空间(其实还是 Poincaré 李代数的 4 维子代数). T_{ab} 给定后, $\mathscr{T}$ 的每一元素通过式(12-6-30)对应于一个实数 P_ξ (与柯西面 Σ 的选择无关), 可见, 给定 T_{ab} 就给定了一个从 $\mathscr{T}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射, 于是每一 T_{ab} (每一孤立物质场)对应于矢量空间 $\mathscr{T}$ 上的一个对偶矢量, 称为该物质场的**总 4 动量**(total 4-momentum), 可记作 P. 应该注意 P 是矢量空间 $\mathscr{T}$ 上的对偶矢量而不是闵氏时空 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上的对偶矢量场. 若要给 P 加抽象指标, 为避免混淆最好改用大写拉丁字母 $A, B, \cdots$，即把总 4 动量记作 P_A，它的作用对象是 $\mathscr{T}$ 的元素 ξ^A，[ξ 作为 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上的矢量场应记作 ξ^a； 作为 $\mathscr{T}$ 的元素则应记作 ξ^A.] 即

$$P_\xi = P_A\xi^A \equiv \int_\Sigma T_{ab}n^a\xi^b . \qquad (12\text{-}6\text{-}39)$$

下面举一具体例子. 设 F_{ab} 是闵氏时空的无源电磁场, 其能动张量 T_{ab} 满足适当无限远条件使 $\int_\Sigma T_{ab}n^a\xi^b$ 存在, 则 T_{ab} 决定一个总 4 动量 P_A. 设 Σ 是某惯性系 $\{t,x^i\}$ 的同时面, 则 P_A 作用于类时平移单位 Killing 场 $(\partial/\partial t)^A \in \mathscr{T}$ 的结果可借 Σ 计算:

$$P_A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^A = \int_\Sigma T_{ab}n^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma (E^2+B^2) = \mathscr{E},$$

(其中 E, B 代表 $\{t,x^i\}$ 系测得的 $\vec{E},\vec{B}$ 的大小, 电磁场总能量改用 $\mathscr{E}$ 表示, 倒数第二步的理由见第 6 章习题 17.) 设 Σ' 是另一惯性系 $\{t',x'^i\}$ 的同时面[单位法矢为 $n'^a=(\partial/\partial t')^a$], 则 P_A 作用于类时平移单位 Killing 场 $(\partial/\partial t')^A\in\mathscr{T}$ 的结果为

$$P_A\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^A=\int_{\Sigma'}T_{ab}n'^a\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b=\int_{\Sigma'}T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b=\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma'}(E'^2+B'^2)=\mathscr{E}',$$

其中 E',B' 代表 $\{t',x'^i\}$ 系测得的 $\vec{E}',\vec{B}'$ 的大小, $\mathscr{E}'$ 则代表该系测得的电磁场的总能量. 注意到 $\{(\partial/\partial t)^A,(\partial/\partial x^i)^A\}$ 和 $\{(\partial/\partial t')^A,(\partial/\partial x'^i)^A\}$ 是 4 维矢量空间 $\mathscr{T}$ 的两个基底, 可知 $\mathscr{E}\equiv P_A(\partial/\partial t)^A$ 和 $\mathscr{E}'\equiv P_A(\partial/\partial t')^A$ 之间的关系就是 $\mathscr{T}$ 上同一对偶矢量 P_A 在两个基底的第 0 分量 P_0 和 P_0' 的变换关系, 两者一般不等(类似于不同观者测同一质点的 4 动量所得能量的关系). 等式

$$\int_{\Sigma}T_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b=\int_{\Sigma'}T_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial t)^b$$

反映能量是守恒量, 而不等式

$$\int_{\Sigma}T_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b\neq\int_{\Sigma'}T_{ab}(\partial/\partial t')^a(\partial/\partial t')^b$$

则反映能量在坐标变换下不是不变量.

类似地, 以 Σ 代表惯性坐标系 $\{t,x^i\}$ 的同时面, 则 P_A 作用于类空平移单位 Killing 矢量场 $(\partial/\partial x^i)^a$ 的结果为

$$P_A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^A=\int_{\Sigma}T_{ab}n^a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b=\int_{\Sigma}T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b=-\int_{\Sigma}w_i=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}(\vec{E}\times\vec{B})_i,$$

上式右边是由 $(\partial/\partial t)^a$ 代表的观者们测得的电磁场 3 动量的 i 分量的负值(见第 6 章习题 17), 它也是守恒量, 因为对任一柯西面 Σ' 有

$$\int_{\Sigma'}T_{ab}n'^a(\partial/\partial x^i)^b=\int_{\Sigma}T_{ab}n^a(\partial/\partial x^i)^b\ .$$

总之, 选定惯性系后, 电磁场的总 4 动量 P_A(作为 $\mathscr{T}$ 上的对偶矢量)的分量可表为

$$P_\mu=(P_0,P_i),\ \text{其中}\ P_0=\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma}(E^2+B^2)=\mathscr{E},$$

$$P_i=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}(\vec{E}\times\vec{B})_i=-W_i. \tag{12-6-40}$$

12.6.3 引力能量的非定域性

闵氏时空的守恒量 P_ξ 的存在性密切依赖于 Killing 矢量场的存在性. 弯曲时空原则上可以不存在 Killing 矢量场(处处为零者除外), 虽然其物质场的能动张量仍然满足 $T_{ab}=T_{ba}$ 和 $\nabla^a T_{ab}=0$, 却不能仿照闵氏时空的方法定义守恒量. 人们熟知的能量、动量和角动量守恒律在广义相对论中变成微妙而复杂的问题. 例如, 根据定义, 非稳态时空不存在类时 Killing 矢量场, 如果用一个不是 Killing 的类时矢量场代替小节12.6.2 的 $(\partial/\partial t)^a$ 定义 E, 则 E 不具有守恒性. 你可以认为 E 的非守恒性是由于没有考虑引力场的能量, 而这就引出了引力场能量这一复杂问题. 问题的复杂性同样起因于度规的双重角色性. 作为几何背景, 度规似乎没有能量可言; 然而作为描写引力场的动力学变量, 度规(引力场)又应具有能量. 研究表明弯曲时空中即使没有物质场($T_{ab}=0$)也可以存在引力波, 它也应携带能量. (引力波带走能量使脉冲双星 PSR1913+16 的轨道变小和周期变短的效应已被非常精确的测量所验证, 见 §7.9.) 与此有关的另一事实是引力系统的总能量必然包含引力势能: 两个相对瞬时静止的物体的总能量必小于每个物体单独存在时的能量之和, 其差别正是引力势能. 然而引力场能在这两种(及任何)情况下的表现都是非局域性的. 不存在与闵氏时空的 L_a 类似的、描写引力场对能量、动量和角动量的贡献的局域量. Bondi(及合作者)和 Sachs 曾于 1962 年先后找到引力波在无限远处的能流的精确表达式, 但它不能由时空的局域几何决定, 因为即使在局域平直时空中它也可非零. 其实爱因斯坦方程 $G_{ab}=8\pi T_{ab}$ 中的 T_{ab} 就已包括所有局域能量, 因此 $T_{ab}=0$ 的引力场的能量必然带有非局域的特征. 在广义相对论研究的早期, 许多学者(包括爱因斯坦和朗道、栗弗席兹)千方百计想找出反映引力场对能量(动量)贡献的"引力场能动张量 $t_{\mu\nu}$", 它与 $T_{\mu\nu}$ 之和代表物质场和引力场的总能量(动量)性质(且有守恒性), 然而能够找到的 $t_{\mu\nu}$ 却毫无例外地只是"赝张量"(pseudotensor), 它们不是与坐标系无关的几何客体的坐标分量而是密切依赖于坐标系的量(从定义开始就依赖于坐标系). 它们可以在某些坐标系中为零而在另一些坐标系中非零(选读 12-6-3 将对朗道、栗弗席兹的赝张量做一简介). ① 是否还有可能通过进一步努力找到代表引力场对能量和动量的贡献的不是赝张量的张量?看来答案只能是否定的. 在牛顿力学中, 引力场能密度正比于 $|\vec{\nabla}\phi|^2$ (ϕ 是引力势), 因为在广义相对论的

---

① 赝张量在文献中存在着两种虽有联系但却不同的含义. 第一种涉及该量在坐标反射变换下的表现(赝张量与张量的区别在于一个负号). 本书的赝张量是指第二种含义. 在用抽象指标的陈述中, 赝张量是这样一种张量, 它从定义起就要借助于时空内禀几何以外的附加结构, 诸如某个偏爱的(preferred)坐标系或特定的基底场. 就是说, 赝张量是坐标系(或基底)依赖的张量. 克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ 就是赝张量的一例. 本小节的"引力场能动张量 $t_{\mu\nu}$"是又一例. 第 15 章(下册)的张量密度则是第三例.

牛顿极限中与 ϕ 对应的是度规的有关分量[$\phi = -(1+g_{00})/2$], 所以弯曲时空中引力场能密度的最佳候选者是度规的一阶导数的二次式. 然而, 由度规分量一阶导数能组成的非坐标依赖的唯一张量(协变量)是零. 从物理角度看, 过任一时空点 p 都有许多类时测地线, 其相应的自由下落无自转观者测得的"引力场"为零(全部 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ 在线上为零表明线上"引力场"为零, 见 §7.5), 引力场的能量和动量密度自然也应为零, 可见代表引力场对能量、动量贡献的非零张量非赝张量莫属. 总之, 长期、大量的研究使人们认识到引力场的能量(动量)密度没有意义, 就是说引力场能量(动量)是非定域的. 可以说等效原理是这一结论的总根源. 然而, 既然平直时空的对称性可被用以定义守恒量, 人们自然期望渐近平直时空的渐近对称性可被用以定义全时空的守恒量. 研究表明的确如此: 在渐近平直时空中每一时刻的整个 3 维空间的总能量(含引力场能)有明确意义, 它可用 $T^{00}+t^{00}$ 对全空间的积分求得. 虽然不同作者找到的赝张量 $t^{\mu\nu}$ 的表达式各不相同(存在无限多种不同的"能量表述"), 但用 $(T^{00}+t^{00})$ [或 $(-g)(T^{00}+t^{00})$]作空间积分求得的全空间总能量却一样, 这又一次反映引力场对能量的贡献的整体(非定域)味道. 然而这种做法存在着太多的坐标系依赖性, (不仅 $t^{\mu\nu}$ 依赖于坐标系, 而且在对全空间作积分时也必须采用渐近笛卡儿系, 即越远越接近笛卡儿系的坐标系.) 从而带来许多麻烦和困扰. 于是人们又致力于寻找关于孤立体系总能量的纯几何表述方式, 并借助渐近平直时空的空间无限远和类光无限远(i^0 和 $\mathscr{I}^{\pm}$)的有关概念获得了很好的结果. 下节将对此作适当介绍.

"引力场能密度无意义"的结论使得"对密度作积分以求得给定空间区域的能量"的通常做法成为不可能, 于是"给定空间区域内(给定 2 维闭曲面内)的能量"的概念看来要失去意义. 就是说, 我们一方面必须承认引力场能的存在性, 另一方面, 在涉及引力场能的问题时许多关于能量的习以为常的提法都不许再提, 例如"引力场能量存在于何处?"也成了不许问的问题. [对某一时刻, 允许谈及全空间的能量而不许谈及某一有限空间范围内(含引力场能)的能量.] 这使许多物理学家感到不便甚至困扰, 因此不少学者都曾在承认"引力场能密度无意义"的前提下致力于探寻"**准局域(quasilocal)能(动)量**"(即在给定 2 维闭曲面内的能量和动量)的合理定义. Penrose 是这方面的早期探索者之一, 他在 1981 年以扭量(twistor)为工具对此下过定义. Hawking 也曾在更早时(1968 年)给出过影响较大的准局域量公式. 后来又有许多学者对此做过探讨, 其中 Nester 等(从 1994 起)以 4 维协变哈密顿理论为基础、以微分形式为工具的准局域量定义[见 Nester(2004)]以及 Brown 和 York 用 Hamilton-Jacobi 方法对准局域量所下的定义[见 Brown et al.(1992, 1993, 1997)]更是日渐受到关注. 上述研究后来还引起了若干数学家的兴趣, 他们也做出了很受重视的工作, 例如, 见 Liu(刘秋菊) and Yau(丘成桐)(2003, 2004)及 Shi(史宇光) and

Tam(谭联辉)(2002). 本书将在选读 15-5-2(讲完引力场的哈氏理论之后)对此做一非常粗略的简介. Szabados(2004)对准局域量定义的必要性、困难、有关学者的定义(及其动机、物理图象和问题)以及准局域量的某些可能应用等做了相当详尽的综述. 然而, 也有一些前沿学者对定义准局域量的必要性从根本上不以为然.

[选读 12-6-3]

朗道和栗弗席兹(Landau and Lifshitz)的赝张量的坐标分量表达式为

$$\begin{aligned}t^{\mu\nu} =\frac{1}{16\pi}[&(g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha})(2\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\rho}-\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho})\\&+g^{\mu\lambda}g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}-\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\rho})\\&+g^{\nu\lambda}g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\rho})\\&+g^{\lambda\alpha}g^{\beta\rho}(\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\rho})],\end{aligned} \tag{12-6-41}$$

其中 $g^{\mu\lambda}$ 是时空度规 g_{ab} (之逆)的坐标分量, $\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha}$ 是度规在该系的克氏符. 设 $T^{\mu\nu}$ 是物质场的能动张量的坐标分量, g 是 g_{ab} 在该系的行列式, 则可以证明[见 Carmeli (1982)P.247~249] $t^{\mu\nu}$ 满足

$$[(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})]_{,\nu}=0\,. \tag{12-6-42}$$

上式与 $\nabla_a T^{ab}=0$ (即 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$)的最重要区别是 $(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})$ 的普通(而不是协变)导数为零.借助于坐标语言的 Gauss 定理(略)可从式(12-6-42)得到积分守恒量[见 Carmeli (1982)P.249 和 Misner et al.(1973)P.466]

$$P^{\mu}\equiv\int(-g)(T^{\mu 0}+t^{\mu 0})\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\,,$$

积分遍及 $x^0=0$ 的整个超曲面.通常把 P^{μ} 解释为渐近平直时空中包括引力场贡献的总 4 动量, 其中 P^0 及 P^i 分别为总能量和总 3 动量(的 i 分量), 相应地就把 $(-g)(T^{00}+t^{00})$ 及 $(-g)(T^{i0}+t^{i0})$ 分别解释为总能量密度和总 3 动量(i 分量)密度. 然而朗道和栗弗席兹的 $t^{\mu\nu}$ 以及所有人找到的 $t^{\mu\nu}$ 都只能是赝张量.以式(12-6-41)的 $t^{\mu\nu}$ 而论, 对自由下落无自转观者 G 的固有坐标系, $\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha}|_G=0$ 导致 $t^{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ 在 G 线上为零(与自由下落无自转观者认为"无引力"的物理图象一致).但对其他许多坐标系, G 线上的 $t^{\mu\nu}$ 不全为零. $t^{\mu\nu}$ 的赝张量味道由此可见一斑.

[选读 12-6-3 完]

§ 12.7　渐近平直时空的总能量和总动量

12.7.1　Komar 质(能)量

Komar 把牛顿引力论的质量概念推广, 得到渐近平直稳态时空的总质(能)量的定义, 对理解渐近平直时空的总能量很有帮助. 在牛顿引力论中, 引力系统的总质量为

$$M=\frac{1}{4\pi}\int_S(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S\,,\tag{12-7-1}$$

其中 S 是把所有物质包含在内的任一拓扑 2 球面, $\vec{N}$ 是 S 的外向单位法矢, ϕ是引力势, $-\vec{\nabla}\phi$ 是球面上单位试探质量所受的引力, 因此 $\vec{\nabla}\phi$ 代表为保持单位试探质量在球面上不动所应施加的外力. 由于 ϕ 在物质所在区以外满足 $\nabla^2\phi=0$, 式(12-7-1)的积分与 S 的选择无关. 在推广到广义相对论时, 首先遇到什么叫做"保持不动"的问题, 而这只对稳态时空才有明确含义. 稳态时空存在类时 Killing 矢量场 ξ^a, 可以自然地把世界线与 ξ^a 的积分曲线重合的质点定义为"不动". 按照这一物理解释, 注意到广义相对论的特点, 经一番推导之后, Komar(1959)把式(12-7-1)推广而得渐近平直稳态时空的总质量(能量)的如下定义(详见选读 12-7-1):

$$M_{\rm K}:=-\frac{1}{8\pi}\int_S\varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d\,,\quad (\,M_{\rm K}\text{ 的 K 代表 Komar})\tag{12-7-2}$$

其中 ξ^a 是按如下要求作了"归一化"的类时 Killing 场: $-\xi^a\xi_a$ 在趋于无限远时的极限为 1, ∇_a 和 ε_{abcd} 分别是与时空度规适配的导数算符和体元, S 是任一包围全部物质的拓扑 2 球面. 利用 ξ^a 的 Killing 性可以证明(见选读 12-7-1), 只要把所有物质包围在内, 取任何 2 球面都可由式(12-7-2)得出相同的 $M_{\rm K}$. 由式(12-7-2)定义的 $M_{\rm K}$ 称为 **Komar 质(能)量**. 计算表明(习题), 从施瓦西度规出发用式(12-7-2)求得的 $M_{\rm K}$ 正好等于该度规的质量参数 M, 这从一个侧面验证了式(12-7-2)的合理性.

[选读 12-7-1]

现在介绍从式(12-7-1)到(12-7-2)的推广过程. 先讨论渐近平直静态时空. 设 ξ^a 是反映静态性的超曲面正交类时 Killing 矢量场($-\xi^a\xi_a$ 在趋于无限远时趋于 1), Σ_t 是与 ξ^a 正交的任一超曲面, S 是 Σ_t 内任一包围全部物质的拓扑 2 球面, N^a 是 S 作为 Σ_t 中的超曲面的单位外向法矢(图 12-21). 在球面足够大时引力场甚弱, 式(12-7-1)近似成立. 设球面上某点有一静态观者 $G_{\rm S}$, 其 4 速为 U^a. 以 G 代表自由下落无自转观者, 其世界线在 p 点与 $G_{\rm S}$ 相切, 则由命题 7-4-2 可知 G 在 p 时刻相对

于G_S的 3 加速a^a等于G_S的(绝对)4 加速A^a的负值. 而由牛顿力学又知a^a等于引力势的梯度$\vec{\nabla}\phi$的负值, 所以式(12-7-1)的$\vec{\nabla}\phi$对应于G_S的 4 加速$A^a = U^b\nabla_b U^a$. 注意到式(12-7-1)的$\vec{N}$和$\mathrm{d}S$分别对应于N^a和ε_{ab}(S的面元), 便知式(12-7-1)可改写为

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} A^d N_d \varepsilon_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} \varepsilon_{ab} N_d U^c \nabla_c U^d = \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} \varepsilon_{ab} N_d \xi^c \nabla_c \xi^d , \qquad (12\text{-}7\text{-}3)$$

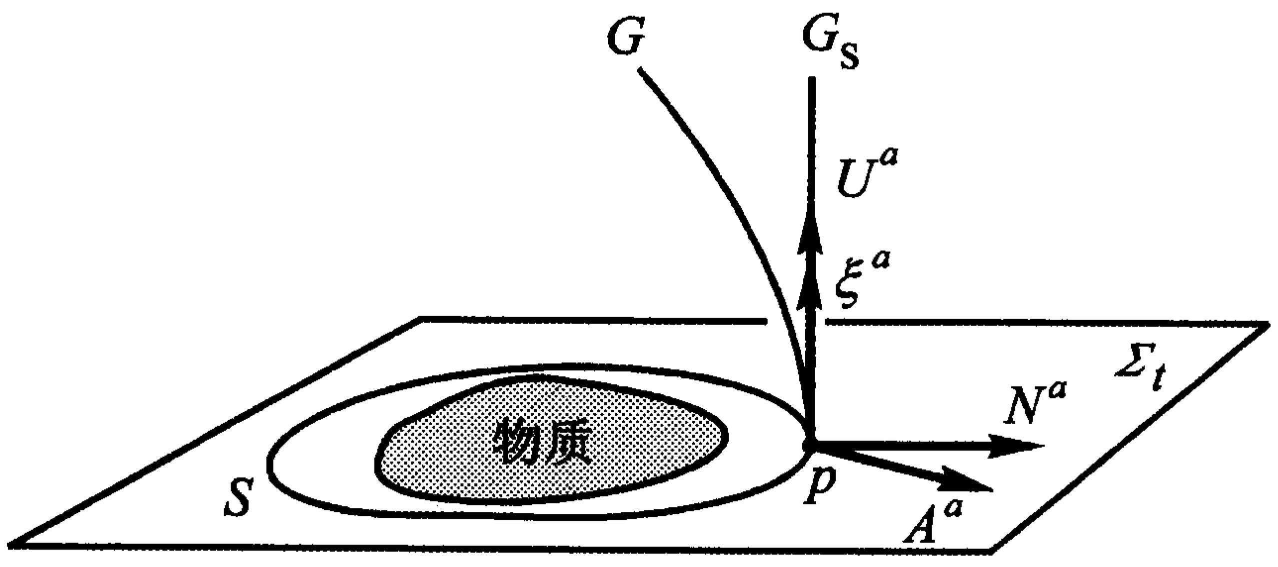


图 12-21 Komar 质量定义为包围全部物质的任一拓扑 2 球面S上的积分. G_S和G分别是静态和自由下落无自转观者

其中S_∞代表足够大("无限远")的球面, 在此条件下牛顿引力论适用, 且$U^c = \xi^c$. 我们希望把上式改写为在包围全部物质的任意 2 球面S上的积分, 它满足:①与S的选择无关; ②在$S = S_\infty$时回到式(12-7-3). 计算表明(见稍后), 只要在把式(12-7-3)的S_∞改为S的同时在被积 2 形式前添加因子χ^{-1}, [$\chi \equiv (-\xi^a\xi_a)^{1/2}$是红移因子, 满足$U^c = \chi^{-1}\xi^c$, 见小节 9.2.1.] 就可满足上述要求. 因此

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_S \varepsilon_{ab}\chi^{-1} N_d \xi^c \nabla_c \xi^d = \frac{1}{4\pi}\int_S \varepsilon_{ab} U_c N_d \nabla^c \xi^d . \qquad (12\text{-}7\text{-}4)$$

然而上式又可改写为式(12-7-2), 证明如下. 令$\omega_{ab} \equiv \varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$, 则$\omega_{ab}$在$S$上的限制$\tilde{\omega}_{ab}$ (作为S上的 2 形式场)与ε_{ab}只能差一函数乘子, 即$\tilde{\omega}_{ab} = K\varepsilon_{ab}$. 以$\varepsilon^{ab} = N_e U_f \varepsilon^{feab}$缩并此式, 右边给出$2K$, 左边给出

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ab}\tilde{\omega}_{ab} &= \varepsilon^{ab}\omega_{ab} = N_e U_f \varepsilon^{feab}\varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = -4N_e U_f \delta^f{}_{[c}\delta^e{}_{d]}\nabla^c\xi^d \\ &= -4N_e U_f \delta^f{}_c \delta^e{}_d \nabla^c\xi^d = -4N_d U_c \nabla^c\xi^d ,\end{aligned}$$

(其中第一步是因为ε_{ab}是S的体元, 第四步用到 Killing 方程$\nabla^c\xi^d = \nabla^{[c}\xi^{d]}$.) 于是得$K = -2U_c N_d \nabla^c\xi^d$, 从而式(12-7-2)右边为

$$-\frac{1}{8\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = -\frac{1}{8\pi}\int_S \tilde{\omega}_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int_S \varepsilon_{ab}(U_c N_d \nabla^c\xi^d),$$

可见式(12-7-4)可改写为式(12-7-2), 即 Komar 质量定义式.

最后证明式(12-7-4)[即式(12-7-2)]满足前面提出的两个要求. 要求②显然满足(因 $\chi^{-1}|_{S_\infty}=1$), 所以只须证明式(12-7-2)的积分与 S 无关. 又因为 $\omega_{ab}\equiv\varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$, 所以只须证 $\int_S\omega=\int_{S'}\omega$, 其中 S 和 S' 都是 Σ_t 中把所有物质包含在内的任意拓扑 2 球面. 以 σ 代表 Σ_t 中介于 S 和 S' 之间的 3 维区域(真空区域), 则由 Stokes 定理可知 $\int_S\omega-\int_{S'}\omega=\int_\sigma \mathrm{d}\omega$, 故只须证 $\mathrm{d}\omega$ 在 σ 上为零. 令 $F_{cd}\equiv\nabla_c\xi_d$, 则 F_{cd} 是 2 形式, 且 $\omega_{ab}=2\,{}^*F_{ab}$. 仿照选读 7-2-2 计算 $\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F}$ 的方法可得

$$\mathrm{d}\omega=2\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F}=-2\varepsilon_{egcd}\nabla_f F^{fe}=-2\varepsilon_{egcd}\nabla_f\nabla^f\xi^e\,.$$

再利用第 4 章习题 14(b)关于 Killing 场 ξ^a 的结果便得 $\mathrm{d}\omega=2\varepsilon_{egcd}R^e{}_a\xi^a$. 由真空爱因斯坦方程可推得真空区域的里奇张量 $R_{ea}=0$, 故 $\mathrm{d}\omega$ 在 σ 上为零. 可见式(12-7-2)的积分同 S 无关. 这一无关性只依赖于 ξ^a 的类时 Killing 性, 因此, 也可把式(12-7-2)推广为任意渐近平直稳态(不一定静态)时空总质量的定义. 静(稳)态时空的时间平移不变性保证 Komar 能量是守恒量. Kerr 时空是稳态而非静态的渐近平直时空的重要例子(详见第 13 章), 因而其 Komar 质量有意义.

Komar 质量还可推广到在无限远附近 $T_{ab}\neq0$ 的渐近平直时空, 只要 T_{ab} 足够快地渐近趋于零, 而且当式(12-7-2)中的 S "趋于无限大" 时积分的极限存在[这时 M_{K} 定义为式(12-7-2)右边的极限]. 带电静态球对称星体外的时空(RN 时空)就是一例. 计算表明(习题)对 RN 时空有 $-(\int_S\varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d)/8\pi=M-Q^2/r$ (M 和 Q 是该时空的参量), 因而其 Komar 质量 $M_{\mathrm{K}}\equiv\lim_{r\to\infty}(M-Q^2/r)=M$.　**[选读 12-7-1 完]**

12.7.2　ADM 4 动量

非稳态时空不存在类时 Killing 矢量场, 因此 Komar 质量的定义不适用. [如果任取一个非 Killing 的类时矢量场充当 ξ^a 代入式(12-7-2), 则无法保证积分同所选球面 S 无关.] 然而, 时空的渐近平直性使时空的总质量(能量)和总动量的定义成为可能, 而且它们可结合而成总 4 动量矢量. 存在两种重要的、不同的而又密切相关的总 4 动量概念, 本小节先介绍其中之一, 即 ADM 4 动量, 是由 Arnowitt, Deser and Misner(1961, 1962)首先提出的. 他们当时用坐标语言对渐近平直时空的能量和 3 动量下定义(选读 15-5-1 对这一定义的动机有进一步的讨论). 设 Σ 是满足一定条件的渐近平直类空超曲面, $\{x^i\}$ 是 Σ 上渐近欧氏(笛卡儿)的 3 维坐标系[详见 Wald(1984)], h_{ij} 是时空度规 g_{ab} 在 Σ 上的诱导度规在 $\{x^i\}$ 系的分量, S 是 $r\equiv[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{1/2}$ 为常数的 2 维球面, N^i 是 S 的单位外向法矢在 $\{x^i\}$

系的分量, 则 ADM 能量定义为

$$E=\frac{1}{16\pi}\lim_{r\to\infty}\int_S(\partial_j h_{ij}-\partial_i h_{jj})N^i \mathrm{d}S\text{，(无论上下指标，重复暗示求和)} \qquad (12\text{-}7\text{-}5)$$

其中 $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. 由于不用 i^0 概念, E 的定义必然涉及极限. 可以证明: ①上式的积分同渐近欧氏坐标系 $\{x^i\}$ 无关; ②对渐近平直的稳态时空, 若取 Σ 渐近正交于类时 Killing 场, 则式(12-7-5)同 Komar 质量公式一致. 以施瓦西时空为例, 取施瓦西坐标系的一个等 t 面为 Σ, 则 g_{ab} 在 Σ 上的诱导线元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=(1-2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\\&=(1-2M/r)^{-1}[\mathrm{d}r^2+(1-2M/r)\,r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]\\&\cong(1+2M/r)\,[\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]\ ,\end{aligned}$$

其中最末一步是因为 r 很大时有 $1-2M/r\cong 1$ 及 $(1-2M/r)^{-1}\cong 1+2M/r$. 令

$$x^1\equiv r\sin\theta\cos\varphi,\ x^2\equiv r\sin\theta\sin\varphi,\ x^3\equiv r\cos\theta\ ,$$

则 $\mathrm{d}s^2\cong(1+2M/r)\,[(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2]\xrightarrow{r\to\infty}(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2$,

可见 $\{x^1,x^2,x^3\}$ 是渐近笛卡儿系, 且渐近地有 $h_{ij}\cong\delta_{ij}(1+2M/r)$. 代入式(12-7-5), 经简单计算(习题)便得 $E=M$.

式(12-7-5)的面积分还可用高斯定理化为 3 维体积分:

$$E=\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma(\partial_i\partial_j h_{ij}-\nabla^2 h_{jj})\,\mathrm{d}^3x\ , \qquad (12\text{-}7\text{-}5')$$

于是 $(16\pi)^{-1}(\partial_i\partial_j h_{ij}-\nabla^2 h_{jj})$ 似乎可看作包含引力场贡献的能量密度. 然而, $\partial_i\partial_j h_{ij}-\nabla^2 h_{jj}$ 既无协变性又无正定性, 把它看作能量密度没有多少好处. 事实上, 存在着许多不同于 $(16\pi)^{-1}(\partial_i\partial_j h_{ij}-\nabla^2 h_{jj})$ 的表达式(包括著名的朗道-栗弗席兹表达式), 它们在全空间的积分都相同(都等于 ADM 能量 E). 由此可知, 虽然包含引力场贡献的"能量密度"没有意义, 它们对全空间的积分却有意义, 而且都等于全空间的总能量.

若干学者在 ADM 文章的基础上用几何语言对 ADM 4 动量作了深入研究. 选读 12-7-2 将介绍 Ashtekar and Hansen(1978) 利用 i^0 点的切空间的几何结构对 ADM 4 动量所下的定义. 人们熟知质点在其世界线上一点 p 的 4 动量 P^a 是 p 点的切空间 V_p 的元素, P^a 的时间和空间分量分别代表质点在该时刻的能量和 3 动量. 自然要问: ADM 4 动量 P^a 是哪个矢量空间的元素? 答案有趣而且意味深长: ADM 4 动量 P^a 是 i^0 点的 4 维切空间 V_{i^0} 的元素, 即 $P^a\in V_{i^0}$, 它可解释为任一时刻 t 的全空

间(由类空超曲面 Σ_t 代表[①])的总 4 动量(不同时刻的全空间有相同的 4 动量的这一结论表明 4 动量守恒), 其"时间分量"和"空间分量"分别代表该时刻全空间的 ADM 能量和 3 动量, 具体说就是: 设 $\hat{n}^a$ 是 Σ_t 在 i^0 点的指向未来的单位法矢, 则 Σ_t 的 ADM 能量 E 和 ADM 3 动量 p^a 分别为

$$E = -P_a \hat{n}^a, \qquad p^a = P^a - E\hat{n}^a, \tag{12-7-6}$$

其中 $P_a \equiv \tilde{g}_{ab}|_{i^0} P^b$. 上式也可表为

$$P^a = E\hat{n}^a + p^a. \tag{12-7-7}$$

若两个类空超曲面 Σ_t 和 $\Sigma_{t'}$ 在 i^0 有相同的单位法矢($\hat{n}^a = \hat{n}'^a$), (对闵氏时空, 同一惯性系的所有同时面都有相同的 $\hat{n}^a$.) 则由式(12-7-6)可知 $E = E'$, 这意味着能量守恒. 但若 $\hat{n}^a \neq \hat{n}'^a$, 则 $E \neq E'$, 不过这不表明能量不是守恒量, 只表明能量不是不变量. 改变 $\hat{n}^a$ 有点类似于讨论质点时改变观者, 质点在世界线上一点 p 有确定的 4 动量 P^a, 但若选 p 点的两个不同的瞬时观者, 测得的能量当然不同. 闵氏时空的电磁场是另一个有助于理解的例子: 设 Σ 和 Σ' 是两个不同惯性系的同时面, 同一电磁场 F_{ab} 在此二系的电场和磁场分别为 $(\vec{E},\vec{B})$ 和 $(\vec{E}',\vec{B}')$, 则两系测得的电磁场总能量 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{E}'$ 分别为 $\mathscr{E} = (8\pi)^{-1}\int_\Sigma (E^2 + B^2)$ 和 $\mathscr{E}' = (8\pi)^{-1}\int_{\Sigma'} (E'^2 + B'^2)$, $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}'$ 一般不等表明两系测得的电磁场能不等(详见小节 12.6.2): 能量在坐标变换下不是不变量.

[选读 12-7-2]

本选读介绍 Ashtekar and Hansen(1978)利用 i^0 点的切空间的几何结构对全时空的守恒量(重点是 ADM 4 动量 P_a)所下的定义. 请先读选读 12-5-2.

在讨论各种物理场的渐近表现时, 我们只关心那些满足某些"好"条件的称为**有正规方向依赖极限**的张量场 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$, 这些条件保证它沿任一曲线趋于 i^0 时(该线切矢在 i^0 为单位长)有方向依赖极限, 记作 $T^{\cdots}{}_{\cdots}(\eta) \equiv \lim_{\to i^0} T^{\cdots}{}_{\cdots}$, 而且 $T^{\cdots}{}_{\cdots}(\eta)$ 对应于 K 上的一个 C^∞ 张量场 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$. [$T^{\cdots}{}_{\cdots}(\eta)$ 中的 η 代表方向依赖性, 每一 η 代表一个趋近 i^0 的方向, 对应于 K 的一点, 因此每个 $T^{\cdots}{}_{\cdots}(\eta)$ 对应于 K 上的一个张量场 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$.] 我们的目的是讨论引力场的渐近表现并给出 ADM 4 动量的几何定义. 作为导引, 先介绍电磁场的渐近表现以及用 i^0 对电荷所下的等价定义. 为此, 把渐近平直时空定义中的渐近真空条件放宽为渐近电磁真空, 并要求 ΩF_{ab} 有正规方向

---

① 只讨论这样的 Σ_t, 添上 i^0 点所得的 $\tilde{\Sigma}_t \equiv \Sigma_t \cup \{i^0\}$ 是 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 的 3 维子流形, 它在 i^0 为 $C^{>1}$. 这一条件使我们可以谈及 Σ_t (准确说是 $\tilde{\Sigma}_t$)在 i^0 点的单位法矢 $\hat{n}^a$.

依赖极限，即 $F_{ab}(\eta)\equiv\lim_{\to i^0}\Omega F_{ab}$ 对应于 K 上的 C^∞ 张量场 $\bar{F}_{ab}$ [用 $F_{ab}(\eta)$ 代表 $\Omega F_{ab}(\eta)$ 以图简洁]. 作为流形 V_{i^0} 中的超曲面，K 上的张量场分为“切于 K 的”和“不切于 K 的”两类. 对矢量场而言，切于就是与 K 的法矢正交，即与法余矢的指标缩并为零.类似地，K 上的任意型张量场 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$ 称为“切于 K 的”，若其每一指标与 K 的法矢(或法余矢)的指标缩并为零(虽然“切于”一词对下指标未必很合适). 回到 $\bar{F}_{ab}$ 来，由于 $\bar{\eta}^a$ 是 K 的法矢场，而 $\bar{\eta}^a\bar{F}_{ab}$ 一般非零，$\bar{F}_{ab}$ 一般不是“切于 K”的张量场，直接用处不大. 令 $\bar{E}_a:=\bar{\eta}^b\bar{F}_{ab}$，$\bar{B}_a:=\bar{\eta}^b\,{}^*\bar{F}_{ab}$，[其中 ${}^*\bar{F}_{ab}$ 是 $\bar{F}_{ab}$ 的对偶形式，求对偶所用的 ε_{abcd} 是 (V_{i^0},η_{ab}) 上与 η_{ab} 适配的体元.] 则易见 $\bar{\eta}^a\bar{E}_a=0$，$\bar{\eta}^a\bar{B}_a=0$，可见 $\bar{E}_a$ 和 $\bar{B}_a$ 是“切于 K”的对偶矢量场. 因 $\bar{F}_{ab}$ 可由 $\bar{E}_a$ 和 $\bar{B}_a$ 表出，① 故 $(\bar{E}_a,\bar{B}_a)$ 代表了 F_{ab} 的全部渐近信息，不妨分别称之为渐近电场和渐近磁场. 由麦氏方程 $\nabla^aF_{ab}=0$ 和 $\nabla_{[a}F_{bc]}=0$ 可推出 $\tilde{\nabla}^aF_{ab}=0$ 和 $\tilde{\nabla}_{[a}F_{bc]}=0$. (见本章习题 3，其中 $\tilde{\nabla}_a$ 与非物理度规 $\tilde{g}_{ab}$ 适配.) 再对后两式取极限又可证明[见 Ashtekar and Hansen(1978)] $\bar{E}_a$ 和 $\bar{B}_a$ 满足如下的渐近电磁场方程:

$$\tilde{\nabla}^aF_{ab}=0\ \Rightarrow\ D^a\bar{E}_a=0,\ D_{[a}\bar{B}_{b]}=0, \tag{12-7-8}$$

$$\tilde{\nabla}_{[a}F_{bc]}=0\ \Rightarrow\ D^a\bar{B}_a=0,\ D_{[a}\bar{E}_{b]}=0, \tag{12-7-9}$$

其中 D_a 是 K 上满足 $D_a\bar{h}_{bc}=0$ 的导数算符($\bar{h}_{bc}$ 是 η_{bc} 在 K 上的诱导度规). 利用 $\bar{E}_a$ 可定义渐近平直时空的总电荷. K 的一个拓扑 2 球截面 C 对应于物理时空中一个类空超曲面 Σ 上的球面序列在“半径趋于无限时的极限”，Σ (代表一个时刻的全空间)的总电荷可定义为

$$Q(\Sigma):=\frac{1}{4\pi}\int_C\bar{E}^a\bar{\varepsilon}_{abc}\,, \tag{12-7-10}$$

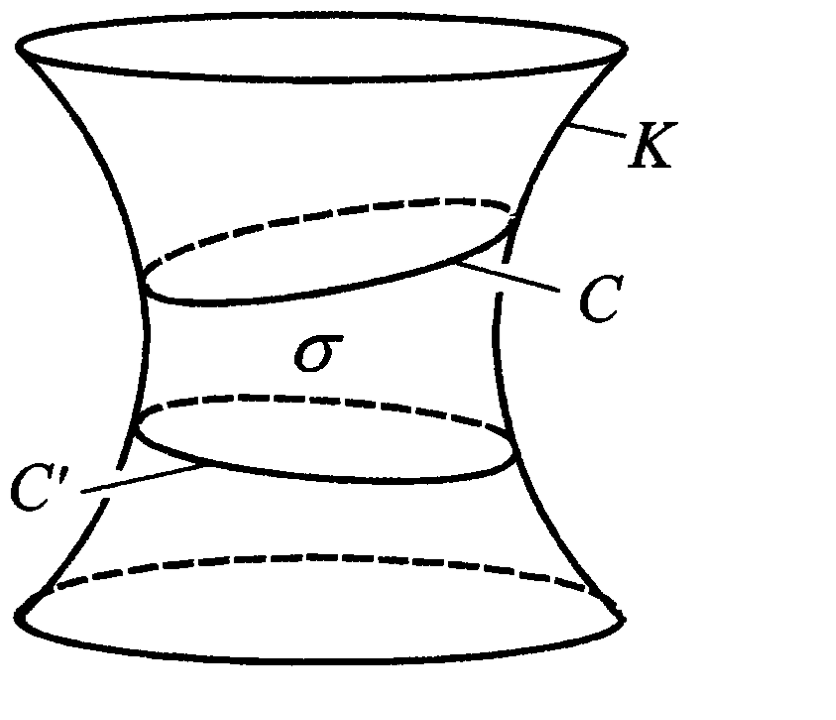


图 12-22 σ 是 K 中位于截面 C 和 C' 之间的 3 维区域

其中 $\bar{\varepsilon}_{abc}$ 是 (V_{i^0},η_{ab}) 的体元 ε_{abcd} 在 K 上诱导的体元. 为证 Q 守恒只须证上式与 C 无关. 把截面 C' 与 C 在 K 中围出的 3 维区域记作 σ (图 12-22)，令 $\beta_{bc}\equiv\bar{E}^a\bar{\varepsilon}_{abc}$，则由 Stokes 定理可得 $\int_{C'}\beta-\int_C\beta=\int_\sigma \mathrm{d}\beta$. 再由 $D^a\bar{E}_a=0$ 又不难证明 $\mathrm{d}\beta=0$，可见 $\int_{C'}\beta=\int_C\beta$，即电荷守恒. 还可证明上式定义的电荷 $Q(\Sigma)$ 与式(12-6-8)定义的 $Q(\Sigma)$ 一致. 类似地，Σ

① $\bar{F}_{ab}=-2\bar{\eta}_{[a}\bar{E}_{b]}+\varepsilon_{abcd}\bar{\eta}^c\bar{B}^d$. 不难验证(练习)此式的确给出 $\bar{\eta}^b\bar{F}_{ab}=\bar{E}_a$，$\bar{\eta}^b\,{}^*\bar{F}_{ab}=\bar{B}_a$.

的总磁荷(也是守恒量)可定义为

$$Q_{磁}(\Sigma) := \frac{1}{4\pi}\int_C \overline{B}^a \overline{\varepsilon}_{abc} \, . \tag{12-7-10'}$$

在此基础上便可讨论渐近引力场.由于渐近真空,而真空时空的里奇张量为零,即黎曼张量等于外尔张量 $C_{abc}{}^d$,故引力场的渐近行为由 $C_{abc}{}^d$ 决定.由渐近平直时空的条件可证 $\Omega^{1/2}C_{abc}{}^d$ 存在方向依赖极限 $C_{abc}{}^d(\eta) \equiv \lim_{\to i^0} \Omega^{1/2}C_{abc}{}^d$,也可用度规 $\tilde{g}_{ab}|_{i^0}$ 降指标而得 $C_{abcd}(\eta)$,它在 K 上对应的张量场 $\overline{C}_{abcd}$ 一般不"切于 K".仿照电磁场的做法,在 K 上定义如下两个张量场(分别称为外尔张量的"电"和"磁"部分):

$$\overline{E}_{ab} := \overline{\eta}^c \overline{\eta}^d \overline{C}_{acbd} \, , \tag{12-7-11}$$

$$\overline{B}_{ab} := \overline{\eta}^c \overline{\eta}^d \varepsilon_{acef} \overline{C}_{bd}{}^{ef} \, , \tag{12-7-12}$$

由反称性 $\overline{C}_{acbd} = \overline{C}_{[ac][bd]}$ 易见 $\overline{\eta}^a \overline{E}_{ab} = 0$, $\overline{\eta}^b \overline{E}_{ab} = 0$ 和 $\overline{\eta}^a \overline{B}_{ab} = 0$, $\overline{\eta}^b \overline{B}_{ab} = 0$,所以 $\overline{E}_{ab}$ 和 $\overline{B}_{ab}$ "切于 K".因为 $\overline{C}_{abcd}$ 可由 $\overline{E}_{ab}$ 和 $\overline{B}_{ab}$ 表出,所以 $(\overline{E}_{ab}, \overline{B}_{ab})$ 完全代表了引力场的渐近信息(一阶),称为渐近引力场.由式(12-7-11)和(12-7-12)以及外尔张量的无迹性可知 $\overline{E}_{ab}$ 和 $\overline{B}_{ab}$ 都对称且无迹(即 $\overline{h}^{ab}\overline{E}_{ab} = 0$, $\overline{h}^{ab}\overline{B}_{ab} = 0$).由于里奇张量 R_{ab} 在无限远附近为零,比安基恒等式可表为 $\nabla_{[a}C_{bc]de} = 0$,由此可证 $\overline{E}_{ab}$ 和 $\overline{B}_{ab}$ 满足如下渐近引力场方程[Ashtekar and Hansen(1978)]:

$$\mathrm{D}_{[a}\overline{E}_{b]c} = 0, \qquad \mathrm{D}_{[a}\overline{B}_{b]c} = 0 \, . \tag{12-7-13}$$

上式同电磁场的 $\mathrm{D}_{[a}\overline{E}_{b]} = 0$ 和 $\mathrm{D}_{[a}\overline{B}_{b]} = 0$ 类似. 为什么没有同 $\mathrm{D}^a\overline{E}_a = 0$ 以及 $\mathrm{D}^a\overline{B}_a = 0$ 类似的方程?答案是这已蕴含于方程(12-7-13)中:用 $\overline{h}^{ac}$ 缩并式(12-7-13),注意到 $\overline{E}_{ab}$ 和 $\overline{B}_{ab}$ 的无迹性,便得 $\mathrm{D}^a\overline{E}_{ab} = 0$ 和 $\mathrm{D}^a\overline{B}_{ab} = 0$. 利用 $\overline{E}_{ab}$ 可以定义 ADM 4 动量 P_a. 小节 12.6.2 讲过闵氏时空中物质场 T_{ab} 的总 4 动量,它是 Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 的 4 维平移子代数 $\mathscr{T}$ 上的对偶矢量. 注意到 SPI 李代数 $\mathscr{G}$ 也存在一个特殊的 4 维平移子代数 $\mathscr{T}_{\mathrm{SPI}} \subset \mathscr{G}$,自然希望把 ADM 4 动量定义为 $\mathscr{T}_{\mathrm{SPI}}$ 上的对偶矢量,即希望 $P_A \in \mathscr{T}_{\mathrm{SPI}}{}^*$. 为此,只须定义 P_A 作用于任一 $u^A \in \mathscr{T}_{\mathrm{SPI}}$ 所得的实数. 这定义为

$$P_A u^A := \int_C \overline{\varepsilon}_{acd} \overline{E}^{ab} \mathrm{D}_b \overline{f}(\omega) \, , \tag{12-7-14}$$

其中 C 和 $\overline{\varepsilon}_{acd}$ 的意义与式(12-7-10)相仿, $\overline{f}(\omega)$ 是 K 上与 u^A 对应的函数. [命题 12-5-14 的证明中已说明 $\mathscr{T}_{\mathrm{SPI}}$ 的每一元素可表为 $f(\omega)v^a$,从而对应一个 $\overline{f}(\omega)$.]

为证明 ADM 4 动量P_A的守恒性，只须证明上式积分与截面C无关. 这一证明依赖于两个公式，第一个是

$$\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)=\bar{h}_b{}^a\bar{\omega}_a, \tag{12-7-15}$$

为证上式，须懂得D_b与∂_b的关系. 设$\bar{\mu}_a$定义在K上且"切于K"，则$\partial_b\bar{\mu}_a$无意义(只当$\bar{\mu}_a$在K的一个开邻域上有定义$\partial_b\bar{\mu}_a$才有意义)，但$\bar{h}_b{}^d\partial_d\bar{\mu}_a$相当于对$\bar{\mu}_a$沿$K$的切向求导，故有意义. 虽有意义，却未必仍"切于$K$"，所以要再投影，这投影$\bar{h}_c{}^a\bar{h}_b{}^d\partial_d\bar{\mu}_a$就可被定义为$\mathrm{D}_b\bar{\mu}_c$. 沿此思路可定义$\mathrm{D}_b$对$K$上"切于$K$"的任何型张量场的作用[见式(14-4-18)]，还可验证按此定义求得的$\mathrm{D}_b\bar{h}_{ac}=0$. 用此定义便可证明式(12-7-15)如下：

$$\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)=\mathrm{D}_b(\bar{\omega}_a\bar{\eta}^a)=\bar{h}_b{}^c\partial_c(\bar{\omega}_a\bar{\eta}^a)=\bar{\omega}_a\bar{h}_b{}^c\partial_c\bar{\eta}^a=\bar{\omega}_a\bar{h}_b{}^a, \tag{12-7-16}$$

其中最末一步用到$\partial_c\eta^a=\delta^a{}_c$[式(12-5-25)]. 证明$P_a$同$C$无关要用到的第二个公式是

$$\mathrm{D}_a\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)=-\bar{f}(\omega)\bar{h}_{ab}, \tag{12-7-17}$$

此式的证明如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)&=\mathrm{D}_a(\bar{h}_b{}^c\bar{\omega}_c)=\bar{h}_b{}^e\bar{h}_a{}^d\partial_d(\bar{h}_e{}^c\bar{\omega}_c)=\bar{h}_b{}^e\bar{h}_a{}^d\partial_d(\bar{\omega}_e-\bar{\eta}_e\bar{\eta}^c\bar{\omega}_c)\\&=\bar{h}_b{}^e\bar{h}_a{}^d\partial_d(\omega_e-\eta_e\eta^c\omega_c)=-\,\omega_c\bar{h}_b{}^e\bar{h}_a{}^d(\eta_e\partial_d\eta^c+\eta^c\partial_d\eta_e)\\&=-\,\omega_c\bar{h}_{be}\bar{h}_a{}^d\eta^c\partial_d\eta^e=-\,\omega_c\bar{h}_{ab}\eta^c=-\bar{f}(\omega)\bar{h}_{ab},\end{aligned}$$

其中第一步用到式(12-7-15)，第二步用到D_a的定义，第四步是因为$\bar{\omega}_e$和$\bar{\eta}^c$分别是ω_e和η^c在K上的值，第五步用到$\partial_a\omega_e=0$(因ω_e是常对偶矢量场)，第六步用到$\bar{h}_b{}^e\bar{\eta}_e=0$(因$\bar{\eta}^a$是$K$的法矢)，第七步用到$\partial_d\eta^e=\delta_d{}^e$. 现在就可证明式(12-7-14)的积分同截面$C$无关. 令$\beta_{cd}\equiv\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^{ab}\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)$，仿照电荷$Q$与$C$无关性的证明，只须证明$\int_\sigma \mathrm{d}\beta=0$($\sigma$的意义见图 12-22). $(\mathrm{d}\beta)_{ecd}=3\bar{\varepsilon}_{a[cd}\mathrm{D}_{e]}(\bar{E}^{ab}\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega))$在$K$上的限制$(\mathrm{d}\beta)^{\sim}_{ecd}=\chi\bar{\varepsilon}_{ecd}$($\chi$为$K$上的函数)，以$\bar{\varepsilon}^{ecd}$缩并得

$$\chi=\mathrm{D}_a(\bar{E}^{ab}\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega))=\bar{E}^{ab}\mathrm{D}_a\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)=-\bar{E}^{ab}\bar{h}_{ab}\bar{f}(\omega)=0,$$

其中第二步用到$\mathrm{D}_a\bar{E}^{ab}=0$，第三步用到式(12-7-17)，第四步用到$\bar{E}^{ab}$的无迹性. 可见$\mathrm{d}\beta=0$，因而 ADM 4 动量守恒. 还可证明这样定义的 4 动量同 ADM 的原始定义等价.

上面把 ADM 4 动量定义为无限小 SPI 平移空间$\mathscr{T}_{\mathrm{SPI}}\subset\mathscr{G}$上的对偶矢量. 注意到$i^0$是空间无限远，物理时空中任一类空柯西面向四面八方无限延伸就"到达"i^0，

我们还希望把 ADM 4 动量等价地定义为 V_{i^0} 上的一个对偶矢量. 这不难办到. 式(12-7-14)的被积 2 形式可用式(12-7-15)改写为

$$\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^{ab}\mathrm{D}_b\bar{f}(\omega)=\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^{ab}\bar{h}_b{}^e\bar{\varpi}_e=\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^{ae}\bar{\varpi}_e=\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^a{}_b\bar{\varpi}^b\ ,$$

所以式(12-7-14)可看作把每一矢量 $\omega\in V_{i^0}$ (上式的 $\bar{\varpi}^b$ 是这个 ω 在流形 V_{i^0} 上造就的常矢量场)变为实数的线性映射, 因而定义了 V_{i^0} 上的一个对偶矢量 $P\in V_{i^0}{}^*$. 这一 P 便是从另一角度去看的 ADM 4 动量, 它对任一 $\omega\in V_{i^0}$ 的作用定义为

$$P(\omega):=\int_C\bar{\varepsilon}_{acd}\bar{E}^a_b\bar{\varpi}^b\ .\ (\text{其中 }\bar{\varpi}^b\text{ 是由矢量 }\omega\in V_{i^0}\text{ 造就的常矢量场})\qquad(12\text{-}7\text{-}18)$$

小结　ADM 4 动量既可看作 $\mathscr{T}_{\text{SPI}}$ (平移子代数) $\subset\mathscr{G}$ (SPI 李代数)上的对偶矢量 P_A, 又可看作 V_{i^0} 上的对偶矢量 P, 左右逢源, 相得益彰.

在借用 i^0 点定义了总(ADM) 4 动量后, 自然还想借它来定义时空的总角动量. 但这时遇到一些困难, 此处简述其中之一. 小节 12.6.2 曾用 10 个独立 Killing 场定义闵氏时空的 10 个守恒量, 其中前 4 个统称为总 4 动量, 不妨把后 6 个统称为总 4 角动量(相当于一个 2 阶张量), 两者可分别看作 Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 的平移子代数 $\mathscr{T}$ 和洛伦兹子代数 $\mathscr{L}$ 上的对偶矢量, 即分别是从 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{L}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射. 然而子代数 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{L}$ 有一个重要区别:可以在 $\mathscr{P}$ 中明确挑出一个子集并宣称它就是 $\mathscr{T}$, 但对 $\mathscr{L}$ 却不能这样做, 因为 $\mathscr{L}$ 与定义它时所用的洛伦兹坐标系的原点选择有关(参见选读 12-5-1 注 6 后). 此结论也可表述为: $\mathscr{P}$ 中不存在一个自然的、与众不同的、与洛伦兹李代数 $\mathscr{L}$ 同构的子李代数.(可见数行前“ $\mathscr{P}$ 的……洛伦兹子代数 $\mathscr{L}$ ”的提法其实并不确切, 因为这样的子代数太多.) 要在 $\mathscr{P}$ 中挑出一个洛伦兹子代数必须先指定 4 个参数(用以确定 4 维洛伦兹坐标系的原点). 作为结果, 闵氏时空的角动量就只能是原点依赖(或说是 4 参数依赖)的.这在物理上也很自然: 角动量当然是原点依赖的! 从闵氏时空向渐近平直时空过渡时, Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 及其平移子代数 $\mathscr{T}$ 分别变为 SPI 李代数 $\mathscr{G}$ 及其超平移子代数 $\mathscr{S}$ (请注意 $\mathscr{P}/\mathscr{T}=\mathscr{L}=\mathscr{G}/\mathscr{S}$), 相应地, 要在 $\mathscr{G}$ 中挑出一个洛伦兹子代数必须先指定无限多个参数(因 $\dim\mathscr{S}=\infty$). 于是, 如果把从每个洛伦兹子代数到 $\mathbb{R}$ 的线性映射定义为一个守恒量, 这个量与我们对角动量的直观认识将非常不同, 因为它竟然依赖于一个无限多维空间的原点! 可见, 要定义出与直观理解相吻合的角动量, 首先应对这种“超平移自由性” 做出适当限制, 即对 i^0 引入某种附加结构以使无限多维的 SPI 李代数 $\mathscr{G}$ 被约化为 10 维的 Poincaré 李代数. (这一约化还有另一动机, 略.) 大致地说, 这相当于对原来的物理时空提出一个附加要求: 它的外尔张量的“磁”部分 $\bar{B}_{ab}$ 的衰减要比“电” 部分 $\bar{E}_{ab}$ 快出一个量级.可以证明 Kerr 时空(一种很重要的渐近

平直时空,详见第 13 章)满足这一要求,而且若干有启发性的思辨表明(虽然还不是证明)有大量孤立体系满足这一要求. 对于满足这一要求的渐近平直时空就可借用 Poincaré 李代数定义其总角动量(含 6 个分量),详见 Ashtekar and Hansen(1978).

[选读 12-7-2 完]

12.7.3 Bondi 4 动量

设孤立引力系统原来处于稳态,从某一时刻开始发射引力波,一段时间后重归稳态. 图 12-23 的阴影部分代表引力场源的世界管. 设 Σ_1 和 Σ_2 是类空超曲面,与引力场源分别相交于发射前和发射后. 乍看起来,Σ_1 和 Σ_2 的能量差 $E_1 - E_2$ 就是引力波带走的能量. 然而,只要 Σ_1 和 Σ_2 到无限远也保持类空,即它们伸至 i^0 点,则 E_1 和 E_2 只能是 Σ_1 和 Σ_2 的 ADM 能量,如果两者在 i^0 满足 $\hat{n}_1{}^a = \hat{n}_2{}^a$,便有 $E_1 = E_2$;如果 $\hat{n}_1{}^a \neq \hat{n}_2{}^a$,则虽然 $E_1 \neq E_2$,也只是由能量的非不变性所致(Σ_1 和 Σ_2 的 ADM 4 动量相等),与引力波无关. 关键在于 Σ_2 截获所有引力波,由引力波携带的能量都在它上面留下印记. 要使引力波不留印记,应改用类光或渐近类光的超曲面 N(图 12-23),它无限延伸后在 $\mathscr{I}^+$ (而非 i^0)上形成截面 C(图 12-24). 它也代表一个时刻,不过不是普通时刻而是推迟时刻 u [类似于式(12-4-16)的 u]. Bondi, van der Burg, and Metzner(1962)用坐标语言对孤立轴对称系统作了开拓性研究,他们精心选择一类坐标系 $\{u,r,\theta,\varphi\}$,其等 u 面代表类光超曲面,每一 u 值代表一个“推迟时刻”. 他们给出了 N 的质量(能量)的定义(后称 **Bondi 能量**),记作 $E(u)$,并证明了如下等式:

$$\frac{\mathrm{d}E(u)}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi n^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta, \tag{12-7-19}$$

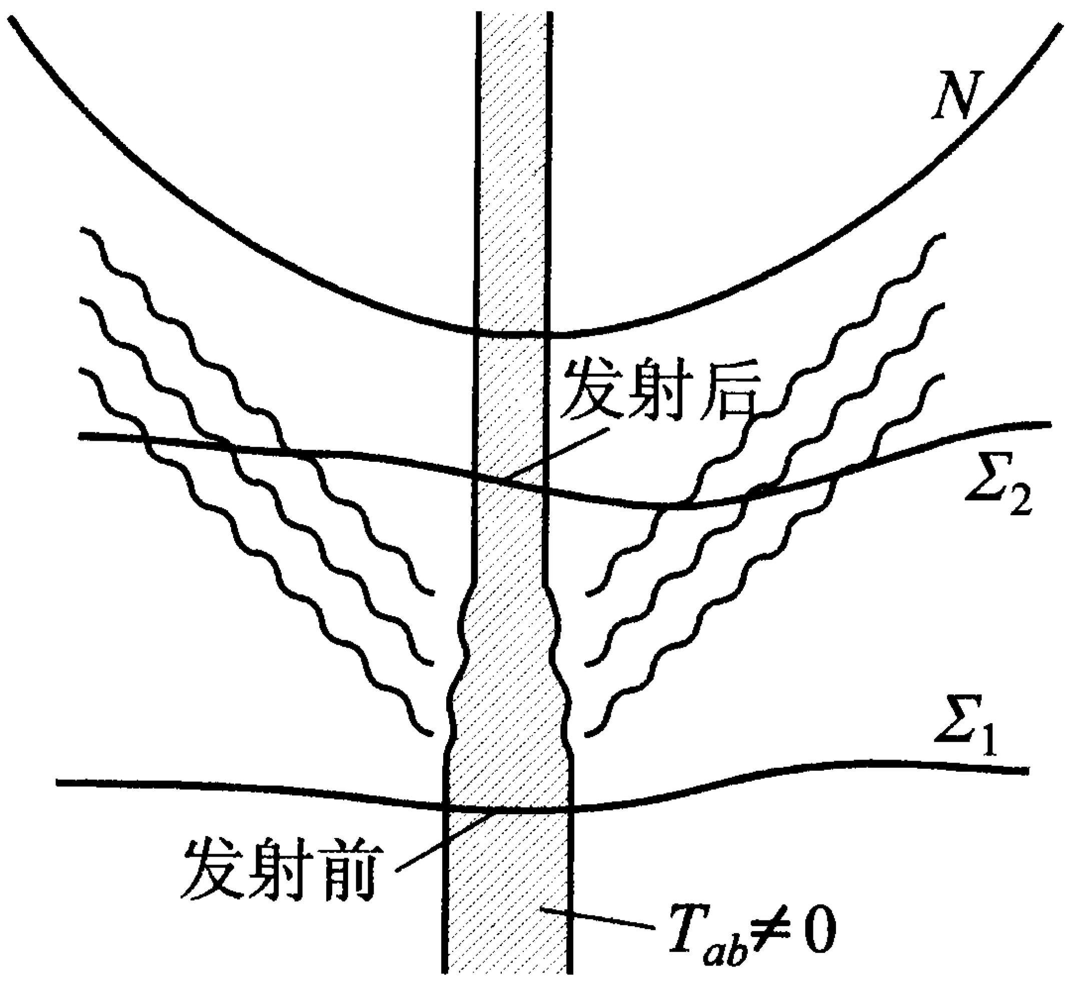


图 12-23　类空超曲面 Σ_2 截获所有引力波,因而能量与 Σ_1 的能量相等. 要讨论引力波带走的能量应考虑渐近类光超曲面 N

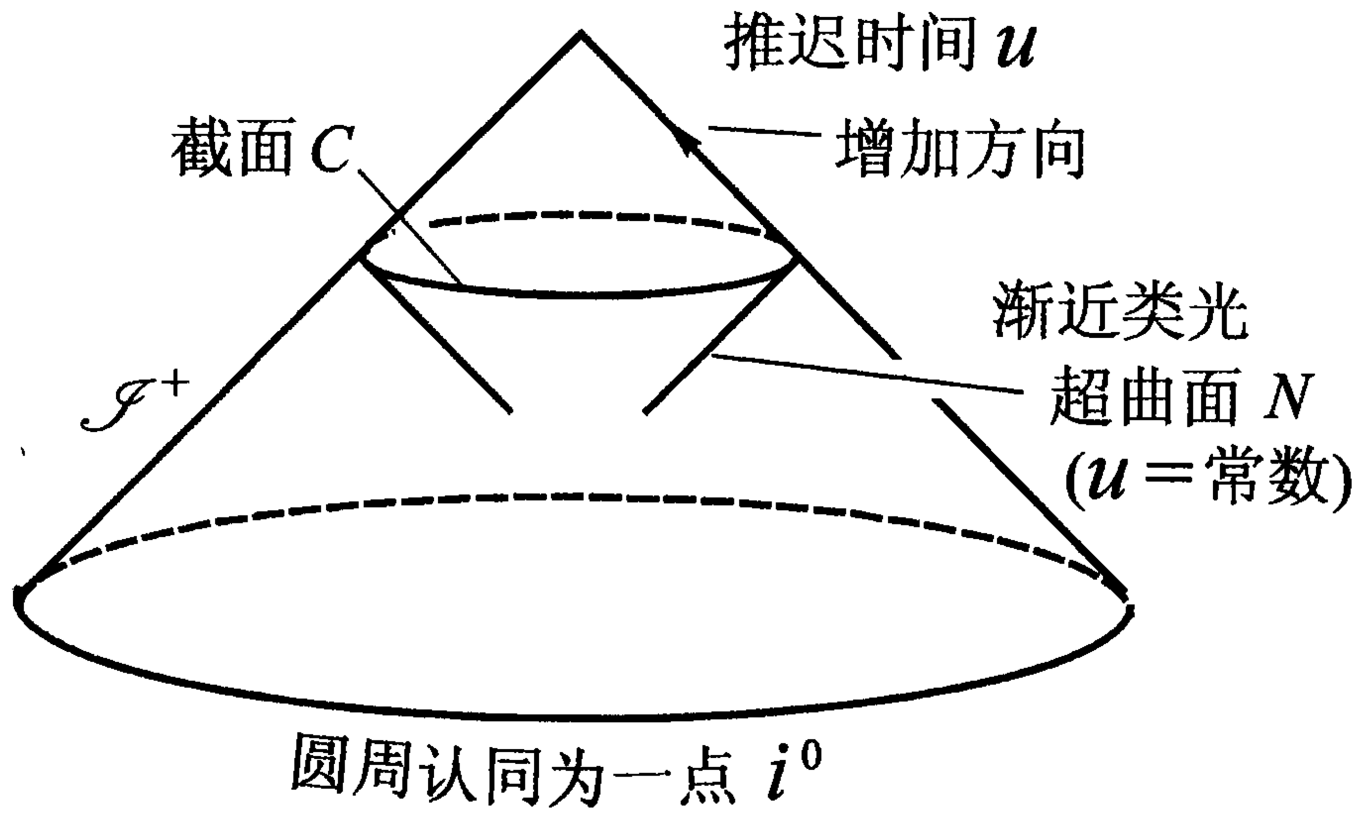


图 12-24　渐近类光超曲面 N 在 $\mathscr{I}^+$ 上形成截面 C

其中 $n(u,\theta)$ 称为**消息函数**(news function). 上式表明 $\mathrm{d}E(u)/\mathrm{d}u \leqslant 0$, 即系统的 Bondi 能量随着时间的推移而减小或不变. 可见引力波在任一推迟时间 $\mathrm{d}u$ 内带走的能量 $-\mathrm{d}E(u)$ 总是正的[有兴趣的读者可读原文或 Ray d'Inverno(1992)的详细介绍(该书第 21 章前 6 节)].

上引文章发表不久, Sachs(1962)就取消了轴对称条件并得出同样结果. 后来, 一系列作者[例如 Penrose(1965b); Winicour(1968); Geroch(1977); Geroch and Winicour(1981)]又用共形无限远概念把有关结果作了重新表述和推广, 简介如下.

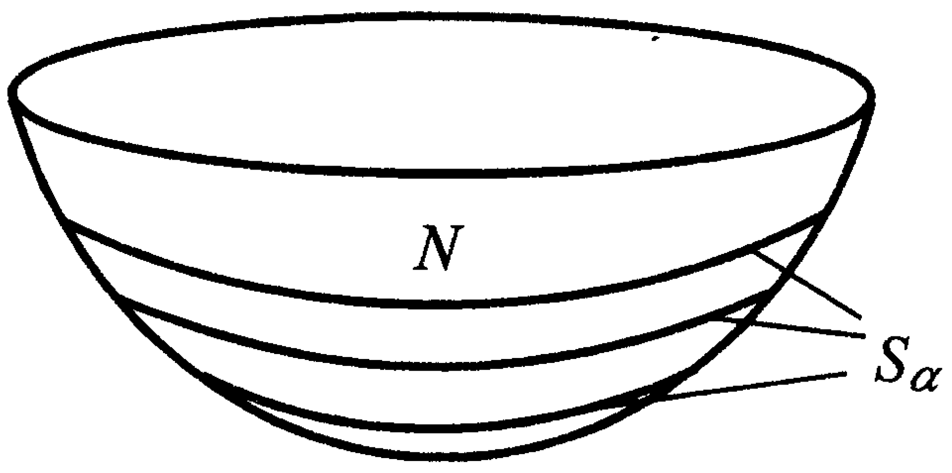


图 12-25　渐近类光超曲面 N 上的单参拓扑 2 球面族 $\{S_\alpha\}$

Komar 质量的定义式(12-7-2)中的 ξ^a 是类时 Killing 矢量场(否则不能保证积分与 S 无关), 因此对非稳态时空没有意义. 然而我们关心的是渐近平直时空的质(能)量定义, 如果使用式(12-7-2), 则积分涉及的 2 维球面 S 自然越大越好(S 越接近无限远结果越准确), 这使我们想到利用 BMS 李代数 $\mathscr{B}$ 的平移子代数 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 中的时间平移元素. 设 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上的一个无限小时间平移对称性, (此处不再把 $\hat{\xi}^a$ 记作 $\hat{\xi}^A$, 否则有诸多不便.) ξ^a 是 (M,g_{ab}) 上与 $\hat{\xi}^a$ 对应的某一矢量场[(M,g_{ab}) 上的无限小渐近时间平移对称性], 自然想用这个 ξ^a 充当式(12-7-2)的 ξ^a. 由于 ξ^a 不是 Killing 矢量场, 式(12-7-2)的积分会与 S 有关, 但因为 ξ^a 越远越接近 Killing 场, 我们期望积分对 S 的依赖会越来越弱, 以致当 S "到达无限远时" 极限存在. 准确地说, 设 $\{S_\alpha\}$ 是渐近类光超曲面 N 上的、趋于 $\mathscr{I}^+$ 上某一截面 C 的单参拓扑 2 球面族(图 12-25), 则可以证明

$$E := -\lim_{S_\alpha \to C} \frac{1}{8\pi} \int_{S_\alpha} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \qquad (12\text{-}7\text{-}20)$$

存在而且与 S_α 趋于 C 的方式无关. 但也存在如下困难: 一个 $\hat{\xi}^a$ 对应于许多等价的 ξ^a, 而且不同 ξ^a 代入式(12-7-20)求得的结果不同. 为克服这一困难, Geroch and Winicour(1981)提出在同一等价类中选 ξ^a 时要满足附加条件

$$\lim_{\to \mathscr{I}^+} \varOmega^{-1} \nabla_a \xi^a = 0\,, \qquad (12\text{-}7\text{-}21)$$

并且证明这样的 ξ^a 一定存在. 虽然同一等价类中满足上式的 ξ^a 也不止一个, 但可以证明用它们求得的 E 相等并等于 Bondi 的 $E(u)$. 于是可把式(12-7-20)定义的 E

称为截面 C 的(或与 C 对应的推迟时刻 u 的)总能量. 对稳态时空, 设 ξ^a 是类时 Killing 矢量场, 则

$$\nabla_a \xi^a = g_{ab}\nabla^b \xi^a = g_{(ab)}\nabla^{[b}\xi^{a]} = 0\text{ , (第二步用到 Killing 方程)}$$

故条件(12-7-21)自动满足, 附加这一条件不会改变稳态时空的 Komar 质量的定义. 式(12-7-20)[连同式(12-7-21)]其实是把 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 中的时间平移元素 $\hat{\xi}^a$ 变为实数 E 的映射, 可以自然推广为线性映射 $\mathscr{T}_{\text{BMS}} \to \mathbb{R}$, 所谓推广是指 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 不再限制为时间平移而允许跑遍 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$. 若 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 为空间平移元素, 式(12-7-20)中的 E 就应解释为截面 C 的、与 $\hat{\xi}^a$ 的方向对应的 Bondi 3 动量分量.

根据定义, 由 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有线性映射构成矢量空间 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 的对偶空间 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}{}^*$, 由式(12-7-20)定义的线性映射则是 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}{}^*$ 的一个元素, 记作 $P_A \in \mathscr{T}_{\text{BMS}}{}^*$. 与类空无限远 i^0 情况下的 ADM 4 动量 P_A 不同, 现在的 P_A 与 $\mathscr{I}^+$ 的截面 C 有关, 故宜记作 $P_A(C)$, 称为截面 C 所对应的渐近类光超曲面 N 的 **Bondi 4 动量**. 不同截面 C 的 Bondi 4 动量可以不等. 因此, 虽然一个渐近平直时空只有一个 ADM 4 动量, 却可以有无限多个(对应于无限多个截面) Bondi 4 动量. ADM 和 Bondi 能量的定义都涉及一个特殊矢量, 对前者是 $\hat{n}^a$ [见式(12-7-6)], 对后者是 $\hat{\xi}^a$ [见式(12-7-20)]. 能量是相对于参考系而言的. 给定 Σ_t 后自然挑出了一类特殊参考系, 即观者世界线处处同 Σ_t 正交的参考系, $\hat{n}^a$ 可解释为这类参考系的观者 4 速在无限远的极限. 因此, 用 $\hat{n}^a$ 与 P_a 的缩并所定义的 ADM 能量[式(12-7-6)]可解释为 Σ_t 相对于这类特殊参考系的能量. 然而这种做法不适用于 Bondi 能量, 因为超曲面 N 的渐近类光性使观者 4 速(N 的单位法矢)的极限为类光矢量, 却又不切于 $\mathscr{I}^+$ (参看图 12-26), 不能充当式(12-7-20)所需的 $\hat{\xi}^a$. 于是在谈及 N 的 Bondi 能量时还要指明用 $\mathscr{T}_{\text{BMS}}$ 的哪一个时间平移元素 $\hat{\xi}^a$. 为明确起见, 我们把 Bondi 能量记作 $E_{\hat{\xi}}(C)$, 其中下标指明所用的渐近时间平移 $\hat{\xi}^a$. 设 N_1 和 N_2 是分别对应于截面 C_1 和 C_2 的两个渐近类光超曲面(相应的推迟时刻满足 $u_2 > u_1$), 取定一个渐近时间平移 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{T}_{\text{BMS}}$, 则 N_1 和 N_2 相对于 $\hat{\xi}^a$ 的 Bondi 能量分别为

$$E_{\hat{\xi}}(C_1) = -\lim_{S_\alpha \to C_1} \frac{1}{8\pi}\int_{S_\alpha} \varepsilon_{abcd}\nabla^c \xi^d , \qquad E_{\hat{\xi}}(C_2) = -\lim_{S_\alpha \to C_2} \frac{1}{8\pi}\int_{S_\alpha} \varepsilon_{abcd}\nabla^c \xi^d .$$

上引文献证明 $\mathscr{I}^+$ 上存在函数 $f \geqslant 0$ 使

$$E_{\hat{\xi}}(C_1) - E_{\hat{\xi}}(C_2) = \int_V f , \tag{12-7-22}$$

其中V是$\mathscr{I}^+$上介于C_1和C_2之间的3维开域(图12-26). 由式(12-7-22)可知f的正定性保证$E_{\hat{\xi}}(C_1)-E_{\hat{\xi}}(C_2)\geqslant 0$, 从而保证引力波带走的能量总是正的.

最后讨论Bondi能量同ADM能量的关系. 首先遇到如下问题: Bondi 4动量和ADM 4 动量虽然都是矢量, 但属于不同矢量空间, 如何比较? 幸好, Ashtekar and Magnon-Ashtekar(1979)证明了如下结论: ①$\mathscr{I}^+$上的BMS李代数的4维平移子代数$\mathscr{T}_{\text{BMS}}$与i^0的切空间存在自然的同构关系, 从而使上述比较成为可能; ②设$\hat{\xi}^a\in\mathscr{T}_{\text{BMS}}$是$\hat{n}^a\in V_{i^0}$的对应元素, $E_{\hat{n}}\equiv -P_a\hat{n}^a$是与$\hat{n}^a$相应的ADM能量, V_1是$\mathscr{I}^+$上介于截面C_1与i^0之间的3维开域(图 12-26), 则只要$\int_{V_1}f$有限, C_1的Bondi能量与 ADM 能量之差便为$E_{\hat{\xi}}(C_1)-E_{\hat{n}}=-\int_{V_1}f$, 注意到式(12-7-22)及其物理解释, 上式的物理意义自明. 虽然上引文献对两种4动量的关系给出了明确的回答, 但这一问题至今仍在不断研究中. 关键原因是渐近平直时空存在不同的定义. 物理地说, 从某个“渐近平直”的3维流形上的初值出发按爱因斯坦方程演化而得的4维时空(见§14.5)应该是个渐近平直时空, 但它与 Ashtekar 定义的渐近平直时空是否等价却仍不清楚. 如果把这种演化结果看作渐近平直时空, 其Bondi和ADM 4动量的关系是否也像刚才的结论那样简单?初步答案可能是“只怕未必”. 这是一个难度颇高、至今仍在探讨中的研究课题.

12.7.4 正能定理

在牛顿引力论中, 由于势能为负, 任何引力束缚系统都有负的总能量. 然而, 如果广义相对论中也存在总能为负的孤立体系, 就会导致物理上十分奇怪的结果. 在相对论中负能意味着负质量, 负能体系对其他物体将是排斥而非吸引. 更有甚者, 引力辐射从体系带走正能导致体系能量下降, 但体系总能为负意味着体系总能可以无限减少(无下界), 从而外界可从体系获取无穷无尽的能量. 以上考虑使人猜测广义相对论中孤立体系的总能必定为正(或零). 这在 1981 年前一直被称为“正能猜想”, 其证明十分困难. Schoen和 Yau(丘成桐, 美籍华人数学家, Yau是“丘”的粤语音译)在 1981年率先证明了ADM能量的正定性, 于是正能猜想升格为正能定理. 总能的正定性只在时空满足某些合理条件时方可成立. 例如, 施瓦西时空的ADM 能量等于其参数M, 作为真空爱因斯坦方程解的积分常数, M可正可负, 于是$M<0$的施瓦西时空(也渐近平直)的总能$E=M<0$. 这一非正定性可归咎于时空的奇性(及其非整体双曲性), 可见正能定理的条件应包括无奇性的要求. 然而只有这一条件还不足以保证总能非负. 设想用适当物质场填满$M<0$的施瓦西时空中$r<r_0$(某正数)的区域以使$r=0$处的奇性消失, 并使所得新时空与原时空有相同的渐近几何, 则新时空的总能$E'=E=M<0$. 然而, 如果正能定理的条件只有“无

奇性”一条, 则新时空无奇性又导致 $E' > 0$ 的矛盾. 为了看出正能定理除“无奇性”外的条件, 可做如下讨论. 对渐近平直的非真空时空, 总能量还包含物质场的贡献. 如果物质场的能量密度允许为负, 就存在这样的系统, 其总能中来自引力场的贡献远小于来自物质场的贡献, 因而总能为负. 事实上, 在上面关于 $M < 0$ 的施瓦西时空的例子中, 为了在 $r = r_0$ 处与外部度规连续地(更不要说光滑地)衔接, 物质场的能量密度 ρ 就不可能处处为正[由式(9-3-10)可知 $\rho(r)$ 处处为正的理想流体必有 $M \geqslant 0$]. 正是这一事实(代替了原时空有奇性的事实)导致总能 $E' < 0$. 可见正能定理还应有另一条件, 即能量密度处处非负. 这一条件称为弱能量条件, 准确陈述是“任何观者测得的能量密度都非负”. 事实上正能定理所要求的能量条件是比弱能量条件更强的所谓主能量条件(详见附录 D). Schoen 和 Yau 所证明的正能定理的大意是: 如果渐近平直时空① 没有奇异性; ②物质场的能动张量满足主能量条件, 则其 ADM 能量必大于或等于零(等号只对闵氏时空成立).

证明正能定理的关键困难在于已知条件(能量条件)是关于局域定义的 T_{ab} 的一个不等式, 而待证结论则涉及整体定义的总能量, 而且有关量之间的联系又是复杂的、非线性的爱因斯坦方程. Schoen and Yau 的证明思路与奇性定理类似. 证明奇性定理的大致思路是反证法: 假定时空测地完备, 就可构造一条最长的完备测地线, 然后证明这与能量条件矛盾. Schoen and Yau 的证明也用反证法: 先假定 ADM 总能为负, 再构造一个最小面积的 2 维面, 然后证明这与主能量条件矛盾. 就在这一证明发表的同年(1981)稍后, Witten 发表了用完全不同手法的另一(大为简化的)证明, 他利用一个2分量旋量 α^A 把总能表为一个3维积分, 并直接证明这积分为正(或零). 不过, 因为 α^A 的存在性依赖于渐近条件, 所以不能把被积函数解释为局域能量密度.

在 ADM 能量正定性被证明后, 人们又乘胜追击, 不久就证明了在满足条件① 和②时 Bondi 能量的正定性. 不过, 由于引力波的存在会导致引力场衰减速率可能不够等问题, 若干学者认为这一证明的严密性不如 Schoen and Yau 对 ADM 能量正定性的证明那样无懈可击, 有关研究仍在不断进行之中.

正能定理的物理意义可以简述为: 根据广义相对论, (满足适当条件的)孤立体系的总能必定为正(或零), 而且这一数值等于体系可以(以引力波的方式)辐射出去的能量的上限. 然而, 定理的条件①把包含黑洞的时空置于定理的适用范围之外, 这自然不是人们希望的. 事实上, 所有 $M > 0$ 的施瓦西时空(黑洞)显然都有正能. 进一步说, 人们相信在广义相对论中孤立体系的总能为正的一个物理动机正是: 如果设法压缩体系以使引力势能负得更甚, 最终必将得到黑洞, 而黑洞的总能很可能为正. 因此条件①的打击面太宽. 人们希望把条件①削弱以使定理适用于含黑洞的各种渐近平直时空. 如能把定理条件削弱为“在事件视界外(无奇性)满足主能量条件”, 自然最好不过. 然而, 因为事件视界是全局性概念(涉及无限远), 无从用局域

条件决定, 从上述弱化条件出发证明能量的正定性变得非常困难. 不过后来还是找到了一种与上述弱化条件非常接近的条件并由此出发证明了总能的正定性, 实质上无非是以表观视界(见下册第 16 章)取代事件视界. 正能定理的这一新提法是:若物质场在表观视界外满足主能量条件, 则 ADM 能量和 Bondi 能量必大于或等于零.

Penrose 早在 1973 年就提出过一个猜想, 粗略地可表述为:含黑洞的渐近平直时空的 ADM 能量 M 与黑洞的事件视界的总面积 A 的关系满足 $M \geqslant \sqrt{A/16\pi}$. 这是比正能定理更强的不等式, 同宇宙监督假设(见附录 E)有密切联系. 经过若干学者长时间的努力, 这一猜想的一个重要特殊情况已于 1997 及 1999 年先后被证实, 其中后者对含任意个(而不像前者那样只含一个)黑洞的时空给出了证明. 这一特殊情况称为 Riemannian Penrose 不等式, 式中的 A 是表观视界(而不是事件视界)的面积, 两种视界的关系见第 16 章. 然而 Penrose 猜想的最一般形式的证明则仍在继续探索中, 见 Bray and Chrusciel(2006).

习　题

~1. 试证类光测地线在共形变换 $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ 下的仿射参数变换关系为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda} = c\Omega^2 .$$ [C 为非零常数, 见式(12-1-6).]

2. 设 α 是 2 维广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 上(局域定义)的谐和函数, 即 $\nabla^a \nabla_a \alpha = 0$, ε_{ab} 是与 g_{ab} 适配的体元, 试证 1 形式场 $\omega_a \equiv \varepsilon_{ab} \nabla^b \alpha$ 为闭(这是命题 12-1-6 证明中的第一步).

~3. 设 g_{ab} 和 g_{ab} 是 4 维流形 M 上的两个互相共形的度规, $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, 试证 F_{ab} 关于 g_{ab} 为无源电磁场当且仅当 F_{ab} 关于 $\tilde{g}_{ab}$ 为无源电磁场, 即

$$\nabla^a F_{ab} = 0 , \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\nabla}^a F_{ab} = 0 , \tilde{\nabla}_{[a} F_{bc]} = 0 .$$

注　设 ψ 是 M 上的张量场, $f(\psi, g_{ab}) = 0$ 是 ψ 在度规 g_{ab} 下的运动方程. 此方程称为**共形不变的**, 若 $\exists s \in \mathbb{R}$ (称为**共形权重**)使 $\tilde{\psi} \equiv \Omega^s \psi$ 满足 $f(\tilde{\psi}, \tilde{g}_{ab}) = 0$ 当且仅当 ψ 满足 $f(\psi, g_{ab}) = 0$. 可见 4 维时空的无源麦氏方程是共形不变的, 而且共形权重 $s = 0$. 请注意 n 维时空($n \neq 4$)的无源麦氏方程并非是共形不变的.

~4. 试证 2 维广义黎曼空间的爱因斯坦张量为零. 注:这本是第 3 章习题 17, 用该题的提示可证. 但若用本章的命题 12-1-6 和式(12-1-9)、(12-1-10), 则证明更简洁.

5. 设 $\tilde{\Gamma}^c{}_{ab}$ 是 $\tilde{\nabla}_a$ 在选读 12-4-2 证明中所用坐标系 $\{\Omega, u, \theta, \varphi\}$ 的克氏符, 试由 Bondi 规范条件 $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega |_{\mathscr{I}^+} = 0$ 导出 $\tilde{\Gamma}^c{}_{ab} (\mathrm{d}\Omega)_c |_{\mathscr{I}^+} = 0$, 并由此证明 $\tilde{g}_{uu}$, $\tilde{g}_{u\theta}$, $\tilde{g}_{u\varphi}$, $\tilde{g}_{u\Omega} - 1$ 在 $\mathscr{I}^+$ 附近以 $O(\Omega^2)$ 的速率趋于零.

~6. 试证 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 与共形规范的选择无关, 详见 §12.5 的必读部分.

*7. 把 4 维闵氏时空看作渐近平直时空.

(a) 试证式(12-2-9)的 Ω 不满足 Bondi 的规范条件, 即 $\Phi|_{\mathscr{I}^+}=0$.

(b) 找出适当函数 ω 使 $\Omega'\equiv\omega\Omega$ 满足 Bondi 规范条件.

(c) 设 $\mathbb{R}^4$ 上的矢量场 ξ^a 在 $\{v,u,\theta,\varphi\}$ 系[v,u 由式(12-2-6)定义]的坐标基展开式为

$$\xi^a=f\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a+\frac{v}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a+\frac{v}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a,$$

[其中 $f\equiv f(\theta,\varphi)$ 为任意 C^∞ 函数.] 试证 ξ^a 给出一个无限小超平移 $\hat{\xi}^a$, 即 $\hat{\xi}^a\in\mathscr{S}$. 提示:用(b)求得的 $n'^a|_{\mathscr{I}^+}$ 表出 $\hat{\xi}^a\equiv\xi^a|_{\mathscr{I}^+}$, 立即看出 $\hat{\xi}^a\in\mathscr{S}$.

(d) 令 $n^a\equiv\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_b\Omega,\ n'^a\equiv\tilde{g}'^{ab}\tilde{\nabla}'_b\Omega'$, 其中 $\Omega'\equiv\omega\Omega,\ \tilde{g}'_{ab}\equiv\omega^2\tilde{g}_{ab},\ \omega$ 是(b)中找到的函数 ω . 试找出函数 α 和 α' 使(c)中的 $\xi^a=\alpha n^a=\alpha' n'^a$, 并验证 $n^a\tilde{\nabla}_a\alpha\neq 0,\ n'^a\tilde{\nabla}'_a\alpha'=0$.

(e) 求出 $\hat{\xi}^a$ 在 Ω 和 Ω' 代表的两种规范中对应的函数 K 和 K' , (即 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}n^a=-Kn^a$, $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}n'^a=-K'n'^a$.) 你应发现沿类光母线 K 不是常数而 K' 是常数(且 $K'=0$).

~8. 试证式(12-6-3), 即 $(\mathrm{d}{}^*J)_{abcd}=(\nabla_e J^e)\varepsilon_{abcd}$.

~9. 试证式(12-6-11)可改写为(12-6-12).

10. 用式(12-6-12)计算静态球对称带电恒星的电荷(结果应等于星外 RN 度规的参量 Q).

11. 试证麦氏方程的对称化形式 $\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\boldsymbol{J}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\hat{\boldsymbol{J}}$ 在 $(\boldsymbol{F},{}^*\boldsymbol{F})$ 及 $(\boldsymbol{J},\hat{\boldsymbol{J}})$ 同时做对偶变换[式(12-6-13)和(12-6-18)]后保持不变.

~12. 孤立静态球对称恒星电荷为 Q , 磁荷 $\hat{Q}=0$, 星外电磁场为 $\boldsymbol{F}$. 以 $\boldsymbol{F}'$ 代表对 $\boldsymbol{F}$ 做角度为 α 的对偶变换所得的电磁场, 求恒星相应于 $\boldsymbol{F}'$ 的电荷 Q' 和磁荷 $\hat{Q}'$.

~13. 以 M 代表施瓦西时空的质量参数, 试证该时空的 Komar 质量 $M_{\mathrm{K}}=M$. 提示:令 $\omega_{ab}\equiv\varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$, 则有 μ 使 $\tilde{\omega}_{ab}=\mu\varepsilon_{ab}$. 与 ε^{ab} 缩并, 把式中的 $\nabla_{[c}\xi_{d]}$ 改写为 $\partial_{[f}\xi_{e]}$, 再用 $(\mathrm{d}t)_e$ 表出 ξ_e , 便得 $\mu=-2Mr^{-2}$.

14. 试证 RN 时空的 Komar 质量

$$M_{\mathrm{K}}\equiv\lim_{r\to\infty}\left(M-\frac{Q^2}{r}\right)=M,$$

其中 M 和 Q 分别为该时空的质量和电荷参数.

15. 试证用式(12-7-5)对施瓦西度规求得的 E 等于该度规的参数 M (详见正文).

*16. 设 $\mathscr{R}$ 是闵氏时空的一个惯性系, 试证该系中的静止点电荷 q 在两个不同时刻($\mathscr{R}$ 系的同时面 Σ_{t_1} 和 Σ_{t_2})所发的所有电场线对应于 V_{i^0} 的类时超曲面 K 的同一截面 C.

第 13 章 Kerr-Newman(克尔-纽曼)黑洞

本章介绍相对论天体物理学中异常重要的 Kerr-Newman(KN)度规. 这是一个 3 参数度规族, 参数 M, J 及 Q 可分别解释为星体的质量、角动量及电荷, 当 $J=0$ 时退化为 Reissner-Nordstrom(RN)度规. 由于 RN 度规同 KN 度规有不少共性, 又比后者简单得多, 我们在第一节先介绍 RN 黑洞.

§ 13.1 Reissner-Nordstrom(RN)黑洞

§8.4 曾导出 RN 度规

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (13\text{-}1\text{-}1)$$

它描述静态球对称带电星体的外部几何. 由于星体内部并非电磁真空, RN 解对星体内部不适用. 然而, 同施瓦西解的讨论类似, 我们仍对下述问题感兴趣: 若 RN 解对所有 $r>0$ 值都成立, 时空的情况如何? 首先, 因为 r 出现于分母中, $r=0$ 是线元(13-1-1)的奇点. 计算表明 RN 度规是类时测地完备而类光测地不完备的, 那些不完备类光测地线(只能是径向的)都伸向 $r=0$ (而且趋近 $r=0$ 时存在 s.p.曲率奇性), 因此 $r=0$ 按定义是时空奇性. 其次, 若函数 $f(r) \equiv 1-2M/r+Q^2/r^2$ 有零点, 则线元(13-1-1)还有其他奇性. 能使 $f(r)$ 为零的 r 值满足

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (13\text{-}1\text{-}2)$$

所以应分三种情况讨论. ①若 $M^2<Q^2$, 则 $f(r)$ 无(实)零点, 这种 RN 时空只有一个奇性, 即时空奇性 $r=0$. ②若 $M^2>Q^2$, 则除 $r=0$ 外还有 $r=r_+$ 和 $r=r_-$ 两个奇性. 同施瓦西解类似, 它们也是坐标奇性(证明见选读 13-1-2). ③ 若 $M^2=Q^2$, 上述两个奇性合而为一.

实际星体常有 $M^2 \gg Q^2$, 因此我们只讨论 $M^2>Q^2$ 的情况. 函数 $f(r)$ 有两个零点使 Reissner-Nordstrom 时空的延拓比施瓦西时空更为复杂. 图 13-1 是由计算和讨论(详见选读 13-1-2)所得到的 Reissner-Nordstrom 最大延拓时空的 Penrose 图, [只适用于 $M^2>Q^2$, 其他两种情况的 Penrose 图见 Hawking and Ellis(1973)图 26.] 它可看作由一个单元出发沿竖直方向无限重复的结果. 无限重复是为保证除到达时空奇点 $r=0$ 的测地线外所有测地线的完备性. 看图时应充分利用 Penrose 图 的优

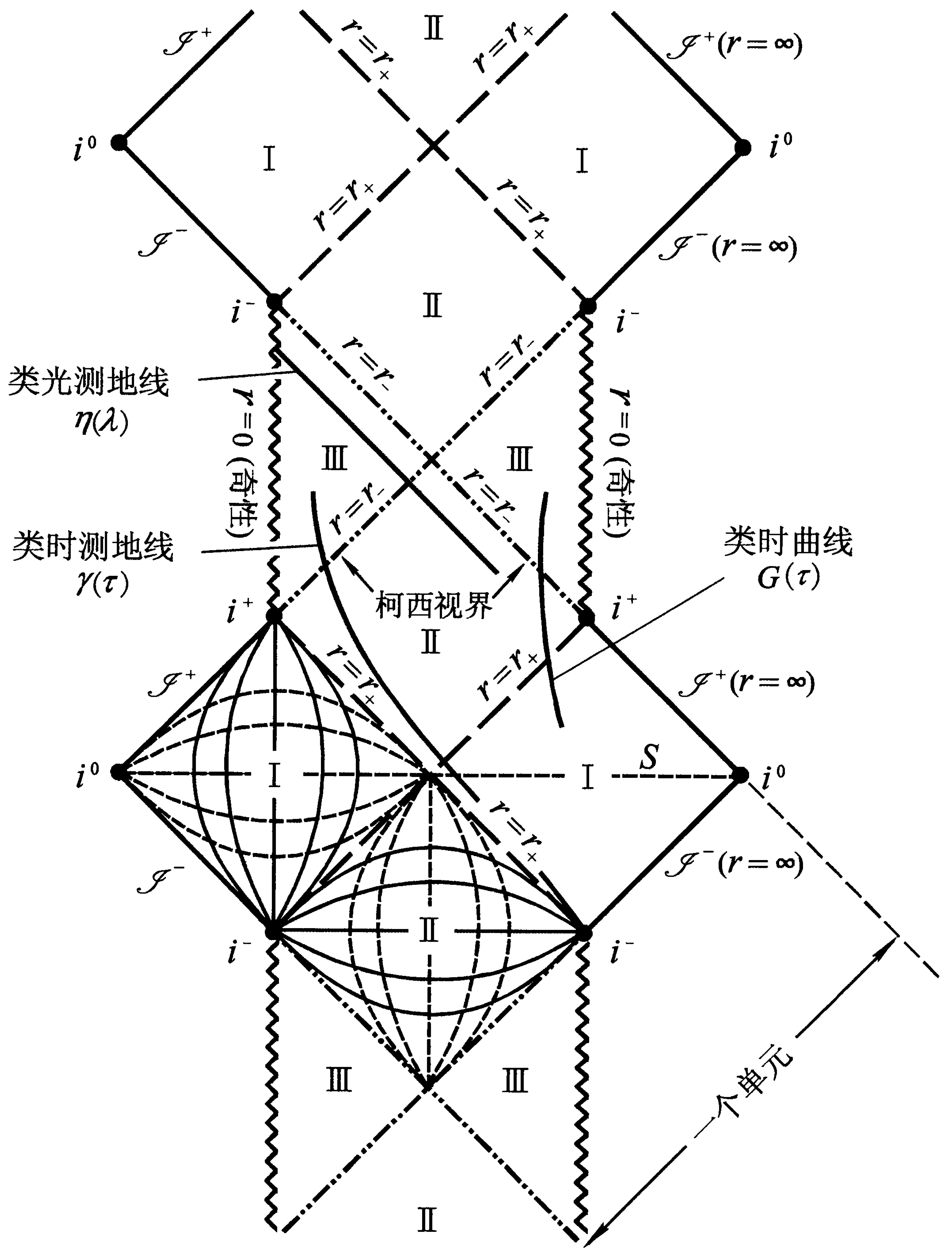


图 13-1　$M^2>Q^2$ 的 RN 最大延拓时空的 Penrose 图(上下可无限延伸). 左、下方 I, II 型区内的实、虚线分别代表等 r 线和等 t 线

越性——(球对称的)类光超曲面和径向类光测地线表现为 45° 斜直线. 我们从图中标出的那个单元开始介绍. 该单元含有三种不同类型的时空区, 称为 I, II, III 型区. I 型区满足 $r>r_+$, II 型区满足 $r_-<r<r_+$, III 型区满足 $0<r<r_-$. I 型区和 III 型区都有 $g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial t)^b\equiv g_{00}<0$, 即 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$ 类时, 故为稳态区. 反之, II 型区有 $g_{00}>0$, 即 Killing 矢量场类空. 由于不存在类时 Killing 矢量场, II 型区不是稳态区. 每个 III 型区都有时空奇性 $r=0$. 与施瓦西奇性不同, RN 奇性是类时的. (在 Penrose 图中为一竖直线, 与超曲面类比可知为类时. 然而奇点不属于时空流形, 时空度规 g_{ab} 在奇性处无定义, 严格说对奇性的类时性应另给定义. 可参见 §E.3 之末.) I 型区与施瓦西最大延拓时空(图 12-9)的 A 和 A′ 区十分类似(也是渐近平直区), 也有自己的共形无限远 $\mathscr{I}^\pm$, $i^\pm$, i^0, 并在代表 $r=r_+$ 的斜直线(类光超曲面)处

与 II 型区相毗邻. I 型区中的任一观者(指向未来类时线)一旦穿过 $r=r_+$ 面进入 II 型区就再也不能回到原来的 I 型区, 因此这个面类似于施瓦西时空的 $r=2M$ 面, 称为 I 型区的事件视界(于是 $M^2>Q^2$ 的 RN 时空含有黑洞). 由于 RN 奇性的类时性, 观者进入 II 型区后有丰富得多的选择性. 对于施瓦西时空中开着飞船进入黑洞区 B 的观者, 无论他让飞船熄火(因而走测地线)还是开足马力, 总躲不过掉入奇点 $r=0$ 的结局. 反之, 计算表明, RN 时空中到达奇性 $r=0$ 的类时线必定不是测地线[但存在到达 $r=0$ 的类光测地线, 例如图中的 $\eta(\lambda)$.] 因此从 I 型区进入 II 型区的观者如果让飞船熄火就一定不会触及奇性, 在穿越 II 型区并进入 III 型区后[图中的 $\gamma(\tau)$]将安全进入下个 II 型区(并将穿过 $r=r_+$ 而从下个 I 型区冒出来). 或者, 从 I 型区进入 II 型区的观者也可开动发动机从而沿类时非测地线[图中的 $G(\tau)$]穿越 II 型区进入 III 型区, 并在不触及奇性的情况下进入下个 II 型区和 I 型区. 读者自然要问: 如果愿意, 他是否也可借助发动机选择类时非测地线到达奇性并终结其在时空中的存在? 答案是出乎意料地否定的. 并非不存在到达奇性的类时非测地线, 而是原则上不存在任何观者, 他能沿这种线到达 $r=0$. 这是由 Chakrabarti, Geroch, and Liang(1983)指出的, 该文要点如下: 类时测地线和类时非测地线的表现很不相同, 例如, 闵氏时空存在着起于 $\mathscr{I}^-$ 或止于 $\mathscr{I}^+$ 的类时非测地线, 却不存在起于 $\mathscr{I}^-$ 或止于 $\mathscr{I}^+$ 的类时测地线(见命题 12-2-1); RN 时空存在着到达奇性的类时非测地线, 却不存在到达奇性的类时测地线, 等等. 由于类时测地线代表自由下落质点而类时非测地线代表非自由下落质点, RN 时空存在到达奇点的类时非测地线一事似乎表明至少有些观者可以借助飞船到达奇点, 然而问题并非如此简单. 任一飞船的燃料总是有限的, 它不能经历任意的类时非测地线. 在这个意义上说, 类时非测地线又可分为两个子类: 物理上可经历的和物理上不可经历的. 该文证明物理上可经历的类时非测地线的充要条件是该线的 4 加速的长度 $a\equiv(g_{ab}A^aA^b)^{1/2}$ 沿线的积分 $\int a\mathrm{d}\tau$ 为有限值(τ 为固有时), 并进一步证明: ①所有到达 RN 奇点的类时非测地线的 $\int a\mathrm{d}\tau$ 都无限; ②所有到达闵氏时空(以及任意渐近平直时空)的 $\mathscr{I}^+$ 的类时非测地线的 $\int a\mathrm{d}\tau$ 都无限. 由此可得结论: RN 时空的奇点和渐近平直时空的未来类光无限远都是物理上不可到达的.

RN 奇性的类时性表明 RN 最大延拓时空不是整体双曲的: 它没有柯西面(见 §11.5). 从一定意义上说, 最有可能成为柯西面的要算是图 13-1 中的水平面 S, 然而由图可见它只是由它所在的两个 I 型区和两个相邻 II 型区组成的子时空(斜置正方形)的柯西面. 斜置正方形与 III 型区的边界 $r=r_-$ 就是 S 的柯西视界(§11.5), 某些文献称之为**内视界**(inner horizon). 这一柯西视界的存在给物理学家带来严重问题: 物理可预言性在柯西视界以外的时空区域(暂且简称界外区)将被破坏殆尽, S 面上的全部初始条件不足以预言界外区将会发生什么, 从类时奇性所在处可

能发出的信号(例如定时炸弹)使界外区随时随地可能发生无从预料的任何物理事件. 此外, 这一柯西视界的特点还导致它的严重不稳定性, 在微扰下 RN 黑洞内的几何情况将与图 13-1 非常不同, 详见选读 13-1-1.

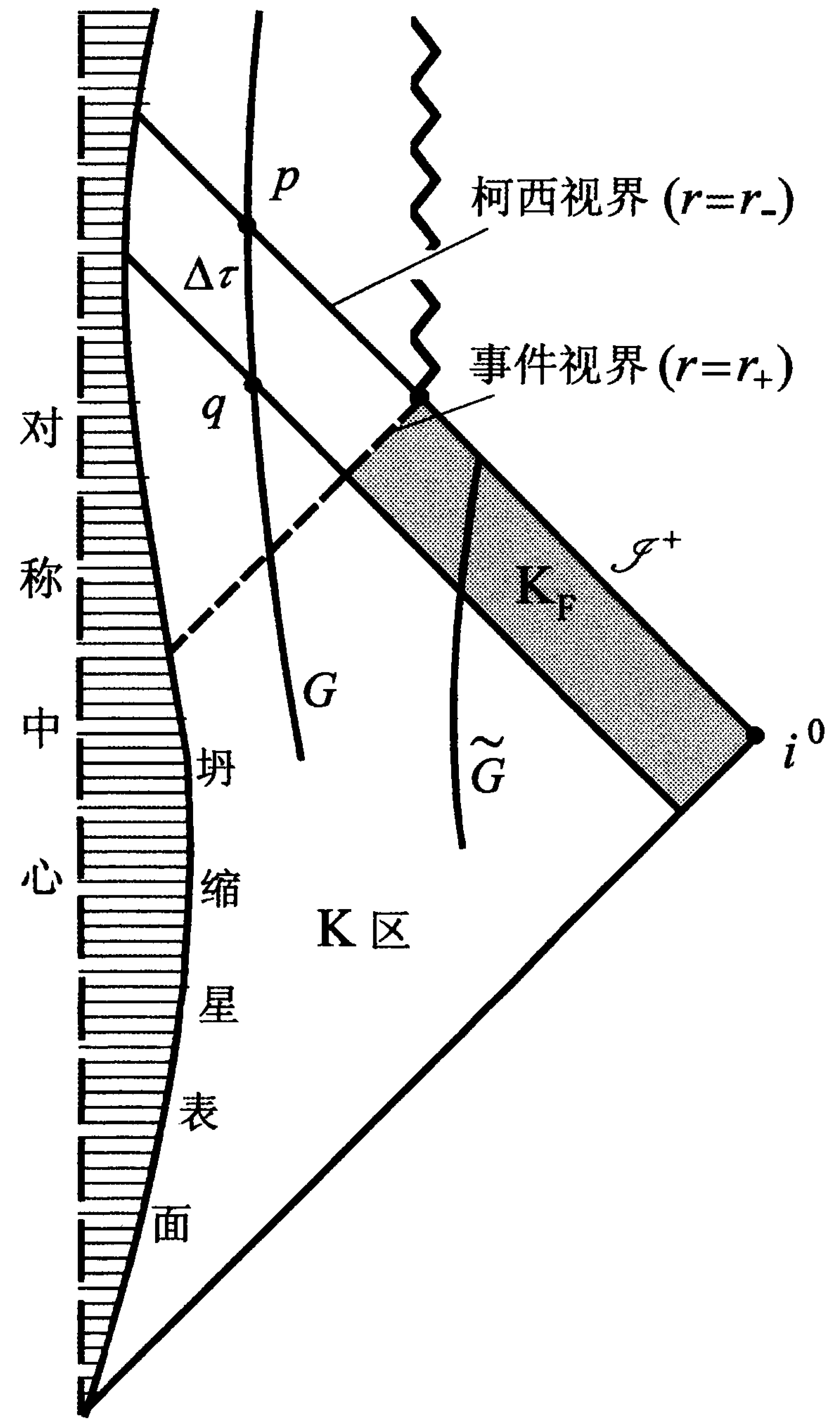


图 13-2 观者 G 在跨越柯西视界 $r=r_-$ 前无论多么短的时间内都能看到 K 区的全部“未来历史”

[选读 13-1-1]

与最大延拓的施瓦西时空(图 9-13)类似, 最大延拓的 RN 时空(图 13-1)也不大可能是物理上真实的时空. 然而, 图 13-1 的一部分在讨论球对称带电星体晚期坍缩成 RN 黑洞时有重要意义: 坍缩星的外部几何仍由 RN 度规描述. (图 13-2, 其中 K 区代表坍缩星外及事件视界 $r=r_+$ 以外的时空区.) 注意到尺度在 $\mathscr{I}^+$ 处作过无限大的压缩, 便会发现柯西视界($r=r_-$)十分异乎寻常. 设观者 G 的世界线与柯西视界交于 p, 线的一小段 qp 的固有时间为 $\Delta\tau$. 过 q 作与 $\mathscr{I}^+$ 平行的直线, 便可定出 K 区的一个子集 K_F (图中的暗灰细长方形). $\Delta\tau$ 越小则 K_F 越“窄”, 但其内部各事件都在 $\mathscr{I}^+$ 附近, 所以 K 区中任一观者 $\tilde{G}$ 的世界线与 K_F 的相交段都包含着 $\tilde{G}$ 的全部“未来历史”(对应于无限长固有时间), 可见 G 在到达柯西视界前无论多么短的一段时间内总能看到 K 区的全部未来历史. 柯西视界的一个更为特别的问题则是由“无限蓝移”所导致的不稳定性. 人们更关心的是旋转星体(非球对称)的晚期坍缩, 其最终形成的稳态黑洞不是 RN 黑洞而是 Kerr-Newman 黑洞(见 §13.6). 与这种

坍缩相伴随的引力波在柯西视界将出现无限蓝移并使之变得不稳定. 由于非球对称坍缩非常复杂, 又由于人们相信 Kerr-Newman 黑洞与 RN 黑洞在因果结构和视界结构上非常类似, 所以, 作为研究非球对称坍缩的第一步(突破口), 人们曾研究过如下的理想化模型: 星外时空由经受微扰的"RN 度规"描写, 这微扰来自交叉流动的入射和出射光子流(或静质量为零的其他粒子流). 为了帮助读者理解光子流的无限蓝移, 我们以球对称坍缩星(外部为 RN 度规)为例作一粗略说明(图 13-2). 设 K 区中的观者 $\tilde{G}$ 向 G 发光, 由于尺度在 $\mathscr{I}^+$ 处的无限压缩, $\tilde{G}$ 世界线限于 K_F 内的一段对应于无限大的固有时间. 这段时间内所发的无限多个波峰只能挤在 G 线的有限长度 qp 段内, 可见 G 收到的光的周期在趋于 p 时趋于零, 相应于无限蓝移. 这一异常表现导致柯西视界的高度不稳定性: 微弱的入射波(向左)在柯西视界附近的频率(因而能量)无限增大[称为**质量暴涨**(mass inflation)], 使柯西视界很可能成为新的曲率奇性所在处. 可见原本类时的 RN 奇性是不稳定的, 它在微扰下很可能变得类光(甚至类空). 观者 G 在与柯西视界相交前的一瞬间, 在看到他曾经生活于其中的"宇宙"(指 K 区)的全部未来历史在眼前闪过之后落入这一新奇点. Poisson and Israel(1990)写道: "柯西视界是一堵终极性的砖墙, 时空演化至此被迫终止." RN 黑洞的事件视界以内的时空几何因而变得面目全非, 然而 K 区(即坍缩星外和事件视界外)的观者则对此毫无察觉, 在他们看来, 时空几何仍由静态 RN 度规描述. **[选读 13-1-1 完]**

[选读 13-1-2]

本选读介绍 $M^2 > Q^2$ 的 RN 时空最大延拓(图 13-1)的获得. RN 线元(13-1-1)的前 2 维可表为

$$d\hat{s}^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 = f(r)[-dt^2 + f(r)^{-2}dr^2]$$

$$= f(r)(-dt^2 + dr_*{}^2)\ , \tag{13-1-3}$$

其中乌龟坐标 r_* 由下式定义:

$$\frac{dr_*}{dr} = f(r)^{-1} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} . \tag{13-1-4}$$

积分上式得

$$r_*(r) = r + C + \frac{1}{2\beta}\ln\frac{|r - r_+|}{2M} - \frac{\alpha}{2\beta}\ln\frac{|r - r_-|}{2M}, \tag{13-1-5}$$

其中 C 为积分常数, $\beta \equiv (r_+ - r_-)/2r_+{}^2$, $\alpha \equiv (r_- / r_+)^2$. 易见 $\beta > 0$ 和 $1 > \alpha > 0$. 由式

(13-1-5)可知函数$r_*(r)$在r从 0 增至∞时有以下表现：在$r\in[0,r_-)$段内从某值$r_*(0)$单调增至$+\infty$；在$r\in(r_-,r_+)$段内从$+\infty$单调减至$-\infty$；在$r\in(r_+,\infty)$段内从$-\infty$单调增至$+\infty$. 选积分常数C使$r_*(0)=0$. 把$f(r)=r^{-2}(r-r_+)(r-r_-)$代入式(13-1-3)得

$$d\hat{s}^2=r^{-2}(r-r_+)(r-r_-)(-dt^2+dr_*{}^2), \tag{13-1-6}$$

可见$d\hat{s}^2$在$r=r_+$及$r=r_-$处奇异(退化),因而暂时把三种类型的区域作为互不连通的流形讨论.取定一个 I 型区作为延拓的出发区,并称之为 A 区.仿照施瓦西时空的做法,在 A 区定义新坐标V, U：

$$V=e^{\beta(r_*+t)},\quad U=-e^{\beta(r_*-t)},\quad (\text{故 A 区有}\infty>V>0,\ 0>U>-\infty) \tag{13-1-7a}$$

则线元(13-1-6)改写为

$$d\hat{s}^2=-\beta^{-2}(2M)^{1-\alpha}r^{-2}(r-r_-)^{1+\alpha}e^{-2\beta(r+C)}dVdU, \tag{13-1-8}$$

上式在$r=r_+$处不再奇异, 可见式(13-1-6)的奇性$r=r_+$只是坐标奇性. 为便于画图, 仿照 §12.3 用正切函数把施瓦西无限远($r=\infty$)“拉近”的做法, 即定义V'和U'使

$$V=\tan V',\quad U=\tan U'.\ (\text{对A区有}\ \pi/2>V'>0,\ 0>U'>-\pi/2) \tag{13-1-9}$$

A 区在$\{V',U'\}$系的形状及各坐标在四条边界线上的数值可提前参见图 13-3. 既然$r=r_+$不再奇异, 就可把线元(13-1-8)越过bc段和cd段延拓出去. 暂时只看bc段, 因其$U=0$, 越过它作延拓就是允许U的取值范围从$0>U>-\infty$拓宽至$\infty>U>-\infty$. 在延拓部分仍用式(13-1-9)定义V'和U', 则也可说这延拓是允许U'从$0>U'>-\pi/2$拓宽至$\pi/2>U'>-\pi/2$. 于是式 (13-1-8) 的定义域从 A 区拓展为

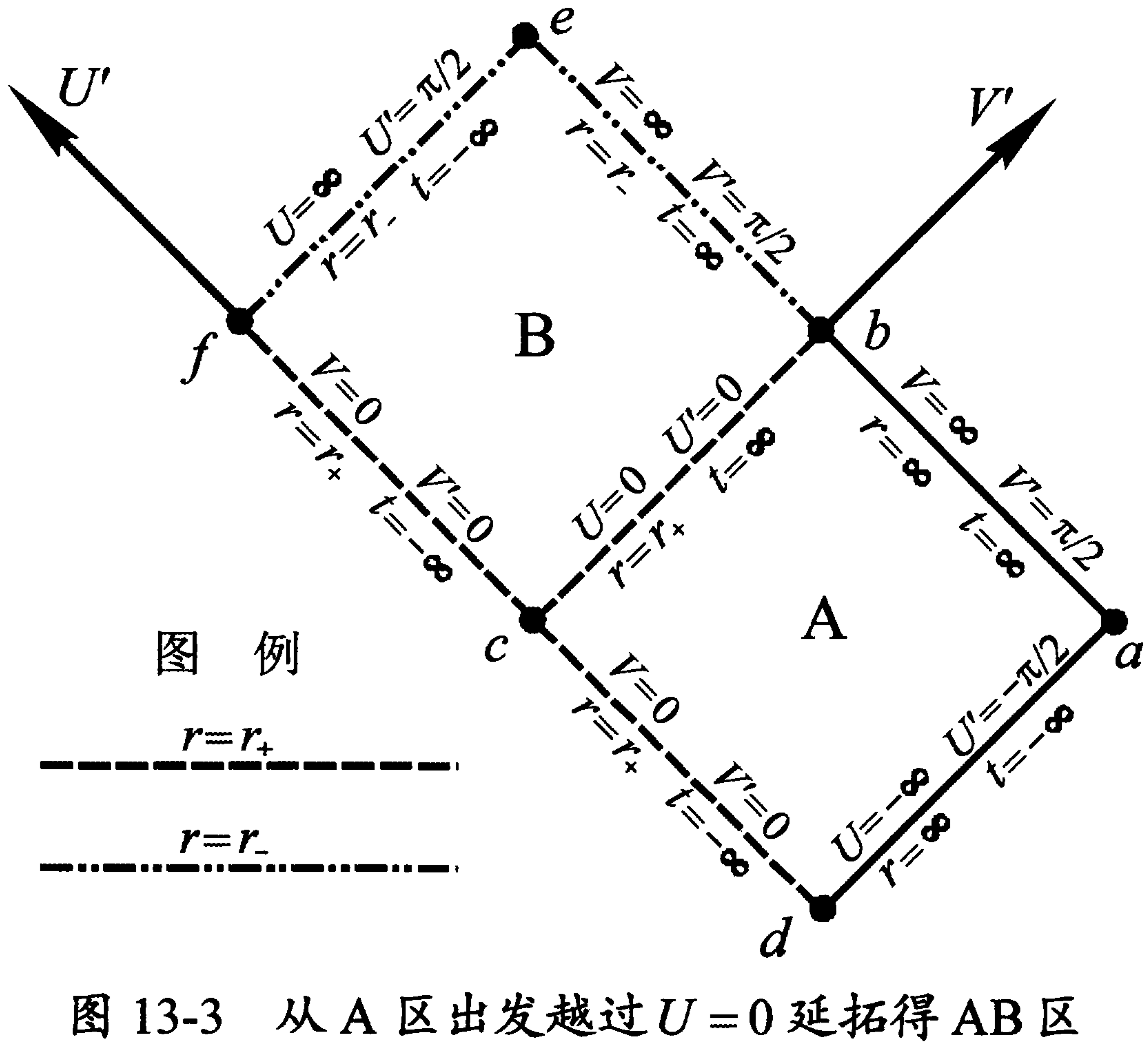


图 13-3 从 A 区出发越过$U=0$延拓得 AB 区

AB 区，其定义是

$$AB区 \equiv A区 \cup bc段 \cup B区.(其中B区由图13-3界定)$$

在 B 区从 V, U 出发按下式定义 t, r:

$$V = e^{\beta(r_*+t)}, \quad U = e^{\beta(r_*-t)}, \tag{13-1-7b}$$

则 B 区在 $\{t,r\}$ 系的线元仍为式(13-1-6)，而且从 B 区边界的 r 值可知 B 区是个 II 型区. 为进一步消除式(13-1-8)中的奇性 $r = r_-$，可在 B 区借 t, r 定义新坐标 $\tilde{V}, \tilde{U}$:

$$\tilde{V} = -e^{-\alpha^{-1}\beta(r_*+t)}, \quad \tilde{U} = -e^{-\alpha^{-1}\beta(r_*-t)}, \quad (故B区有 0 > \tilde{V} > -\infty, 0 > \tilde{U} > -\infty) \tag{13-1-10a}$$

B 区的线元在 $\{\tilde{V},\tilde{U}\}$ 系中取如下形式:

$$d\hat{s}^2 = -\beta^{-2}\alpha^2(2M)^{1-\alpha^{-1}} r^{-2}(r_+ - r)^{1+\alpha^{-1}} e^{2\alpha^{-1}\beta(r+C)} d\tilde{V}d\tilde{U}, \tag{13-1-11}$$

它在 $r = r_-$ 处不再奇异(但却在 $r = r_+$ 奇异.不存在同时消除奇性 $r = r_+$ 和 $r = r_-$ 的坐标系)，因而可越过 ef 段和 be 段延拓.暂时只看 ef 段，因其 $\tilde{U} = 0$，越过它作延拓就是允许 $\tilde{U}$ 的取值范围从 $0 > \tilde{U} > -\infty$ 拓宽至 $\infty > \tilde{U} > -\infty$，于是式(13-1-11)的定义域从 B 区拓展为 BC 区，其定义是

$$BC区 \equiv B区 \cup ef段 \cup C区.(其中C区由图13-4界定)$$

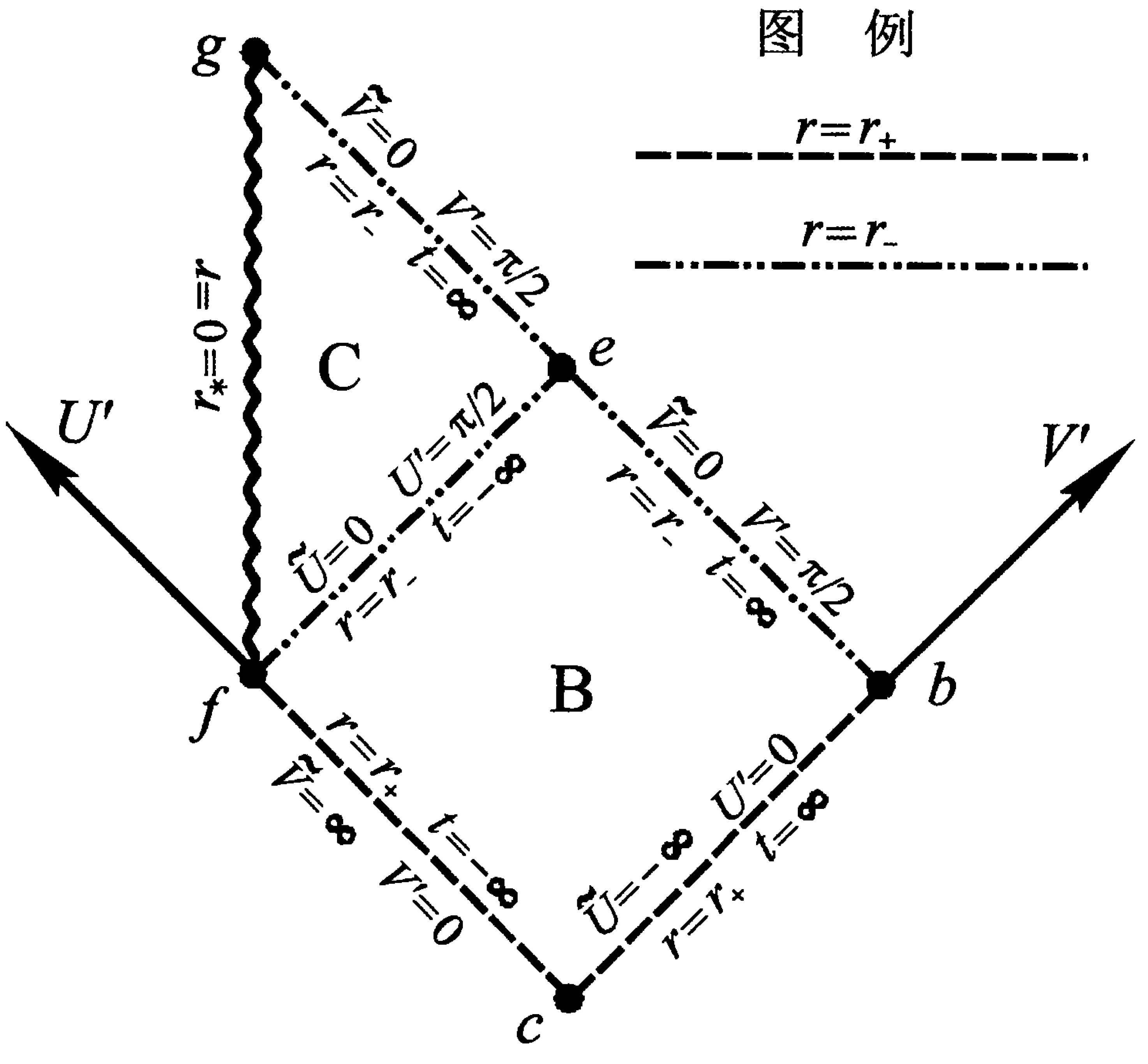


图 13-4 从 B 区出发越过 $\tilde{U} = 0$ 延拓得 BC 区

在 C 区从 $\tilde{V}, \tilde{U}$ 出发按下式定义 t, r:

$$\tilde{V} = -e^{-\alpha^{-1}\beta(r_*+t)}, \quad \tilde{U} = e^{-\alpha^{-1}\beta(r_*-t)}, \tag{13-1-10b}$$

则 C 区在 $\{t,r\}$ 系的线元仍为式(13-1-6)，而且从 C 区边界的 r 值可知 C 区是个 III

型区. 以上为消除坐标奇性 $r=r_+$ 和 $r=r_-$ 而分别引入了坐标系 $\{V',U'\}$ 和 $\{\tilde{V},\tilde{U}\}$，两坐标域的交域为 B. 不难验证两套坐标在 B 区有如下良好关系：

$$\cot V' = |\tilde{V}|^{\alpha}, \quad \cot U' = |\tilde{U}|^{\alpha}. \tag{13-1-12}$$

既然图 13-3, 4 都含 B 区，就可把两图粘合而得大区 ABC，如图 13-5.这还不是最大延拓，因为，例如，任一到达边界 fcd 的测地线必然不完备，但又没有曲率发散性，暗示着时空还可经 fcd 向左下方延拓，由此得到大区 A′B′C′，它也可看作是大区 ABC 关于原点做反演的结果(图 13-6). 这两个大区可粘合为一个单元，再以 $\sqrt{2}\pi$ 为步长沿上下方向做无限次平移便得最大延拓，此即图 13-1. **[选读 13-1-2 完]**

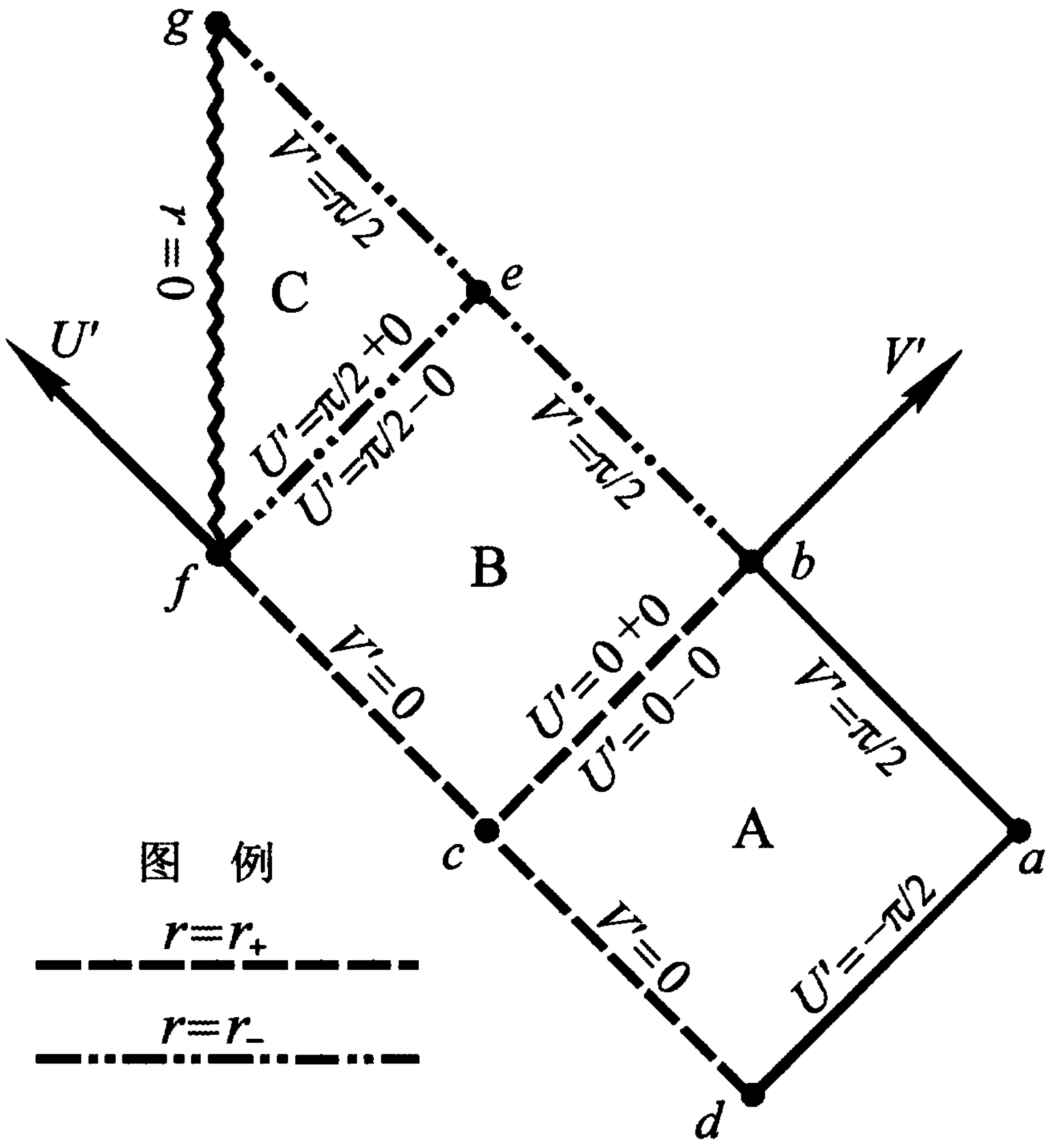


图 13-5 图 13-3, 4 粘合成大区 ABC, 仍可延拓

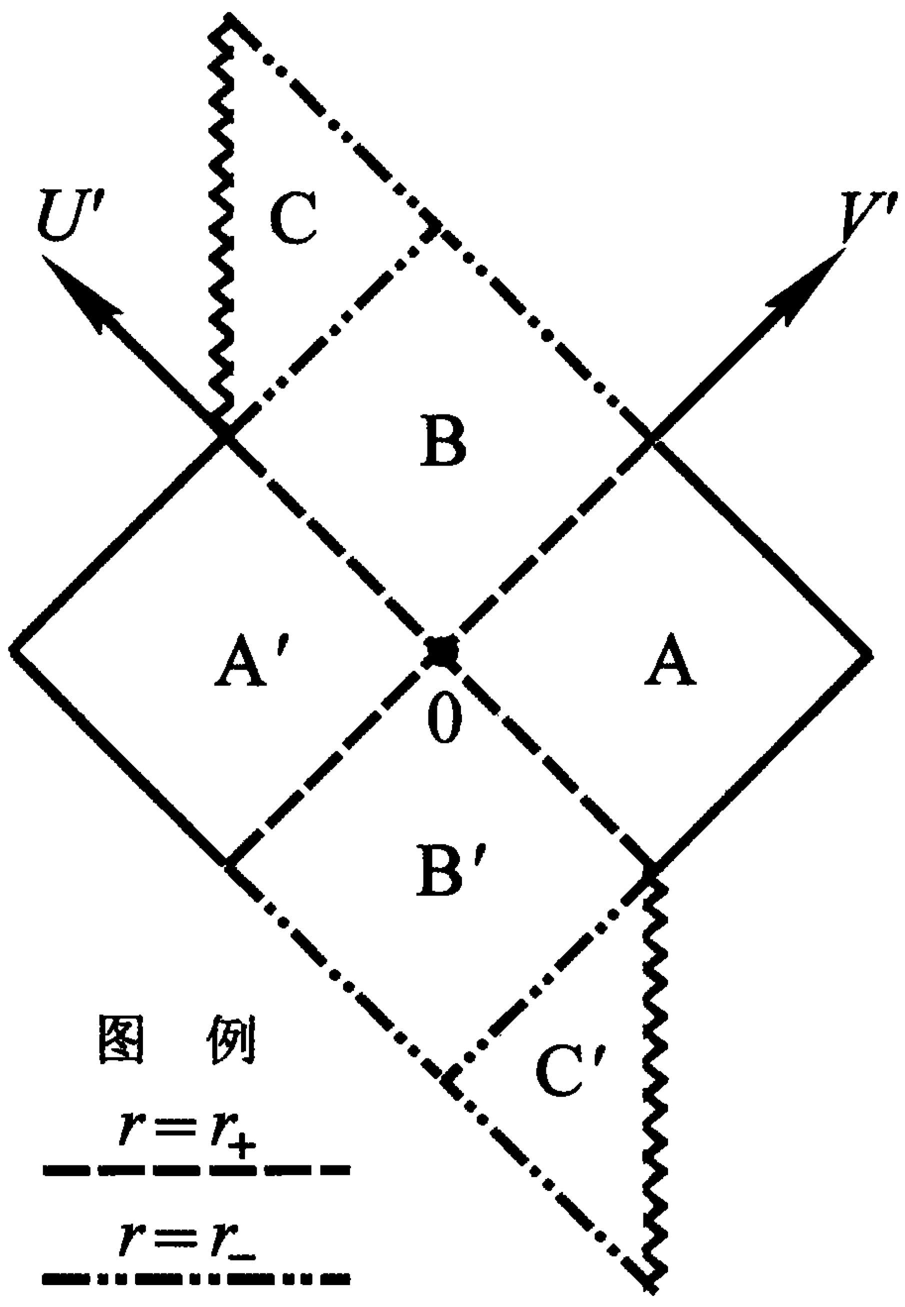


图 13-6 大区 ABC 与 A′B′C′ 粘成一个单元. 再以 $\sqrt{2}\pi$ 为步长上下无限平移便得 RN 最大延拓

§ 13.2 Kerr-Newman(KN)度规

星体或多或少都有转动，其外部时空只有轴对称性而无球对称性，严格说来不能用施瓦西(或 RN)度规描述. Kerr(克尔)在 1963 年找到真空爱因斯坦方程的一个稳态轴对称解(后称 **Kerr 解**)，它在物理上描述某种旋转的不带电星球的外部时空几何(把施瓦西解作为角动量为零的特例包括在内). 由于几乎所有星球都有自转(其中有些转得飞快)，Kerr 度规在黑洞物理中有异乎寻常的重要性(见 §13.6). Newman(纽曼)与合作者于 1965 年用复坐标变换的手法有点像变魔术似地从施瓦西度规生出一个解，竟与 Kerr 解一样[生成过程见 d'Inverno(1992)19.2]. 虽然未得新解，但却受到启发. 同年稍后，Newman 又与多人合作以类似手法从 RN 解生出一个电磁真空新解，其度规比 Kerr 度规多一个参数 Q(后来发现在物理上可解释为电荷)，当 $Q=0$ 时与 Kerr 度规无异，后人称之为**带电 Kerr 度规或 Kerr-Newman 度规(KN 度规)**，在坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ (称为 Boyer-Lindquist 系)中的线元为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &-[\ 1-\rho^{-2}(2Mr-Q^2)]\ \mathrm{d}t^2+\rho^2\varDelta^{-1}\mathrm{d}r^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2\\
&+\rho^{-2}[(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta]\ \sin^2\theta\ \mathrm{d}\varphi^2,\\
&-2\rho^{-2}a\,(2Mr-Q^2)\ \sin^2\theta\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{13-2-1}
$$

式中

$$\rho^2(r,\theta)\equiv r^2+a^2\cos^2\theta, \tag{13-2-2}$$

$$\varDelta(r)\equiv r^2-2Mr+a^2+Q^2, \tag{13-2-3}$$

其中 M, a, Q 为常实数. 式(13-2-1)在 $a=0$ 时回到 RN 度规；在 $a=Q=0$ 时回到施瓦西度规. 这暗示参数 M 及 Q 可分别解释为星体的质量及电荷(详见选读 13-2-1). $Q=0$ 时的式(13-2-1)就是 Kerr 度规(见图 13-7). 讨论表明(见选读 13-2-1)，式(13-2-1)中的 a 可解释为星体单位质量的角动量.(即 $a=J/M$, J 为角动量.) 因为总可选择 φ 坐标的正向使 a 为正，今后将默认 $a>0$.

与 Kerr-Newman 度规配套的电磁场可用电磁 4 势表为

$$A_a=-\rho^{-2}Qr\,[(\mathrm{d}t)_a-a\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a]. \tag{13-2-4}$$

为便于使用，下面列出 Kerr-Newman 度规及其逆在 Boyer-Lindquist 坐标系的非零分量表达式(其中 t, r, θ, φ 对应于 x^0, x^1, x^2, x^3):

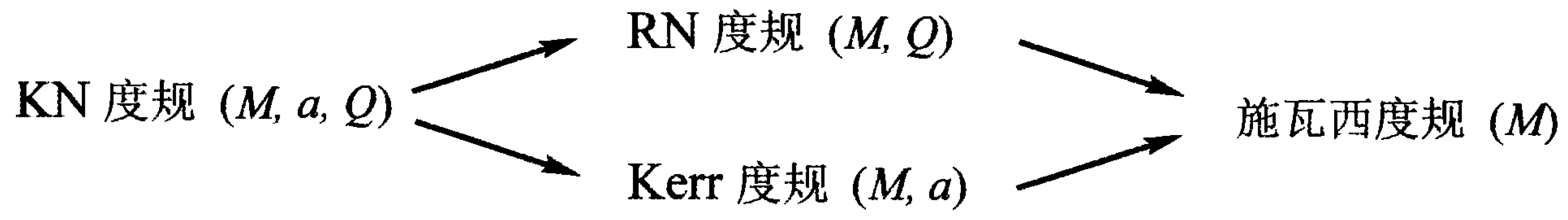


图 13-7　几个度规的关系(括号内是所含参量)

$$g_{00} = -\ [1-\rho^{-2}(2Mr-Q^2)] = -\rho^{-2}(\varDelta - a^2\sin^2\theta),$$
$$g_{11} = \rho^2\varDelta^{-1},$$
$$g_{22} = \rho^2,$$
$$g_{33} = \rho^{-2}[(r^2+a^2)^2 - \varDelta a^2\sin^2\theta]\ \sin^2\theta = [r^2+a^2+\rho^{-2}a^2(2Mr-Q^2)\sin^2\theta]\ \sin^2\theta,$$
$$g_{03} = g_{30} = -\rho^{-2}a\ (2Mr-Q^2)\ \sin^2\theta\ ; \qquad (13\text{-}2\text{-}5)$$

$$g^{00} = -\rho^{-2}[(r^2+a^2)^2\varDelta^{-1} - a^2\sin^2\theta],$$
$$g^{11} = \rho^{-2}\varDelta,$$
$$g^{22} = \rho^{-2},$$
$$g^{33} = \rho^{-2}(\sin^{-2}\theta - a^2\varDelta^{-1}),$$
$$g^{03} = g^{30} = -\rho^{-2}a\ (2Mr-Q^2)\ \varDelta^{-1}. \qquad (13\text{-}2\text{-}6)$$

由式(13-2-5)求得 $g_{\mu\nu}$ 的行列式为

$$g = -\ \rho^4\sin^2\theta. \qquad (13\text{-}2\text{-}7)$$

证明上式的关键是证明(留作习题)如下的有用公式:

$$g_{03}{}^2 - g_{00}g_{33} = \varDelta\sin^2\theta. \qquad (13\text{-}2\text{-}8)$$

由式(13-2-5)显见 $\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$ 和 $\psi^a \equiv (\partial/\partial\varphi)^a$ 是 Killing 场. 此外没有其他独立 Killing 矢量场. 因星体半径远大于使 g_{00} 为零的 r 值, 星外有 $g_{ab}\xi^a\xi^b \equiv g_{00} < 0$ 和 $g_{ab}\psi^a\psi^b \equiv g_{33} > 0$, 表明 ξ^a 和 ψ^a 分别是类时和类空 Killing 场, 而且两者对易. 可见星外的 KN 时空是稳态轴对称的(见 §8.5). 然而, 式(13-2-1)中交叉项 $\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi$ 的系数非零表明 ξ^a 与等 t 面并不正交. [φ 坐标线躺在等 t 面上, $(\partial/\partial\varphi)^a$ 应切于等 t 面, 而 $g_{ab}(\partial/\partial t)^a(\partial/\partial\varphi)^b = g_{03} \neq 0$ 说明 $(\partial/\partial t)^a$ 不垂直于 $(\partial/\partial\varphi)^a$, 故不正交于等 t 面.] 事实上, 可以证明(习题 2)类时 Killing 场 $\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$ 为非超曲面正交矢量场, 因此 ξ^a 所代表的稳态性并不蕴含静态性. 从物理上看, 这是因为旋转使时间反演对称性不复存在. (把描写旋转的影片倒放, 会因旋转方向相反而被认出.)

如果想消除时空交叉项, 可按下式定义新坐标系 $\{t', r', \theta', \varphi'\}$:

$$t' \equiv t,\ \ r' \equiv r,\ \ \theta' \equiv \theta,\ \ \varphi' \equiv \varphi - \varOmega t, \qquad (13\text{-}2\text{-}9)$$

其中
$$\Omega \equiv -\frac{g_{03}}{g_{33}}. \qquad (13\text{-}2\text{-}10)$$

KN 度规在新系的线元为

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{{g_{03}}^2}{g_{33}}\right) dt'^2 + g_{11}dr'^2 + g_{22}d\theta'^2 + g_{33}(d\varphi' + t'd\Omega)^2, \qquad (13\text{-}2\text{-}11)$$

其中 $g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{03}$ 是度规在原坐标系的分量, 但现在(连同 Ω)应看作新坐标的函数. 式(13-2-11)右边最后一项包含交叉项, 但因 $g_{\mu\nu}$ 不含 t 和 φ, 由式(13-2-9)和(13-2-10)可知 Ω 只是 r' 和 θ' 的函数, 故式(13-2-11)不含“时空交叉项”, 这是一个优点. 然而度规的新分量 $g'_{\mu\nu}$ 不再与 t' 无关, 从而隐藏了度规的稳态性, 这是一大缺点, 是稳态时空不选类时 Killing 场的积分曲线为时间坐标曲线的必然结果. 不要由 $t'=t$ 误以为 $(\partial/\partial t')^a = (\partial/\partial t)^a$, 因为两者都取决于各自坐标系中其他坐标的定义($t$ 坐标线是除 t 外的坐标为常数的曲线). 两者关系为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a - \Omega\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a. \qquad (13\text{-}2\text{-}12)$$

请注意 $(\partial/\partial t')^a$ 不是 Killing 场. 从几何角度看, KN 度规在 $\{t', r', \theta', \varphi'\}$ 系的线元之所以无时空交叉项, 是因为 $(\partial/\partial t')^a$ 与等 t' 面正交(图 13-8). 还应注意 $(\partial/\partial\varphi')^a$ [及 $(\partial/\partial\theta')^a, (\partial/\partial r')^a$]切于等 t' 面, 因为对 φ' 坐标线有 $t'=$ 常数.

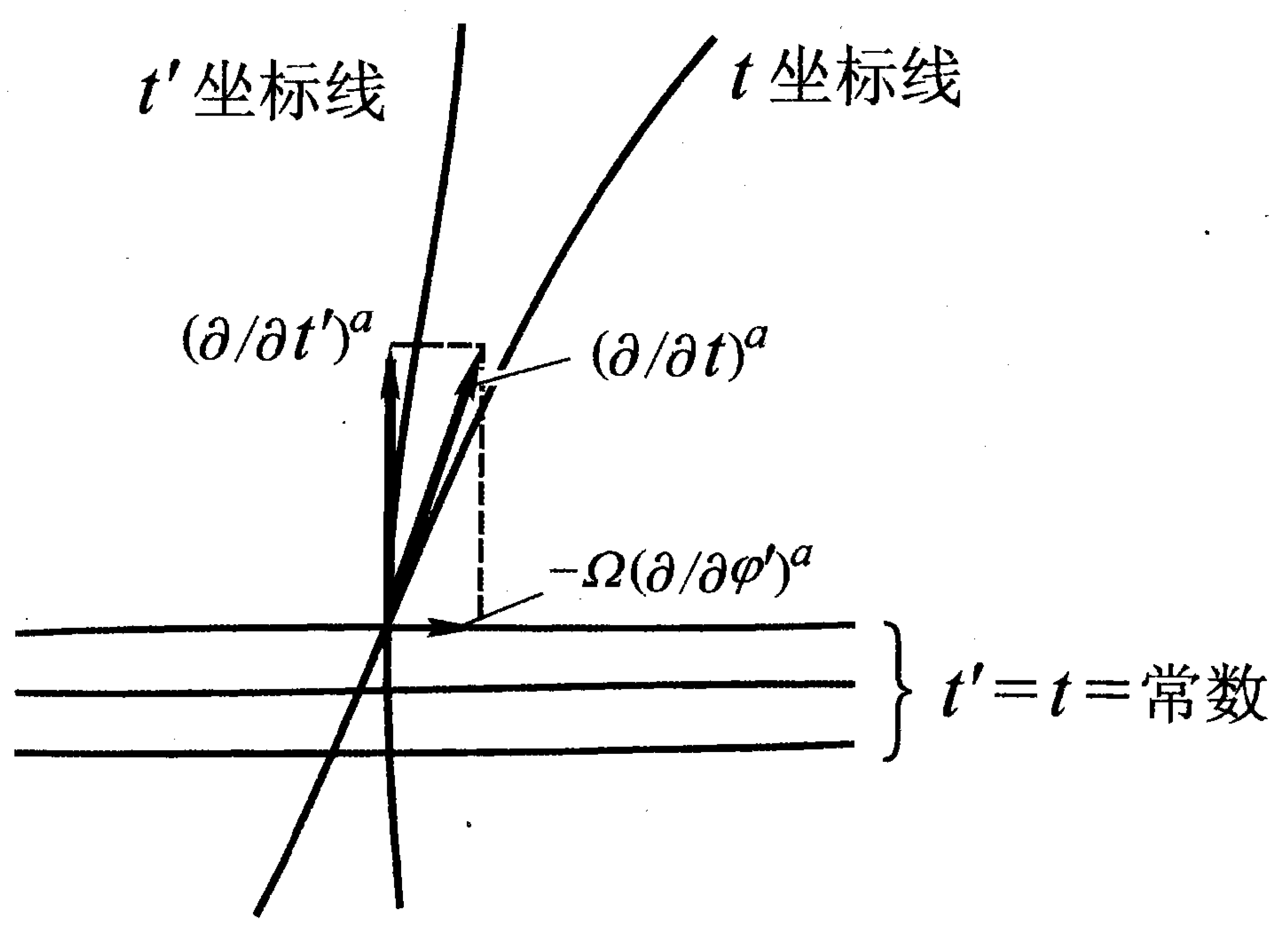


图 13-8　$(\partial/\partial t')^a$ 与等 t' 面正交是带撇系中线元无时空交叉项的几何原因

[选读 13-2-1]

KN 度规的参数 M, a, Q 的物理意义可借第 12 章的概念解释. 由式(12-6-11)可知, 对 KN 度规,

$$\text{星体(时空)总电荷} = \frac{1}{4\pi}\int_S ({}^*F)_{ab} = \frac{1}{8\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}F^{cd}\ , \tag{13-2-13}$$

其中 $F_{cd} = 2\nabla_{[c}A_{d]}$ 可由 4 势 A_a 表达式(13-2-4)求得, ε_{abcd} 是与 KN 度规适配的体元, S 是任一类空超曲面上把星体包围在内的任一拓扑 2 球面. 借用线元(13-2-1)可求得(习题)

$$\frac{1}{8\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}F^{cd} = \text{KN 线元(13-2-1)的参数}\ Q\ , \tag{13-2-14}$$

可见参数 Q 的确是时空的总电荷. 对 $Q=0$ 的情况, (事实上任何星体都有 $Q \ll M$, 对大多数情况都可近似认为 $Q=0$.) 星外 Kerr 时空是渐近平直稳态时空[Ashtekar and Hansen (1978)附录 C 有详细讨论], 时空的总质量可由 Komar 质量公式[式(12-7-2)]

$$M_{\rm K} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d \tag{13-2-15}$$

计算, 其中类时 Killing 矢量场 ξ^d 就是 Boyer-Lindquist 系的坐标基矢场 $(\partial/\partial t)^d$. 由计算可得(习题)

$$M_{\rm K} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = \text{Kerr 线元(13-2-1)的参数}\ M\ , \tag{13-2-16}$$

可见参数 M 的确是星体(时空)的总质量. 类似地, 渐近平直的轴对称真空时空的总角动量可由下式定义[参见 Wald(1984)第 11 章习题 6]

$$\text{时空总角动量} := \frac{1}{16\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\psi^d\ , \tag{13-2-17}$$

其中 ψ^d 是反映轴对称性的类空 Killing 矢量场. [对 Kerr 时空, ψ^d 就是 Boyer-Lindquist 系的坐标基矢场 $(\partial/\partial\varphi)^a$.] 由计算可得(习题)

$$\frac{1}{16\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\psi^d = Ma\ , \tag{13-2-18}$$

可见 a 的确是星体(时空)的单位质量的角动量.

对 $Q \neq 0$ 的 KN 时空, 能动张量 T_{ab} 在星外不为零, 但在趋于无限远时足够快地趋于零, 用式(13-2-15)和(13-2-17)计算总质量和总角动量时应取两式右边的积分在 S "趋于无限远" 时的极限(见小节 12.7.1 末), 结果仍分别为 M 和 Ma.

[选读 13-2-1 完]

§ 13.3　KN 时空的最大延拓

线元(13-2-1)在 $\rho^2=0$ (即 $r=0$ 且 $\theta=\pi/2$) 处奇异(g_{00}，g_{33}和 g_{03}无意义). 计算表明这一奇性对应于不完备类光(在 $Q=0$ 时还有类时)测地线, 而且 $R_{abcd}R^{abcd}$ 在趋于 $\rho^2=0$ 时发散, 可见 $\rho^2=0$ 是时空奇性, 而且是 s.p.曲率奇性(见小节9.4.1末). 除这一奇性外, 线元(13-2-1)在 $\Delta=0$ 处也有奇性. 由式(13-2-3)可知能使 $\Delta=0$ 的 r 为

$$r_\pm=M\pm\sqrt{M^2-(a^2+Q^2)}\,. \tag{13-3-1}$$

对下列三种情况应分别讨论: ① $M^2<a^2+Q^2$; ② $M^2>a^2+Q^2$; ③ $M^2=a^2+Q^2$.

13.3.1　$M^2<a^2+Q^2$ 的情况

这时 $\Delta(r)=0$ 没有实根, 线元(13-2-1)只在 $\rho^2=0$ 处奇异. 要想弄清奇点所在区的“形状”, 先要对 Boyer-Lindquist 坐标给出合理的解释. 鉴于施瓦西坐标 t,r,θ,φ 可解释为准球坐标, (当 $M=0$ 时退化为闵氏时空的球坐标. “准”字也常略去.) 最天真的想法是把 Boyer-Lindquist 坐标 t,r,θ,φ 也解释为准球坐标. 然而 $\rho^2=0$ 对应于 $r=0$ 且 $\theta=\pi/2$, 而球坐标 θ 在 $r=0$ 处无意义, 因此条件 $r=0,\theta=\pi/2$ 显得非常奇怪. 例如, 奇点应从时空流形中挖去, 而球坐标 $r=0$ 代表一个点(不问 θ 是否为 $\pi/2$), 到底该挖不该挖? 这说明在求解爱因斯坦方程得到 $g_{\mu\nu}$ 后, 在讨论它代表的度规场 g_{ab} 应该定义在什么流形上这一问题时, 对所用坐标系的天真解释是易出问题的. 为了给 Boyer-Lindquist 坐标 t,r,θ,φ 一个合理的解释, 先考虑 $M=Q=0$ 而 $a\neq 0$ 的特例. 这时式(13-2-1)成为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&-\mathrm{d}t^2+(r^2+a^2)^{-1}(r^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}r^2+(r^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2\\&+(r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned} \tag{13-3-2}$$

它在 $r=0,\theta=\pi/2$ 处仍奇异(行列式 $g=0$). 然而, 从物理角度考虑, $M=Q=0$ 恐怕就应为平直度规, 故式(13-3-2)应能通过坐标变换变为闵氏线元的最简形式. 事实的确如此. 令

$$x=\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\,, \tag{13-3-3}$$

则式(13-3-2)变为 $\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$. 可见式(13-3-2)在 $r=0,\theta=\pi/2$ 处的奇性只是坐标奇性, 而且式中的 a 也只是坐标变换的一个参数, 毫无物理意义.

式(13-3-3)其实就是 3 维欧氏空间中笛卡儿坐标与椭球坐标之间的变换关系. 由该式可知等 φ 面是过 z 轴的平面, 这与球坐标系相同. 然而椭球坐标系中等 r 面和等 θ 面的表现却与球坐标系不同. 由式(13-3-3)可看出各等 r 面和等 θ 面关于 z 轴对称, 因此只须讨论任一 $\varphi=\varphi_0$ 的等 φ 面. 又由于在 $x\sim y$ 面内作坐标转动

$$x\mapsto x'=x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0, \quad y\mapsto y'=-x\sin\varphi_0+y\cos\varphi_0,$$

便可使此面的 φ 值变为 $\varphi'=\varphi-\varphi_0=0$, 所以只须讨论 $\varphi=0$ 的等 φ 面. 但它只代表半个平面($x\sim z$ 面的一半), 索性讨论由 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 合起来的整个 $x\sim z$ 面. 在此截面上有

$$x=\pm\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta, \quad y=0, \quad z=r\cos\theta. \tag{13-3-4}$$

当 $r\neq 0$ 时上式给出

$$\frac{x^2}{r^2+a^2}+\frac{z^2}{r^2}=1,$$

可见 $x\sim z$ 面内的等 r 线是单参共焦椭圆族, 焦点与原点的距离为

$$\sqrt{(r^2+a^2)-r^2}=a.$$

当 $r=0$ 时式(13-3-4)给出 $x=\pm a\sin\theta, z=0$, 所以 $r=0$ 的等 r 线是两焦点之间的直线段, 不妨看作短轴为零的“椭圆”(图 13-9). 另一方面, 若 $\sin\theta\neq 0, \cos\theta\neq 0$, 则式(13-3-4)给出

$$\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta}-\frac{z^2}{a^2\cos^2\theta}=1,$$

可见 $x\sim z$ 面内的等 θ 线是单参共焦双曲线族,① 焦点与原点的距离为

$$\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}=a,$$

说明这对焦点与刚才那对焦点重合. 当 $\sin\theta=0$(或 $\cos\theta=0$)时双曲线退化为 z(或 x)轴的两段(图 13-9). 椭球坐标系与球坐标系的一个重要区别是: 对球坐标系, $r=0$ 是原点; 对椭球坐标系, $r=0$ 是半径为 a 的圆盘, 而 θ 和 φ 则是用以区分盘上不同点的坐标. $r=0$, $\theta=\pi/2$ 代表圆盘的边线, 即半径为 a 的圆环, 也可用笛卡儿坐标表为 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. 上述讨论表明闵氏度规在椭球坐标系的线元(13-3-2)在圆环($r=0, \theta=\pi/2$)上有奇性, 这当然只是坐标奇性. 受此启发, 人们认

① 此提法有必要准确化. 由图 13-9 可见, 每一给定 θ 值(例如 $\theta=\pi/4$)其实只对应于一对双曲线的一半(对 $\theta=\pi/4$ 是上半段), 再配上 $\pi-\theta$(现在是 $3\pi/4$)所对应的另一半(下半段)才是一对完整的双曲线.

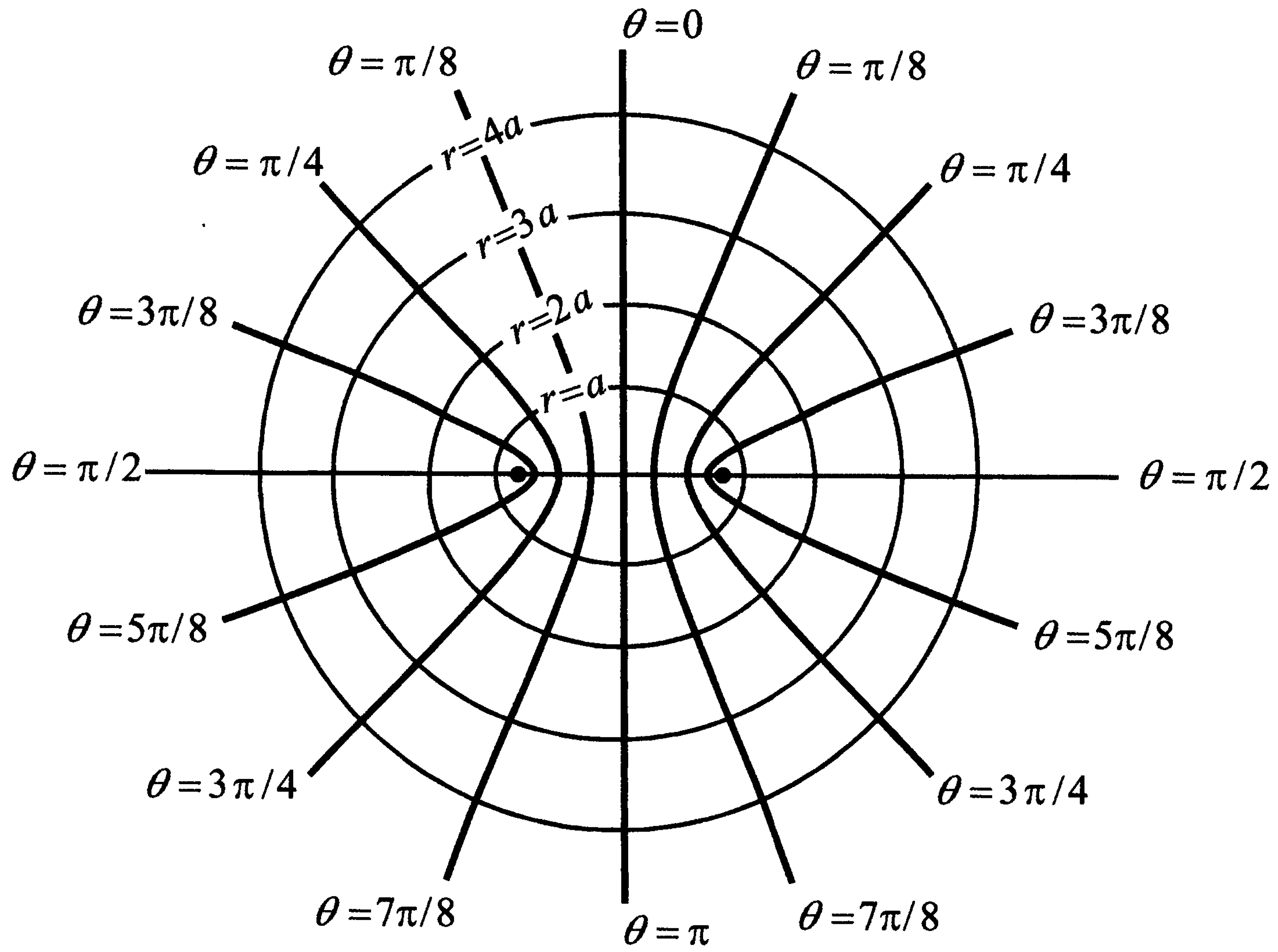


图 13-9　椭球坐标系(关于 z 轴对称)

识到KN时空的Boyer-Lindquist坐标 t，r，θ，φ 不应天真地解释为准球坐标，而应看作准椭球坐标(在 $M=Q=0$ 时退化为椭球坐标)，并希望找到闵氏时空的洛伦兹坐标 t,x,y,z 在 KN 时空的某种推广(准洛伦兹坐标)，它与准椭球坐标的关系在 $M=Q=0$ 时能回到式(13-3-3). 这种准洛伦兹坐标的确存在，称为 Kerr-Schild 坐标，与准椭球坐标的关系为

$$
\begin{aligned}
\bar{t} &= t - r + \int (r^2+a^2)\Delta^{-1}\mathrm{d}r\,,\\
x &= \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\cos\left[\varphi + \arctan\frac{a}{r} + a\int_{\infty}^{r}\Delta^{-1}(\hat{r})\mathrm{d}\hat{r}\right],\\
y &= \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\sin\left[\varphi + \arctan\frac{a}{r} + a\int_{\infty}^{r}\Delta^{-1}(\hat{r})\mathrm{d}\hat{r}\right],\\
z &= r\cos\theta\,.
\end{aligned}
\tag{13-3-5}
$$

KN 度规在 Kerr-Schild 坐标系 $\{\bar{t},x,y,z\}$ 的线元式为(Kerr 最初求得的线元正是下式在 $Q=0$ 时的特例)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &-\mathrm{d}\bar{t}^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \frac{r^2(2Mr-Q^2)}{r^4+a^2z^2}\\
&\times\left[\frac{r(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)-a(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r^2+a^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{r}+\mathrm{d}\bar{t}\right]^2 .
\end{aligned}
\tag{13-3-6}
$$

当 $M=Q=0$ 时上式退化为闵氏度规在洛伦兹系的线元. 请读者验证式(13-3-3)是(13-3-5)的后 3 式在 $M=Q=0$ 时的特例. 由式(13-3-5)可知 $r=0, \theta=\pi/2$ (即 $\rho^2=0$) 也对应于 $x^2+y^2=a^2, z=0$, 即代表半径为 a 的圆环, 所以 KN 时空的奇性称为**环状奇性**(ring singularity)或**奇环**(singular ring), 应从时空中开除出去[在 4 维语言中应开除的是这个环与 $\mathbb{R}$ (“时间”)的卡氏积].

既然式(13-3-6)是 KN 度规在 Kerr-Schild 坐标系(准洛伦兹坐标系)的线元, 式中的 r 就应看作坐标 x, y, z 的函数. 由式(13-3-5)可知函数 $r(x,y,z)$ 以如下方式被隐给出(但只能把 r 确定到差一负号的程度):

$$r^4 - r^2(x^2+y^2+z^2-a^2) - a^2z^2 = 0 . \qquad (13\text{-}3\text{-}7)$$

上式首先表明 $z\neq 0$ 时 $r\neq 0$. 令 $K\equiv x^2+y^2-a^2$, 则由上式还可解得

$$r^2 = \frac{1}{2}\left[K+z^2+\sqrt{(K+z^2)^2+4a^2z^2}\right], \qquad (13\text{-}3\text{-}8)$$

故 $z=0$ 时 $r^2=(K+|K|)/2$, 表明

$$z=0 \text{ 时有 } \begin{cases} r=0, & \text{若 } x^2+y^2-a^2 \leqslant 0, \\ r\neq 0, & \text{若 } x^2+y^2-a^2 > 0. \end{cases} \qquad (13\text{-}3\text{-}9)$$

上述结论也可从图 13-9 看出(图中横轴相当于 $z=0$). 不过现在出现一个微妙问题. 在 $M^2<a^2+Q^2$ 的情况下线元(13-2-1)只在 $\rho^2=0$ (即奇环)处奇异, 因此原则上 r 既可为正又可为负(在 $\theta\neq\pi/2$ 时还可为零). 然而图 13-9 只显示出 $r\geqslant 0$ 的一面, 因为所有椭球面的 r 都为正. 你也可令所有椭球面的 r 都为负, 那时的图 13-9 就只显示出 $r\leqslant 0$ 的一面. 可见, 即使把图 13-9 中的圆环($r=0, \theta=\pi/2$)挖去, 它与 KN 时空的等 $\bar{t}$ 面(记作 $\Sigma_{\bar{t}}$)也不会有相同的拓扑结构. 事实上, 如果用挖去圆环的图 13-9 描述 $\Sigma_{\bar{t}}$ (即暂时规定 $\Sigma_{\bar{t}}$ 上的 $r\geqslant 0$), 则到达圆盘($x^2+y^2<a^2, z=0$)的所有测地线都不完备, 但计算表明在沿线趋近 $r=0$ 时又都没有曲率奇性, 这就强烈暗示着时空应“穿过圆盘内部”向 $r<0$ 处延拓. 这一想法也可从另一角度印证. 要使线元(13-3-6)能描写 KN 度规, 函数 $r(x,y,z)$ 至少应为 C^2 (以使时空曲率有意义), 然而(下面将证明) z 在经过圆盘时变号而 r 不变号导致 $\partial r/\partial z$ 在圆盘上不存在, 所以 $r(x,y,z)$ 连 C^1 也不够. 具体说, 在 $x^2+y^2<a^2$ 的情况下有

$$\left.\frac{\partial r}{\partial z}\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{r-0}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{r}{z} \qquad (13\text{-}3\text{-}10)$$

再令 $A \equiv K + z^2$, $B \equiv (A^2 + 4a^2z^2)^{1/2}$, 则式(13-3-8)成为 $2r^2 = A + B$, 故

$$\left.\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{r^2}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{A+B}{2z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{(A+B)(A-B)}{2z^2(A-B)}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-2a^2}{K+z^2-\sqrt{(K+z^2)^2+4a^2z^2}} = -\frac{a^2}{K} = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2} \neq 0.$$

就是说, 只要 $\partial r/\partial z|_{z=0}$ 存在, 则必非零. 另一方面, 由式(13-3-7)可知在 x, y 给定后 $r(-z) = \pm r(z)$, 若坚持在穿过圆盘时 r 不变号, 则只能有 $r(-z) = r(z)$, 故 $r(z)/z$ 与 $r(-z)/(-z)$ 异号, 由式(13-3-10)便得 $\partial r/\partial z|_{z=0} = \lim_{z\to 0}(r/z) = 0$, 与"只要 $\partial r/\partial z|_{z=0}$ 存在, 则必非零"的结论矛盾. 可见 $r(-z) = -r(z)$, 即 r 在自上而下经过圆盘时也像 z 那样由正变负. 这再次表明 r 应向负值延拓.① 为便于理解即将介绍的延拓, 先打一个比方. 设在闵氏时空中挖去两区 A 和 B 再把两者的边界按某种方式认同(图 13-10), 度规通常便不连续. 治理此"病"的方法很简单: 先解除认同, 再补上所挖部分便可. 线元(13-3-6)中的函数 $r(x,y,z)$ 在 $r=0$ 处的病态表现也可认为是从原本有光滑度规的流形中挖去某个区域并把所余部分随意认同的结果. 治理方法也是先解除认同再补上所挖部分. 具体做法如下. 取 $\mathbb{R}^3$ 的两个版本, 其自然坐标分别记作 x, y, z 和 x', y', z'. 挖去圆环 $z=0,\ x^2+y^2=a^2$ 和 $z'=0,\ x'^2+y'^2=a^2$, 产物分别记作 W 和 W', 其中的圆盘 $z=0,\ x^2+y^2<a^2$ 和 $z'=0,\ x'^2+y'^2<a^2$ 分别记作 D 和 D'. 令 $M \equiv W\times\mathbb{R}$, $M' \equiv W'\times\mathbb{R}$, 以 $\bar{t}$ 代表 $\mathbb{R}$ 的自然坐标, 则 $\{\bar{t},x,y,z\}$ 和 $\{\bar{t},x',y',z'\}$ 分别是 M 和 M' 的坐标系. 以 $\bar{t},x,y,z$ 为老坐标借式(13-3-5)在 M 上定义新坐标 t,r,θ,φ, 并规定各点的 $r>0$. (在 $D\times\mathbb{R}$ 上除外, 那里 $r=0$.) 把式(13-3-5)的 x,y,z 改为 x',y',z' 后又可用来在 M' 上定义新坐标 t,r,θ,φ, 但规定 $r<0$. ($D'\times\mathbb{R}$ 除外, 那里 $r=0$.) 再用式(13-3-6)在 M 上定义 KN 度规, 则 $\bar{t},x,y,z$ 和 t,r,θ,φ 分别成为准洛伦兹(Kerr-Schild)坐标和准椭球坐标. 在 M' 上也可类似地定义 KN 度规, 只须把式(13-3-6)中的 x,y,z 改为 x',y',z'. 设 $\Sigma_{\bar{t}}$ 和 $\Sigma'_{\bar{t}}$ 分别是 M 和 M' 中 $\bar{t}$ 值相等的等 $\bar{t}$ 面, 则点 $(x,y,z)\in\Sigma_{\bar{t}}$ 对应的 r 值是式(13-3-8)右边的正平方根; 点 $(x',y',z')\in\Sigma'_{\bar{t}}$ 的 r 值是式(13-3-8)右边的负平方根. 因 $\Sigma'_{\bar{t}} - D'$ 上有 $r<0$,

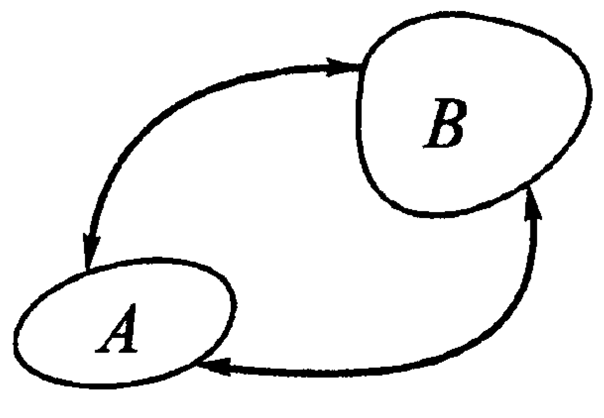


图 13-10 挖去 A, B 再把边界按某种方式认同

---

① 正文的讨论也适用于 $M=Q=0$ 的情况(闵氏度规), 但这时式(13-3-6)右边的含 r 项(最末的长项)自动消失, 因而没有延拓的必要.

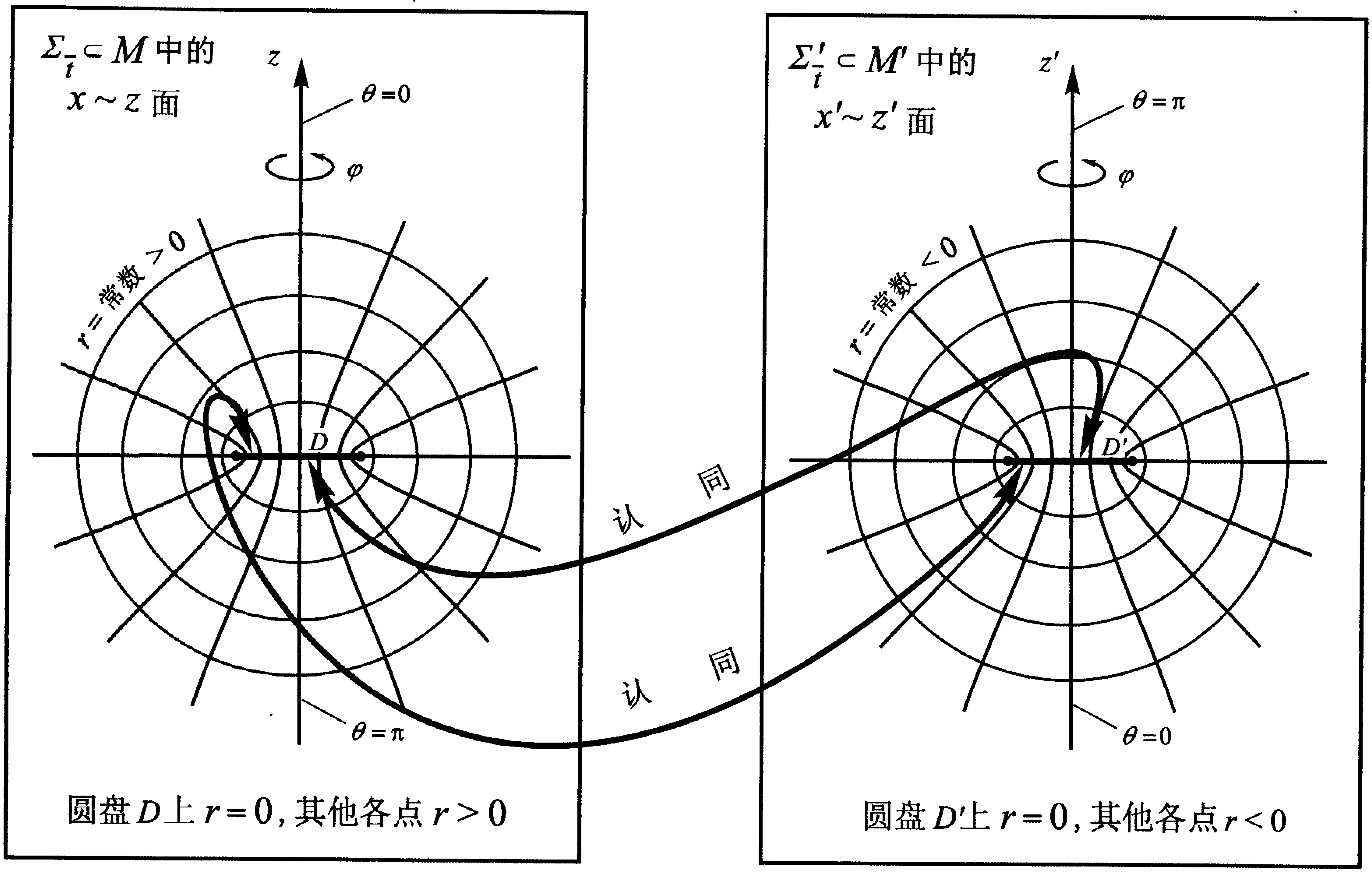


图 13-11　M 和 M' 中的等 $\bar t$ 面 $\Sigma_{\bar t}$ 和 $\Sigma'_{\bar t}$. 把 D 顶与 D' 底认同，D 底与 D' 顶认同，所得“大”流形 $\tilde M$ 上的 KN 度规表现良好

故由式(13-3-5)可知图 13-11 右图的 z' 轴的负半轴有 $\theta=0$，但 φ 与 z' 轴仍保持右手关系. D 盘虽然并无厚度，但可看作由两个圆盘粘合而成，分别称为 D 顶和 D 底.(类似地，D' 也由 D' 顶和 D' 底粘成.) M 上的 KN 度规在从 D 顶到 D 底的过渡中的不良表现可看作 D 顶和 D 底被错误粘合所致，因此“治病”方法是解除这一认同，再补上“曾被不适当地挖去的” $\Sigma'_{\bar t} \subset M'$. 补法是：先把 D 底与 D' 顶认同，再把 D 顶与 D' 底认同(图 13-11，详见选读 13-3-1). M 和 M' 从此合成一个“是 M 的两倍大”的流形 $\tilde M$，其中任一到达 D(或 D')顶的曲线必从 D'(或 D)底出来，其 r 在经过零值时变号. 这样便可消除由于 z 值在盘上符号改变而给函数 $r(x,y,z)$ 造成的不可微性. 由式(13-3-6)在 M 上定义的 KN 度规的定义域现在可自然延拓为 $\tilde M$，而且在整个 $\tilde M$ 上表现良好. 以 $M' \subset \tilde M$ 上的 Boyer-Lindquist 坐标重表这一线元则仍得式(13-2-1)，不过其中的 $r<0$. $\tilde M$ 仍是连通流形(满足时空背景流形的必要条件)，因为其中任意两点 p, q 可被连续曲线所连结(图 13-11 示出 $p\in M$, $q\in M'$ 的情形). 但它不是单连通流形，图 13-12 示出从 $p\in M$ 经曲线 C_{p1} 到点 1，再经曲线 C_{12} 到点 2，最后经曲线 C_{2p} 回到 p 的闭合曲线，它不能通过连续变形缩为一点(这当然是挖去奇环的结果——该闭合曲线链绕了奇环). 至此我们在 $M^2 < a^2 + Q^2$ 的情况下完成了从 $r\in(0,\infty)$ 到 $r\in(-\infty,\infty)$ 的延拓，KN 度规 g_{ab} 在“大”流形 $\tilde M$ 上表

现良好. 由于不存在其他坐标奇性, $(\tilde{M}, g_{ab})$ 就是 $M^2 < a^2 + Q^2$ 的 KN 时空的最大延拓. 请注意这种时空不存在事件视界, 环状奇性裸露在外. 这种不藏在事件视界之内的奇性称为**裸奇性**(naked singularity). 裸奇性比非裸奇性使物理学家的日子更不好过, 因此 Penrose 于 1969 年提出一个假设:任何真实的物理时空都不存在裸奇性. 这称为**宇宙监督假设**, 详见 §E.2.

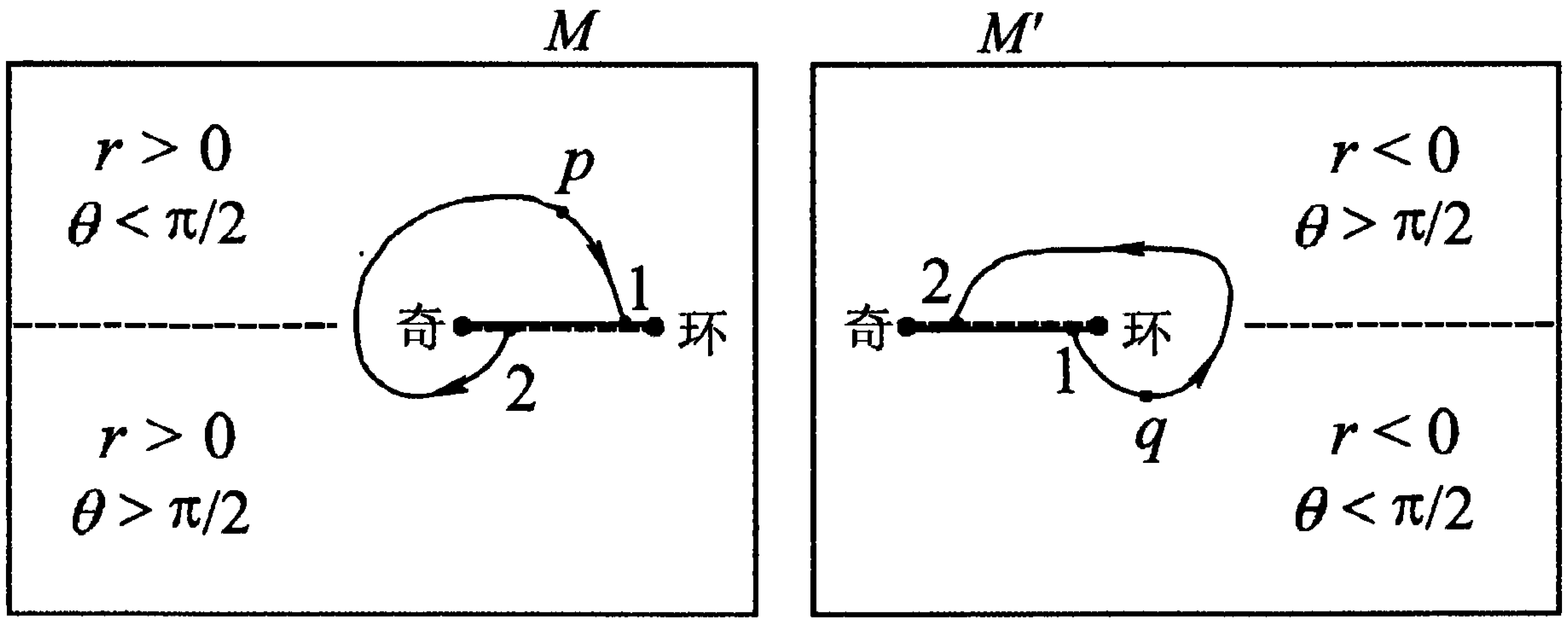


图 13-12 $\tilde{M}$ 是连通流形($\forall p, q \in \tilde{M}$ 存在从 p 到 q 的连续曲线 $C_{p1} \cup C_{1q}$), 但不是单连通流形(存在不能连续缩为一点的连续闭曲线 $C_{p1} \cup C_{12} \cup C_{2p}$)

[选读 13-3-1]

读者可能会问:圆盘 D (及 D')既然没有厚度, 所谓"把 D 底与 D' 顶认同"和"把 D 顶与 D' 底认同"究竟是什么意思?其实, 真正的认同无非是把 D 和 D' 的对应点视为同一点, 因而就是把 D 与 D' 做了认同. 采用"把 D 底与 D' 顶认同"说法的目的是指明曲线的走向, 即:任一条从 D "上方"($\theta < \pi/2$)出发的曲线到达 D (因而到达 D')后应向 D' "下方"($\theta < \pi/2$)继续前行. 为了更加清晰和避免误解, 也可用如下方式重新表述前面的做法.

以 x, y, z 代表 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标. 从 $\mathbb{R}^3$ 中挖去 $z = 0$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ 的所有点, 其产物(再与 $\mathbb{R}$ 作卡氏积, 下同)记作 N. 在 N 上按式(13-3-8)定义 r, 并要求 $r > 0$. 再从 $\mathbb{R}^3$ 中挖去 $z = 0$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2$ 的所有点, 其产物记作 $\hat{N}$. 在 $\hat{N}$ 上按式(13-3-8)定义 r, 并要求 $r > 0$ (对 $z > 0$), $r = 0$ (对 $z = 0$), $r < 0$ (对 $z < 0$). 类似地还可定义 N' 和 $\hat{N}'$, 只是在 N' 上要求 $r < 0$; 在 $\hat{N}'$ 上要求 $r < 0$ (对 $z > 0$), $r = 0$ (对 $z = 0$), $r > 0$ (对 $z < 0$). 再用式(13-3-5)在 N, $\hat{N}$, N', $\hat{N}'$ 上定义 θ 和 φ 值. 现在把 N, $\hat{N}$, N', $\hat{N}'$ 上 r, θ, φ 相等的点认同,它们便可看作一个大流形 $\tilde{M}$ 的 4 个坐标邻域, 四者之间的相交状况如下:

$$N \cap N' = \varnothing, \quad \hat{N} \cap \hat{N}' = \varnothing,$$

$$N \cap \hat{N} = O_1, \quad N \cap \hat{N}' = O_2, \quad N' \cap \hat{N} = O_3, \quad N' \cap \hat{N}' = O_4,$$

其中O_1, O_2, O_3, O_4是如图 13-13 所示的开集，例如(其他仿此)，O_1定义为

$$O_1 \equiv \{(\bar{t},x,y,z) \mid z>0, r>0\},$$

而N和$\hat{N}$各自可表为 3 个子集的并集:

$$N = O_1 \cup O_2 \cup \{(\bar{t},x,y,z) \mid z=0, x^2+y^2>a^2, r>0\},$$

$$\hat{N} = O_1 \cup O_3 \cup \{(\bar{t},x,y,z) \mid z=0, x^2+y^2<a^2, \theta<\pi/2\}.$$

这样得到的大流形$\tilde{M}$是 4 个流形N, $\hat{N}$, N', $\hat{N}'$先求并集再作认同的结果，但现在的认同是开集与开集(例如N中的O_1与$\hat{N}$中的O_1)的认同，比正文中的认同更为清晰明确. 请注意现在的N及N'分别是原来(正文)的M及M'挖去圆盘$z=0$, $x^2+y^2<a^2$的结果. **[选读 13-3-1 完]**

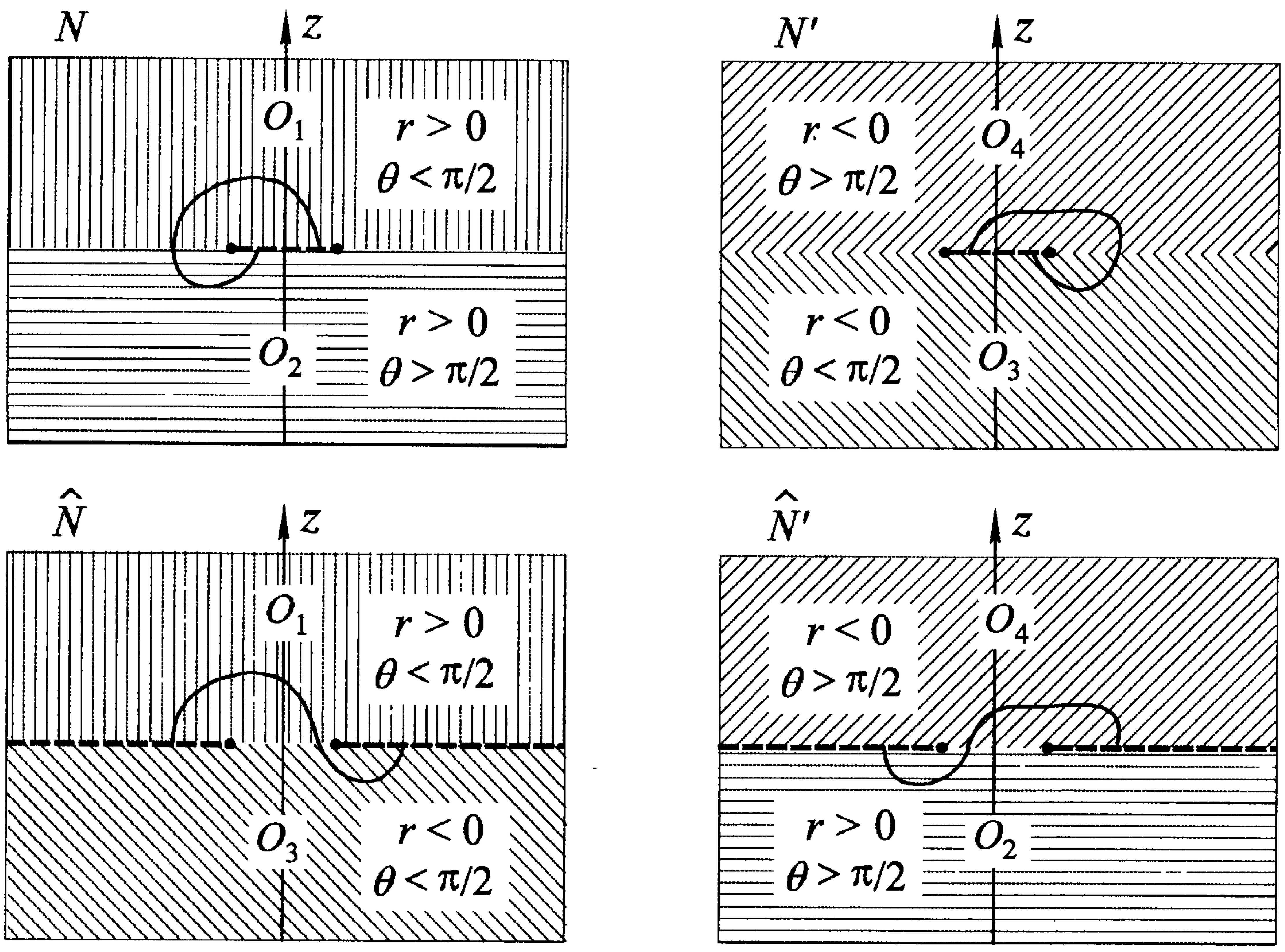


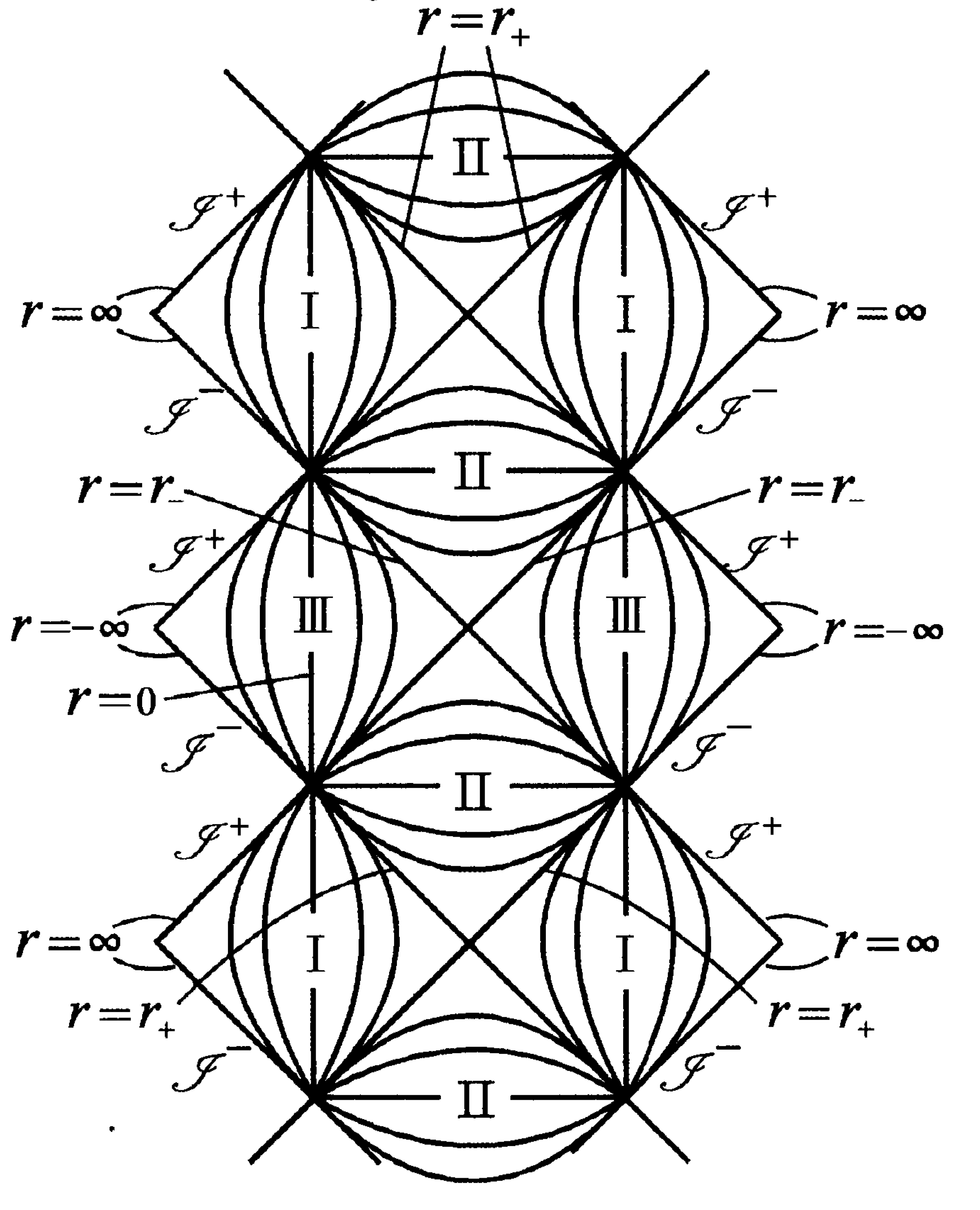
图 13-13 N, $\hat{N}$, N', $\hat{N}'$可看作大流形$\tilde{M}$的 4 个坐标邻域

13.3.2 $M^2 > a^2 + Q^2$和$M^2 = a^2 + Q^2$的情况

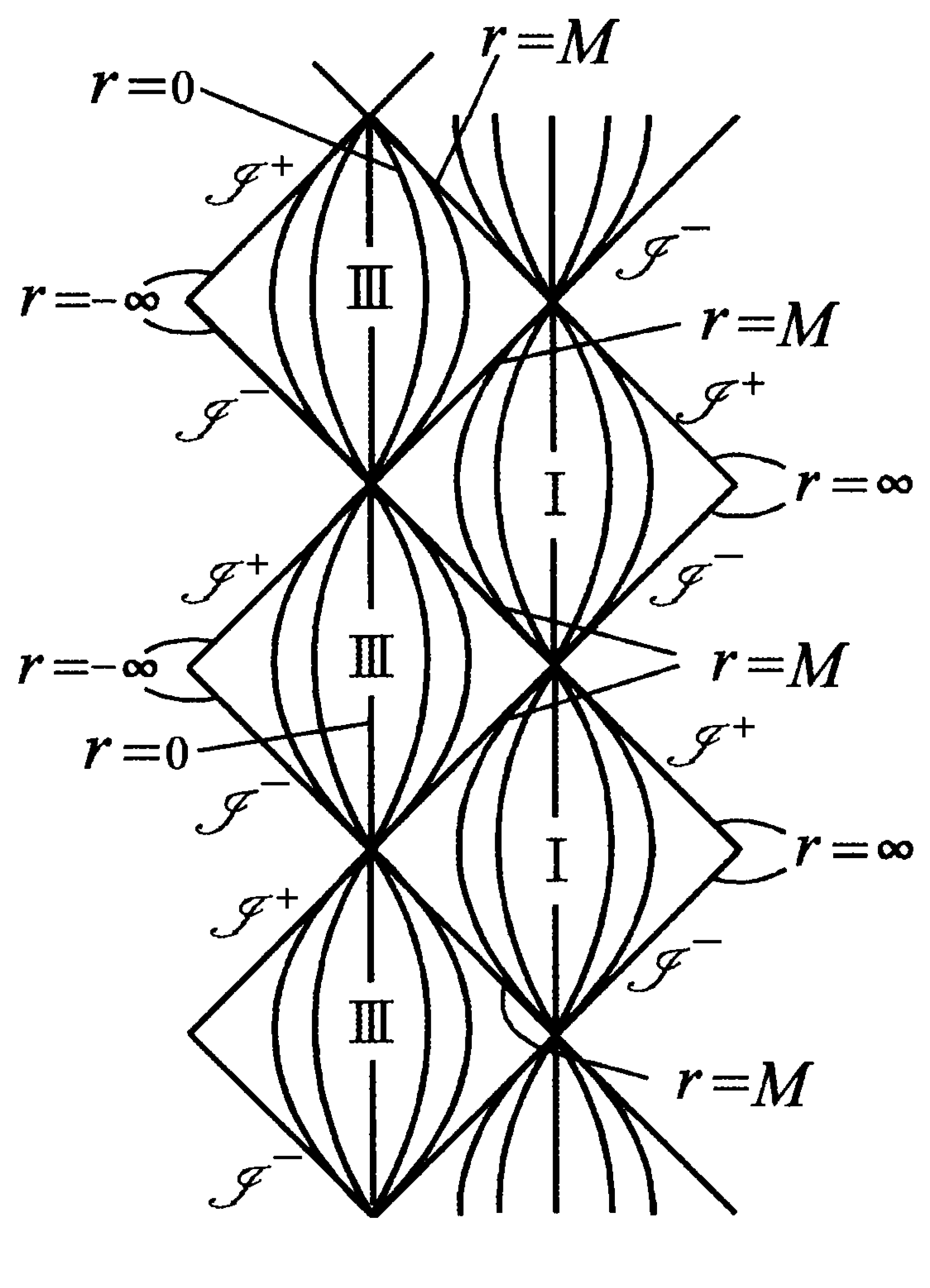
与$M^2 < a^2 + Q^2$的情况相较，$M^2 > a^2 + Q^2$的延拓更为复杂. 首先，$r=0$, $\theta=\pi/2$仍是奇环，时空仍可通过圆盘$r=0$, $\theta<\pi/2$按图 13-10 向$r<0$延拓. 问题的复杂性源于方程$\Delta(r)=0$现在有两个实根

$$r_\pm = M \pm [M^2-(a^2+Q^2)]^{1/2}.$$

虽然通常星体半径远大于r_+，我们仍想讨论 KN 度规适用于全时空的情况. 由于线元(13-2-1)在$r_\pm$上奇异，KN 时空也像 RN 时空那样分成 3 种区域：I 型区(渐近平直区)满足$r_+ < r < \infty$；II 型区满足$r_- < r < r_+$；III 型区满足$-\infty < r < r_-$(已向$r < 0$作了延拓). 当$M^2 = a^2 + Q^2$时$r_+ = r_-$，II 型区消失. 与 RN 线元的奇性$r = r_\pm$类似，KN 线元的上述奇性也只是坐标奇性，引入类似于 Kruskal 坐标的坐标可消除并实现最大延拓. 图 13-14(a)，(b)分别是$M^2 > a^2 + Q^2$和$M^2 = a^2 + Q^2$的 KN 最大延拓时空的 Penrose 图[详见 Chandrasekhar(1983)]. 由于 KN 度规只是轴对称而非球对称，不同θ的情况不同，图 13-14 只表现出$\theta = 0, \pi$(即对称轴z上)的情况. 与 RN 时空最大延拓图类似，图 13-14 也应向上、下方无限延伸，类光超曲面$r = r_+$也是 I 型区的事件视界(越过此视界就是 KN 黑洞区)，II 型区与两个 III 型区之间的两个[互相正交的(按纸面欧氏度规)]类光超曲面$r = r_-$也可看作柯西视界(许多文献也称之为内视界). 与 RN 时空不同，III 型区除包含$0 < r < r_-$的点外还包含$-\infty < r = 0$的所有点($r = 0$且$\theta = \pi/2$的点除外). 作为 2 维时空图，图 13-14 表现的只是 1 维空间. 而$\rho^2 = 0$对应于$r = 0$，$\theta = \pi/2$，故图 13-14 中的$r = 0$并不代表奇环. 为了表现含z轴的 2 维截面的情况，可以改画空间图，即图 13-15[见 Carter(1966)]. 读过选读 13-3-1 的读者可以看出此图就是图 13-13 的$\hat{N}$. 与施瓦西和 RN 的最大延拓时空[图 9-13(或 12-9)和图 13-1]类似，图 13-14 所描写的 KN 最大延拓时空很可能也不是物理真实的时空，见 §13.6 .



(a) $M^2 > a^2 + Q^2$ 的情况



(b) $M^2 = a^2 + Q^2$ 的情况

图 13-14 最大延拓 KN 时空的 Penrose 图(只表现对称轴z的情况)，曲线代表等r线

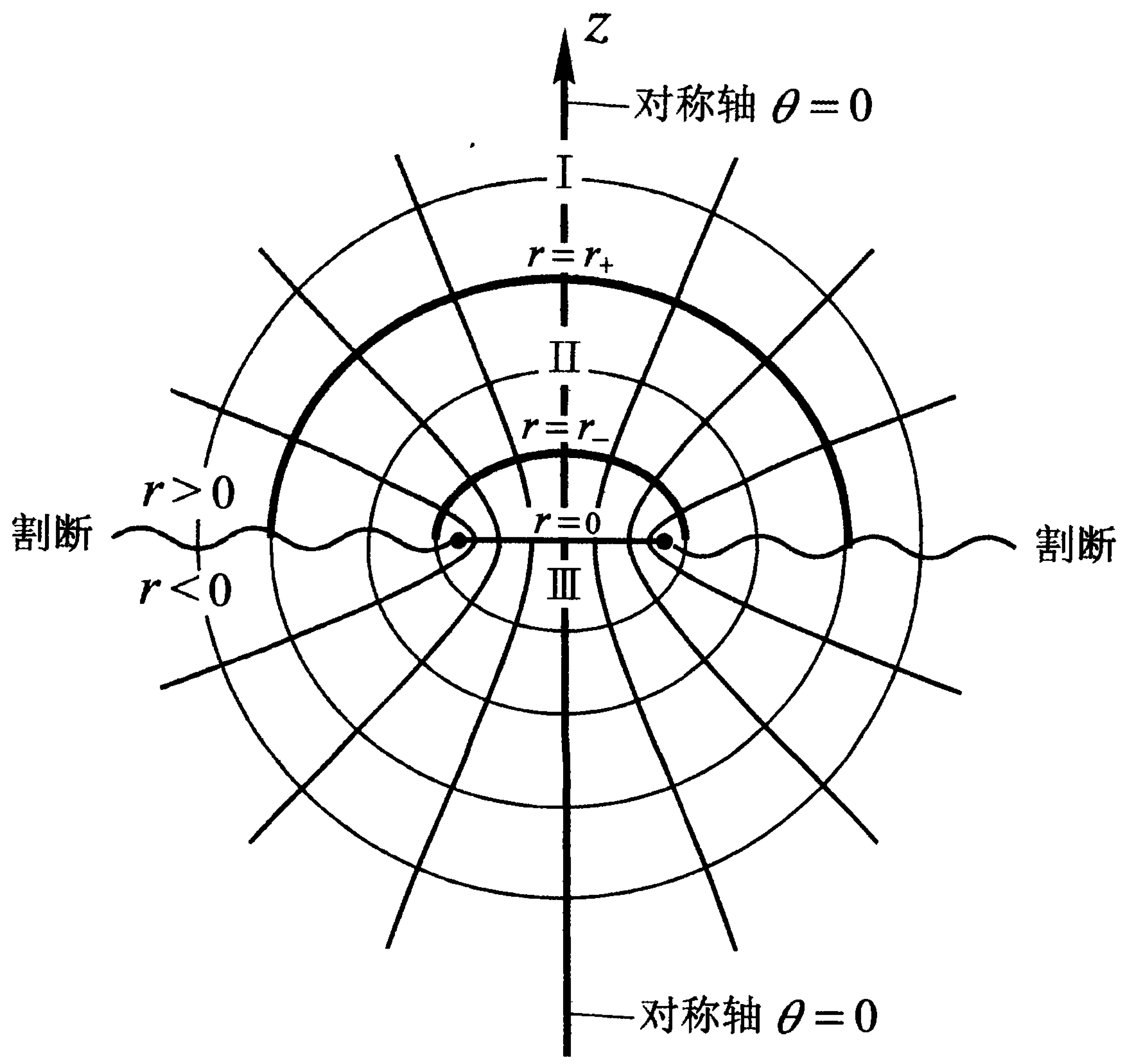


图 13-15　$M^2>a^2+Q^2$ 的 KN 时空的空间图(Carter 图). 粗椭圆线代表事件视界 $r=r_+$ 和内视界 $r=r_-$. 图中上、下部分只在 $r=0,\theta\neq\pi/2$ 的圆盘连通, 波状线表示上、下部分是割断的(两部分都有 $\theta<\pi/2$). 在 $Q=0$ 的情况下, 视界 $r=r_+$ 和 $r=r_-$ 随 a^2 增大而相互趋近, 当 $a^2=M^2$ 时重合(这时 $r_+=r_-=M$), 当 $a^2>M^2$ 时消失

Carter(1968)曾对最大延拓 KN 时空的测地线作过深入研究并得出如下结论: ①不到达奇环的测地线都完备; ② $Q=0$ 时, 确有类时和类光测地线到达奇环(因而 $Q=0$ 的KN时空是类时、类光测地不完备的), 但它们必须躺在赤道面上($\theta=\pi/2$); ③ $Q\neq0$ 时, 所有测地线中只有赤道面上且满足很具体条件的类光测地线才能到达奇环, 因而 $Q\neq0$ 的 KN 时空是类时测地完备而类光测地不完备的. 读者试与施瓦西和 RN 时空作一比较.

最后对参数 M,a,Q 的正负问题作一讨论. M 的物理意义是星体(或黑洞)质量, 我们一直默认 $M>0$. Q 值可正可负, 反映星体(或黑洞)带电的正负. $a(\equiv J/M)$ 在 $M>0$ 的前提下与 J 同号, 本来可正可负, 但总可选择 φ 坐标的正向使 a 为正. 如果把 M 仅看作 KN 解的一个参数而不问物理意义, 则 $M<0$ 当然也是解. 有趣的是, $M>0$ 的 KN 时空中 $r<0$ 区域的度规与 $M<0$ 的 KN 时空中 $r>0$ 区域的度规完全相同, (因而在 $|r|$ 很大时也渐近平直, 只是质量参数 M 为负.) 理由是线元(13-2-1)中的 r 以 r^2 或 Mr 形式出现.

§ 13.4 静界、能层和其他

13.4.1 静界和能层

本节讨论 $M^2 > a^2 + Q^2$ 的情况. 这时除 $r = r_\pm$ 外, $g_{00} = 0$ 的点也有重要意义. 与施瓦西解不同, $a \neq 0$ 时的线元(13-2-1)在 $g_{00} = 0$ 处并无奇性(线元的非对角性使行列式 g 在 $g_{00} = 0$ 处非零). 由式(13-2-5)可知 g_{00} 的零点有两个, 分别记作 r_{0+} 和 r_{0-}, 即

$$r_{0\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - (a^2 \cos^2\theta + Q^2)}, \qquad (13\text{-}4\text{-}1)$$

将上式与 $r_\pm$ 的表达式对比易见在对称轴上($\theta = 0$)有 $r_{0\pm} = r_\pm$, 在轴外有 $r_{0+} > r_+$, $r_{0-} < r_-$, 见图 13-16 和图 13-17. 曲面 $r = r_{0+}$ 称为静界(理由见命题 13-4-1 后的注 1), r_+ 和 r_{0+} 之间的区域称为能层(理由见 §13.5). 因为 $r = r_+$ 才是事件视界, 所以能层不含于黑洞区: 飞船中的观者穿越 $r = r_{0+}$ 进入能层后, 只要尚未到达事件视界, 仍可掉转船头、开足马力回到 r 为任意大的地方. 4 个关键点 $r_\pm$ 和 $r_{0\pm}$ 把 r 轴分成若干区域, 各区的性质与 Kerr-Newman 度规在 Boyer-Lindquist 系的分量 $g_{\mu\nu}$ 的正负有关. 由式(13-2-5)可知 g_{22} 恒为正; g_{00} 和 g_{11} 的正负分别以 $r_{0\pm}$ 和 $r_\pm$ 为分界点; g_{33} 则与 $r^2 + a^2 + \rho^{-2} a^2 (2Mr - Q^2)\sin^2\theta$ 同号(当 $\sin^2\theta = 0$ 时 $g_{33} = 0$). 若 $Q = 0$, g_{33} 只在 $\rho^2 = 0$ 附近一个 $r < 0$ 的小区域内为负. 若 $Q \neq 0$, g_{33} 可在一较大区域(包含 $r > 0$ 的点)内为负. 但域内 $r > 0$ 的点的 r^2 值不大于 Q^2, 而 $r < 0$ 的点的

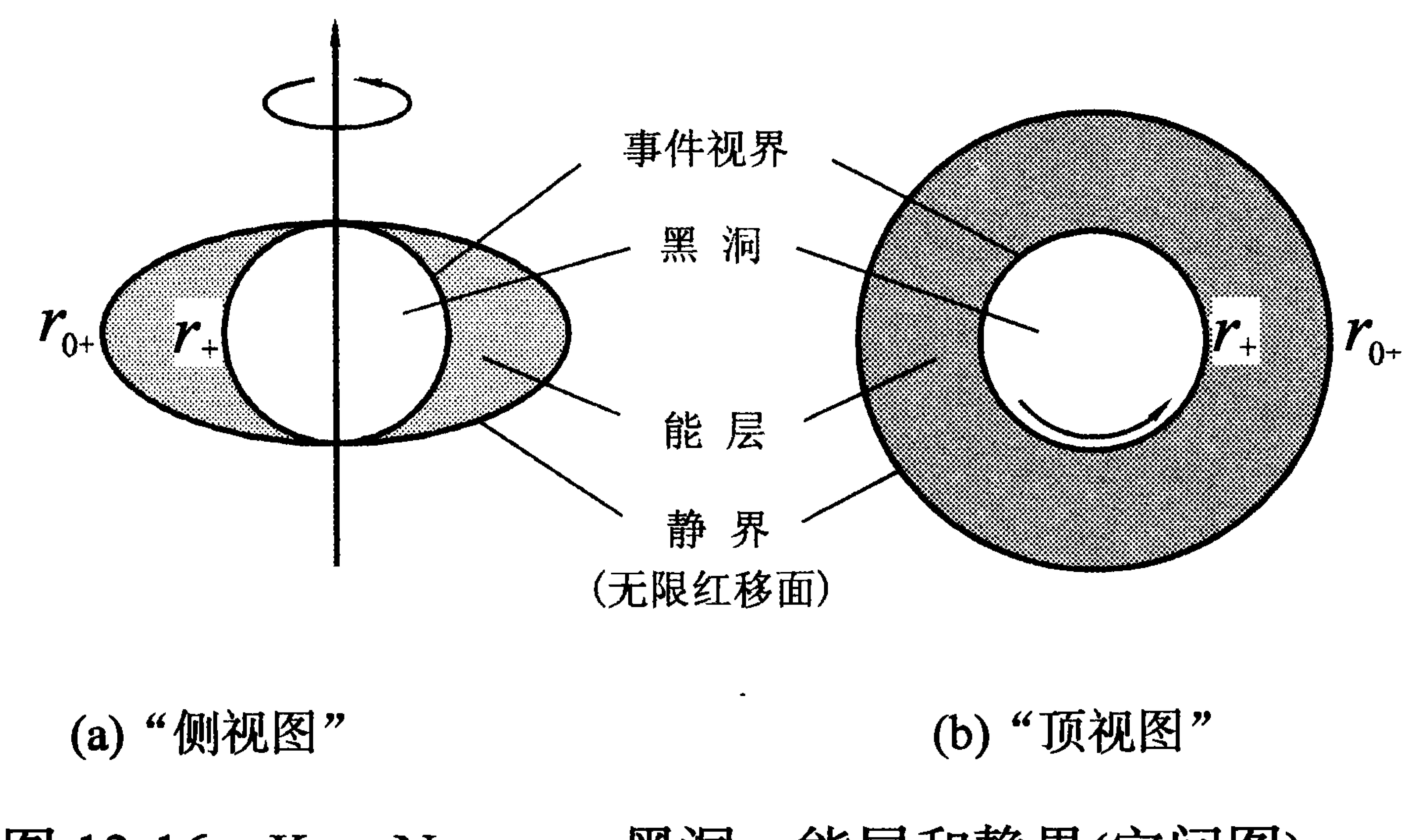


图 13-16 Kerr-Newman 黑洞、能层和静界(空间图)

r^2值不大于$4M^2$ [见 Carter(1968)]. [①] 图 13-17 示意性地表出g_{00}, g_{11}, g_{22}和g_{33}在全r轴上的正负情况. 对$r>r_{0+}$和$r<r_{0-}$有$g_{00}<0$, Killing 矢量场$\xi^a\equiv(\partial/\partial t)^a$类时, 所以这两个区域是稳态区. 反之, 在$r_{0-}<r<r_{0+}$中有$g_{00}>0$, 表明$\xi^a$类空, 由图 13-17 可知$g_{33}>0$, 即Killing场$\psi^a\equiv(\partial/\partial\varphi)^a$也类空, 所以该区为非稳态区. 在能层外($r>r_{0+}$)有$g_{00}<0$, $g_{11}>0$, $g_{22}>0$, $g_{33}>0$, 坐标基矢$(\partial/\partial t)^a$类时而$(\partial/\partial r)^a$, $(\partial/\partial\theta)^a$, $(\partial/\partial\varphi)^a$类空, 人们自然把$t$看作时间坐标, 把$r,\theta,\varphi$看作空间坐标. 然而在能层内$g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}$皆为正, 所有坐标基矢皆类空, 初学者往往觉得不好理解. 其实, 任一时空点p的切空间V_p的任意 4 个线性独立的元素都构成V_p的一个基底, 它们可以全部类空. 例如, 设T, X是 2 维闵氏时空的洛伦兹坐标, 则线元可表为$ds^2=-dT^2+dX^2$. 借用下式定义新坐标t和x: $T=t+x,\ X=2(t-x)$, 则线元改写为

$$ds^2=3dt^2+3dx^2-10dtdx,$$

其中$g_{tt}=g_{xx}=3>0$表明坐标基矢$(\partial/\partial t)^a$和$(\partial/\partial x)^a$都类空. 事实上, 不难证明

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a+2\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a-2\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

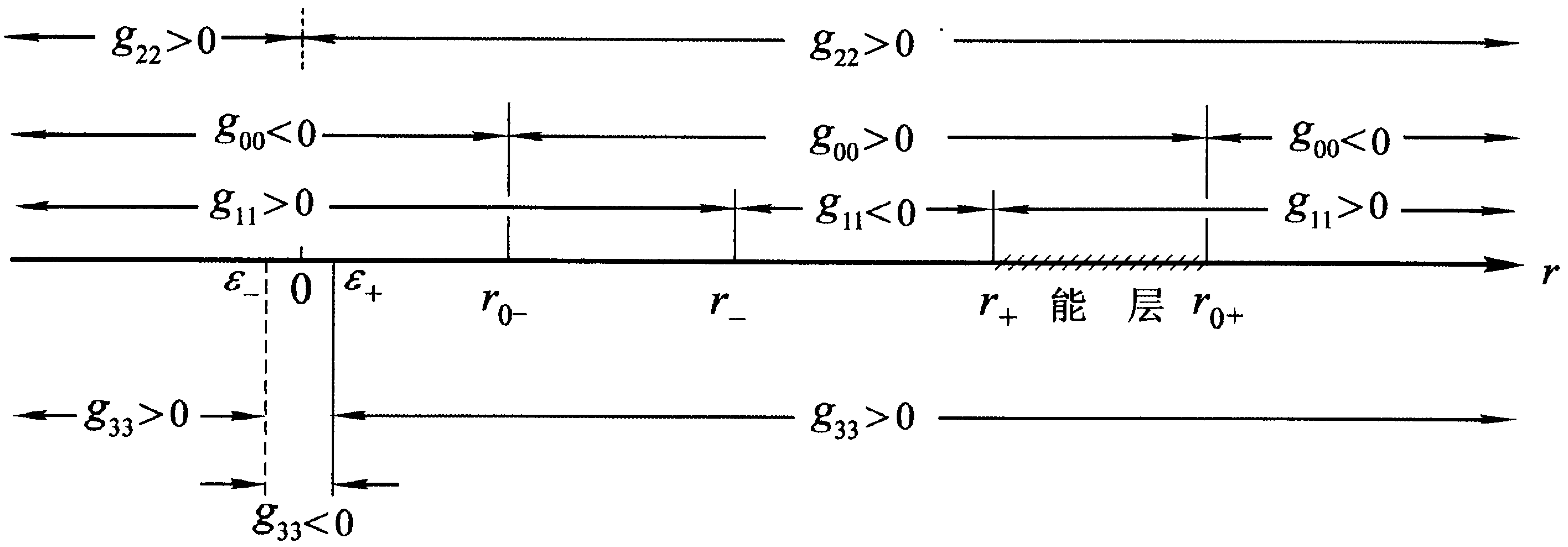


图 13-17 $g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}$的正负示意图(其中$\varepsilon_\pm$与$\theta$有关, ${\varepsilon_+}^2$不超过Q^2; ${\varepsilon_-}^2$不超过a^2, Q^2和$4M^2$中之最大者)

从而印证$(\partial/\partial t)^a$和$(\partial/\partial x)^a$的类空性. 回到能层问题来, 初学者可能仍觉得在物理上不好理解: 怎么可以没有时间坐标? 事实上, 正如 §2.1 讲流形时所指出的, 坐标

① 如果放弃$M^2>a^2+Q^2$的限制, 则r^2值不大于a^2, Q^2和$4M^2$中之最大者.

本身是数学概念. 至于时间概念, 则须对时空作 3+1 分解(详见 §14.4) 后才有明确意义, 而为此先要选定参考系. 选定参考系后就有共动坐标系, 其 x^0 坐标线与观者世界线重合, 于是第零坐标基矢 $(\partial/\partial x^0)^a$ 类时, 其他三个类空, 坐标 x^0 便可解释为观者的坐标时间. [是指观者手中任一走时率特定的钟(称为坐标钟)所指示的时间, 与固有时很可以不同.] KN 时空的 Boyer-Lindquist 坐标系在 $r > r_{0+}$ 的时空区就是稳态参考系的一个共动坐标系, 但在能层内却失去这一特点[坐标基矢 $(\partial/\partial t)^a$ 的类空性排除了 t 坐标线与任何观者世界线重合的可能]. 然而它在能层内仍是数学上合法的坐标系. 如果愿意, 你也可以另选坐标系使它满足“一个类时、三个类空”的要求. 虽然能层内的 t (指 Boyer-Lindquist 系的 t)不是类时坐标, 能层内外(指 $r > r_+$)绕黑洞匀速公转(指 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ = 常数 $\neq 0$) 而且 r, θ 为常数的质点(记作 A)的 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ (记作 ω)却仍可解释为质点相对于远方静态观者的转动(公转)角速度. (足够远处时空近似平直, 静态观者有意义.) 理由如下. 以 p_1 和 p_2 代表 A 旋转一周的始末两个事件(图 13-18), 设 A 在 p_1 时所发的外向光子的世界线(类光测地线) η_1 与远方静态观者 G 交于 p_1'. 以 Δt 代表 p_2 和 p_1 的 t 坐标之差, $\phi_{\Delta t}$ 代表由 $(\partial/\partial t)^a$ 产生的等度规映射, 则 $\eta_2 \equiv \phi_{\Delta t}[\eta_1]$ 必为过 p_2 的类光测地线, 而且也必与 G 相交, 设交点为 p_2'. 以 $\Delta t'$ 代表 p_2' 和 p_1' 的 t 坐标之差, 则必有 $\Delta t' = \Delta t$. 利用同一世界线上固有时与坐标时的关系 $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t = (-g_{00})^{1/2}$ 以及 $-g_{00}$ 在 r 很大处接近于 1 的事实可知 G 世界线上 p_2' 和 p_1' 的固有时间差 $\Delta\tau_G \cong \Delta t'$, 因而 $\Delta\tau_G \cong \Delta t$. 从 G 看来(根据他的眼睛和他的标准钟), $\Delta\tau_G$ 正是质点转一周所需时间, 故 G 测得的、质点 A 的

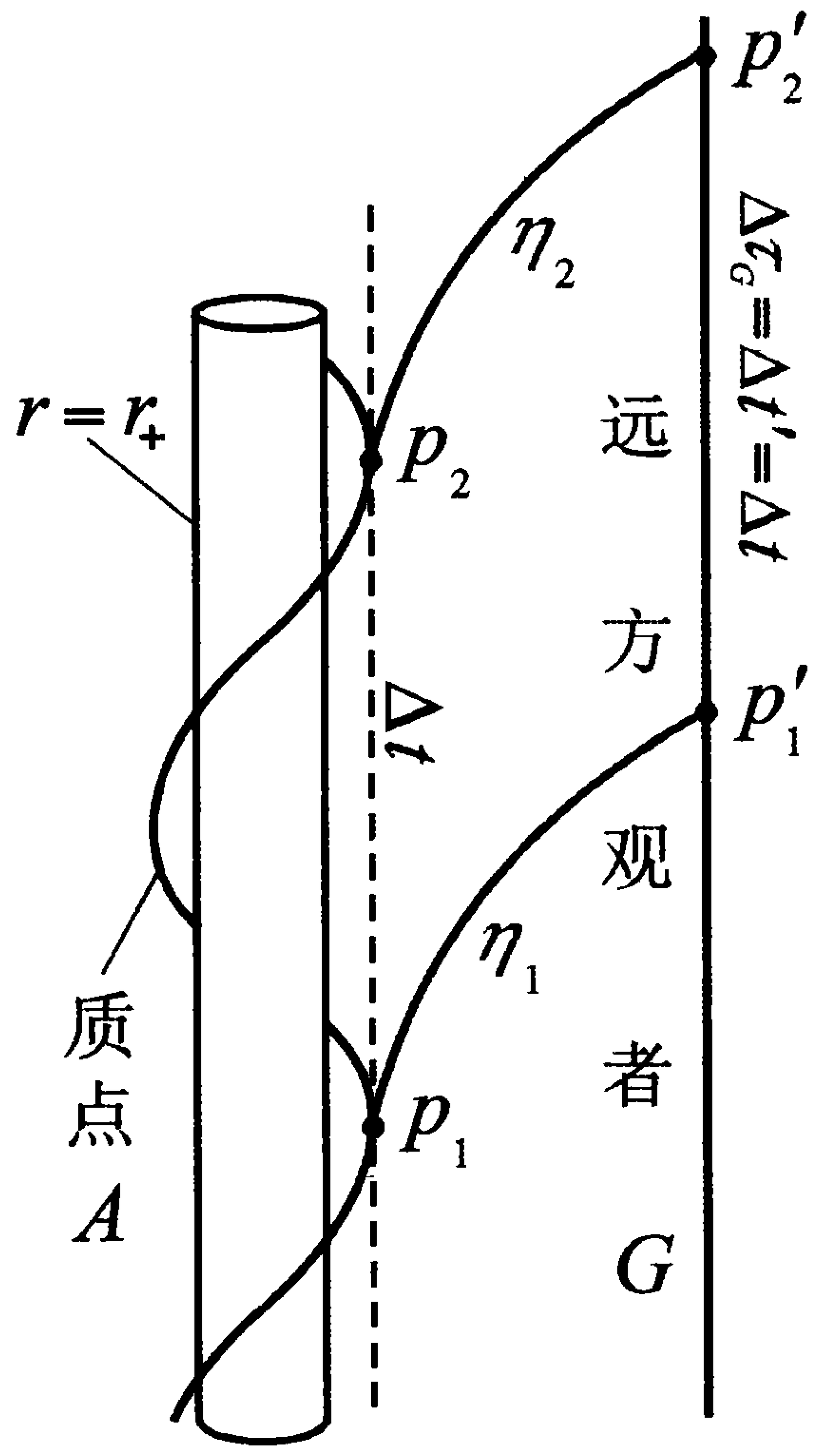


图 13-18　$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 是质点 A 相对于远方静态观者 G 的角速度(示意图)

$$公转角速度 = \frac{2\pi}{\Delta\tau_G} = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \omega .$$

这一结论对能层内外(指 $r > r_+$)的质点都成立. 下面对能层内外质点的角速度 ω 所受到的限制作进一步的讨论. 因 φ 在对称轴上无定义, 我们只讨论 $\theta \neq 0, \pm\pi$ 的稳态观者.

命题 13-4-1　能层内(指 $r_+ < r < r_{0+}$)和静界上的任何观者(质点)的 φ 坐标都不能不变, 即 $\omega \equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t \neq 0$, 而且 $\omega > 0$. (其实是 ω 与 a 同号, 但前已约定 $a > 0$.)

证明　设 $(\partial/\partial\tau)^a$ 为所论观者(质点)的 4 速, 把类时性条件 $g_{ab}(\partial/\partial\tau)^a(\partial/\partial\tau)^b < 0$ 在 Boyer-Lindquist 系展开并乘以 $(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t)^2$ 得

$$g_{00}+g_{11}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+g_{22}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+g_{33}\omega^2+2g_{03}\omega<0\,. \tag{13-4-2}$$

由图 13-17 可知在能层内和静界上有 $g_{00}\geqslant 0$, $g_{11}, g_{22}, g_{33}>0$，故 $g_{03}\omega<0$，可见 $\omega\neq 0$. 与式(13-2-5)结合得

$$a\omega(2Mr-Q^2)>0\,. \tag{13-4-3}$$

在 $[r_{0-}, r_{0+}]$ 内 $g_{00}\geqslant 0$，由式(13-2-5)可知在能层内和静界上有 $(2Mr-Q^2)>0$，加上早已约定 $a>0$，故式(13-4-3)表明 $\omega>0$. □

注 1 根据 §8.1, 一个观者称为稳态观者, 若他是某一稳态参考系的观者, 而稳态参考系则定义为与类时 Killing 矢量场对应的参考系. 对 KN 时空, r, θ, φ 为常数的观者自然是稳态观者, 因为 Killing 矢量场 ξ^a 类时. 然而 r, θ 及 $\omega\equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 为常数的观者也是稳态观者, 因为不难证明(习题)其世界线与矢量场 $\tilde{\xi}^a\equiv\xi^a+\omega\psi^a$ 的一条积分曲线重合, 而 $\tilde{\xi}^a$ 作为 Killing 场 ξ^a 和 ψ^a 的线性组合也是 Killing 场. 前后两种稳态观者的区别在于前者的 $\omega=0$，[①] 因而相对于无限远静态观者静止, 所以 Misner et al.(1973)在 893 页把 $\omega=0$ 的稳态(stationary)观者专称为 static observer, 译成汉语既可以是静止观者又可以是静态观者. 考虑到“静态观者”在本书 §8.1 中有不同含义(只在静态时空中才有), 本书把 $\omega=0$ 的稳态观者专称为**静止观者**. 于是命题 13-4-1 表明能层内不存在静止观者, 而且指出能层内任何观者(质点)之所以不能静止的关键在于其 φ 坐标不能为常数, 即必须围绕黑洞公转. 由于 a 代表黑洞单位质量的角动量, ω 与 a 同号表明能层内的观者的旋转方向与“黑洞的旋转方向”相同, 可以解释为“被黑洞拖曳着转动”. 由于 r_{0+} 是能层的外边界, 是静止观者可否存在的两个区域的交界面, 因此称为**静界**(static limit surface). [②]

能层内虽不存在静止观者, 却存在稳态观者. 下述命题给出能层内外稳态观者相对于无限远的角速率 $\omega\equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 的取值范围.

命题 13-4-2 能层内外(指 $r>r_+$)任一时空点的稳态观者(质点)的角速率 $\omega\equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 可以(且仅可以)在 (ω_-, ω_+) 的范围内取值, 即

$$\omega_-<\omega<\omega_+\,, \tag{13-4-4}$$

其中

① 另一区别是: ξ^a 在无限远也类时而 $\tilde{\xi}^a$ 在 r 充分大时不再类时[理由见注 2 之(1)]. 就是说, $\omega=0$ 的观者所属的参考系可以延伸至空间无限远而 $\omega\neq 0$ 的稳态观者则不能.

② 稳态观者和静止观者的定义在文献中不很统一, 因此某些文献[如 Hawking and Ellis(1973)]把静界称为稳界(stationary limit surface).

$$\omega_\pm \equiv \Omega \pm \Lambda, \qquad \Omega \equiv -\frac{g_{03}}{g_{33}}, \qquad \Lambda \equiv \sqrt{\Omega^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}, \tag{13-4-5}$$

或者, 借助于式(13-2-8), 注意到在$r > r_+$时$\Delta > 0$, 有

$$\omega_\pm = \Omega \pm \frac{\sqrt{\Delta}\sin\theta}{g_{33}}. \tag{13-4-5'}$$

证明　把式(13-4-2)用于r和θ为常数的观者得

$$g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2 < 0. \tag{13-4-6}$$

式(13-4-5)的$\omega_\pm$正是关于ω的代数方程$g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2 = 0$的解, 注意到能层内外(指$r > r_+$)有$g_{33} > 0$, 便知式(13-4-6)的充要条件为式(13-4-4). □

注 2　式(13-4-5)定义的$\omega_\pm$是r的函数, 我们讨论该式与式(13-4-4)结合后在$r \geqslant r_+$的一些关键段(点)上对ω所给出的限制. 由式(13-2-5)可知$r \geqslant r_+$时Ω与a同号, 而我们早已约定选φ的正向使$a > 0$, 所以讨论中默认$\Omega > 0$.

(1) r很大的情况. 这时$g_{03} \cong 0, g_{00} \cong -1, g_{33} \cong r^2\sin^2\theta$, 故$\Omega \cong 0$, 由式(13-4-5)可知$\omega_+ \cong (r\sin\theta)^{-1}, \omega_- \cong -(r\sin\theta)^{-1}$, 所以式(13-4-4)对$\omega$给出的限制就是$-1 < \omega r\sin\theta < 1$. 注意到$\omega r\sin\theta$是线速率, (直观上不难理解, 证明见本小节末.) 可见命题 13-4-2 对远方稳态观者(质点)的限制无非是必须亚光速.

(2) 能层外($r > r_{0+}$)的情况, 这时有$-g_{00}/g_{33} > 0$及$\Omega > 0$. (后者是因为$M^2 > a^2 + Q^2$及$r > r_{0+}$保证$2Mr - Q^2 > 0$, 从而有$-g_{03} > 0$.) 于是由式(13-4-5)可知$\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$, 因而式(13-4-4)允许ω取零值, 说明在$r > r_{0+}$段内允许存在静止观者.

(3) 静界上($r = r_{0+}$)和能层内($r_+ < r < r_{0+}$)的情况. 由式(13-4-5)可知$\omega_- \geqslant 0$(等号仅适用于$r = r_{0+}$), 故式(13-4-4)要求$\omega > 0$, 因而不存在静止观者, 与命题 13-4-1 的结论一致.

(4) 事件视界上($r = r_+$)的情况. 由式(13-4-5′)得

$$\omega_+ - \omega_- = 2\frac{\sqrt{\Delta}\sin\theta}{g_{33}}. \tag{13-4-7}$$

由$\Delta|_{r_+} = 0$易见在$r = r_+$上有$\omega_+ - \omega_- = 0$, 说明在事件视界上连稳态观者也不允许存在. 这是事件视界的类光性及单向膜性的体现: 任何观者的r值一旦等于r_+就只能向小于r_+演化(被吸入黑洞), 不存在$r = r_+$的类时线.

要点小结　静界外($r > r_{0+}$)存在静止观者; 能层内($r_+ < r < r_{0+}$)及静界上($r = r_{0+}$)不存在静止观者, 但存在稳态观者; 事件视界上($r = r_+$)不存在稳态观者,

甚至不存在 r 为常数的观者.

现在补证“在 r 很大时 $\omega r\sin\theta$ 是稳态观者的线速率”. 稳态观者的 4 速为

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a.$$

在 $r\to\infty$ 时 $(\partial/\partial t)^a$ 等于静止观者的 4 速 Z^a，故上式可看作 $(\partial/\partial\tau)^a$ 用 Z^a 的 3+1 分解式 $(\partial/\partial\tau)^a=\gamma Z^a+\gamma u^a$ [见式(6-3-30)]，由此可得稳态观者相对于静止观者的 3 速度 $u^a=\omega(\partial/\partial\varphi)^a$，于是 3 速率 $u=\sqrt{g_{ab}u^a u^b}=\sqrt{\omega^2 g_{33}}=\omega r\sin\theta$.

13.4.2 无限红移面

设静界以外的静止观者 G 和 G' 的径向坐标各为 r 和 $r'(>r)$，G 向 G' 发光，则由式(9-2-2)得

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\sqrt{\frac{g_{00}(r')}{g_{00}(r)}}\,,\qquad(13\text{-}4\text{-}8)$$

其中 $g_{00}=\xi^a\xi_a$ 是 KN 度规在 Boyer-Lindquist 系的 00 分量.[①] 由于 $g_{00}(r_{0+})=0$，仿照小节 9.4.4 的讨论可知 r_{0+} 是 KN 时空的无限红移面. 确切地说，这只是时空中选择类时 Killing 场 ξ^a 的积分曲线为稳态观者(我们已称为静止观者)世界线时的无限红移面. 由于 KN 时空有无数个类时 Killing 矢量场，对其他类时 Killing 场将有其他无限红移面. 与施瓦西时空(以及闵氏时空)类似，无限红移面是类时 Killing 场依赖的. 由于以 ξ^a 的积分曲线为世界线的稳态观者的特殊性(他们是静止观者)，在谈到无限红移面而不加说明时都是指此类观者对应的无限红移面，它们与静界重合，却不同于事件视界($r_{0+}\neq r_+$).

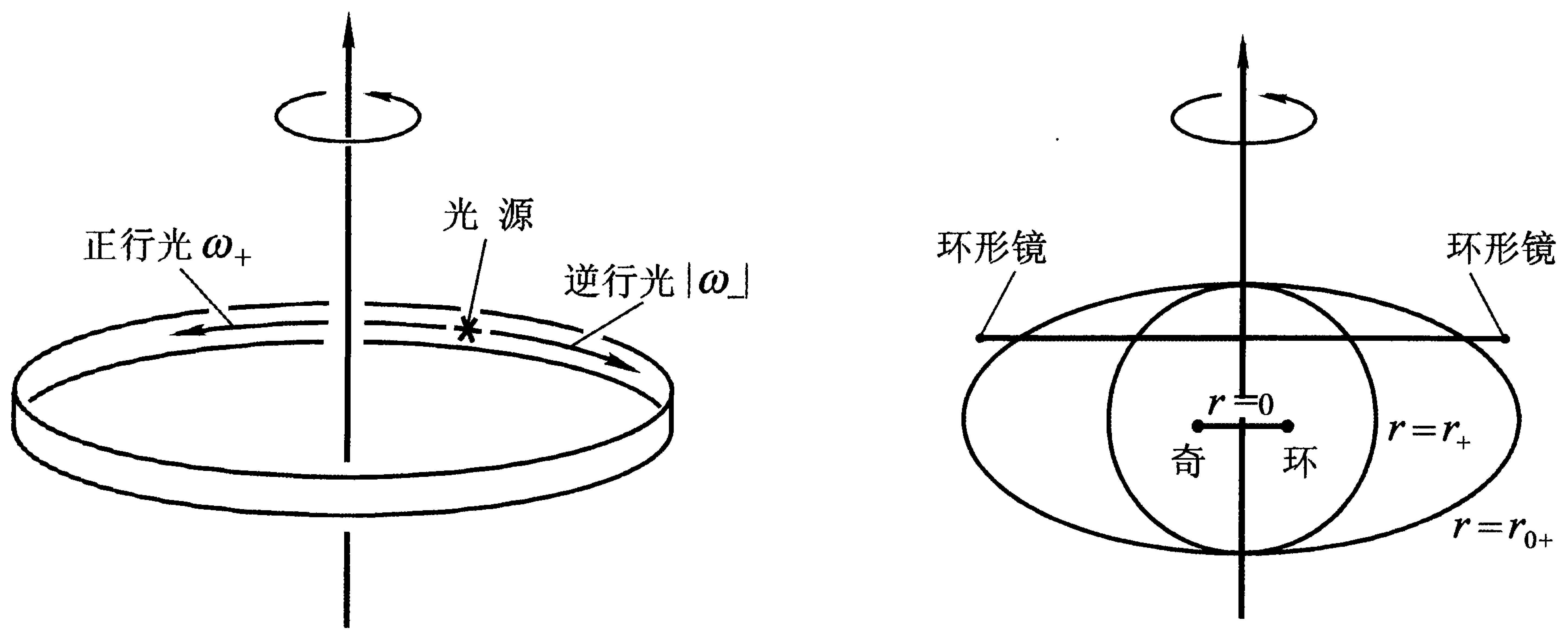
13.4.3 闭合类时线

图13-17 表明 $r=0$ 附近有一由 $\varepsilon_-<r<\varepsilon_+$ 定义的区域，其中 $g_{33}<0$. 为方便起见，将此区称为 ε 区. $g_{33}<0$ 意味着 $\psi^a\equiv(\partial/\partial\varphi)^a$ 为类时矢量场. 因为 φ 坐标线是闭合曲线，所以 ε 区内任一 φ 坐标线都是闭合类时线. 更有甚者，利用 ε 区的特殊性质，Carter(1968)证明，对 $M^2>a^2+Q^2$ 的 KN 时空中 III 型区的任一点(若讨论

---

① KN 度规在 Boyer-Lindquist 系的分量 g_{00}, g_{33}, g_{03} 有明确的几何意义：g_{00} 和 g_{33} 分别是 Killing 场 ξ^a 和 ψ^a 的自我内积，g_{03} 则是 ξ^a 与 ψ^a 的内积. 因此 g_{00}, g_{33}, g_{03} 是 3 个反映时空对称性的(不依赖于人为因素的)标量场. 坐标分量 g_{00}, g_{33}, g_{03} 的这一好性质是精心选择坐标系的结果.

$M^2 < a^2 + Q^2$ 的 KN 时空，则应说对时空中任一点) p 都存在过 p 的闭合类时线. (为了闭合，类时线必须有一段位于 ε 区内.) 闭合类时线所导致的因果性问题见 §11.3.



(a) r, θ 为常数的圆环形镜面的光源发出正、逆行光　　(b) 含 z 轴的截面图

图 13-19(空间图)　角动量 $J \neq 0$ 导致正、逆行光在 Boyer-Lindquist 系的坐标角速不等

13.4.4　局域非转动观者

在 KN 黑洞外置一 r, θ 为常数的圆环形镜子(内侧为镜面). 一个以角速度 ω_G (相对于无限远)贴着镜面运动的观者 G (因而其 r, θ 为常数)在某一时刻持一光源发光. 由于镜面的吸收和再发射(反射)，部分光子将贴着镜面分别沿 φ 的正向和逆向运动并返回观者(图 13-19). 以 $\omega_\pm$ 代表正、逆行光子相对于无限远的角速率，把光子看作命题 13-4-2 中的质点的世界线趋于类光曲线的极限情况，便知这 $\omega_\pm$ 可由式(13-4-5)表示. 如果观者的角速率 $\omega_G = 0$，(即是静止观者，在静界外允许存在.) 他将先回收到正行光子后回收到逆行光子. 因为光子的运动由时空几何决定，他可把这种双向发射并回收光子的实验看作对局域时空几何的测量手段，于是回收的不同时性表明他测得的局域时空几何在 $+\varphi$ 和 $-\varphi$ 方向上不等价，可以解释为"他相对于局域时空几何有转动"(他相对于无限远观者无角速度恰恰相应于他相对于局域时空几何有转动). 如果他想同时回收到正、逆行光子，则他应以某一匀角速(相对于无限远) ω_G 贴着镜面沿正向(迎着逆行光)行进. 下面将证明同时回收的充要条件是 $\omega_G = \Omega \equiv -g_{03}/g_{33}$ (一个完全由时空几何决定的量). 这一证明对 $r > r_+$ 的任一点都成立，但能层外和能层内的物理图象有所不同. [刚才介绍的物理图象(正、逆行光分别沿 $+\varphi$ 和 $-\varphi$ 方向行进)只对能层外($r > r_{0+}$)成立，在能层内($r_+ < r < r_{0+}$)有 $g_{00} > 0$，$\Lambda < \Omega$ (已约定 $a > 0$)，故 $\omega_+ > \omega_- > 0$，因此正、"逆"行光都沿 $+\varphi$ 方向行进.] 以 $t = 0$ 和 $t = T$ 分别代表三者(正、逆行光子及观者 G)开始运

动和三者相遇(同时回收)的时刻, 以 $\Delta\varphi_+$, $\Delta\varphi_-$ 和 $\Delta\varphi_G$ 依次代表三者在 T 时间内走过的 φ 角, 则

$$\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_G + 2\pi, \quad \Delta\varphi_G = \Delta\varphi_- + 2\pi, \quad (r > r_{0+} \text{ 时 } \Delta\varphi_- < 0)$$

故 $\Delta\varphi_G = (\Delta\varphi_+ + \Delta\varphi_-)/2$, 除以 T 便得 $\omega_G = (\omega_+ + \omega_-)/2 = \Omega$. 这一证明对能层内外和静界上[即对开区间 (r_+,∞) 中的任一 r 值]都成立. 既然以 $\omega_G = \Omega$ 为角速率的观者能同时回收到正、逆行光子, 他测得的时空几何便在 $+\varphi$ 和 $-\varphi$ 方向上等价, 因而"他相对于局域时空几何没有转动", 所以可把任一 r, θ 为常数、$\omega_G \equiv \mathrm{d}\varphi_G/\mathrm{d}t = \Omega(r,\theta)$ 的观者称为**局域非转动观者**(locally nonrotating observer). 也可说局域非转动观者是"被黑洞拖曳着"、与黑洞同步转动的观者.

以上讨论使我们想到图 13-8, 图中以 t 坐标线为世界线的观者是静止观者, 看来以 t' 坐标线为世界线的观者才是局域非转动观者. 答案的确如此. 以 β 代表上述光子世界线的参数, 用坐标系 $\{t',r',\theta',\varphi'\}$ [由式(13-2-9)定义]表述 $(\partial/\partial\beta)^a$ 的类光性 $g_{ab}(\partial/\partial\beta)^a(\partial/\partial\beta)^b = 0$, 注意到此系的线元不含时空交叉项以及 $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\varphi'/\mathrm{d}\beta = 0$, 得

$$g'_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\beta}\right)^2 + g'_{33}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}\beta}\right)^2 = 0 .$$

以 $\omega' \equiv \mathrm{d}\varphi'/\mathrm{d}t'$ 代表光子在这个坐标系中相对于无限远的角速率, 便得 $\omega'_\pm = \pm(-g'_{00}/g'_{33})^{1/2}$, 即 ω'_+ 和 ω'_- 等值异号. 这表明正、逆行光在坐标系 $\{t',r',\theta',\varphi'\}$ 中的角速度等值反向, 平均值为零, 因此同时回收两光的观者(即局域非转动观者) G 在此系的角速度应为零, 即 G 的世界线上不但 r, θ 为常数, 而且 φ' 也为常数. 而这正是 $\{t',r',\theta',\varphi'\}$ 系的 t' 坐标线! 可见以 t' 坐标线为世界线的观者正是局域非转动观者. 这也可通过计算他在 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 系的角速度 ω_G 得到印证: 设 φ_G 和 φ'_G 是他在两系的 φ 坐标, 则由 $\varphi'_G = \varphi_G - \Omega t$ [见式(13-2-9)]得

$$\omega_G \equiv \mathrm{d}\varphi_G/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi'_G/\mathrm{d}t + \Omega = \Omega .$$

以 P^a 代表局域非转动观者 G 的 4 动量, 则他的角动量为 $L \equiv g_{ab}P^a(\partial/\partial\varphi)^b$ [参见式(9-1-5)及该节末对角动量的讨论]. 注意到 G 的世界线与等 t 面正交以及 $(\partial/\partial\varphi)^b$ 切于等 t 面, 便知 $L = 0$. 可见局域非转动观者的角动量为零, 因此也被称为**零角动量观者**(zero-angular-momentum observer), 详见 Thorne, Price, and Macdonald(1986)及其所引文献.

[选读 13-4-1]

Bardeen and Press(1972)指出, 研究旋转黑洞附近的物理过程时, 用物理量在

Boyer-Lindquist 坐标系的分量会使问题复杂化，原因是：①$(\partial/\partial t)^a$ 在能层内类空而不类时；②线元的非对角性给指标升降带来代数运算的麻烦. 他们以局域非转动观者组成的参考系为基础建立正交归一标架场，使许多问题得以简化，而且物理意义更加明晰. 这一做法还可推广到任意稳态轴对称渐近平直时空(真空或非真空)，其度规在 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 坐标系中的线元为

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\varphi - \Omega\,dt)^2 + e^{2\mu_1}dr^2 + e^{2\mu_2}d\theta^2, \qquad (13\text{-}4\text{-}9)$$

其中 $\nu, \psi, \mu_1, \mu_2, \Omega$ 是 r 和 θ 的函数. 对 Kerr 度规有

$$e^{2\nu} = \frac{\rho^2\Delta}{A}, \quad e^{2\psi} = \frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}, \quad e^{2\mu_1} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad e^{2\mu_2} = \rho^2, \quad \Omega = \frac{2Mar}{A}, \qquad (13\text{-}4\text{-}10)$$

其中
$$A \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta. \qquad (13\text{-}4\text{-}11)$$

在对 Kerr 时空的若干计算中，先用式(13-4-9)求得结果再用式(13-4-10)代入比直接用式(13-2-1)计算要省事得多. 度规(13-4-9)的局域非转动观者是这样的观者，其世界线的 r, θ 为常数，φ, t 满足 $d\varphi/dt = \Omega$. 不难证明，与 Kerr 度规一样，他们的世界线也正交于等 t 面. 定义正交归一 4 标架场[注意 $(e_0)^a$ 正是局域非转动观者的 4 速]

$$(e_0)^a = e^{-\nu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \Omega\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a\right], \qquad (e_1)^a = e^{-\mu_1}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a,$$

$$(e_2)^a = e^{-\mu_2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a, \qquad (e_3)^a = e^{-\psi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a, \qquad (13\text{-}4\text{-}12)$$

不难验证其对偶标架场为

$$(e^0)_a = e^{\nu}(dt)_a,\ (e^1)_a = e^{\mu_1}(dr)_a,\ (e^2)_a = e^{\mu_2}(d\theta)_a,\ (e^3)_a = e^{\psi}[-\Omega\,(dt)_a + (d\varphi)_a]. \qquad (13\text{-}4\text{-}13)$$

由于 $\{(e_i)^a, i = 1,2,3\}$ 就是局域非转动观者的空间 3 标架，所以任一空间张量的 i 分量就是他测得的分量，有清晰的物理意义. 为避免误解，我们指出两点：①由全体局域非转动观者组成的参考系并非稳态参考系，因为它不对应于任一 Killing 矢量场[$\Omega(r,\theta)$ 的非常数性导致式(13-2-12)的 $(\partial/\partial t')^a$ 的非 Killing 性]. 局域非转动观者 G 之所以是稳态观者，是因为存在以他的角速度 Ω 为组合常数组成的 Killing 场 $\tilde{\xi}^a \equiv \xi^a + \Omega\psi^a$. 设局域非转动观者 G' 与 G 有不同的 r, θ 值，则其角速度 Ω' 不等

于Ω，但G'由于属于另一稳态参考系(对应于 Killing 场$\tilde{\xi}'^a \equiv \xi^a + \Omega'\psi^a$)而同样有资格作为稳态观者. 简言之, G和G'是属于不同稳态参考系的两个稳态观者. ②局域非转动观者的世界线并非测地线, 其正交归一4标架场(13-4-12)沿世界线也非费移("非转动"不同于无自转). **[选读 13-4-1 完]**

§ 13.5 从旋转黑洞提取能量(Penrose 过程)

设$C(\tau)$是 Kerr 时空的指向未来类时线, τ为固有时, $P^a = m(\partial/\partial\tau)^a$是它所代表的质点的 4 动量, 则

$$E \equiv -g_{ab}\xi^a P^b = -\xi^a P_a = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a P_a \ , \tag{13-5-1}$$

$$L \equiv g_{ab}\psi^a P^b = \psi^a P_a = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a P_a \tag{13-5-2}$$

可分别解释为质点(相对于无限远稳态观者)的能量和角动量(见 §9.1). 由于$\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$和$\psi^a \equiv (\partial/\partial\varphi)^a$是 Killing 矢量场, 由定理 4-3-3 可知当$C(\tau)$为测地线时E和L在线上为常量, 可分别解释为质点的能量和角动量守恒. 因为ξ^a在能层外是指向未来类时的, 由命题 11-1-1(1)及式(13-5-1)可知$E>0$. 然而, ξ^a在能层内类空, 于是E可正可负, 视所论类时线$C(\tau)$而定. E恒为负的类时(及类光)曲线称为负能轨道.[①] 请注意E与$E_{当}$的区别, 后者是观者(其 4 速Z^a恒为类时单位矢)作

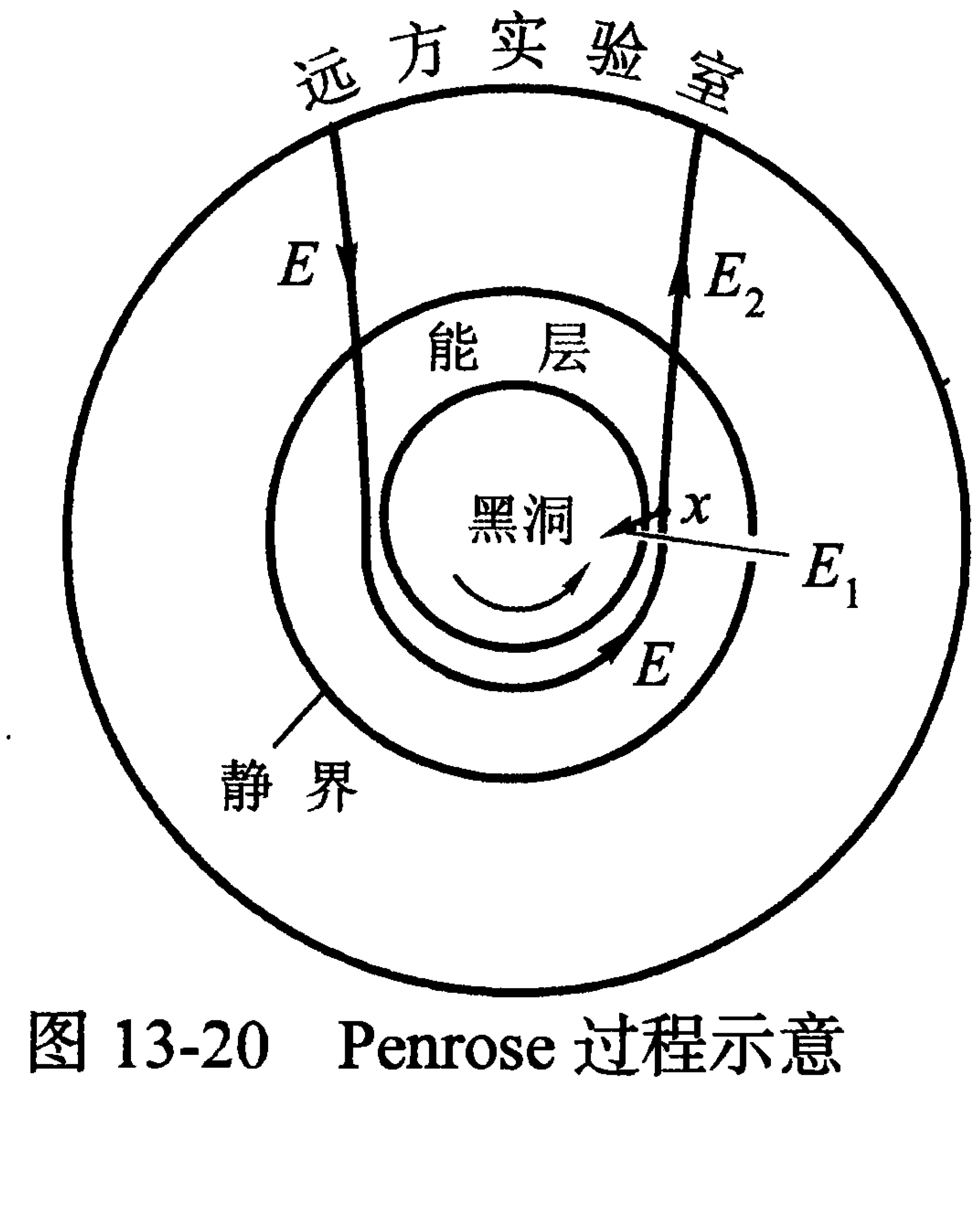


图 13-20 Penrose 过程示意

---

① 对带电黑洞($Q\neq 0$)外的带电质点, 式(13-5-1)和(13-5-2)中的P^a应改为广义 4 动量$P^a - qA^a$.(q为质点的电荷, A_a为时空的电磁 4 势.) 结论的相应改变为: 当q与Q异号时, 负能轨道存在于一个比能层略大的区域; 当q与Q同号时, 负能轨道存在于一个比能层略小的区域, 见 Misner et al.(1973)P.906~907.

当时当地观测所得的能量,不包含引力势能,恒为正($E_{当} = -Z^a P_a > 0$).

Penrose 于 1969 年根据能层内存在负能轨道的特点提出从旋转黑洞提取能量的有趣想法,后称 **Penrose 过程**(Penrose process). 设能量为 $E(>0)$ 的质点从“无限远”实验室向 Kerr 黑洞自由下落,则其 E 为常数. 质点备有定时装置,以使其在能层内某时空点自动爆裂为两块,以 P^a, $P_1{}^a$ 和 $P_2{}^a$ 分别代表原质点及两个碎块的 4 动量. 由等效原理可知狭义相对论的 4 动量守恒式 $P^a = P_1{}^a + P_2{}^a$ 对弯曲时空的爆裂事件也成立,与 ξ_a 缩并便得(局域)能量守恒 $E = E_1 + E_2$. 可以证明,原则上总可这样安排爆裂事件,使碎块 1 以负能轨道为世界线(即 $E_1 < 0$)而碎块 2(其能量 $E_2 > E$)沿外向测地线返回远方实验室. 还可证明碎块 1 最终必然落入黑洞(图 13-20). 整个过程的净结果为:①远方实验室得到能量 $\Delta E = E_2 - E = -E_1 > 0$; ②由于“吃进”负能碎块 1,黑洞能量由 M 减为 $M - |E_1|$. 这就是“从黑洞提取能量”的实质,**能层**(ergosphere)也由此得名. 设想图 13-20 中的远方实验室是一座城市,卡车满载垃圾向能层自由下落,到 x 点把垃圾抛出并使其沿负能轨道进入黑洞,能量变大了的卡车沿外向测地线返回城市,把获得的动能转给一个巨大的飞轮并使其推动发电机,然后卡车再次满载垃圾进入能层,……. 这似乎为一箭双雕地解决能源和垃圾处理问题提供了一种原则上的可能性,然而付诸实践却远非如此简单. 纵使有朝一日能在足够近处发现一个可供利用的旋转黑洞,上述过程所要求的非常高的爆后速率(为使能量为负,碎块 1 的 3 速率须大于 $c/2$.) 以及极端精确的定时技术,特别是对两个碎块的精确去向的控制都是远非目前人类技术所能达到的. 不过,无论如何,这至少是一个很有兴趣的理论设想.

旋转黑洞(至少在理论上)可以成为取之不尽的能源吗? 当然不. 关键在于负能粒子的角动量 L 必与黑洞的角动量 J 反号. 证明如下. 把 $\Omega \equiv -g_{03}/g_{33}$ 在事件视界 $r = r_+$ 的值记作 Ω_{H} (H 代表事件视界),由式(13-2-5)和(13-2-3)易得

$$\Omega_{\mathrm{H}} = \frac{a}{r_+{}^2 + a^2}. \qquad (13\text{-}5\text{-}3)$$

上式再次表明 Ω_{H} 与 a 同号. 定义矢量场

$$K^a \equiv \xi^a + \Omega_{\mathrm{H}} \psi^a, \qquad (13\text{-}5\text{-}4)$$

由 ξ^a 和 ψ^a 的 Killing 性以及 Ω_{H} 的常数性可知 K^a 也是 Killing 场. 在 H 外定义矢量场 $\eta^a \equiv \xi^a + \omega_+ \psi^a$, 因 ω_+ 是方程 $g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2 = 0$ 的解,故

$$g_{ab}\eta^a\eta^b = g_{00} + 2g_{03}\omega_+ + g_{33}\omega_+{}^2 = 0,$$

即η^a类光. 由于在$r > r_{0+}$处ξ^a为指向未来类时, 而且

$$g_{ab}\xi^a\eta^b = g_{00} + g_{03}\omega_+ = (g_{00} + 2g_{03}\omega_+ + g_{33}\omega_+{}^2) - (g_{03}\omega_+ + g_{33}\omega_+{}^2)$$

$$= 0 - \omega_+[g_{03} + g_{33}(\Omega + \Lambda)] = -\omega_+ g_{33}\Lambda < 0,$$

所以由命题 11-1-1(1)可知η^a指向未来. 而$K^a|_H = \eta^a|_H$, 可见K^a在H上是指向未来的类光矢量. 而质点的 4 动量P^a是指向未来类时矢量, 再次利用定理 11-1-1(1)便得

$$0 > g_{ab}P^a\chi^b = -E + \Omega_H L. \tag{13-5-5}$$

(E和L对自由下落质点为常数). 不失一般性, 选φ坐标的正向使$J > 0$, 则$\Omega_H > 0$, 故上式在$E < 0$的情况下给出

$$L < E/\Omega_H < 0, \tag{13-5-6}$$

可见 Kerr 黑洞在"吃进"负能粒子后其J将减小. 等它稳定为一个M和J都小于原值的新Kerr黑洞后, 还可再用Penrose过程提取能量. 如此反复进行, 当J减至零时能层(因而提取能量的可能性)消失. 下面讨论从 Kerr 黑洞可以提取的能量的极限.

黑洞在"吃进"能量为E、角动量为L的粒子后, 质量M和角动量J的改变量分别为$\delta M = E$, $\delta J = L$. 故式(13-5-6)可改写为$\delta J < \Omega_H{}^{-1}\delta M$. 利用式(13-5-5)又可改写为

$$(r_+{}^2 + a^2)\,\delta M > a\delta J = a\delta(aM) = a^2\delta M + Ma\delta a,$$

因而

$$r_+{}^2\delta M > Ma\delta a. \tag{13-5-7}$$

用下式定义一个称为**不可减质量**(irreducible mass)的正量$\hat{M}$:

$$2\hat{M}^2 \equiv M[M + \sqrt{M^2 - a^2}], \tag{13-5-8}$$

则

$$2\delta(\hat{M}^2) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2}}(r_+{}^2\delta M - Ma\delta a), \tag{13-5-9}$$

于是由式(13-5-7)得

$$\delta(\hat{M}^2) > 0. \tag{13-5-10}$$

可见,虽然黑洞在“吃进”负能粒子后 M 要减小,但不可减质量却只增不减(故此得名). 由式(13-5-8)可反解出 M:

$$M^2 = \hat{M}^2 + \frac{J^2}{4\hat{M}^2} \geqslant \hat{M}^2, \tag{13-5-11}$$

设黑洞的初始数据为 M, $\hat{M}$ 和 a, 反复经历 Penrose 过程后的数据为 M', $\hat{M}'$ 和 a', 则由式(13-5-11)和(13-5-10)可知

$$M' \geqslant \hat{M}' > \hat{M} > 0, \tag{13-5-12}$$

可见“吃进”负能粒子后的黑洞质量不但不会为零,而且总比初始不可减质量 $\hat{M}$ 大. $\hat{M}$ 为反复经历 Penrose 过程的 Kerr 黑洞提供了一个正的质量下限. 能量提取的极限相应于终结质量 M 等于初始不可减质量 $\hat{M}_0$ 的情形. 理由如下. 首先, 适当选择碎块 1 的轨道可使式(13-5-5)[因而(13-5-10)]的不等号任意地接近等号, 于是式(13-5-12)中的 $\hat{M}' > \hat{M}$ 在极限情况下可改写为 $\hat{M}' = \hat{M}$ ；其次, 原则上可通过多次 Penrose 过程使黑洞的 a 值任意地小, 在极限情况下可取为零, 再注意到式(13-5-11), 便知式(13-5-12)中的 $\geqslant$ 可改写为等号. 所以在极限情况(可趋近而不可达到)下可把式(13-5-12)改写为 $M' = \hat{M}' = \hat{M} > 0$. 于是

$$\text{可提取的最大能量} = M - \hat{M}.$$

因为上式对应的终结情况为 $a = 0$, 相应于黑洞经多次提取能量后最终不转, 所以可把 $M - \hat{M}$ 解释为 Kerr 黑洞的转动能. Penrose 过程所提取的正是这种转动能. 当全部转动能都被提取殆尽时 Kerr 黑洞退化为不转动的施瓦西黑洞. 为了最大限度地提取能量, 黑洞的初始不可减质量 $\hat{M}$ 应在初始质量 M 给定的前提下取最小值, 由式(13-5-8)知这相当于 $a = M$ 的情况[称为**极端(extreme)Kerr 黑洞**], 其转动能 $M - \hat{M}$ 与能量 M 之比(称为**比转动能**)显然为 $\dfrac{M-\hat{M}}{M} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong 29\%$. 可见反复运用 Penrose 过程所能提取的极限能量是黑洞总能量的 29%. 在把质量转化为其他能量形式的各种机制中, 这是一个异常巨大的转化百分数. 烧氢变氦的核聚变是实验室中可实现的转化率最高的过程, 其转化百分数也不到1%.

§13.6　黑洞“无毛”猜想

同爱因斯坦和某些物理学家原来的期望相反,广义相对论自 1915 年诞生后曾一直进展缓慢,经历了大约半个世纪的“冬眠”期. 情况从 20 世纪 60 年代开始出现转机,当时天体物理学的新发现使广义相对论天体物理学一跃而成蓬勃发展的

研究前沿. 天体演化中的灾难性过程, 诸如引力坍缩和星系中心的爆炸, 会导致甚强而且迅变的引力场, 广义相对论正好在这些领域中找到自己的用武之地. 由于引力的普适性和长程性, 质量足够大的天体在演化生涯晚期的自引力足以超过所有其他力而占主导地位, 连平常认为最有排斥倾向的核力都不足以遏止天体坍缩成黑洞. 广义相对论在对这些天体的研究中不但非用不可, 而且完全不像在水星近日点进动等现象中那样只扮演对牛顿理论作微小修正的角色. 然而, 宇宙中是否真有黑洞? 美国和意大利联合发射的、探测 X 射线的人造卫星 Uhuru 于 1972 年得到的信息表明某密近双星系中的不可见子星(天鹅座 X-1)是一个很有希望的黑洞候选者. 虽然对它是否真是黑洞的争论至今尚未完全了断, 但已有越来越多的证据表明它十分可能是黑洞. 后来又发现了越来越多的黑洞候选者[见 Menou et al. (1999)]. 无论如何, 关于黑洞的研究早已并正在成为广义相对论和天体物理学的重要课题, 而且它同热力学、粒子物理学、量子物理学以及数学的密切而深刻的联系也已引起多方面学者们的关注和兴趣, 新的研究成果层出不穷, 而且不断带来惊奇和惊喜.

我们已介绍过施瓦西、RN 和 KN 黑洞, 前两者只是后者的特例. 由于星体或多或少都有转动, 大质量恒星晚期在经历了短暂的不稳定坍缩期(那时要发射引力波和电磁波)后如果[①]形成稳态黑洞也不可能是施瓦西或 RN 黑洞. (对稳态黑洞一词应加说明. 如果要求全时空为稳态时空, 则连施瓦西黑洞也不是稳态黑洞, 因为黑洞内部没有类时 Killing 场. 文献中的稳态黑洞是指这样的黑洞, 它所在的时空存在这样的单参等度规群, 生成该群的 Killing 矢量场在无限远附近为类时.) 一个自然的问题是: 它们一定是 KN 黑洞吗?换句话说, 除此还有其他稳态黑洞吗? 经过许多学者多年的努力(一个漫长的研究过程), 人们从 20 世纪 70 年代初开始相信如下结论: 所有(电磁真空的)稳态黑洞都是 KN 黑洞, 因而只需三个参量——质量 M、电荷 Q 和角动量 $J=aM$ 来刻画. 这是一个非常惊人的结论, 它表明千差万别的恒星最终成为稳态黑洞后只需 3 个参量便可描述其时空几何, 而且其度规又是爱因斯坦方程的一个非常好(并且相对简单)的精确解. 应该指出, Kerr 度规决非旋转星体外部时空的唯一可能度规, 一般来说, 外部度规与星体形状及诸多因素有关, 即使在 r 很大之处的度规也要取决于由星体的质量分布决定的引力多极矩. Kerr 度规只描写具有某种特定质量多极矩组合的旋转星体的外部几何, 具有其他多极矩组合的星体的外部几何由其他度规描写. 然而, 晚期坍缩的大质量星体带着自己的全部信息穿越事件视界进入黑洞内部, 它们对视界外部的影响只体现为三个参量 M, J, Q 的影响. 由于坍缩过程所发射的引力波和电磁波会带走能量和角动量(但

---

① 奇性定理只保证(在一定条件下)大质量恒星坍缩的结果必有时空奇性, 却不排除裸奇性的可能. 只有配以宇宙监督假设方可说坍缩结果为黑洞(奇性藏于事件视界之内), 详见§E.2.

不会带走电荷), 星体的 M 和 J 在坍缩过程中也会改变, 不过很快就会达到最终的稳态, 这时的 M, J 将与原来不同, 因而终态黑洞及其外部度规由这终态 M, J 和 Q 唯一决定. Wheeler 在 1971 年把稳态黑洞只有 3 个参量的结论形象地说成"黑洞没有毛发"("black holes have no hair"), 这一结论后来被广泛地称作黑洞的"无毛定理"("no hair theorem"). 黑洞有 3 个参量而仍被说成无毛, 也许缘于 hair 为不可数名词之故. (为描述坍缩前恒星的各个细节需要数不清的、如毛发般浓密的各种参量, 而一旦坍缩成黑洞则只剩 3 个, 故曰无毛. ①) 然而, 考虑到已故著名漫画家张乐平先生笔下的三毛形象, 对国人而言改称"三毛定理"或许更为合适.

以上讨论说明 KN 时空最大延拓图[图 13-14(a)]与大质量恒星坍缩而成黑洞的物理过程没有任何关系. 这不但是因为坍缩星内部并非电磁真空(因而 KN 度规不适用), 而且(更重要的)是因为在坍缩为黑洞之前, 如果星体有球对称性, 则星外度规为施瓦西(或 RN)度规(由 Birkhoff 定理及其对电磁真空球对称解的推广保证); 如果星体无球对称性, 则星体可能具有的"千姿百态"(例如隆起和湍流)将使星外偏离 KN 度规. 只有到坍缩完结并达到稳态后在事件视界及其外部的时空几何才由 KN 度规描述. 至于事件视界以内(黑洞)的情况, 人们相信 §13.1 关于 RN 黑洞内部柯西视界不稳定性的讨论对 KN 黑洞也有重要借鉴意义, (事实上, 鉴于星体都有转动, 包括20世纪90年代的文章在内的关于柯西视界不稳定性的研究都是针对 KN 黑洞的, 只是为了简单而以 RN 黑洞为突破口.) 因此, 图 13-14(a)中位于事件视界 $r = r_+$ 以内的部分也不再适用.

黑洞无毛说是在若干唯一性定理的基础上提出的. Israel于1967年证明了其中的第一个, 大意是: 真空爱因斯坦方程的静态黑洞解(指事件视界以外为静态)必为施瓦西度规. 稍后(1968年), 他又证明了上述定理的推广: 爱因斯坦-麦克斯韦方程的静态黑洞解(静态含义同上)必为RN度规. 接着, Carter于1971年进一步证明如下的唯一性定理(大意): 爱因斯坦-麦克斯韦方程的稳态轴对称黑洞解必为KN度规. 这些唯一性定理促使Wheeler于1971年提出黑洞无毛说. 后来又有许多学者(如Hawking和Robinson)在黑洞唯一性定理方面做出了进一步的成果. 然而, "黑洞无毛"真是定理吗? 换句话说, 稳态黑洞除了质量、电荷和角动量外果真不能有其他参量吗? 自从无毛说提出以来, 对黑洞是否有毛的问题的探讨就一直没有停止过. 既然把只有 M, J, Q 三个参量的黑洞称为无毛黑洞, 黑洞"毛"就应定义为存在于黑洞之外而又不是电磁场的任何场. ② 若干文章指出, 在稳态黑洞外部除电磁场外

① 通过对偶转动可使 KN 时空不但有电荷而且有磁荷. 但对偶转动不改变物理实质(见选读12-6-2), 故磁荷并非一根独立的毛.

② 黑洞的"非毛参量" M, J, Q 中的每一个都服从守恒律(在 i^0 点定义, 见小节 12.7.2), 就是说, 对这些参量的测量只须在离黑洞足够远处进行. (指定任一精确度后, 总可决定所需的"远"的程度. 在这个意义上测量可做到"无限精确".) 然而代表黑洞的"毛"的参量却不服从类似的守恒律.

还可存在其他场,例如非阿贝尔规范场(电磁场是阿贝尔规范场)[第一个被找到的有毛黑洞所涉及的就是Einstein-Yang-Mills理论(即Yang-Mills理论与Einstein广义相对论的耦合)]. 特别是,20世纪80年代末和90年代初关于有毛黑洞的文章的激增更加促使许多人认为应把黑洞无毛说搁置一旁. 然而,鉴于黑洞无毛说在黑洞物理中的重要性(例如它对黑洞热力学的创立有过重要的激励作用),人们还是希望能在一定的限制范围内、在某种适当的意义上证明"黑洞无毛"猜想. 这一研究还在继续进行中[参阅Frolov and Novikov(1998)及其所引文献]. 另一方面,对有毛黑洞的研究至今仍是数学物理研究中的一个活跃分支,见Volkov and Gal'tsov(1999).

习 题

~1. 试证 Kerr-Newman 度规在 Boyer-Lindquist 坐标系的分量满足:

(a) $-g_{03}/g_{33}=g^{03}/g^{00}$,

(b) $g_{03}{}^2-g_{00}g_{33}=\Delta\sin^2\theta$

(c) 行列式 $g=-\rho^4\sin^2\theta$.

2. 根据 Frobenius 定理(见附录 F), 矢量场 ξ^a 为超曲面正交的充要条件是 $\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]}=0$, 其中 $\xi_a\equiv g_{ab}\xi^b$. 试证 Kerr 和 KN 度规中的类时 Killing 矢量场 $\xi^a\equiv(\partial/\partial t)^a$ 为非超曲面正交.

*3. 试证 KN 时空的总电荷[由式(13-2-13)定义]等于其电荷参数 Q.

*4. 试证参数为 M, a 的 Kerr 时空的总质量和总角动量[由式(13-2-15)和(13-2-17)定义]分别等于 M 和 Ma.

~5. 试证在图 13-18 中随质点 A 一同运动的观者用标准钟测量 A 转动一周所用的时间为

$$\Delta\tau=2\pi\omega^{-1}\sqrt{-g_{00}-2g_{03}\omega-g_{33}\omega^2}\ ,$$

其中 $\omega\equiv\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 是远方静态观者测得的 A 的角速度.

~6. 试证 KN 时空中 r, θ 及 $\omega\equiv\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 为常数的观者的世界线(经适当重参数化后)是 Killing 矢量场 $\tilde{\xi}^a=\xi^a+\omega\psi^a$ 的积分曲线, 因而可称为稳态观者.

7. 验证式(13-4-12)给出正交归一 4 标架场, 式(13-4-13)是其对偶标架场.

第 14 章　参考系再认识

§ 14.1　参考系的一般讨论

14.1.1　类时线汇(参考系)的膨胀、剪切和扭转

上册已不止一次讲过参考系的概念. 为满足后面的需要, 从现在起采用如下等价但更为准确的数学定义[Sachs and Wu(1977)P.52]:

定义 1　时空 (M,g_{ab}) 中的一个 C^∞ 矢量场 Z^a 称为一个**参考系**, 若它的每一积分曲线是一个观者的世界线.

注 1　①我们沿用过去的习惯, 即仍用 $\mathscr{R}=\{\gamma(\tau)\}$ 代表参考系, 其中 $\gamma(\tau)$ 代表 $\mathscr{R}$ 内观者的世界线, τ 为固有时. 定义 1 中的 Z^a 即 $(\partial/\partial\tau)^a$, 是指向未来单位类时矢量场. ②把定义 1 中的 M 改为 M 的一个开子集 U, 便得到 (U,g_{ab}) 中参考系的定义. 为行文简洁, 今后将笼统地说 $\mathscr{R}$ 是 (M,g_{ab}) 中的参考系, 读者应能在每一具体场合下识别所谈及的参考系的定义域是怎样的一个 U.

所有观者世界线都是测地线的参考系叫**测地参考系**. §7.6 讨论测地偏离方程时涉及的自由下落参考系就是测地参考系. 本节讨论一般参考系 $\mathscr{R}=\{\gamma(\tau)\}$. 仿照该节, 设 $\mu_0(s)$ 是一条光滑横向曲线,[①] 则 $\mathscr{R}$ 内与 $\mu_0(s)$ 相交的每一世界线可用 s 标志, 记作 $\gamma_s(\tau)$. 选择固有时的初始设定使每一 $\gamma_s(\tau)$ 与 $\mu_0(s)$ 的交点的 τ 值为零. 以 $\{\phi_\tau\}$ 代表矢量场 $Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$ 对应的单参微分同胚族, $\mu_\tau(s)$ 代表 $\mu_0(s)$ 在 ϕ_τ 映射下的像(图 14-1), 则所有 $\mu_\tau(s)$ 铺出 M 的一个 2 维子流形 $\mathscr{S}$, 而 $Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$ 以及 $\mu_\tau(s)$ 的切矢 $\eta^a=(\partial/\partial s)^a$ 则构成 $\mathscr{S}$ 上的坐标基矢场, 因而对易:

$$0=[Z,\eta]^a=\mathscr{L}_Z\eta^a=Z^b\nabla_b\eta^a-\eta^b\nabla_b Z^a, \tag{14-1-1}$$

亦即

$$Z^b\nabla_b\eta^a=\eta^b\nabla_b Z^a. \tag{14-1-2}$$

因 $h^a{}_b\equiv\delta^a{}_b+Z^aZ_b$ 是 $\gamma_s(\tau)$ 上各点的投影映射, 故 $w^a\equiv h^a{}_b\eta^b$ 是参考系 $\mathscr{R}$ 的空间矢量场, 即 w^a 处处与 Z^a 正交.

以上讨论表明, 指定一条横向曲线 $\mu_0(s)$ 便在 $\mathscr{R}=\{\gamma(\tau)\}$ 内挑出了一个单参观者族 $\{\gamma_s(\tau)\}$. 我们来讨论族内的基准观者 $\gamma_0(\tau)$ 上的空间矢量场 $w^a\equiv h^a{}_b\eta^b$ 的物

---

① 还应满足某些要求(如非自相交).

理意义. 仿照§7.6, $\lambda^a(s) \equiv w^a s$ 可解释为族内观者 $\gamma_s(\tau)$ 相对于基准观者 $\gamma_0(\tau)$ 的位矢, 因此 w^a 可解释为族内观者 $\gamma_s(\tau)$ 的位矢的量度单位. 今后索性统一以 w^a 作为族内与 $\gamma_0(\tau)$ 相邻的观者们的代表, 并径直把 w^a 称为 $\gamma_0(\tau)$ 的一个邻居(一族邻居的代表). 由于有无数条横向曲线 $\mu_0(s)$ 与 $\gamma_0(\tau)$ 相交(图 14-2), $\gamma_0(\tau)$ 有无数邻居. 又因为 $\mathscr{R}$ 中任一 $\gamma(\tau)$ 都可充当基准观者, 所以对每一 $\gamma(\tau) \in \mathscr{R}$ 都可定义邻居. 下面给出邻居的准确定义[Sachs and Wu(1977)P.54]:

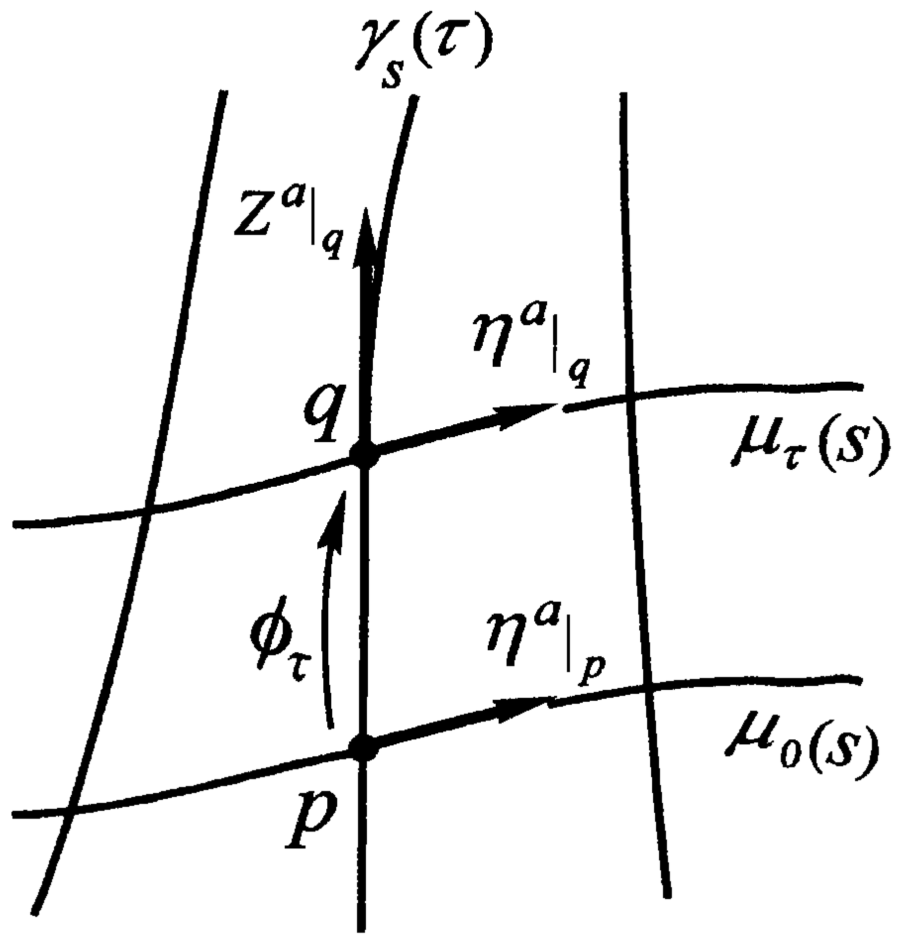


图 14-1　所有 $\mu_\tau(s) \equiv \phi_\tau[\mu_0(s)]$ 铺成一个 2 维子流形 $\mathscr{S}$

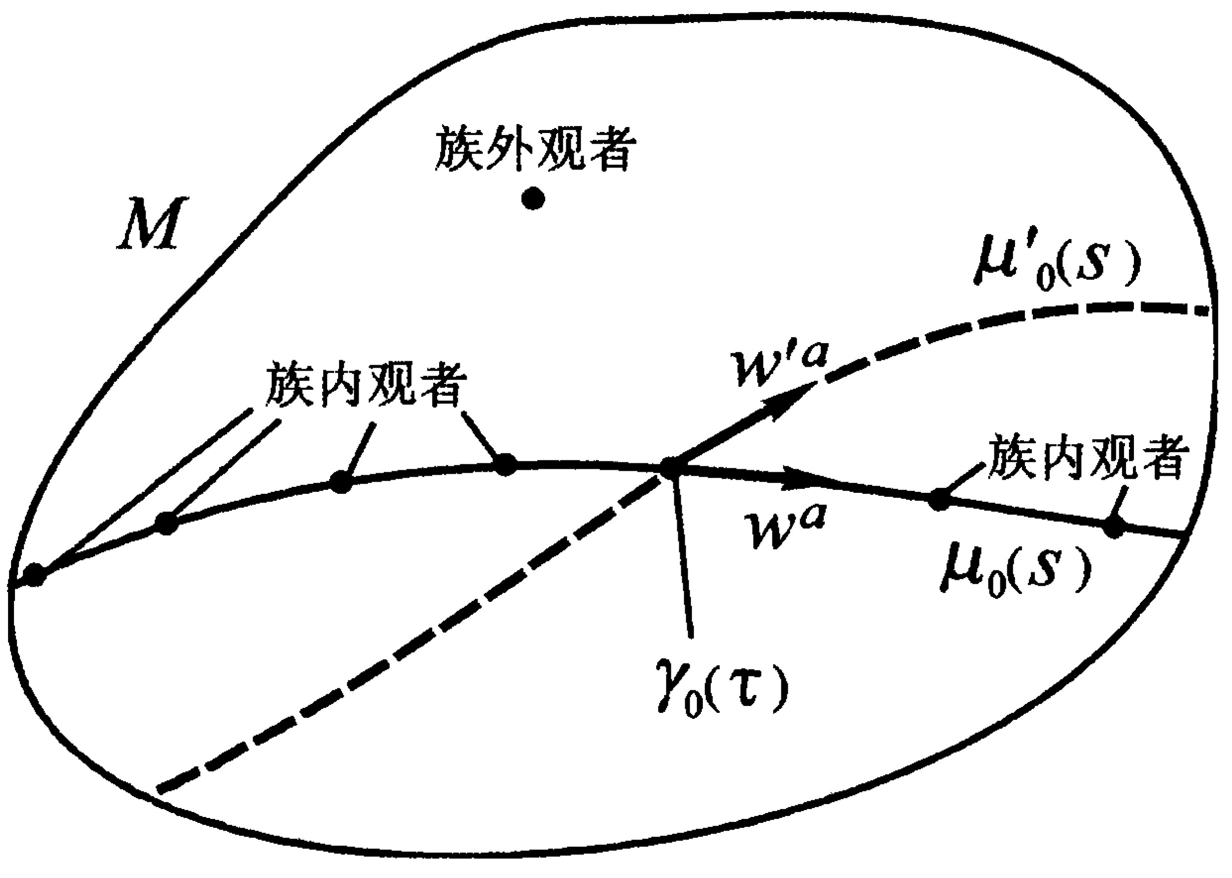


图 14-2　参考系 $\mathscr{R}=\{\gamma(\tau)\}$ 的"横截面图". 每一世界线表现为一点. 与 $\gamma_0(\tau)$ 相交的每一横向曲线 $\mu_0(s)$ 挑出一个单参观者族. w^a 和 w'^a 是 $\gamma_0(\tau)$ 的两个邻居

定义 2　参考系 $\mathscr{R}$ 内任一观者 $\gamma(\tau)$ 上的矢量场 w^a 称为 $\gamma(\tau)$ 的一个**邻居**(neighbor), 若 $\gamma(\tau)$ 上存在矢量场 η^a 使 $w^a = h^a{}_b\eta^b$ 且 $\mathscr{L}_Z\eta^a = 0$.

注 2　① 非测地参考系一般只有 $\mathscr{L}_Z\eta^a = 0$ 而无 $\mathscr{L}_Z w^a = 0$. [试证 $\mathscr{L}_Z w^a = Z^a\eta^b A_b$, 其中 A^b 是 $\gamma(\tau)$ 的 4 加速.] ②用邻居 w^a 局域地代表一个单参观者族使讨论变得简单, 因为 $\gamma(\tau)$ 上任一点 p 的邻居 $w^a|_p$ 是 p 点的切空间 V_p 中与 $Z^a|_p$ 正交的子空间 W_p 的元素, 用邻居讨论问题时只涉及曲线 $\gamma(\tau)$ 上的点的子空间而不涉及 $\gamma(\tau)$ 以外的任何点. ③选定一条与 $\gamma(\tau)$ 相交的横向曲线 $\mu_0(s)$ (因而挑出了一个单参观者族)就为 $\gamma(\tau)$ 指定了一个邻居 w^a ; 反之也可证明, 对 $\gamma(\tau)$ 指定一

个邻居 w^a 后就在 $\mathscr{R}$ 中挑出了一个单参观者族.

§7.6 曾用 w^a 定义了 $\gamma(\tau)$ 测得的 3 速 $u^a \equiv Z^b\nabla_b w^a$ 和 3 加速 $a^a \equiv Z^b\nabla_b u^a$. 对非测地参考系, $Z^b\nabla_b w^a$ 和 $Z^b\nabla_b u^a$ 一般不再是空间矢量, 看来定义 u^a 和 a^a 时应把协变导数改为费米导数(见§7.3). 下面的讨论表明这一想法是合理的. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ [其中 $(e_0)^a = Z^a$]是 $\gamma(\tau)$ 上的费移正交归一 4 标架场, 则 $\gamma(\tau)$ 连同 $\{(e_\mu)^a\}$ 构成一个无自转观者, 他在时刻 p 和 q 测得同一邻居的位矢分别为 $w^a|_p$ 和 $w^a|_q$. 这是在不同点的两个矢量, 本来无法比较. 但无自转观者可以比较它们在自己的 3 标架场 $\{(e_i)^a\}$ 的分量 w^i, 差值 $w^i|_q - w^i|_p$ 便代表邻居位矢在时间 $\Delta\tau \equiv \tau|_q - \tau|_p$ 内的改变量, 因此邻居相对于观者 $\gamma(\tau)$ 在 p 点的 3 速的 i 分量应定义为

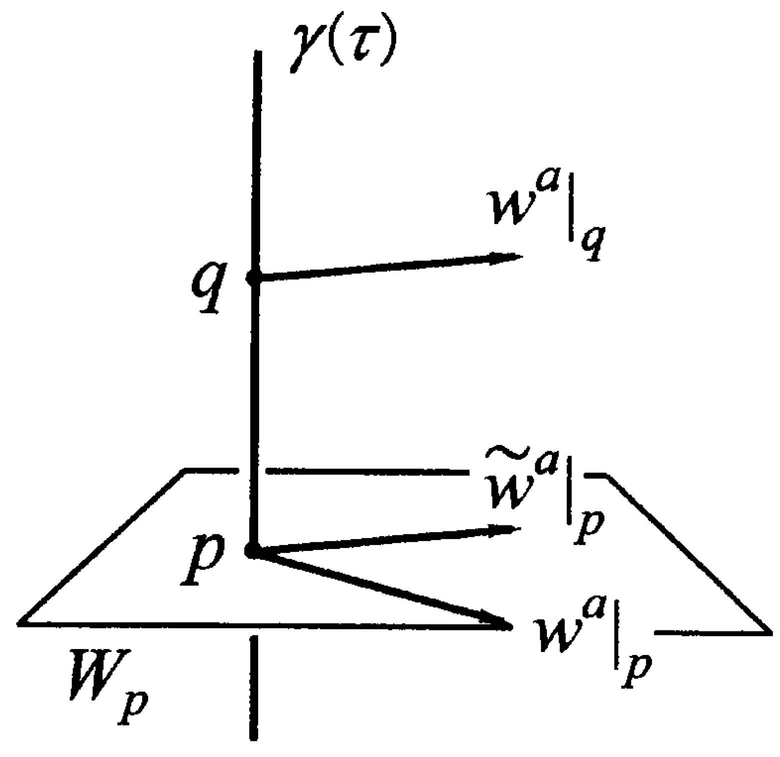


图 14-3　$\tilde{w}^a|_p \in W_p$ 是 $w^a|_q \in W_q$ 沿 $\gamma(\tau)$ 费移至 p 的结果

$$u^i|_p = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}(w^i|_q - w^i|_p). \tag{14-1-3}$$

以 $\tilde{w}^a$ 代表由 $w^a|_q$ 决定的沿 $\gamma(\tau)$ 的费移矢量场(图 14-3), 则 $\tilde{w}^a|_q = w^a|_q$, 故

$$w^i|_q = [w^a(e^i)_a]|_q = [\tilde{w}^a(e^i)_a]|_q = [\tilde{w}^a(e^i)_a]|_p = \tilde{w}^i|_p, \tag{14-1-4}$$

其中第二步是因为费移保内积. 代入式(14-1-3)得

$$u^i|_p = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}(\tilde{w}^i|_p - w^i|_p), \tag{14-1-5}$$

从而

$$u^a|_p = [u^i(e_i)^a]|_p = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}(\tilde{w}^a|_p - w^a|_p) = \left.\frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau}\right|_p, \tag{14-1-6}$$

其中最末一步的证明与定理 3-2-4 的证明类似. 对 3 加速也有类似公式. 于是有

定义 3　$\gamma(\tau)$ 的邻居 w^a 相对于 $\gamma(\tau)$ 的 **3 速**和 **3 加速**分别定义为

$$u^a := \frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau}, \tag{14-1-7}$$

$$a^a := \frac{\mathrm{D_F}u^a}{\mathrm{d}\tau}. \tag{14-1-8}$$

注 3 由 w^a 是 $\gamma(\tau)$ 的空间矢量场可知 u^a 和 a^a 也是 $\gamma(\tau)$ 的空间矢量场[见命题 7-3-1 的(3)], 因而符合 3 速和 3 加速中 "3" 字的要求.

因为测地参考系有 $\mathscr{L}_Z w^a = Z^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_b Z^a = 0$, 所以其 3 速满足

$$u^a = w^b \nabla_b Z^a . \tag{14-1-9}$$

下述命题表明上式对一般参考系也成立.

命题 14-1-1 设 w^a 是任意参考系 $\mathscr{R}$ 内观者 $\gamma(\tau)$ 的邻居, 则

$$\frac{\mathrm{D_F} w^a}{\mathrm{d}\tau} = w^b \nabla_b Z^a , \tag{14-1-10}$$

故 3 速表达式(14-1-9)对任意参考系成立.

证明 设 A^a 为 $\gamma(\tau)$ 的 4 加速, 则

$$\frac{\mathrm{D_F} w^a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{D_F}(h^a{}_b \eta^b)}{\mathrm{d}\tau} = h^a{}_b \frac{\mathrm{D_F}\eta^b}{\mathrm{d}\tau} = h^a{}_b [\frac{\mathrm{D}\eta^b}{\mathrm{d}\tau} + (A^b Z^c - Z^b A^c)\eta_c]$$

$$= h^a{}_b Z^c \nabla_c \eta^b + A^a Z^c \eta_c = (\delta^a{}_b + Z^a Z_b)\eta^c \nabla_c Z^b + Z^c \eta_c Z^b \nabla_b Z^a$$

$$= \eta^c \nabla_c Z^a + \frac{1}{2} Z^a \eta^c \nabla_c (Z_b Z^b) + Z^b Z_c \eta^c \nabla_b Z^a$$

$$= (\eta^b + Z^b Z_c \eta^c) \nabla_b Z^a = h^b{}_c \eta^c \nabla_b Z^a = w^b \nabla_b Z^a ,$$

其中第二步用到 $h^a{}_b = \delta^a{}_b + Z^a Z_b$, $\mathrm{D_F} Z^a / \mathrm{d}\tau = 0$ 和 $\mathrm{D_F} g_{ab} / \mathrm{d}\tau = 0$ (见命题 7-3-1), 第四步用到 $h^a{}_b Z^b = 0$ 及 $h^a{}_b A^b = A^a$ (因 A^a 是空间矢量), 第五步用到式(14-1-2), 第七步用到 $Z_b Z^b = -1$ 处处成立. □

式(14-1-9)表明观者的 4 速场 Z^a 的协变导数 $\nabla_b Z^a$ 是决定 3 速 u^a 的关键量, 有必要详加研究. 令

$$B_{ab} \equiv h_a{}^c h_b{}^d \nabla_d Z_c , \tag{14-1-11}$$

则 B_{ab} 为空间张量场(是指处处有 $Z^a B_{ab} = 0, \ Z^b B_{ab} = 0$). 不难证明

$$\nabla_b Z_a = B_{ab} - A_a Z_b , \tag{14-1-12}$$

从而有 $B^a{}_b \equiv h^{ac} B_{cb} = g^{ac} B_{cb} = \nabla_b Z^a + Z_b A^a$. 代入式(14-1-9)得 $u^a = B^a{}_b w^b$, 可见 B_{ab} 在讨论 u^a 时的重要性. 以 W_p 代表 V_p 中正交于 $Z^a|_p$ 的元素组成的 3 维子空间, 则 $B^a{}_b$ 是由 W_p 到 W_p 的线性映射[W_p 上的 (1,1) 型张量]. 以 θ_{ab} 和 ω_{ab} 分别代表 B_{ab}

的对称和反称部分, 即 $\theta_{ab} \equiv B_{(ab)}$, $\omega_{ab} \equiv B_{[ab]}$, 则

$$B_{ab} = \theta_{ab} + \omega_{ab} . \tag{14-1-13}$$

由反称性可知 ω_{ab} 无迹, 而 θ_{ab} 则还可分解为有迹和无迹两部分. 为此, 以 θ 代表 θ_{ab} 的迹, 即 $\theta \equiv g^{ab}\theta_{ab} = h^{ab}\theta_{ab}$, 令

$$\sigma_{ab} \equiv \theta_{ab} - \frac{1}{3}\theta\, h_{ab} , \tag{14-1-14}$$

则易见 σ_{ab} 无迹, 所以 $\theta h_{ab}/3$ 和 σ_{ab} 可分别看作 θ_{ab} 的有迹和无迹部分. 代入式(14-1-13)和(14-1-12)便得

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta\, h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} , \tag{14-1-15}$$

$$\nabla_b Z_a = B_{ab} - A_a Z_b = \frac{1}{3}\theta\, h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} - A_a Z_b , \tag{14-1-16}$$

于是由 $u^a = B^a{}_b w^b$ 可得 3 速 u^a 的如下表达式:

$$u^a = \frac{1}{3}\theta\, w^a + \sigma^a{}_b w^b + \omega^a{}_b w^b . \tag{14-1-17}$$

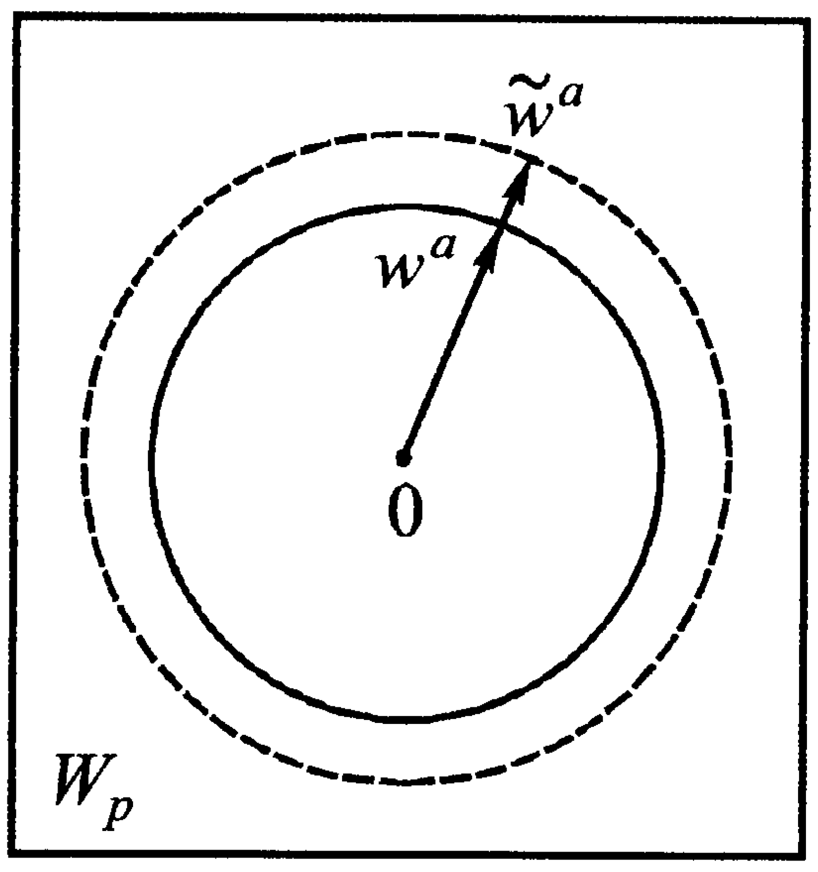
现在讨论上式右边各项的物理意义. 把式(14-1-6)近似写作 $u^a \cong (\tilde{w}^a - w^a)/\Delta\tau$, 式中下标 p 已略去, 但应记住各量都在 p 点取值. 上式同式(14-1-17)结合得

$$\tilde{w}^a - w^a = \frac{1}{3}\theta\, w^a \Delta\tau + \sigma^a{}_b w^b \Delta\tau + \omega^a{}_b w^b \Delta\tau . \tag{14-1-18}$$

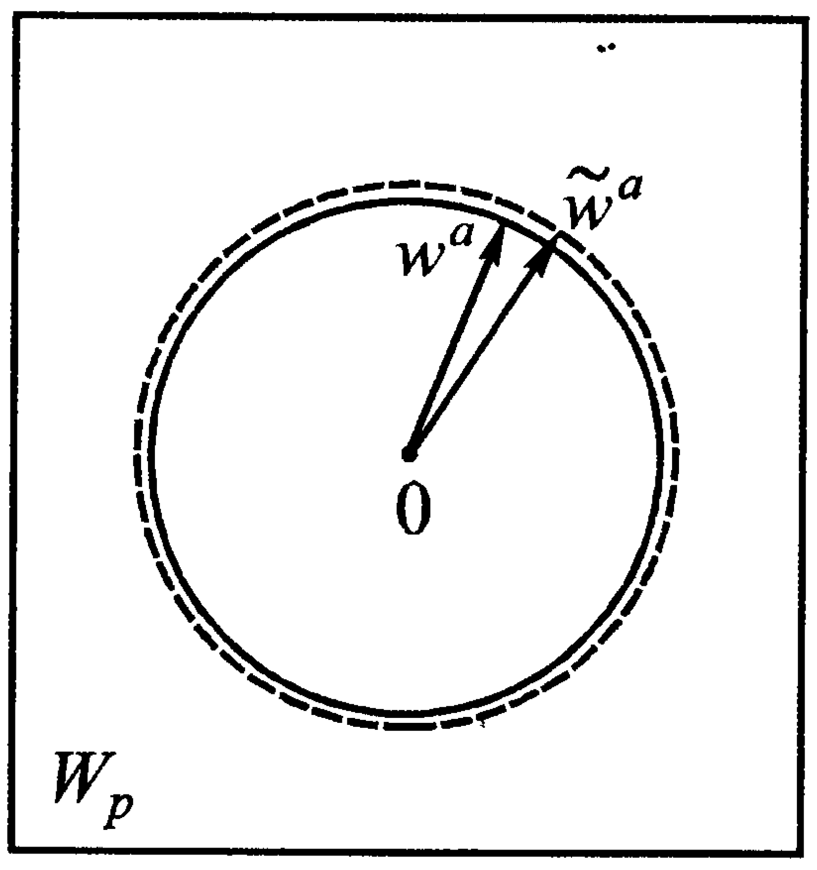
若 $B^a{}_b$ 只有含 θ 的一项, 则上式给出

$$\tilde{w}^a = (1 + \frac{1}{3}\theta\,\Delta\tau) w^a , \tag{14-1-19}$$

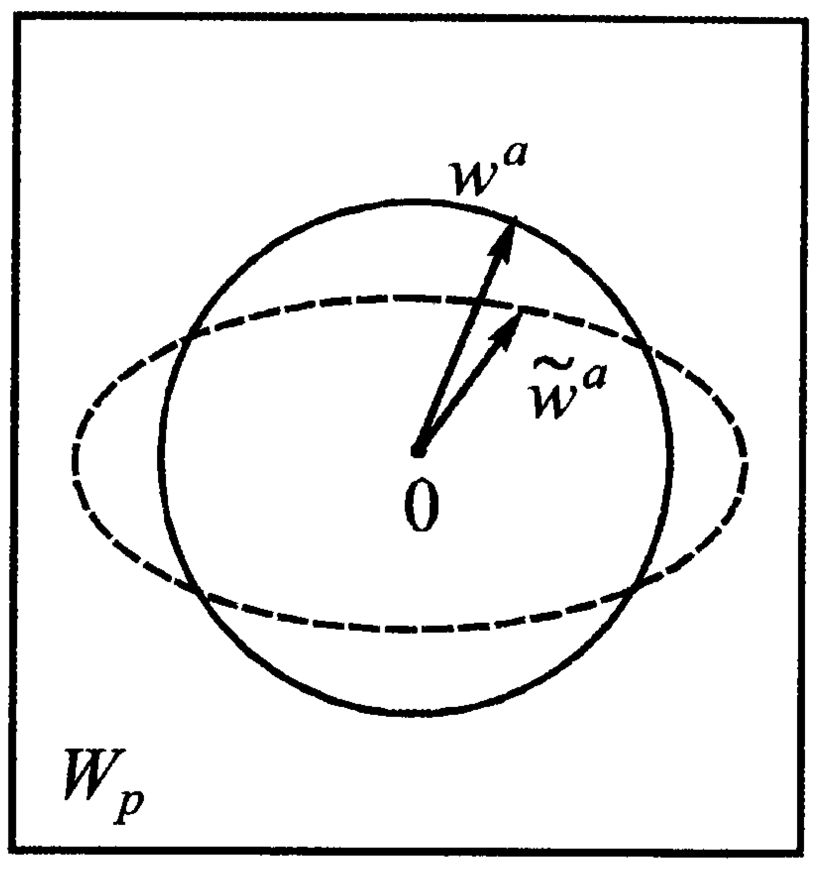
可见 $\tilde{w}^a$ 与 w^a 同方向, θ 的影响只表现为 w^a 的伸长(若 $\theta > 0$)或缩短(若 $\theta < 0$). 适当选择过点 $p \in \gamma(\tau)$ 的每一横向曲线 $\mu_\tau(s)$ 的参数化可使每一邻居 $w^a|_p$ 的长度(以 h_{ab} 衡量)为 1, 故 p 点的全体(四面八方的)邻居组成 3 维矢量空间 W_p 中以零元 0 为心的 2 维单位球面(图 14-4 的实线圆周). 由式(14-1-19)可知在 $\Delta\tau$ 时间后它们变为以 0 为心、以 $1+\theta\,\Delta\tau/3$ 为半径的球面[图 14-4(a)的虚线圆周]. 可见 θ 的贡献是使每一邻居 w^a 在方向不变的前提下改变长度. 因此称 θ 为**膨胀**(expansion). 与此相反, ω_{ab} 的贡献则是使 w^a 在长度不变的前提下改变方向(即转动), 理由如下: 若 $B^a{}_b$ 只含 $\omega^a{}_b$ 的一项, 则由 $\mathrm{d}(w^a w_a)/\mathrm{d}\tau = \mathrm{D_F}(w^a w_a)/\mathrm{d}\tau$ 得



(a) θ 导致 w^a 膨胀



(b) ω_{ab} 导致 w^a 转动(两球重合)



(c) σ_{ab} 导致 w^a 剪切

图 14-4　θ, σ_{ab} 和 ω_{ab} 的物理意义

$$\frac{\mathrm{d}(w^a w_a)}{\mathrm{d}\tau} = 2w_a \frac{\mathrm{D_F} w^a}{\mathrm{d}\tau} = 2w_a \omega^a{}_b w^b = 2w^a w^b \omega_{ab} = 2w^{(a} w^{b)} \omega_{[ab]} = 0,$$

可见 w^a 长度不变，$\omega^a{}_b$ 的作用只能是使 w^a 转动一个角度[图 14-4(b)]，故称 ω_{ab} 为**转动**(rotation)或**扭转**(twist). 最后讨论 σ_{ab} 的贡献. $\sigma^a{}_b \equiv h^{ac}\sigma_{cb}$ [作为 W_q 上的 (1,1) 型张量]是 W_q 上的一个线性变换，其在 W_q 的任一基底(及其对偶基底)的分量 $\sigma^i{}_j$ 组成一个 3×3 矩阵. 若此基底用 h_{ab} 衡量为正交归一，则 $\sigma^i{}_j$ 等于 σ_{ab} 在同一基底的对应分量 σ_{ij} ($\sigma^i{}_j = h^{ik}\sigma_{kj} = \delta^{ik}\sigma_{kj} = \sigma_{ij}$). 于是对称性 $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$ 保证 $(\sigma^i{}_j)$ 为对称矩阵. 以下就可应用矩阵理论，但记住一切内积都由度规 h_{ab} 定义. [因为对 W_q 的任意 $(w_1)^a, (w_2)^b$ 而言 $h_{ab}(w_1)^a(w_2)^b$ 在正交归一基下的分量就是 $\delta_{ij}(w_1)^i(w_2)^j$.] 由代数可知实对称矩阵总可通过正交变换对角化，即线性变换 $\sigma^a{}_b$ 有 3 个正交归一的特征矢量 $\{(e_i)^a\}$:

$$\sigma^a{}_b(e_1)^b = \lambda_1(e_1)^a, \quad \sigma^a{}_b(e_2)^b = \lambda_2(e_2)^a, \quad \sigma^a{}_b(e_3)^b = \lambda_3(e_3)^a, \qquad (14\text{-}1\text{-}20)$$

$$h_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = \delta_{ij},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为特征值. 设 $B^a{}_b$ 只有 $\sigma^a{}_b$ 一项，则式(14-1-18)给出

$$\tilde{w}^a = w^a + \sigma^a{}_b w^b \Delta\tau . \qquad (14\text{-}1\text{-}21)$$

以 w^i 和 $\tilde{w}^i$ 分别代表 w^a 和 $\tilde{w}^a$ 在 $\{(e_i)^a\}$ 上的分量，由式(14-1-20)、(14-1-21)可得

$$\tilde{w}^1 = w^1(1+\lambda_1\Delta\tau), \quad \tilde{w}^2 = w^2(1+\lambda_2\Delta\tau), \quad \tilde{w}^3 = w^3(1+\lambda_3\Delta\tau) . \qquad (14\text{-}1\text{-}22)$$

如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，则上式表明 $\tilde{w}^a$ 的每一分量都是 w^a 的对应分量的同一倍数，因而 $\tilde{w}^a$ 与 w^a 同向，差别只在于长度. 然而 σ_{ab} 的无迹性导致 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$，不会有

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$(除非$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$), 所以在$\sigma_{ab}$作用下$\tilde{w}^a$与$w^a$一般来说既不同向也不等长. [$\sigma_{ab}$本来就定义为$\theta_{ab}$的无迹部分. θ_{ab}的有迹部分$\theta\, h_{ab}/3$已被单独讨论, 其作用正好就是使$\tilde{w}^a$与w^a同向而不等长, 即图 14-4(a).] 在所有w^a的长度都为 1[即$(w^1)^2+(w^2)^2+(w^3)^2=1$] 的约定下由式(14-1-22)可得

$$\frac{(\tilde{w}^1)^2}{(1+\lambda_1\Delta\tau)^2}+\frac{(\tilde{w}^2)^2}{(1+\lambda_2\Delta\tau)^2}+\frac{(\tilde{w}^3)^2}{(1+\lambda_3\Delta\tau)^2}=1\,, \tag{14-1-23}$$

上式说明由所有长度为1的邻居组成的球面在$\Delta\tau$时间后变为椭球面. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$使$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$不能都为正或都为负, 因此情况如图 14-4(c). σ_{ab}的这种作用使它得到**剪切**(shear)的名称. 不难证明剪切后椭球面所围体积与原球面所围体积相等(准确说是剪切导致的体积改变率为零).

把本节关于$u^a=B^a{}_b w^b$的讨论同选读 7-9-1 关于$a^a=\psi^a{}_b w^b$[式(7-9-39)]的讨论作一对比是颇有教益的. 请读者思考两者在物理上的异同点. 此处只指出, 由式(7-9-43)可知矩阵$(\psi^i{}_j)$对称且无迹, 因此既无膨胀又无转动. 由于矩阵$(\psi^i{}_j)$有明确且简单的表达式, 图 7-20 对剪切的描写比图 14-4(c)更加具体和形象.

例 1　求标准宇宙模型中的 Robertson-Walker 参考系的θ,σ_{ab}和ω_{ab}.

解　由第 10 章习题 3(b)可知$\nabla_b Z_a=(\dot{a}/a)\,h_{ab}$, 由此易得下指标 4 加速

$$A_a=Z^b\nabla_b Z_a=Z^b h_{ab}\frac{\dot{a}}{a}=0\,, \tag{14-1-24}$$

可见RW系是测地参考系(第10章早已指出). 于是由式(14-1-12)得$B_{ab}=(\dot{a}/a)\,h_{ab}$, 故$\omega_{ab}=B_{[ab]}=0$, 由此又知$\theta_{ab}=B_{ab}$, 所以

$$\theta=h^{ab}B_{ab}=\frac{\dot{a}}{a}h^{ab}h_{ab}=3\frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{14-1-25}$$

$$\sigma_{ab}=B_{ab}-\frac{1}{3}\theta\, h_{ab}=\frac{\dot{a}}{a}h_{ab}-\frac{\dot{a}}{a}h_{ab}=0\,. \tag{14-1-26}$$

可见剪切也为零, 因此B_{ab}中只余膨胀一项. 这同以下事实一致: 每一星系观测到其他星系没有除退行外的运动. **[解毕]**

定义 4　$\omega_{ab}=0$的参考系称为**无旋**(irrotational)**参考系**, $\theta_{ab}=0$的参考系称为**刚性**(rigid)**参考系**(详见命题 14-2-1).

无旋参考系的另一名称是**超曲面正交**(hypersurface orthogonal)**参考系**, 其含义是: 对定义域中的任一点p, 存在过p的一张超曲面Σ, 它同系内所有观者世界线正交. 以Z^a代表参考系的4速场, $Z_a\equiv g_{ab}Z^b$, 则由定理 F-4 可知超曲面正交参考系

的充要判据为

$$Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0,\ \text{等价于}\ \boldsymbol{Z}\wedge \mathrm{d}\boldsymbol{Z}=0. \tag{14-1-27}$$

命题 14-1-2　无旋参考系等价于超曲面正交参考系.

证明　只须证明 $\omega_{ab}=0$ 等价于 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0$. 由式(14-1-12)得

$$Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=Z_{[c}B_{ab]}-Z_{[c}Z_bA_{a]}=Z_{[c}B_{[ab]]}-Z_{[[c}Z_{b]}A_{a]}=Z_{[c}\omega_{ab]},$$

可见 $\omega_{ab}=0$ 导致 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0$. 反之, 由 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0$ 得 $Z_{[c}\omega_{ab]}=0$, 故

$$Z_c\omega_{ab}+Z_b\omega_{ca}+Z_a\omega_{bc}=0.$$

两边与 Z^c 缩并给出 $\omega_{ab}=Z_bZ^c\omega_{ca}-Z_aZ^c\omega_{cb}=0$(ω_{ca} 为空间张量导致 $Z^c\omega_{ca}=0$).

□

命题 14-1-3　参考系 $\mathscr{R}$ 为刚性系的充要条件是

$$\mathscr{L}_Z h_{ab}=0, \tag{14-1-28}$$

其中 Z^a 是 $\mathscr{R}$ 的 4 速场, $h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_aZ_b$ 是各点的诱导度规.

证明　由李导数公式及 $h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_aZ_b$ 不难证明

$$\mathscr{L}_Z h_{ab}=2Z_{(a}A_{b)}+2\nabla_{(a}Z_{b)}, \tag{14-1-29}$$

(其中 $A^a\equiv Z^b\nabla_b A^a$ 是 $\mathscr{R}$ 系观者的 4 加速场.) 与式(14-1-12)对比, 注意到 $\theta_{ab}=B_{(ab)}$, 便得

$$\theta_{ab}=\frac{1}{2}\mathscr{L}_Z h_{ab}. \tag{14-1-30}$$

可见 $\mathscr{R}$ 为刚性系($\theta_{ab}=0$)等价于 $\mathscr{L}_Z h_{ab}=0$. □

利用式(14-1-30)可以方便地计算参考系的 θ_{ab}(在 $\omega_{ab}=0$ 的情况下也就是计算 B_{ab}). 作为习题, 请读者借用式(14-1-30)和命题 14-1-2 重解例 1(提示见本章习题 3).

定义 5　$\mathscr{R}$ 称为**稳态**(stationary)**参考系**, 若存在正值函数 f 使 fZ^a 为 Killing 矢量场. 超曲面正交的稳态参考系称为**静态**(static)**参考系**[与式(8-1-3)后所给定义一致].

例 2　Kerr-Newman 时空中 Boyer-Lindquist 坐标系的 t 坐标线对应的参考系(简称 Boyer-Lindquist 参考系)是稳态参考系; 施瓦西参考系是静态参考系.

命题 14-1-4　(M,g_{ab}) 上参考系 $\mathscr{R}$ 为稳态的充要条件是: M 上有正值函数 f 使

$$A_a=\nabla_a \ln f, \tag{14-1-31}$$

且
$$\nabla_{(a}Z_{b)} + A_{(a}Z_{b)} = 0\,. \quad (\text{即 } \theta_{ab} = 0) \tag{14-1-32}$$
其中 Z^a 和 A^a 分别是观者的 4 速场和 4 加速场[见高思杰, 梁灿彬(1997)].

证明

(A)设$\mathscr{R}$为稳态，则由定义 5 可知存在正值函数 f 使 fZ^a 为 Killing 矢量场，即 $\nabla_{(a}(fZ_{b)}) = 0$，从而
$$f\nabla_{(a}Z_{b)} + Z_{(a}\nabla_{b)}f = 0\,. \tag{14-1-33}$$
上式两边与 Z^aZ^b 缩并得
$$Z^b\nabla_b f = 0\,. \tag{14-1-34}$$
式(14-1-33)两边与 Z^b 缩并, 注意到式(14-1-34), 便得式(14-1-31). 再由式(14-1-33)和(14-1-31)易得式(14-1-32).

(B)设式(14-1-31)和(14-1-32)成立. 将前者代入后者得 $\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$ (其中 $\xi_b \equiv fZ_b$), 故$\mathscr{R}$为稳态系. □

利用式(14-1-12)和 $\omega_{ab} \equiv B_{[ab]}$ 可得命题 14-1-4 及 14-1-2 的以下推论:

推论 14-1-5　稳态参考系必为刚性参考系.

推论 14-1-6　静态参考系必有 $B_{ab} = 0$, 即系内任一观者觉得其他观者不动.

注 4　①请读者用直接计算验证施瓦西参考系有 $B_{ab} = 0$. ②推论 14-1-5 和 14-1-6 的逆命题都不成立. 下面是一个反例. 考虑线元
$$ds^2 = -[1 + g(t)x]^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\,, \tag{14-1-35}$$
其中 $g(t)$ 是 t 的任意函数. 用适当的坐标变换[见王永久, 唐智明(1990)P.168~170]可把线元变为 $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$, 可见(14-1-35)无非是闵氏度规在非惯性坐标系的线元表达式. 该系的 t 坐标线对应的参考系的观者 4 速为
$$Z^a = [1 + g(t)x]^{-1}(\partial/\partial t)^a\,. \tag{14-1-36}$$
计算表明(习题)该系的 $B_{ab} = 0$, 所以当然是刚性系. 然而计算表明其4加速 A^a 不满足式(14-1-31), [因不满足 $dA = 0$, 除非 $dg(t)/dt = 0$.] 所以不是稳态系和静态系.

14.1.2　类时测地线汇(测地参考系)的 Raychaudhuri 方程

类时测地线汇在物理中代表测地参考系. 由于测地线的特殊性, 这种参考系有多方面的应用(例如奇性定理的证明). 因测地线的 4 加速 $A^a = 0$, 故由式(14-1-12)可知其 B_{ab} 的定义式(14-1-11)简化为
$$B_{ab} = \nabla_b Z_a\,. \tag{14-1-37}$$

鉴于 B_{ab} 的重要性，有必要研究它沿线汇中的测地线的变化率 $Z^c\nabla_c B_{ab}$，它可以表为

$$Z^c\nabla_c B_{ab} = Z^c\nabla_c\nabla_b Z_a = Z^c\nabla_b\nabla_c Z_a + R_{cba}{}^d Z^c Z_d$$

$$= \nabla_b(Z^c\nabla_c Z_a) - (\nabla_b Z^c)\nabla_c Z_a + R_{cbad}Z^c Z^d$$

$$= -B_{ac}B^c{}_b + R_{cbad}Z^c Z^d, \qquad (14\text{-}1\text{-}38)$$

[其中第二步用到式(3-4-4)，第四步用到测地线方程.] 由此可进而推出 B_{ab} 的三要素——膨胀 θ、剪切 σ_{ab} 和扭转 ω_{ab}——沿线的变化率. 以 g^{ab} 缩并式(14-1-38)，注意到 $\theta = g^{ab}B_{ab}$，由 σ_{ab} 和 ω_{ab} 的无迹性以及 $\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}$ 和 $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$ 得

$$Z^c\nabla_c\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}Z^aZ^b. \qquad (14\text{-}1\text{-}39)$$

这就是著名的、十分有用的关于膨胀 θ 沿测地线变化率的 **Raychaudhuri 方程**. 再由 $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \theta h_{ab}/3$ 得

$$Z^c\nabla_c\sigma_{ab} = -B^c{}_{(b}B_{a)c} + R_{c(ba)d}Z^cZ^d + \frac{1}{9}\theta^2 h_{ab} + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd} + R_{cd}Z^cZ^d)$$

$$= -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma^c{}_b - \omega_{ac}\omega^c{}_b + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd})$$

$$+ R_{cbad}Z^cZ^d + \frac{1}{3}h_{ab}R_{cd}Z^cZ^d. \qquad (14\text{-}1\text{-}40)$$

借用式(3-4-14)、(3-4-7)(即 $R_{[abc]d} = 0$)及 $h_{ab} = g_{ab} + Z_aZ_b$ 经计算得

$$R_{cbad}Z^cZ^d + \frac{1}{3}h_{ab}R_{cd}Z^cZ^d = C_{cbad}Z^cZ^d + \frac{1}{2}\tilde{R}_{ab}, \qquad (14\text{-}1\text{-}41)$$

其中 C_{cbad} 是外尔张量,

$$\tilde{R}_{ab} \equiv h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{3}h_{ab}h_{cd}R^{cd} \qquad (14\text{-}1\text{-}42)$$

是里奇张量 R_{ab} 的空间无迹部分. 把式(14-1-41)代入(14-1-40)便得

$$Z^c\nabla_c\sigma_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma^c{}_b - \omega_{ac}\omega^c{}_b + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) + C_{cbad}Z^cZ^d + \frac{1}{2}\tilde{R}_{ab}.$$
$$(14\text{-}1\text{-}43)$$

此即剪切 σ_{ab} 沿线变化率的方程. 用类似手法(但计算简单得多)还可求得扭转 ω_{ab}

沿线变化率的如下方程:

$$Z^c\nabla_c\omega_{ab}=-\frac{2}{3}\theta\omega_{ab}-2\sigma^c{}_{[b}\omega_{a]c}\,. \tag{14-1-44}$$

注:推导时可利用 $R_{[abc]d}=0$ 以证明 $R_{[c|b|a]d}Z^cZ^d=0$.

§ 14.2 爱因斯坦转盘

14.2.1 转盘周长

爱因斯坦转盘(Einstein's rotating disk)是指闵氏时空中惯性系内以过盘心并与盘面垂直的直线为轴做匀角速转动的圆盘. 转盘问题历来是引起广泛兴趣而又充满迷惑和争议的话题. 其中一个基本问题是:设地面参考系 $\mathscr{R}_0$ 测得转盘外围周长为 l_0, 求转盘参考系 $\mathscr{R}$ 测得的周长 l. 爱因斯坦的答案是

$$l=\frac{l_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}>l_0\,, \tag{14-2-1}$$

其中 v 为转盘周边的线速率, c 为真空中的光速. 有些人对此不能接受, 其中一位代表人物是著名实证主义哲学家 J. Petzoldt(曾写过几篇文章称狭义相对论的成功

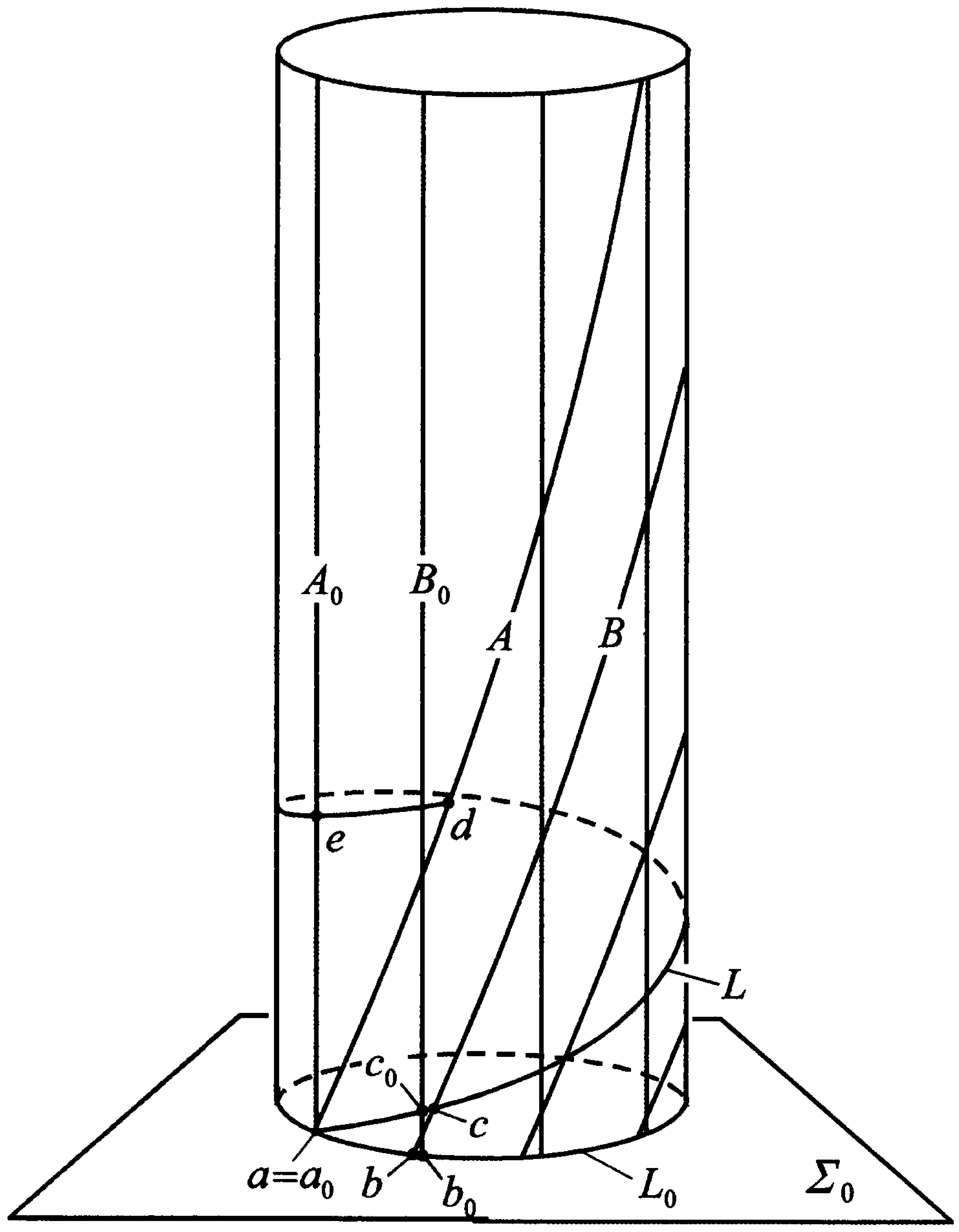


图 14-5　A_0, B_0 和 A, B 分别是静、动杆头尾的世界线, Σ_0 是 $\mathscr{R}_0$ 系在 t_0 时刻的同时面

是实证主义哲学的胜利), 他在1919年7月26日给爱因斯坦的信中说, 由于尺缩效应, 应有 $l<l_0$. 爱因斯坦在回信中指出了他的错误, 阐明了自己得出式(14-2-1)的理由, 有关后者的一段译文如下[译自 Stachel(1980)]:

"现在想象用许多静长为 1 的共动量杆分别沿圆盘的一根半径和周边首尾相接地摆放好. 从 $\mathscr{R}_0$ 看来, 这半径和圆周的长度是多少?为了更为清晰, 让我们想象由 $\mathscr{R}_0$ 在某一确定时刻 t_0 对转盘摄取一张快照. 在这张快照中, 径向量杆的长度为 1, 而切向量杆的长度则为 $(1-v^2/c^2)^{1/2}$. 转盘的'周长'(由 $\mathscr{R}$ 系测得的)无非是在快照中沿圆周摆放的切向量杆的总数, 而这圆周的长度从 $\mathscr{R}_0$ 系看来是 l_0. 于是 $l=l_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$."(注: 译文中的 $\mathscr{R}_0$, $\mathscr{R}$, l_0 和 l 在原文中分别是 K_0, K, U_0 和 U. 翻译时的这种改动旨在与本书符号一致.)

以上讨论可用时空图(图 14-5)加深理解. 图中 Σ_0 代表地面系 $\mathscr{R}_0$ 在某一时刻 t_0 的全空间, 圆周 L_0 代表转盘边缘在该时刻的表现, a_0, b_0 代表该时刻一根静杆的头尾(相应世界线为测地线 A_0, B_0), a, b 代表该时刻盘边一根随动量杆的头尾(相应世界线为螺旋线 A, B). 由于量杆 AB 和 A_0B_0 静长相等而 $\mathscr{R}_0$ 系认为 AB 沿其长度方向运动, ab 短于 a_0b_0 [静长相等的两量杆世界面画法与车库佯谬同(见 6.2.4 小节)]. 图 14-6 代表 $\mathscr{R}_0$ 系在该时刻摄得的快照(想象 ab 等 8 根量杆随盘转动而 a_0b_0 等 7 根量杆不动). 然而转盘系 $\mathscr{R}$ 不认为 Σ_0 是同时面. 事实上, $\mathscr{R}$ 为非超曲面正交系[不满足式(14-1-27)], 不存在处处与 $\mathscr{R}$ 系的观者世界线正交的超曲面. 幸好, 如果把研究对象从转盘改为转圈, 即只关心转盘的外圆周, 则问题只涉及 2 维时空(图中的圆柱面), 而由式(14-1-27)易见 2 维时空的线汇总是超曲面正交的. 因此, 如果把 $\mathscr{R}$ 理解为转圈参考系, 则圆柱面上总存在与转圈观者处处正交的超曲面(曲线), 图 14-5 的圆柱面上处处与转圈观者世界线正交的曲线 L 就是其中一条, 不妨称之为 $\mathscr{R}$ 系的"同时线",[①] 该线的 L_{aced} 段的长度可解释为 $\mathscr{R}$ 系测得的转盘周长. 写出该线方程并用闵氏度规计算 L_{aced} 段的长度, 结果正是 $2\pi R\Gamma$, 其中 $\Gamma\equiv(1-\omega^2R^2)^{-1/2}$, R 代表转盘半径, ω 代表转盘角速度[见梁灿彬(1995)]. 这结果同式(14-2-1)一致. 另一方面, 由于径向放置的量杆沿长度方向没有运动, 它们在 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}_0$ 系中有相同长度, 所以转盘半径 R 在两系中数值一样. 这就导致如下问题: 既然周长与半径之比在转动和静止时有不同数值, 刚性圆盘如何从静止开始逐渐进入匀角速转动状态? 爱因斯坦在同一封信中的另外一段(先于上引段)可以看作对这个问题的回答:

---

① 这"同时线" L 竟与每一转盘观者相交无数次, (例如与 A 交于 $a, d, \cdots$) 造成物理解释上的困难. 这是转盘系非常特别的一点. §14.3 对此有进一步讨论.

"……应该指出,考虑到转盘切向长度的洛伦兹收缩和径向长度的不收缩,刚性转盘要从静止变为转动就必须先行破碎. 类似地, 作为上述长度改变的逆过程的后果,要使转动着的刚性圆盘(靠浇铸而成)变为静止, 它就必须爆裂. 如果你充分考虑到这一情况,你的悖论就会消失."

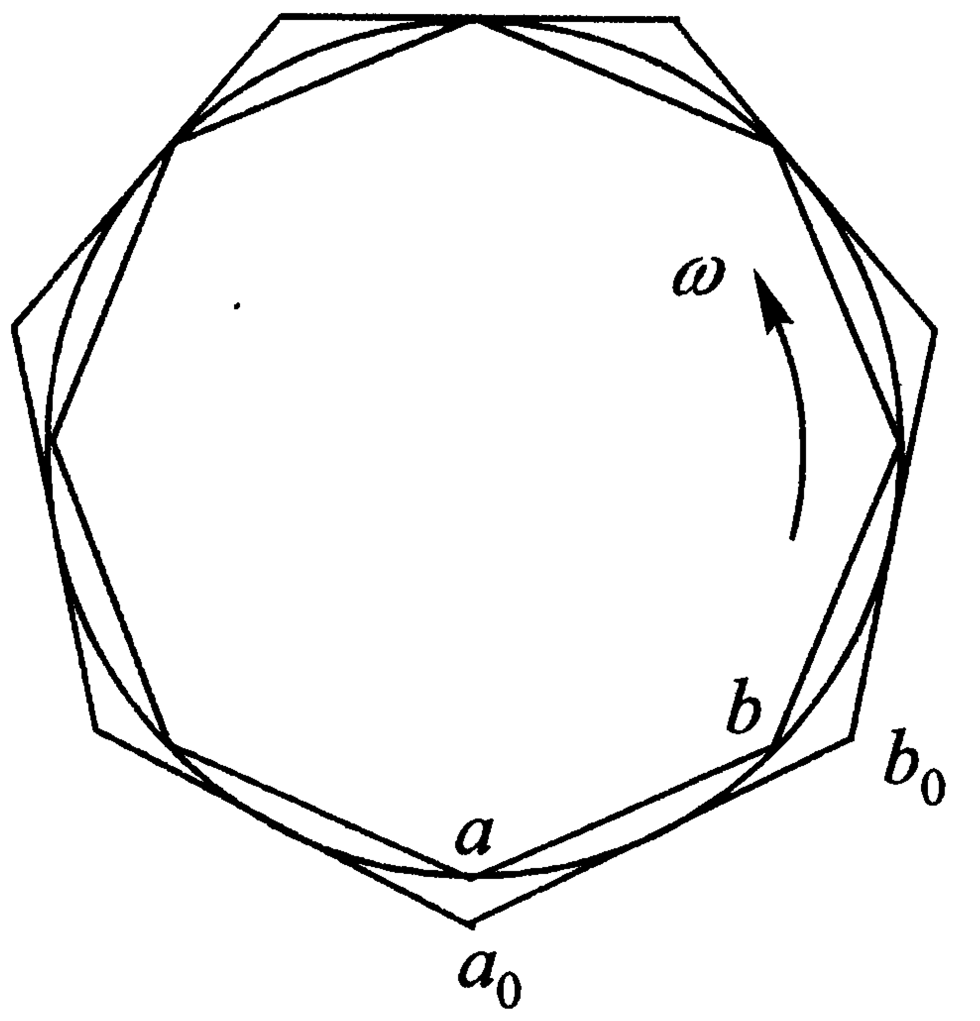


图 14-6　$\mathscr{R}_0$ 系在 t_0 时刻的转盘. ab 等 8 根量杆随盘转动, a_0b_0 等 7 根量杆静止

为了更好地理解爱因斯坦用"拍快照"的方法得出式(14-2-1)的论述, 我们再做如下讨论. 设转盘系 $\mathscr{R}$ 用 N 根静长为 1 的量杆首尾相接地摆满转盘周边, 地面系 $\mathscr{R}_0$ 用 N_0 根静长为 1 的量杆首尾相接地围成一个半径等于转盘半径的静止圆周并"擦边"地套在转动着的圆盘外. $\mathscr{R}_0$ **系认为每根静杆长度为** 1, 故周长等于静杆数, 即 $l_0 = N_0$. $\mathscr{R}$ 系则认为转盘上的量杆长度为 1, 故认为转盘周长等于周边上的杆数, 即 $l = N$. 因此, 要比较 l 和 l_0 只须比较 N 和 N_0. 这可借用地面观者的如下思辩得出: "转盘量杆由于沿杆长方向运动而短于 1, 摆满周边所需杆数必大于 N_0, 即 $N > N_0$." 于是有 $l > l_0$. 由"尺缩"效应的定量关系不难进而得知 $l = l_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. 这一分析是正确的, 然而往往引出如下疑惑: 如果借用转盘观者的思辩过程, 结论岂非相反? 他的思辩将是: "沿转盘周边擦边套着的(相对于地面静止的)量杆沿杆长方向运动, 其长度应小于 1(小于盘上杆长), 为了摆满一圈, 所需杆数必大于 N, 即 $N_0 > N$."于是 $l_0 > l$, 与刚才得出的 $l > l_0$ 矛盾. 这一佯谬可借图 14-5 作出解释. 对地面系而言, 图 14-5 中过 a, b 点的水平圆周是某一时刻的转圈, 由于 $\overline{ab} < 1$, 地面量杆 a_0b_0 应长于 ab. 为摆满圆周, 地面杆数 N_0 自然小于转圈杆数 N. 所以 $l > l_0$ 是对的. 对转圈系而言, 曲线段 L_{ad} 是某一时刻的"圆周"(一段非闭合曲线!), 为摆满这一圆周所用的转圈杆数自然是 N(每杆首尾的世界线都是螺旋线), 但地面量杆短于转圈量杆(这可从图中的 $\overline{a_0c_0} < \overline{ac}$ 清楚看出), 故摆满圆周的地面杆数 N_0' 应大于 N. 然而这不构成矛盾, 关键在于 N_0' 并不等于地面系测得的周长. 由图可知, 这 N_0' 根量杆中的若干根彼此重合, 首尾相接(而又不重合)的地面量杆仍只有 N_0 根: 第 1 根杆头为 a_0, 杆尾为 c_0; 第 2 根杆头为 c_0, 杆尾

为……；第 N_0 根杆尾为 e，而 e 与 a_0 在同一竖直世界线上，因此从地面系看来至此已转完一圈．由于第 N_0+1 根至第 $N_0'(>N_0)$ 根地面量杆分别同第 1 根至第若干根地面量杆重合，不应再次计算．可见地面系测得的转圈周长并非 N_0' 而是 N_0，矛盾并不存在．

既然 $\mathscr{R}$ 系测得的周长为 $2\pi R\Gamma$ 而半径仍为 R，周长半径比就是 $2\pi\Gamma>2\pi$．这表明 $\mathscr{R}$ 系中的几何是非欧的．应该强调，此处涉及的"$\mathscr{R}$ 系中的几何"只是 $\mathscr{R}$ 系中的空间几何而非时空几何，因为时空几何不因参考系而变(从而也根本不必加定语"$\mathscr{R}$ 系中的")．事实上，与双子佯谬类似，讨论爱因斯坦转盘问题前早已约好(默认)时空背景为闵氏时空．反之，由于空间概念涉及时空借助于参考系的3+1分解，空间几何与参考系有关．转盘问题的结论是：地面系(惯性系) $\mathscr{R}_0$ 的空间几何是欧氏(平直)的，而转盘系(非惯性系) $\mathscr{R}$ 的空间几何是非欧(弯曲)的．然而这一提法涉及转盘系的空间几何这一概念，有必要给出明确定义．人们在接触相对论前就已熟悉空间几何的概念，并由经验知其为 3 维欧氏几何．从理论上说，这是因为非相对论物理学的时空结构中的绝对同时面(空间)有 3 维欧氏度规(见小节 6.1.6)．在狭义相对论中，只要用惯性参考系 $\mathscr{R}_0$，空间概念也很明确：与 $\mathscr{R}_0$ 所有观者世界线正交的任一超曲面 Σ 代表某一时刻的空间．由于闵氏度规 η_{ab} 在 Σ 上诱导的 3 维度规是欧氏度规(见小节 6.1.5 末)，空间几何仍是欧氏几何．然而闵氏时空中的非惯性参考系 $\mathscr{R}$ 就不如此简单．如果 $\mathscr{R}$ 是超曲面正交系，自然可把每个正交超曲面 Σ 解释为一个时刻的空间，但 η_{ab} 在 Σ 的诱导度规不一定为欧氏，因此空间几何可能非欧．如果 $\mathscr{R}$ 不是超曲面正交系，问题更为复杂，因为没有正交超曲面时连空间的定义也成了问题．转盘系 $\mathscr{R}$ 偏偏不是超曲面正交系，所以还有必要做进一步讨论(见小节14.2.3 和14.2.4)．

14.2.2 转盘系是非超曲面正交的刚性参考系

选惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 使盘面位于 $z=0$ 的 $x\sim y$ 面内，盘心的 x,y 坐标为零．设 ω (常数)为转盘角速率，则转盘系 $\mathscr{R}$ 中任一观者世界线以固有时 τ 为参数、以柱坐标为坐标的表达式为

$$t=\gamma\tau,\quad r=\text{常数},\quad \varphi=\omega\gamma(r)\tau,\quad z=\text{常数},\quad \text{其中 } \gamma(r)\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2r^2}}. \tag{14-2-2}$$

注 1 ① 默认所有观者标准钟的零点设置保证 $t=0$ 时有 $\tau=0$，故 $t=\gamma\tau$．这只是为方便而设，否则改为 $t=\gamma\tau+$ 常数，对结论并无影响．②只当 r 满足 $\omega r<1$ 时式(14-2-2)才代表类时线(才能充当观者世界线)，可见转盘系 $\mathscr{R}$ 的定义域为 $\mathbb{R}^4$ 中满足 $\omega r<1$ 的开域．

由式(14-2-2)可得转盘观者的 4 速表达式

$$Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \gamma + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a \omega\gamma . \tag{14-2-3}$$

从上式出发, 利用式(2-6-10)及闵氏度规 η_{ab} 在 $\{t,r,\varphi,z\}$ 系的线元式

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{14-2-4}$$

得

$$Z_a = -\gamma\,(dt)_a + \omega\, r^2 \gamma\,(d\varphi)_a . \tag{14-2-5}$$

令 $x^0 \equiv t,\ x^1 \equiv r,\ x^2 \equiv \varphi,\ x^3 \equiv z$, 则由式(14-2-4)易得非零克氏符为

$$\Gamma^1{}_{22} = -r, \qquad \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = r^{-1},$$

由此及式(14-2-5)得非零 $Z_{\mu;\nu}$ 为

$$Z_{0;1} = -\omega^2 r\gamma^3, \qquad Z_{1;2} = -\omega r\gamma, \qquad Z_{2;1} = \omega r\gamma^3,$$

故

$$\nabla_b Z_a = (dx^\nu)_b (dx^\mu)_a Z_{\mu;\nu} = -(dt)_a (dr)_b \omega^2 r\gamma^3 - (dr)_a (d\varphi)_b \omega\, r\gamma + (d\varphi)_a (dr)_b \omega\, r\gamma^3 . \tag{14-2-6}$$

由式(14-2-3)和(14-2-6)可得 4 加速 $A_a = Z^b \nabla_b Z_a = -(dr)_a \omega^2 r\gamma^2$, 因而

$$A_a Z_b = (dr)_a (dt)_b \omega^2 r\gamma^3 - (dr)_a (d\varphi)_b \omega^3 r^3 \gamma^3 ,$$

$$B_{ab} = \nabla_b Z_a + A_a Z_b = 2\,\omega^2 r\gamma^3\,(dr)_{[a}(dt)_{b]} - 2\,\omega\, r\gamma^3 (dr)_{[a}(d\varphi)_{b]} = B_{[ab]}, \tag{14-2-7}$$

上式表明: ① $\theta_{ab} \equiv B_{(ab)} = 0$, 故转盘系为刚性系; ② $\omega_{ab} \equiv B_{[ab]} = B_{ab} \neq 0$ (除非角速率 $\omega = 0$), 可见转盘系有转动, 即为非超曲面正交系. 这同直观思考一致: 转盘上的每个观者都觉得周围观者绕自己转动.

转盘系的非超曲面正交性使空间几何的定义变得困难. 这一困难可借用它的刚性性克服. 为此, 下小节先介绍刚性参考系的空间几何定义.

14.2.3 刚性参考系及其空间几何

[本小节和下小节的主要参考文献: 高思杰, 梁灿彬(1997).]

设 $\mathscr{R}$ 是时空 (M, g_{ab}) 中的一个参考系, A 是 $\mathscr{R}$ 内的一个观者. 指定与 A 线相交的一条横向曲线 $\mu_0(s)$ 便挑出一个含 A 的单参观者族, 由它决定的 A 的邻居记作

w^a. 仿照§14.1 的讨论, 选 A 的 s 值为零, 即 $A=\gamma_0(\tau)$, 则 $w^a s$ (其中 s 为小量)代表该族内与 A 相邻的一个观者 $B\equiv\gamma_s(\tau)$ 的位矢, $w^a s$ 的长度 $(h_{ab}w^a w^b)^{1/2}s$ 代表 A 与 B 的空间距离. 若此距离与 A 线的 τ 值无关,自然认为 A 与 B 有刚性联系. 事实上有如下命题:

命题 14-2-1　$\mathscr{R}$ 为刚性参考系(由 $\theta_{ab}=0$ 定义)当且仅当 $\mathscr{R}$ 内每一观者的每一邻居 w^a 满足

$$\frac{\mathrm{d}(h_{ab}w^a w^b)}{\mathrm{d}\tau}=0, \quad 其中\ h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_a Z_b\ 是诱导度规. \tag{14-2-8}$$

证明　对 $\mathscr{R}$ 内任一观者 $\gamma(\tau)$ 的任一邻居 w^a 有

$$\frac{\mathrm{d}(h_{ab}w^a w^b)}{\mathrm{d}\tau}=2w_a\frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau}=2w_a B^a{}_b w^b=2w^a w^b B_{ab}. \tag{14-2-9}$$

(A) 若 $\theta_{ab}=0$, 则 $B_{ab}=B_{[ab]}$, 故上式右边为零, 因而式(14-2-8)成立.

(B) 若式(14-2-8)成立, 则式(14-2-9)对任一观者 $\gamma(\tau)$ 的任一邻居 w^a 给出

$$0=B_{ab}w^a w^b=B_{(ab)}w^a w^b=\theta_{ab}w^a w^b.$$

$\forall p\in\gamma(\tau)$, $w^a, w'^a\in W_p$,由上式得

$$0=\theta_{ab}|_p\,(w^a+w'^a)(w^b+w'^b)=2\theta_{ab}|_p\,w^a w'^b.$$

注意到 $\theta_{ab}|_p$ 的空间性, 便得 $\theta_{ab}|_p=0$.　　□

参考系的刚性条件也可借其共动坐标系用分量语言表出. 共动坐标系 $\{t,x^i\}$ 的 $(\partial/\partial t)^a$ 与观者 4 速 Z^a 平行, 故两者只能差到一个函数乘子, 即 $(\partial/\partial t)^a=\alpha Z^a$. 由 $Z^a Z_a=-1$ 易得 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$ (其中 g_{00} 是 g_{ab} 在共动坐标系的 00 分量), 于是 $Z^a=\dfrac{(\partial/\partial t)^a}{\sqrt{-g_{00}}}$, 由此可知 Z_a 在共动坐标系的 i 分量 $Z_i=\dfrac{g_{0i}}{\sqrt{-g_{00}}}$. 现在就可给出参考系的刚性条件的如下表述:

命题 14-2-2　设 Z^a 是参考系 $\mathscr{R}$ 的观者 4 速场, $h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_a Z_b$ 是诱导度规场, h_{ij} 是 h_{ab} 在 $\mathscr{R}$ 系的任一共动坐标系 $\{t,x^i\}$ 的分量, 即

$$h_{ij}=g_{ij}+Z_i Z_j=g_{ij}-\frac{g_{i0}g_{j0}}{g_{00}}, \tag{14-2-10}$$

则 $\mathscr{R}$ 为刚性系等价于

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}=0. \tag{14-2-11}$$

证明　由 $(\partial/\partial t)^a=\alpha Z^a$ 得

$$\mathscr{L}_{\partial/\partial t}h_{ab}=\alpha\mathscr{L}_Z h_{ab}+Z^c h_{cb}\nabla_a\alpha+Z^c h_{ac}\nabla_b\alpha=\alpha\mathscr{L}_Z h_{ab},$$

故刚性条件 $\theta_{ab}=0\Leftrightarrow\mathscr{L}_Z h_{ab}=0\Leftrightarrow\mathscr{L}_{\partial/\partial t}h_{ab}=0$(其中第一个 $\Leftrightarrow$ 号用到命题 14-1-3). 把 h_{ab} 写成共动系的分量形式 $h_{ab}=h_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b$，由坐标基矢之间的对易性易见 $\mathscr{L}_{\partial/\partial t}(\mathrm{d}x^i)_a=0$，故 $\mathscr{L}_{\partial/\partial t}h_{ab}=0$ 等价于 $\mathscr{L}_{\partial/\partial t}h_{ij}=0$，从而(根据定理 4-2-2)等价于式(14-2-11). □

以 $\hat{\Sigma}$ 代表把 $\mathscr{R}$ 内每条世界线作为一个元素所得的集合，则借用 $\mathscr{R}$ 的局部共动坐标系可知 $\hat{\Sigma}$ 是一个 3 维流形，① $\{x^\mu\}$ 的 3 个空间坐标 $\{x^i\}$ 便自然成为 $\hat{\Sigma}$ 的局部坐标. 若 $\mathscr{R}$ 是刚性参考系，则 $\partial h_{ij}/\partial t=0$ 使得 h_{ab} 可被视为 $\hat{\Sigma}$ 上的度规，于是 $(\hat{\Sigma},h_{ab})$ 成为 3 维黎曼空间，其上的几何 h_{ab} 就可合理地被定义为刚性参考系 $\mathscr{R}$ 的空间几何. 可见非超曲面正交的参考系也可定义空间几何，只要它是刚性系. 转盘参考系便是一例. 下面以此为基础计算转盘系的空间几何.

14.2.4　转盘系的空间几何

小节 14.2.2 所用坐标系 $\{t,r,\varphi,z\}$ 对计算 B_{ab} 比较方便，但它不是转盘系 $\mathscr{R}$ 的共动坐标系：其 t 坐标线是类时测地线而非转盘观者世界线. 定义新的角坐标

$$\overline{\varphi}\equiv\varphi-\omega t, \tag{14-2-12}$$

则 $\{t,r,\overline{\varphi},z\}$ 是 $\mathscr{R}$ 的共动坐标系，因为现在的 t 坐标线正是以 ω 为角速率的转盘观者的世界线. 应该注意，任一时空点在非共动系 $\{t,r,\varphi,z\}$ 和共动系 $\{t,r,\overline{\varphi},z\}$ 中有相等的 t 值(也有相等的 r，z 值)，因此两系的第零坐标基矢都可记作 $(\partial/\partial t)^a$，但两者却不等. [前者切于 r，φ，z 为常数的类时线(测地线)；后者切于 r，$\overline{\varphi}$，z 为常数的类时线(转盘观者世界线).] 为避免可能的混淆，可用 $\{\bar{t},\bar{r},\overline{\varphi},\bar{z}\}$ 表示共动坐标系，其定义为

$$\bar{t}=t,\quad \bar{r}=r,\quad \overline{\varphi}=\varphi-\omega t,\quad \bar{z}=z.$$

这时两系的第零坐标基矢便分别记作 $(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial\bar{t})^a$，以兹区别. 闵氏度规在共动坐标系 $\{\bar{t},\bar{r},\overline{\varphi},\bar{z}\}$ 的线元为

$$\mathrm{d}s^2=-(1-\omega^2\bar{r}^2)\,\mathrm{d}\bar{t}^2+\mathrm{d}\bar{r}^2+\bar{r}^2\mathrm{d}\overline{\varphi}^2+2\omega\bar{r}^2\mathrm{d}\bar{t}\,\mathrm{d}\overline{\varphi}+\mathrm{d}\bar{z}^2. \tag{14-2-13}$$

① 在某些特殊情况下 $\hat{\Sigma}$ 不能成为 3 维流形，我们不讨论这些特殊情况.

令$x^0 \equiv \bar{t}$, $x^1 \equiv \bar{r}$, $x^2 \equiv \bar{\varphi}$, $x^3 \equiv \bar{z}$，则式(14-2-10)的h_{ij}的非零分量现在为

$$h_{11} = g_{11} = 1, \quad h_{22} = g_{22} - \frac{g_{20}g_{20}}{g_{00}} = \frac{\bar{r}^2}{1-\omega^2\bar{r}^2}, \quad h_{33} = g_{33} = 1, \tag{14-2-14}$$

可见$\partial h_{ij}/\partial t = 0$，从另一角度证明转盘系$\mathscr{R}$是刚性系，因而$\mathscr{R}$系相应的$(\hat{\Sigma}, h_{ab})$便可描述转盘系测得的空间几何. 把$\bar{r}$，$\bar{\varphi}$，$\bar{z}$简记作$r$，$\varphi$，$z$，注意到式(14-2-14)，则$(\hat{\Sigma}, h_{ab})$上的线元(空间几何)便可表为

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = \mathrm{d}r^2 + \frac{r^2}{1-\omega^2 r^2}\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{14-2-15}$$

上式与Mϕller(1955)P.241式(74)一致，但推导途径不同. 直接计算(习题)表明这一线元相应的黎曼张量非零，可见转盘系测得的空间几何为非欧几何. 这一几何的非欧性的一个重要表现是"圆周率不等于π". 但要使这一提法意义明确，还应先介绍若干定义. 由$r = r$，$\varphi = \varphi_0$(常数)定义的曲线称为**径向线**(不难证明径向线为测地线). 与原点距离为常数的点的轨迹称为**圆周**，该常数称为该圆周的**半径**，半径的2倍叫**直径**，圆周的线长叫**周长**，周长与直径之比叫**圆周率**. 作为习题，请读者证明：(a)径向线是以r为仿射参数(而且是线长参数)的测地线；(b)圆周率等于$\Gamma\pi$，其中$\Gamma \equiv (1-\omega^2 R^2)^{-1/2}$，$R$是所论圆周的半径.

§14.3　参考系内的钟同步[选读]

14.3.1　惯性参考系的雷达校钟法

闵氏时空惯性参考系内的标准钟的同步问题已在小节6.1.4中简略提到. 钟慢效应的讨论(小节6.2.2)是说明惯性系内钟同步重要性的一个例子. 本节讨论钟同步问题在下述两个方面的推广：①闵氏时空中任意参考系内的钟同步；②任意弯曲时空中任意参考系内的钟同步. 一个重要结论是：只有满足一定条件的参考系方可谈及并实现钟的同步. 为了打好基础，本小节先对闵氏时空惯性参考系内标准钟的同步问题作较为详细的讨论. 惯性参考系显然是超曲面正交的，我们当然想把每一正交超曲面Σ_t解释为某时刻的全空间. 要使这一解释在物理上自洽，应该满足一个条件：系内所有观者的标准钟在其世界线与Σ_t的交点上有相同读数(以使Σ_t的确代表同一时刻). 只要满足这一条件，就说系内的标准钟已经同步. 因为介于

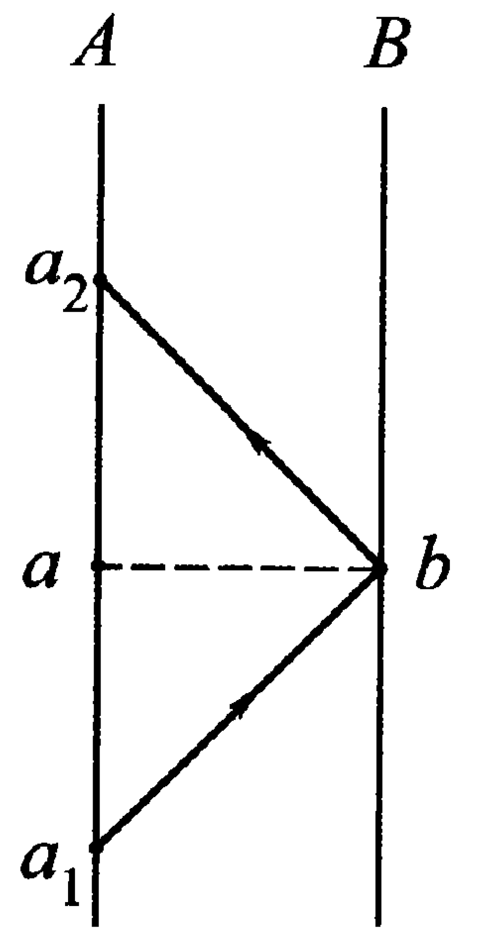


图 14-7　A在a_1时发光，被B在b时收到并反射，再由A在a_2时回收

任意两个正交超曲面之间的所有观者世界线段有相等长度，只要所有标准钟在某一正交面上读数相等，它们在任一正交面上的读数必然相等，因此同步操作是一劳永逸的：只须调整各钟的设定使它们在某一正交面上读数相同. 为此必须用信号在各钟之间沟通. 如果存在速率无限大的信号，就可令它在零时间内从一个钟走到第二个钟并令该钟调整设定使收信号时的读数等于第一钟发信号时的读数，依此类推，同步操作就会十分简单. 可惜相对论不允许这样的信号存在，因此有必要设计(至少在理论上)可行的同步操作方案. 由于光速不依赖于波长、振幅、方向和光源运动情况，又由于光速最高，光信号自然是首选对象. 下面介绍利用光信号的同步操作. 在 $\mathscr{R}$ 系内任选一个观者 A 为同步的带头人. 为使系内的标准钟 B 与 A 同步，只须进行以下操作：① A 在事件 $a_1 \in A$ 向 B 发光，在事件 $b \in B$ 被 B 收到(图 14-7)；②设想 B 有一面镜子，收到光时立即反射，在事件 $a_2 \in A$ 被 A 回收；③设事件 a_1 和 a_2 的固有时分别为 τ_1 和 τ_2，则 A 便可用任一方式(例如打电话)通知 B，让他调整自己的钟的设定使得在收到光信号时的读数为 $(\tau_1+\tau_2)/2$. 设 a 是 A 上固有时为 $(\tau_1+\tau_2)/2$ 的点(直线段 a_1a_2 的中点)，则不难看出 a，b 所联直线与 A，B 正交. 因此这三步操作的后果是 B 钟已与 A 钟同步. 这种操作方法称为**雷达校钟法**或**雷达同步法**(radar method for clock synchronization). 利用雷达法还可测定惯性观者 A，B 之间的空间距离 D_{AB} (其定义是正交直线段 ab 的长度 l_{ab})，因为不难证明

$$l_{ab}=\frac{\tau_2-\tau_1}{2}. \tag{14-3-1}$$

可见雷达法还起到"标准尺"的作用. 标准钟的定义是能给出世界线长度的钟(见小节 6.1.4)，标准尺的定义则是能给出任一类空线段的长度(按度规衡量)的尺. 此定义适用于任意时空，见 Misner et al.(1973)P.393. 实际上，地月距离正是用这种方法测量的(从地球向月球发射雷达并接收反射波).

下小节讨论如何把雷达校钟法推广至闵氏时空的非惯性系和弯曲时空的任意参考系. 为行文方便，把图 14-7 的三个点 a_1，b 和 a_2 的整体 (a_1, b, a_2) 称为一个"雷达三点组"("radar triplet").

14.3.2 任意时空任意参考系的钟同步问题

钟同步问题涉及两个方面：①同时面的定义；②为使各钟在任一同时面上读数相同所应进行的操作. 对闵氏时空的惯性参考系，问题简单得多，因为可把正交超曲面定义为同时面，用雷达法为同步操作法. 然而，任意时空的任意参考系未必是超曲面正交系，选什么面作为同时面?连同时面的定义都成为问题，同步操作更是无从谈起. 当然，如果讨论的是 2 维时空，局域地说问题并不存在，因为 2 维时空的任一线汇都超曲面正交. 这就给出启发：既然 4 维时空的任一参考系 $\mathscr{R}$ 的每一单参观者族(作为一个 2 维子时空中的线汇)必定超曲面(线)正交，可否先把正交超曲

面定义为同时线再用雷达法令族内各钟在每一正交线上读数一致?现在讨论这种做法是否具有可行性. 首先遇到如下问题:对观者 A 世界线外的给定点 b, 线 A 上未必存在 a_1, a_2 使 (a_1, b, a_2) 构成雷达三点组. 幸好, 对任意时空的任意观者 A 来说局域看来不存在这个问题[以下称此为雷达法的局域可行性, 准确提法和证明见 Sachs and Wu(1977)命题5.2.3], 而这已经足够. 设 $\{\gamma_s(\tau)\}$ 是 $\mathscr{R}$ 内的一个单参观者族, $A \equiv \gamma_0(\tau)$ 是基准观者. 取定 $a \in A$ 后, A 就可用雷达法确定族内任一观者 $B \equiv \gamma_s(\tau)$ 上与 a "同时" 的点 b. 当 s 值变动时点 b 便跑出一条 "同时线" $\sigma(s)$, 如图 14-8. 这种做法的特点是:无论 s 值有多大(无论 B 离 A 有多远), 都要由 A 来发光和收光. 我们称此为**大步雷达法**. 下面的命题表明, 由大步雷达法获得的 "同时线" $\sigma(s)$ 虽然正交于 A 线, 却未必与族内所有世界线正交, 因而不是真正的同时线.

命题 14-3-1　设 $\gamma(\tau)$ 为任一时空中的任一观者世界线, $\alpha(s)$ 是任一类空曲线(s 代表线长), 与 $\gamma(\tau)$ 交于 $a=\gamma(\tau_0)=\alpha(0)$(图 14-9). 根据雷达法的局域可行性, 对任一不太大的 $\bar{s}$, 令 $b \equiv \alpha(\bar{s})$, 总有 $a_1 \equiv \gamma(\tau_1)$, $a_2 \equiv \gamma(\tau_2)$ 使 (a_1, b, a_2) 成为雷达三点组. 定义函数 $f(\bar{s}) \equiv \tau_0 - (\tau_1 + \tau_2)/2$, 则

(a) $\lim\limits_{s\to 0} f(s) = 0$;

(b) $\lim\limits_{s\to 0} f'(s) = 0$ 当且仅当 α 线与 γ 线正交.

证明　为照顾陈述的连贯性, 证明移至本小节之末. □

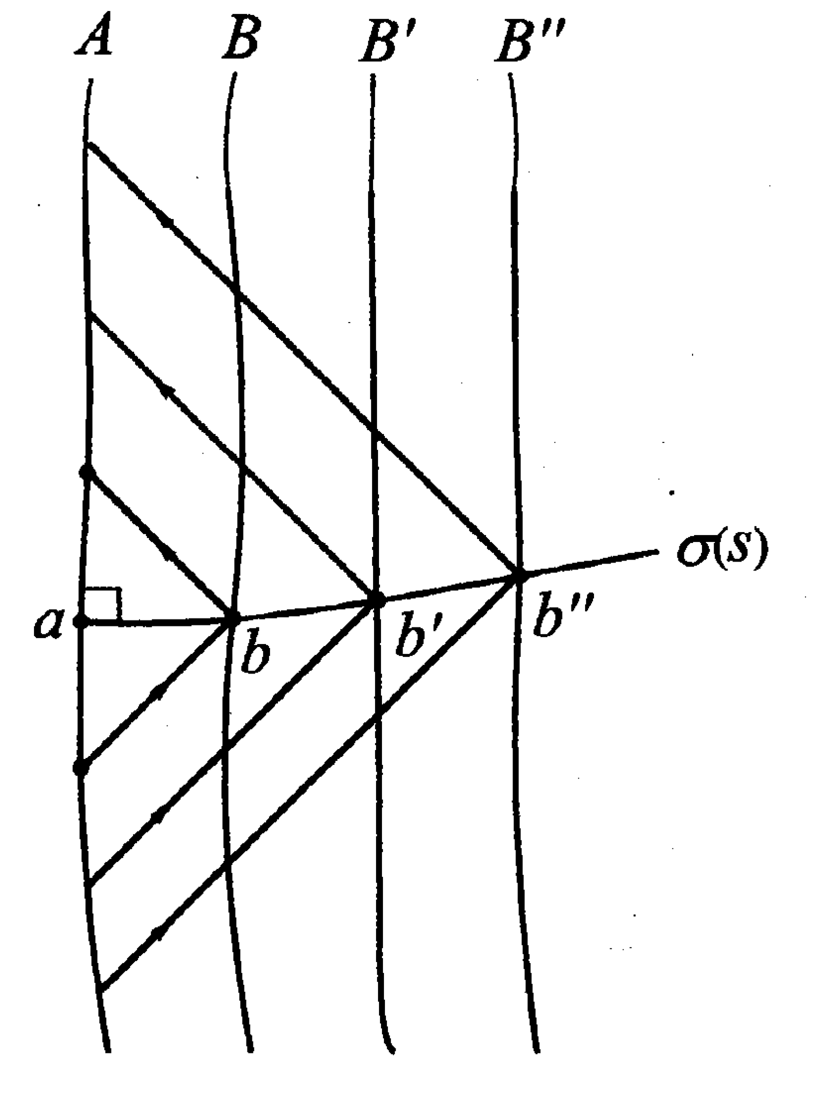


图 14-8　A 线执行大步雷达法得 "同时线" $\sigma(s)$

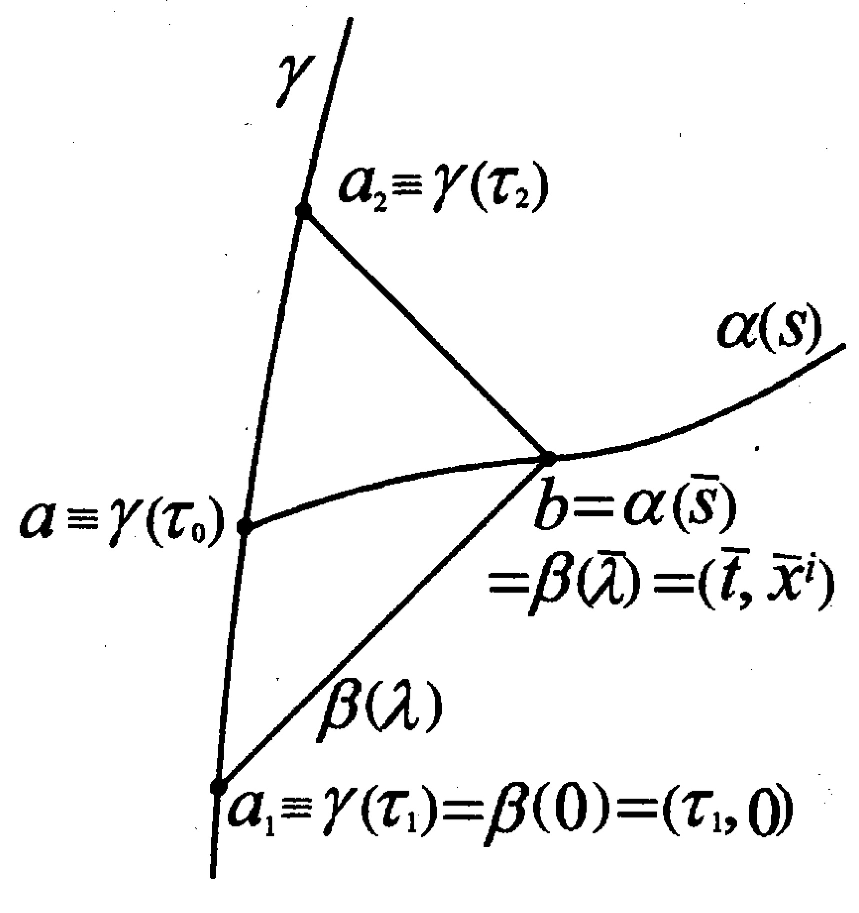


图 14-9　命题 14-3-1 用图

把上述命题用于图 14-8, 把其中的 A 线和 $\sigma(s)$ 线分别看作图 14-9 的 $\gamma(\tau)$ 和 $\alpha(s)$, 便知 $\sigma(s)$ 在 a 点与 A 线正交. 然而图 14-8 的各观者中只有 A 向外发光并确定与 $a \in A$ "同时"的点[从而构造出 $\sigma(s)$ 线], 其他世界线不能看作图 14-9 的 $\gamma(\tau)$, 所以 $\sigma(s)$ 与其他世界线的正交性并无保证. 但也不难看出, 只要让族内每一观者都对紧邻观者执行雷达法, 所得曲线就与族内每一观者正交. 准确地说, 这种做法包含两步:①在族内选一系列观者 $A, B, C, D, \cdots$, 先由 A 用大步雷达法在 A, B 之间确定一段起于 $a \in A$ 止于 $b \in B$ 的 "同时线" (图 14-10), 再令 B 类似地在 B, C 之

间确定一段"同时线"，依此类推. ②向 $A, B, C, D, \cdots$ 之间添加更多观者，所得的极限曲线 $\nu(s)$ 正是所要的同时线，因为现在每一观者都可充当图 14-9 的 $\gamma(\tau)$，命题 14-3-1 保证 $\nu(s)$ 与族内所有观者正交. 我们把上述做法称为(无限)**小步雷达法**.

既然 $\mathscr{R}$ 的每个单参观者族都有同时线，$\mathscr{R}$ 内的钟同步操作似乎可以这样进行：任选 $\mathscr{R}$ 内一观者 A 作为带头人，设他的钟在 $a \in A$ 时指零. 考虑含 A 的任一单参观者族，$\nu(s)$ 是族内过 a 的同时线(与族内各观者都正交的线)，则只须要求族内各观者在其世界线与 $\nu(s)$ 的交点把钟调得指零. 然而这种做法未必自洽. 假定用以挑出一个单参观者族的横向曲线 $\mu(s)$ 是闭合曲线，就是说，从它与 A 线的交点出发转一圈又回到出发点. 不妨把由这种 $\mu(s)$ 挑出的单参族称为"闭合单参观者族". 例如，图 14-5 中所有躺在圆柱面上的转盘观者 $A, B, \cdots$ 就组成一个闭合单参观者族. 不幸的是，该族的同时线(例如 L)是不闭合曲线，因而与族内所有观者都相交无数次(对 A 而言，交点为 $a, d, \cdots$). 作为 A 线上的不同点，$a, d, \cdots$ 当然应有不同固有时(因而坐标时)，但按照上述同步操作要求，A 钟应在这些点都指零，这显然导致矛盾. 这一矛盾也可改用如下方式描述：设 A, B, C 为闭合单参族中的 3 个观者，A 钟在 a 时指零(图 14-11). 根据同时线 $\nu(s)$ 的 ab 段和 ac 段，B 和 C 钟应分别在 b 和 c 点指零. 然而，作为闭合单参观者族的非闭合同时线，$\nu(s)$ 与 C 有不止一个交点. 用 $\nu(s)$ 的 bc' 段检查就会发现 B, C 钟并未满足同步要求. 可见，只要 $\mathscr{R}$ 内存在一个闭合单参观者族，其中存在一条非闭合同时线，$\mathscr{R}$ 的同时性就没有自洽定义. 因此，同时性有自洽定义的前提是 $\mathscr{R}$ 内每一闭合单参观者族的同时线都闭合. 注意到同时线处处与观者世界线正交，这就要求 $\mathscr{R}$ 是超曲面正交系. 所以超曲面正交性是 $\mathscr{R}$ 的同时性有自洽定义的必要条件. 我们转了一圈又回到原来的结论：只有超曲面正交的参考系才可谈及钟同步问题. 不过上述讨论还是很有意义的，它不但澄清了若干问题(包括大、小步雷达法的区别. 这一问题对闵氏时空的惯性参考系并不存在)，而且证明了命题 14-3-1，正是它保证小步雷达法给出的 $\nu(s)$ 是所要的同时线. 下小节对超曲面正交系的钟同步再作详细讨论.

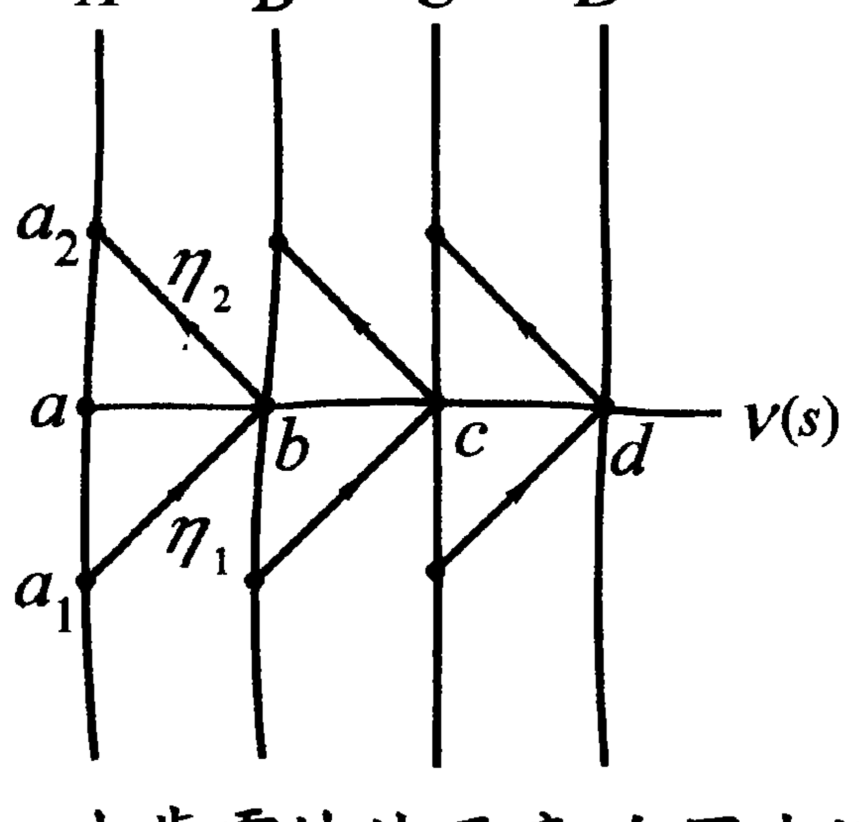


图 14-10　小步雷达法示意. 向图中添加更多观者，所得极限曲线(未画出)就是同时线 $\nu(s)$

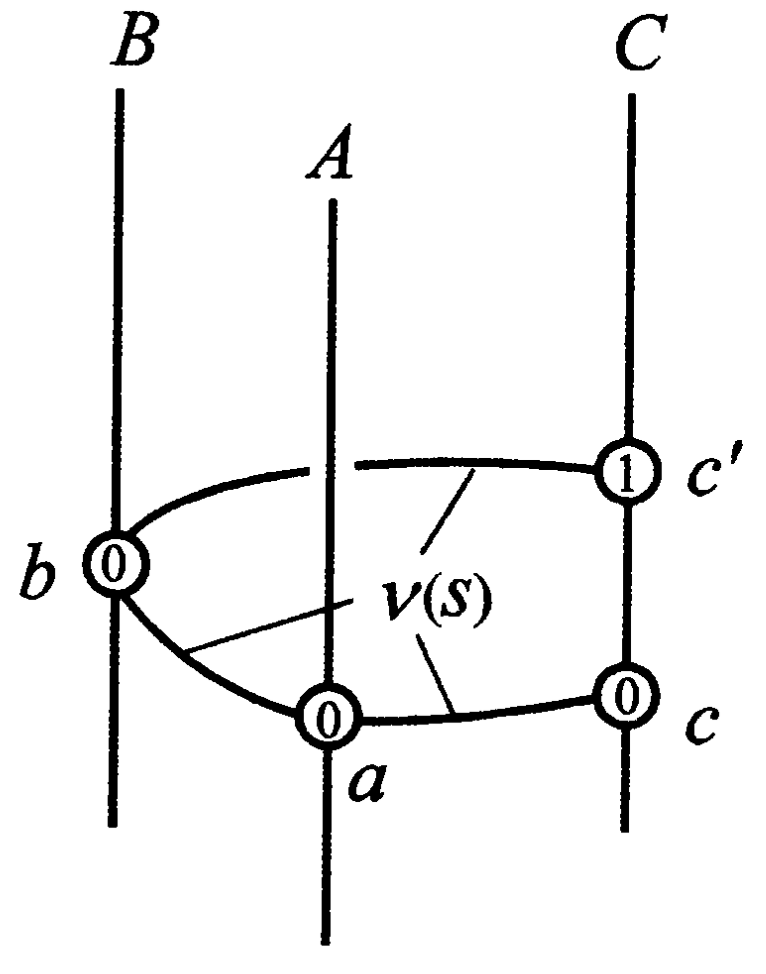


图 14-11　闭合单参观者族的非闭合同时线 $\nu(s)$ 使同时性没有自洽定义

在结束本小节之前先补证命题 14-3-1.

命题 14-3-1 的证明 借用观者 $\gamma(\tau)$ 的固有坐标系 $\{x^\mu\}$(见 § 7.4), 把 b 点的固有坐标记作 $(\bar{t},\bar{x}^i)$. 设从 a_1 到 b 的类光测地线段 $\beta(\lambda)$ 的参数式为 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, 则其切矢 T^a 的分量 $T^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$. 令 $a_1 = \beta(0)$, $b = \beta(\bar{\lambda})$ (图 14-9), 则

$$x^\mu(\bar{\lambda}) - x^\mu(0) = \int_0^{\bar{\lambda}} T^\mu(\lambda)\mathrm{d}\lambda = T^\mu(\xi^{(\mu)})\bar{\lambda}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{14-3-2}$$

其中 $\xi^{(\mu)} \in [0,\bar{\lambda}]$ 是函数 $T^\mu(\lambda)$ 在区间 $[0,\bar{\lambda}]$ 的中值. 对 $T^\mu(\lambda)$ 做泰勒展开:

$$T^\mu(0+\xi^{(\mu)}) \cong T^\mu(0) + \left.\frac{\mathrm{d}T^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \xi^{(\mu)}.$$

以 $\bar{\lambda}$ 乘全式后代入式(14-3-2)得

$$x^\mu(\bar{\lambda}) - x^\mu(0) = T^\mu(0)\bar{\lambda} + \left.\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \xi^{(\mu)}\bar{\lambda}.$$

注意到 $x^0(\bar{\lambda}) = \bar{t}$, $x^0(0) = \tau_1$, $x^i(\bar{\lambda}) = \bar{x}^i$, $x^i(0) = 0$, 便有

$$\begin{aligned} \bar{t} - \tau_1 &\cong T^0(0)\bar{\lambda} + \left.\frac{\mathrm{d}T^0}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \xi^{(0)}\bar{\lambda}, \\ \bar{x}^i - 0 &\cong T^i(0)\bar{\lambda} + \left.\frac{\mathrm{d}T^i}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \xi^{(i)}\bar{\lambda}, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{14-3-3}$$

因 $g_{\mu\nu}|_{a_1} = \eta_{\mu\nu}$ (固有坐标系的优点), 故由 T^a 的类光性得

$$0 = (g_{ab}T^aT^b)|_{a_1} = \eta_{\mu\nu}T^\mu(0)T^\nu(0) = -[T^0(0)]^2 + \sum_i [T^i(0)]^2,$$

把式(14-3-3)代入上式, 略去高阶项后得

$$-(\bar{t}-\tau_1)^2 + \sum_i (\bar{x}^i)^2 + \Delta_1 = 0, \tag{14-3-4}$$

其中
$$\Delta_1 \equiv 2\bar{\lambda}\left[(\bar{t}-\tau_1)\left.\frac{\mathrm{d}T^0}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \xi^{(0)} - \sum_i \bar{x}^i \left.\left(\frac{\mathrm{d}T^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right|_{\lambda=0} \xi^{(i)}\right]. \tag{14-3-5}$$

同理有
$$-(\tau_2 - \bar{t})^2 + \sum_i (\bar{x}^i)^2 + \Delta_2 = 0. \ (\Delta_2 \text{ 意义自明}) \tag{14-3-6}$$

利用点 b 的任意性可把以上三式中的 $\bar{s}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{t}$, $\bar{x}^i$ 改为 s, λ, t, x^i, 由式(14-3-4)、

(14-3-6)及 $f(s)$ 的定义得

$$f(s)=\tau_0-t+\frac{\Delta}{2(\tau_2-\tau_1)}, \quad \Delta\equiv\Delta_1-\Delta_2 . \tag{14-3-7}$$

由推导知上式的 t 本是 λ 的函数，即 $t=t(\lambda)$，但因每一 $\bar{s}$ 值决定一点 $\alpha(\bar{s})$，由此又决定一条 $\beta(\lambda)$ 线及一个 $\bar{\lambda}$ 值，故有函数 $\lambda(s)$，从而上式的 t 可表为 $t(s)\equiv t(\lambda(s))$. 式(14-3-5)的 $\lambda, \xi^{(\mu)}, x^i, t-\tau_1$ 都是与 s 同阶甚至高阶的小量，故 $\Delta_1=\mathrm{O}(s^3)$ 甚至 $\Delta_1=\mathrm{o}(s^3)$. 同理有 $\Delta_2=\mathrm{O}(s^3)$ 甚至 $\Delta_2=\mathrm{o}(s^3)$，因而 $\Delta=\mathrm{O}(s^3)$ 甚至 $\Delta=\mathrm{o}(s^3)$. 又因 $(\tau_2-\tau_1)=\mathrm{O}(s)$，所以

$$\lim_{s\to 0} f(s)=\lim_{s\to 0}(\tau_0-t)=0, \qquad \lim_{s\to 0} f'(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}.$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^a\nabla_a t=g_{ab}\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^a(\mathrm{d}t)^b$，故

$$\lim_{s\to 0} f'(s)=-\left[g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a(\mathrm{d}t)^b\right]_{a点}=\left[g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b\right]_{a点}=\left[g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^b\right]_{a点}, \tag{14-3-8}$$

其中第二步是因为对 a 点有 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$，第三步是由于 $\gamma(\tau)$ 是固有坐标系的第零坐标线，且在线上 $t=\tau$. 式(14-3-8)表明 $\lim_{s\to 0}f'(s)=0$ 当且仅当 α 线与 γ 线在 a 点正交. □

14.3.3 超曲面正交系的钟同步

超曲面正交参考系的钟同步可以分为四个层次，介绍如下.

定义 1 参考系 $\mathscr{R}$ 叫**固有时可同步的**(proper time synchronizable)，若 M 上有光滑函数 t 使

$$Z_a=-(\mathrm{d}t)_a . \tag{14-3-9}$$

由上式易知 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0$，故 $\mathscr{R}$ 为超曲面正交系. 事实上，以 Σ_t 代表函数 t 为常数的面(等 t 面)，由式(14-3-9)知 $Z^a=-\nabla^a t$，而 $\nabla^a t$ (作为超曲面的法矢)处处与等 t 面正交，故 Σ_t 就是 $\mathscr{R}$ 系的正交超曲面. 因 $-1=Z^aZ_a=-(\partial/\partial\tau)^a(\mathrm{d}t)_a=-\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，故

$$t=\tau+a, \qquad a=常数(因观者而异). \tag{14-3-10}$$

于是式(14-3-9)的 t 可称为固有时间函数. 式(14-3-10)表明任意两个观者介于任意两个等 t 面 Σ_{t_1} 和 Σ_{t_2} 之间的固有时间 $\Delta\tau\,(\equiv\tau_2-\tau_1)$ 相等. 因此，如果所有观者在其

世界线与某一同时面(记作 Σ_0)相交时把自己的标准钟调至指零，则它们与任意同时面 Σ_t 相交时的标准钟读数必相等，于是所有等 t 面也就成为等 τ 面，从而达到 $\mathscr{R}$ 内各标准钟同步的要求. 同步操作在理论上可借小步雷达法进行.设 $A, B, C, D, \cdots$ 是 $\mathscr{R}$ 的任一单参观者族内足够邻近的观者(图 14-10)，A 在 τ_1 时向 B 发光，在 τ_2 时收到反射光，便通知 B 在接到光时(即事件 b)把标准钟的读数定为 $(\tau_1+\tau_2)/2$；然后 B 再向 C 作类似操作，依此类推，便可在该单参族内完成同步过程. 为使整个 $\mathscr{R}$ 系同步，只须从 A 开始向每一单参族重复上述操作. $\mathscr{R}$ 的超曲面正交性保证各族的同步不会矛盾. 如前所述，采用小步雷达法是因为大步雷达法所得的“同时线”(带引号的!)未必处处与世界线正交. 其实只有无限小步才能完全精确，而任何两钟都不能无限邻近，所以这种操作本身必含近似性. ①

闵氏时空的惯性参考系和标准宇宙模型的 Robertson-Walker 系都是固有时可同步参考系.

定义 2 参考系 $\mathscr{R}$ 叫**局域固有时可同步的**(locally proper time synchronizable)，若

$$(\mathrm{d}Z)_{ba}=0. \tag{14-3-11}$$

由式(14-3-9)必有式(14-3-11)，但反之不然. 事实上，式(14-3-9)表明 Z_a 是恰当的，而式(14-3-11)表明 Z_a 是闭的. 恰当一定导致闭(见 §5.1 注 1)，但由闭导致恰当则要对背景流形有所要求. 可见定义 2 比定义 1 要求较低. 式(14-3-11)也导致 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]}=0$，故满足定义 2 的 $\mathscr{R}$ 也是超曲面正交的. 与式(14-3-9)不同，式(14-3-11)不保证每一观者世界线与正交超曲面至多相交一次. 考虑爱因斯坦转盘外圆周(“转圈”)相应的 2 维时空(非单连通时空的简单例子)，转圈上所有随圈转动的观者组成的参考系满足式(14-3-11)，[对转圈，式(14-2-5)的 Z_a 表达式中的 r 和 γ 为常数，由此式易见 $\mathrm{d}\boldsymbol{Z}=0$.] 但每一正交超曲面(类空螺旋线)都与每一观者世界线相交无数次. 如果只考虑时空中的这样一个开域 U，其中 $\mathscr{R}$ 的每一观者与正交超曲面只交一次，则满足式(14-3-11)和满足式(14-3-9)的参考系有相同性质，因此满足式(14-3-11)的参考系叫局域固有时可同步参考系. 上面关于标准钟同步的定义和操作在 U 中同样适用. 例如，把转圈剪断使之不再闭合，则转圈参考系就成为固有时可同步的.

上述两定义对参考系的要求颇高. 事实上，用导数算符改写式(14-3-11)后与 Z^b 缩并得 $Z^b\nabla_b Z_a=0$，说明满足定义 1 或 2 的参考系的 4 加速 $A^a=0$，因而是测地参考系. 而式(8-3-23)表明施瓦西时空的施瓦西参考系有 $A^a\neq 0$，所以既不满足定义 1 也不满足定义 2. 注意到施瓦西系是超曲面正交系，可知即使超曲面正交系

---

① 邝志全等[Kuang and Liang(1993)]证明:只有静态时空的静态参考系才可用大步雷达法获得准确的钟同步. 可见大步雷达法的适用面窄得多，它不但对参考系而且对时空本身提出了苛刻的要求.

的标准钟也未必可以同步. 于是又提出以下两个定义(其要求分别低于定义 1 和 2).

定义 3　参考系 $\mathscr{R}$ 叫**坐标时可同步的**, 若 M 上有光滑函数 t 及 $h\,(>0)$ 使

$$Z_a = -h(\mathrm{d}t)_a\,, \tag{14-3-12}$$

其中 t 称为时间函数.

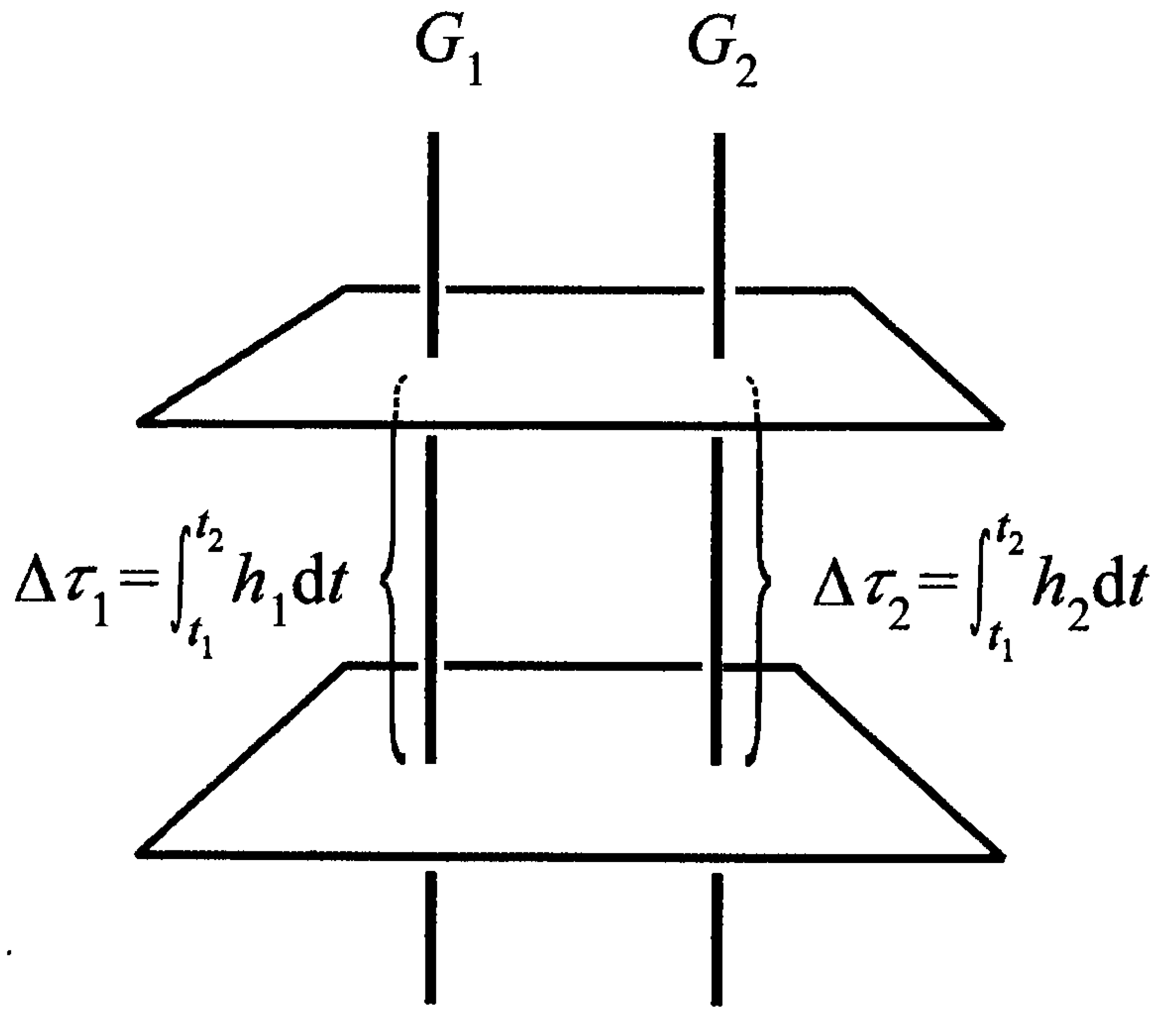


图 14-12　满足定义 3 时, 同时面间坐标时间相等而固有时间未必相等

由式(14-3-12)可知 $\mathrm{d}\boldsymbol{Z} = -\,\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}t$, 故 $\boldsymbol{Z} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{Z} = 0$, 即 $Z_{[c}\nabla_b Z_{a]} = 0$, 可见满足式(14-3-12)的 $\mathscr{R}$ 也是超曲面正交系, 且任一等 t 面都与任一观者世界线正交, 而

$$-1 = Z^a Z_a = -hZ^a(\mathrm{d}t)_a = -h\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a(\mathrm{d}t)_a = -h\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

其中 τ 为所论观者的固有时,故

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{h}. \tag{14-3-13}$$

注意到 $h>0$, 由上式可知 t 是 τ 的常增函数, 故每一观者世界线与每一等 t 面至多只交一次(我们只讨论相交正好一次的情况). 因为任意两个观者的世界线介于任意两个等 t 面之间的两段有相同的 Δt (即 $\Delta t_1 = \Delta t_2$), 由式(14-3-13)可知一般来说这两段的固有时间不等, 即 $\Delta\tau_1 \neq \Delta\tau_2$ (图 14-12). 可见正交超曲面只是等 t 面而非等 τ 面. 每一正交超曲面 Σ 仍代表某一时刻的空间, Σ 仍叫 $\mathscr{R}$ 的同时面, 只是所同的"时"不是固有时而是时间函数 t 代表的"时". 不妨把 t 也解释为观者的钟的读数, 只不过该钟的走时率是标准钟的 h^{-1} 倍(h 可以是 τ 的函数). 研究这类问题的最方便的坐标系是以 $\mathscr{R}$ 的观者世界线为时间坐标线、以 t 为时间坐标的共动系. 因此时间函数 t 也常称为**坐标时**(coordinate time), 相应的钟则称为**坐标钟**(coordinate clock). $\mathscr{R}$ 的超曲面正交性导致该坐标系的时轴正交性, 即 $g_{0i} = 0\ (i = 1,2,3)$. 只要所有观者在其世界线与某一同时面 Σ_0 相交时把自己的坐标钟调至指零, 则它们与任意同时面 Σ_t 相交时的坐标钟读数必相同, 所以说 $\mathscr{R}$ 是坐标时可同步的. 同步仍

可用小步雷达法操作，只须作如下修改：观者 A 在 τ_1 时向 B 发光，在 τ_2 时收到反射光，一方面把自己的坐标钟调至在 a 时指为某商定好的读数 τ_0 [a 点由固有时 $(\tau_1+\tau_2)/2$ 确定]，另一方面，通知 B 在收到光时(时刻 b)把坐标钟也调至读数为 τ_0. 由计算可知施瓦西参考系有

$$Z_a = -(1-2M/r)^{1/2}\,(\mathrm{d}t)_a\,, \tag{14-3-14}$$

可见施瓦西参考系满足定义 3，且 $h=(1-2M/r)^{1/2}$ 是 r 的函数. 施瓦西坐标系正是施瓦西参考系的时轴正交共动坐标系. 其实，不难证明(习题)所有静态参考系都满足定义 3.

定义 4 参考系 $\mathscr{R}$ 叫**局域坐标时可同步的**(locally proper time synchronizable)，若

$$\boldsymbol{Z}\wedge \mathrm{d}\boldsymbol{Z}=0\,. \tag{14-3-15}$$

前已指出由式(14-3-12)可得(14-3-15)，故满足定义 3 的 $\mathscr{R}$ 必满足定义 4，但反之不然. 式(14-3-15)就是式(14-1-27)，可见满足定义 4 的 $\mathscr{R}$ 必超曲面正交，但不保证每一观者世界线与正交面至多只交一次. 若只考虑时空中的开域 U，其中 $\mathscr{R}$ 的每一观者与正交面至多只交一次，则在 U 内存在 t 及 $h(>0)$ 使 $Z_a=-h(\mathrm{d}t)_a$，前面关于坐标钟同步的定义和操作在 U 中同样适用，因此满足定义 4 的 $\mathscr{R}$ 称为局域坐标时可同步参考系.

以上四个定义来自 Sachs and Wu(1977)的 2.3, 5.3. 定义 4 是可同步参考系的四个要求中最低的一个，等价于只要求 $\mathscr{R}$ 是超曲面正交系. 非超曲面正交参考系当然也有共动坐标系，但却没有时轴正交的共动坐标系，即不存在 $g_{0i}=0\ (i=1,2,3)$ 的共动坐标系. 朗道，栗弗席兹(1959)(中译本 §10-4)曾用非几何语言对超曲面正交系的可同步性和非超曲面正交系的不可同步性作过讨论，如果把它与文献 Sachs and Wu(1977)2.3, 5.3 作一对比，就会对用几何语言讨论相对论问题的清晰性、准确性、深刻性和优雅性产生叹为观止的印象.

下面就钟同步问题作一小结和述评.

1. 对闵氏时空的惯性参考系，因为早已约定正交超曲面为同时面，故钟同步可定义为各标准钟在同一正交面上读数相同. 又因为已证明用雷达法确定的同时线与世界线正交，故雷达法可被视为实现钟同步的(理论上可行的)操作手段.

2. 推广到任意时空的任意参考系时，原则上可有两种做法，简介如下. (a)继承闵氏时空惯性系的做法，仍约定正交面为同时面(本书至今一直如此). 如果仍把钟同步定义为“各钟在同一正交面上读数相等”，那么，由于非超曲面正交系根本没有正交面，钟同步定义本身失去意义，这时的准确提法不是“非超曲面正交系不能实现钟同步”，而是“可否实现钟同步这一问题对非超曲面正交系而言没有意义”，

因为问题中涉及的一个词汇"钟同步"现在没有意义. 然而, 如果把钟同步定义改为"各钟在该系的任一同时线(对应于一个单参观者族)上读数相等", 则对任何参考系都可提出"能否实现钟同步"的问题. 对非超曲面正交参考系, 答案是"不能"; 对超曲面正交系, 总的答案是"能", 但要分为 4 个层次, 由强到弱的排列是: 固有时可同步; 局域固有时可同步; 坐标时可同步; 局域坐标时可同步, 分别如正文所述. (b)放弃同时面与世界线正交的要求, 允许斜交的 3+1 分解(详见小节 14.4.2). 钟同步定义为"各钟在同一同时面上读数相等(但同时面未必是正交面)", 则参考系总是坐标时可同步的. 雷达法此时不再是实现钟同步的操作手段.

14.3.4　Z 类参考系

虽然非超曲面正交参考系连局域坐标时同步都做不到, 但仍不排除如下可能: 可定义这样的坐标时函数 t, 使任意两个观者介于任意两条同时线之间的坐标时刻之差相等(见图 14-13). 对这种情况可作如下物理解释: 尽管 $\mathscr{R}$ 系在钟的读数上无法做到同步, 但所有观者的坐标钟的走时率(钟速)却相同. 赵峥教授最先指出这种可能性, 并把此性质称为坐标钟"钟速同步的传递性" [赵峥(1991)]. 高思杰等 [Gao, Kuang and Liang(1998)]对此又用几何语言作了进一步研究, 并把具有这种性质的参考系称为 Z 类参考系. 下面介绍该文的主要内容.

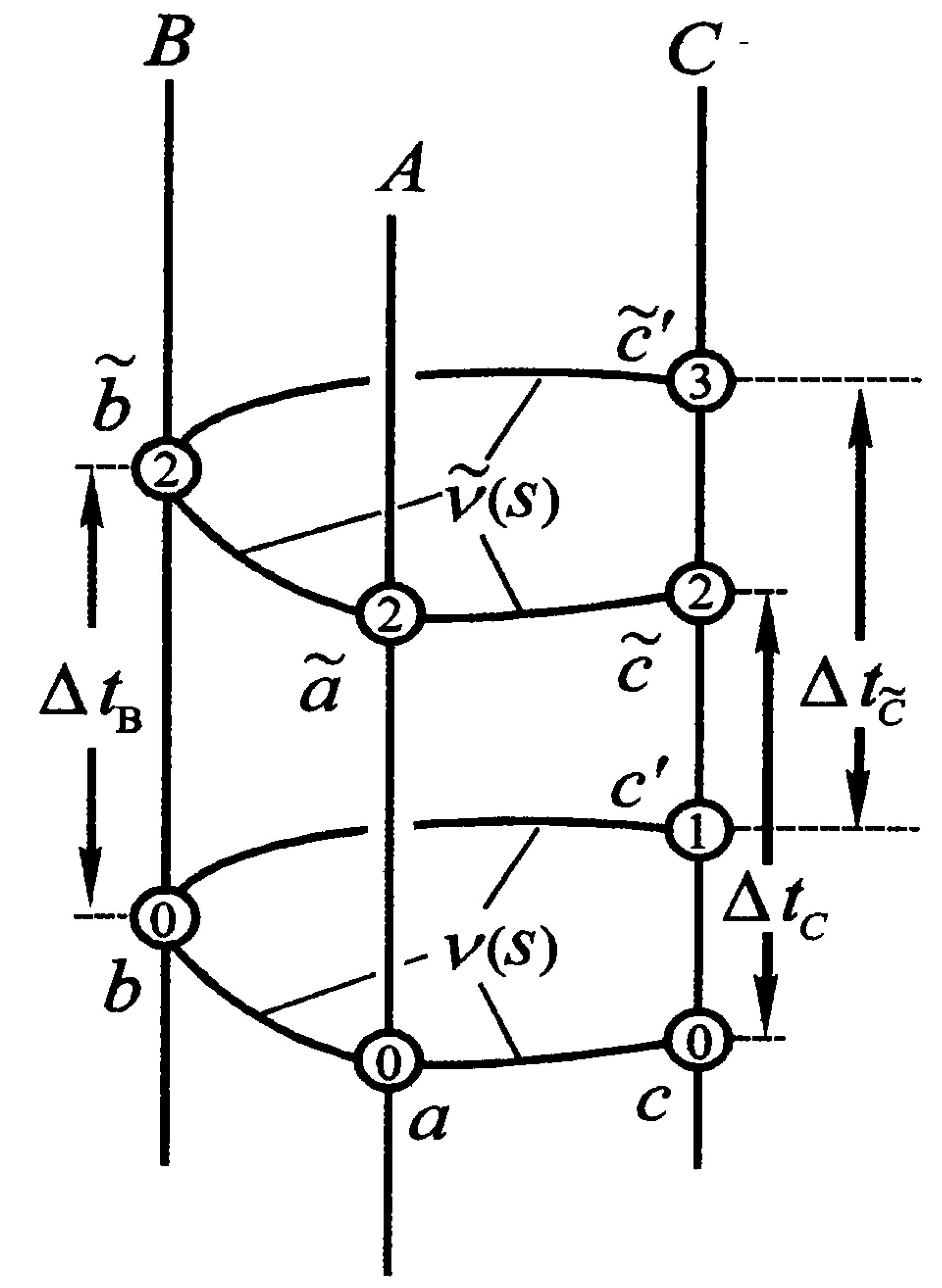


图 14-13　$\Delta t_B = \Delta t_C = \Delta t_{\tilde{C}}$ 表明 B, C 两钟有相同的钟速

定义 5　$\mathscr{R}$ 称为 **Z 类参考系**, 若 M 上存在满足如下条件的光滑函数 t : (a)每一观者世界线上的 t 是固有时 τ. 的单调函数; (b)设 v. 和 $\tilde{v}$ 是任一单参观者族的任意两条同时线, A, B 是族内任意两个与 v. 和 $\tilde{v}$ 依次相交于 a, b 和 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ 的观者(图 14-14), $\Delta t_A \equiv t(\tilde{a}) - t(a)$, $\Delta t_B \equiv t(\tilde{b}) - t(b)$, 则 $\Delta t_A = \Delta t_B$.

命题 14-3-2　$\mathscr{R}$ 是 Z 类参考系等价于以下 4 条件之任一:

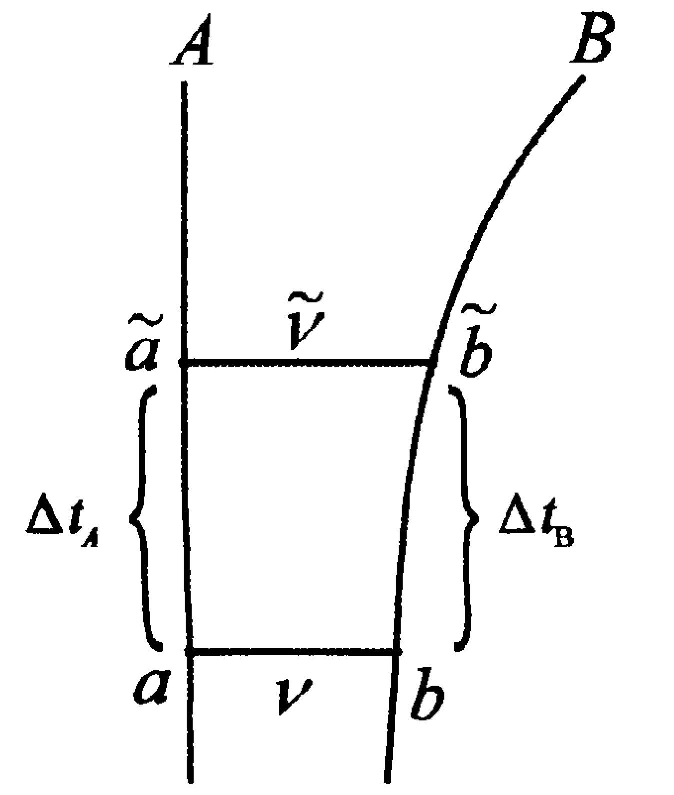


图 14-14　定义 5 用图. v 和 v' 是观者 A,B 所在单参族的两条同时线

(a)M 上存在光滑函数 $f>0$ 使

$$\mathscr{L}_\xi w^a = 0,$$

其中 w^a 是 $\mathscr{R}$ 内任一观者的任一邻居, $\xi^a \equiv fZ^a$ (Z^a 是观者 4 速).

(b)M 上存在光滑函数 $f>0$ 使

$$H^a\nabla_a \ln f = H^a A_a,$$

其中 A^a 是观者的 4 加速, H^a 是满足 $g_{ab}H^aZ^b = 0$ 的任一矢量场.

(c)$\forall p \in M$, $\exists$ 坐标域含 p 的共动坐标系 $\{t, x^i\}$ 使

$$\partial(g_{0i}/g_{00})/\partial t = 0.$$

(d)存在共形变换把 $\mathscr{R}$ 的观者世界线变为测地线.

证明　见 Gao, Kuang and Liang(1998). □

注 1　①赵峥的原始文献[赵峥(1991)]已把式(14-3-18)作为充要条件给出. ②满足定义 1 至 4 之任一的参考系都满足定义 5, 但满足定义 5 的参考系可以不满足定义 1 至 4 之任一(例如爱因斯坦转盘系和 Kerr-Newman 时空的 Boyer-Lindquist 参考系). ③稳态参考系有 $A_a = \nabla_a \ln f$, 满足式(14-3-17), 故稳态系必为 Z 类系. 进一步, 凡满足 $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ 的系都(至少局域地)是 Z 类系.

§ 14.4　时空的 3+1 分解

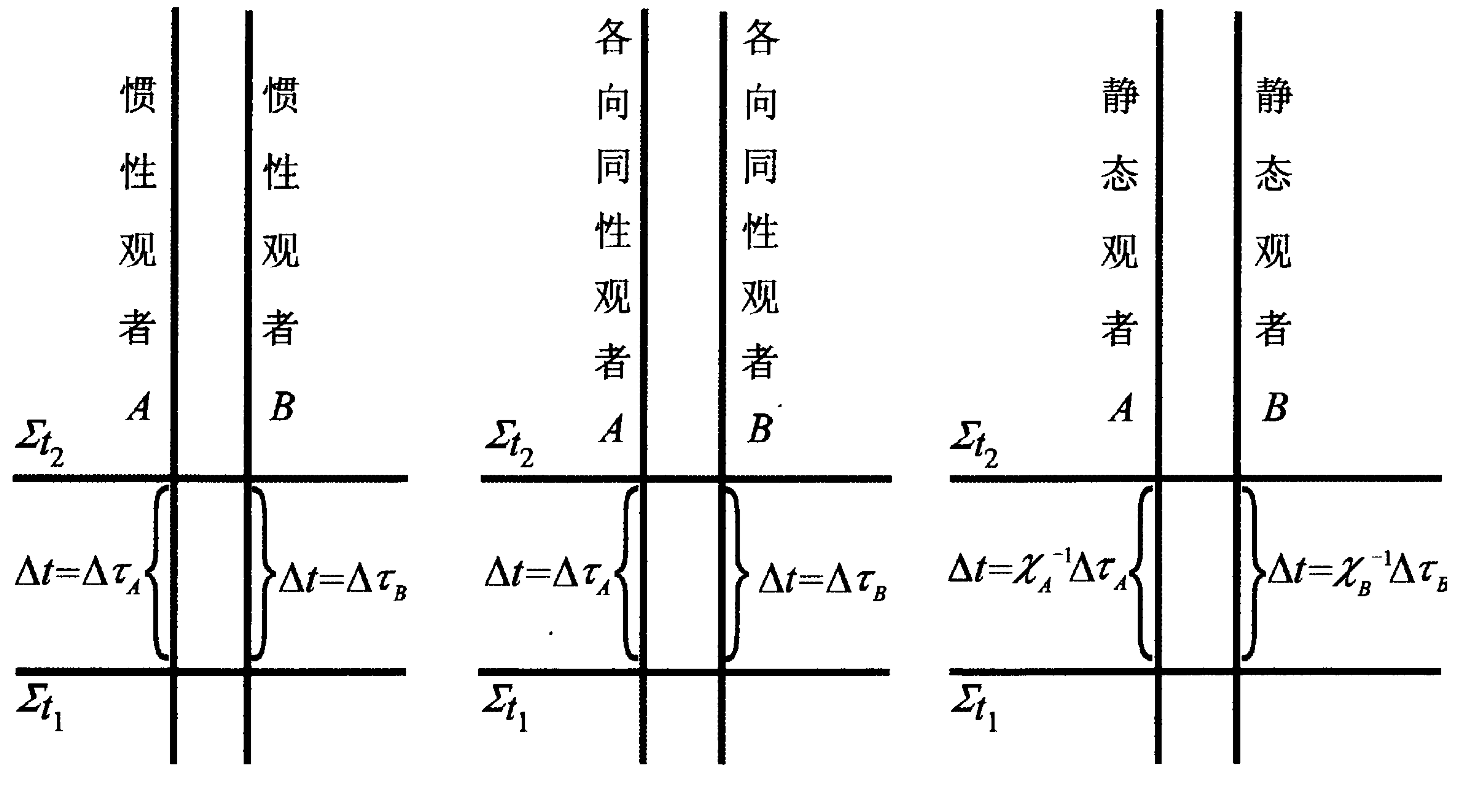
14.4.1　空间和时间

在学习非相对论物理学时, 人们习惯于默认时间和空间是不言自明的概念, 而且事件的同时性是绝对的. 相对论从一开始就破除了同时性的绝对观念, 并逐渐认识到只有时空才是与一切人为因素无关的、绝对的物理实在, 而空间和时间概念则只在选定参考系并对时空做“3+1分解”后才获得意义, 因而是相对的. 数学家闵可夫斯基(Minkowski)最先认识到空间和时间概念的人为性和时空概念的实在性, 他早在1908 年就曾指出: “从今以后, 空间和时间本身注定要消失在完全的阴影之中, 只有它们的某种结合才保持为独立的实体.” Penrose 则说: “恐怕可以说, 相对论最重要的一课是空间和时间不能作为彼此独立的概念来考虑, 它们必须结合起来以给出一个关于各种现象的 4 维图象: 一种用时空语言的描述.” Synge 在一篇介绍广义相对论的文章[Synge(1964)]中写道: “我们和事件打交道. …… 所有事件形成一个 4 维连续体, 称为**时空**. 这是个单独的概念, 不是空间和时间这两个分离

概念的混合. ……我们要坚决拒绝把空间和时间当作早有意义的词汇来使用. 如果你要在某个意义上使用它们, 你必须事先对该意义作出解释.” 这并非不允许使用空间和时间概念, 而是要求在使用前对其意义作出明确解释. 例如, 第 10 章讨论宇宙论时一开始就用 Robertson-Walker(RW)参考系把宇宙时空作了 3+1 分解, 因此空间和时间有明确含义: 空间指均匀面(见 §10.1 定义 1), 时间指宇宙时(见小节 10.1.3 首段), “一个空间点” 指 RW 参考系内的一条观者世界线. 另一个例子是第 9 章的水星近日点进动和星光偏折问题. 讨论中多处用到 3 维语言, 这是因为早已选定施瓦西参考系, 并默认该系的每一正交超曲面代表某一时刻的空间, 该系的每一观者世界线代表一个空间点. 反之, 以钟同步问题的讨论为例, 在没有选定参考系的情况下谈论“某一空间点”就是意义含糊的, 因为每一参考系的每一观者世界线都代表一个“空间点”, 不同参考系有不同的空间观. [可惜这种做法曾经颇为流行, 例如, 见朗道, 栗弗席兹(1959)(中译本 §10-4).] 与此相反, 由于时空的绝对性, “某一时空点” 则意义明确, 不涉及任何参考系.

14.4.2 时空的3+1分解

要对时空 (M, g_{ab}) 作 3+1 分解首先要求 M 可用单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 分层. 就是说, 要求存在光滑函数(称为整体时间函数) $t: M \to \mathbb{R}$ 使每一等 t 面 Σ_t 都是类空超曲面. 这样的时空很多, 例如, (a)闵氏时空的每一惯性参考系的全体等 t 面构成单参类空超曲面族, 该系的惯性坐标时 t 可充当时间函数; (b)RW 宇宙时空的全体均匀面构成单参类空超曲面族, 宇宙时 t 可充当时间函数; (c)施瓦西时空(指最大延拓中的渐近平直区 A)的全体等 t 面构成单参类空超曲面族, 施瓦西时间坐标 t 可充当时间函数. 此外, 要作 3+1 分解还需选定一个参考系. 以上三个时空的通常选法是: 对闵氏时空选 t 所在的惯性参考系; 对 RW 时空选各向同性参考系; 对施瓦西时空选静态参考系. 上述 3 例的每一例涉及的参考系的所有观者世界线都同所有 Σ_t 正交. 在例(a), (b)中, Σ_t 的 t 还等于观者的固有时[见图 14-15(a)和(b)]; 但例(c)则不然[见图 14-15(c)]. 一般地说, 由于 Σ_t 为类空超曲面且任一 $p \in M$ 有唯一的 Σ_t 经过, Σ_t 的(指向未来)单位法矢场 n^a 构成 M 上的类时矢量场. 以 n^a 的积分曲线作为观者世界线定义参考系 $\mathscr{R}$, 则该系所有观者世界线处处同 Σ_t 正交. 上述三例都是这种参考系的特例. 然而, 为了更具普遍性, 应把条件放宽, 即放弃观者世界线与 Σ_t 的正交性要求. 设 t^a 是满足 $t^a \nabla_a t = 1$ 的任一指向未来的类时矢量场, 则 t 可充当 t^a 的积分曲线的参数. 每条积分曲线在改用线长 τ 为参数后就可看作一个观者的世界线. 单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 同所有这些观者世界线相结合就决定了时空的一个 3+1 分解(图 14-16). 矢量场 t^a 可分解为正交于 Σ_t 的分量和切于 Σ_t 的分量. 由于 n^a 是 Σ_t 的法矢场, 必存在标量场 N 使前一分量等于 Nn^a(图 14-17). 以



(a) 闵氏时空　　(b) Robertson-Walker 时空　　(c) 施瓦西时空

图 14-15　三个典型时空的 3+1 分解. 观者世界线都与等 t 面正交. 任意两个等 t 面间的任意两个观者的世界线长在(a), (b)中相等而在(c)中一般不等

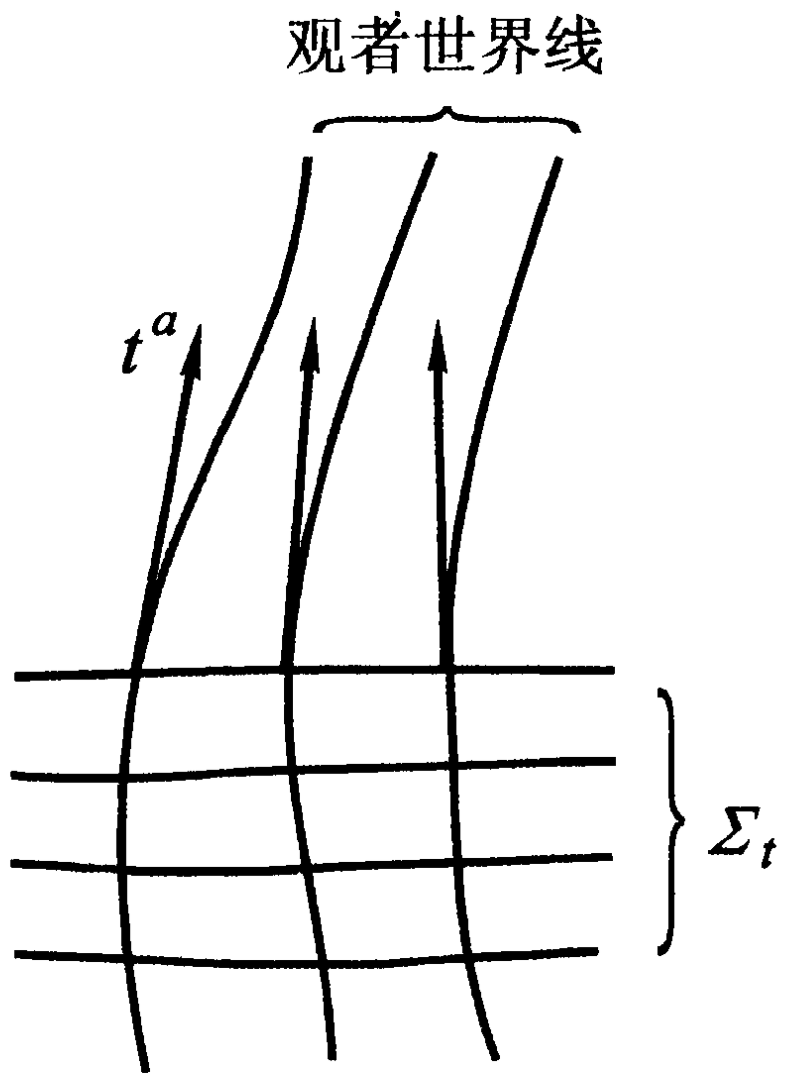


图 14-16　分层 $\{\Sigma_t\}$ 与 t^a 结合定义一个 3+1 分解

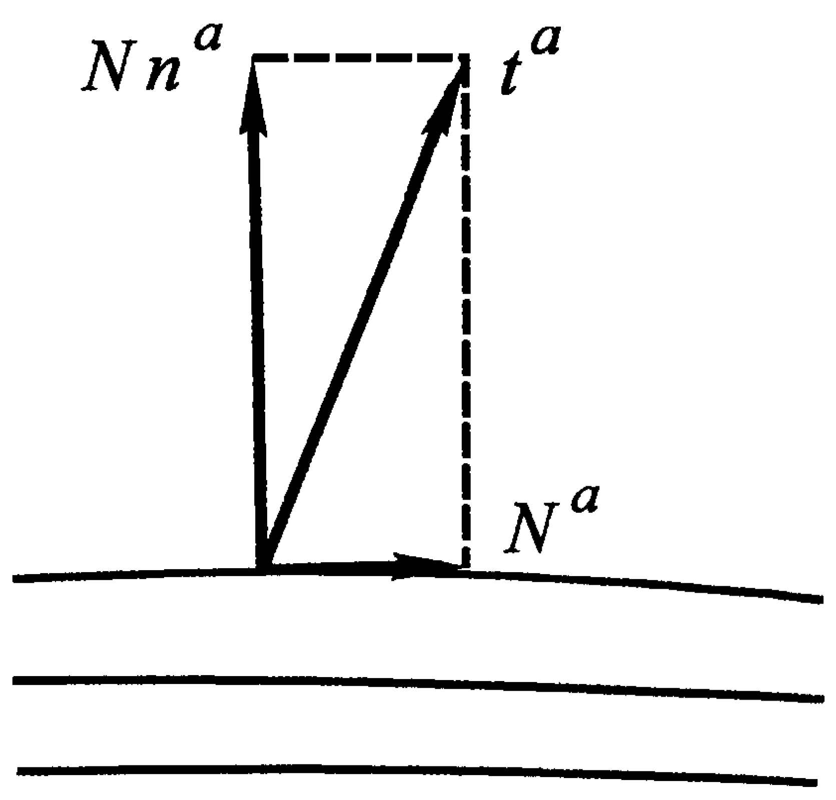


图 14-17　时移函数 N 和位移矢量 N^a

N^a 代表后一分量, 则

$$t^a = Nn^a + N^a . \tag{14-4-1}$$

上式中的标量场 N 和空间矢量场 N^a 分别称为**时移函数**(lapse function)和**位移矢量场**(shift vector field). $\nabla_a t$ 和 n_a 都是 Σ_t 的法余矢, 两者只能差到一个乘子. 由式(14-4-1)不难证明它就是 $-N$, 故

$$n_a = -N\nabla_a t . \tag{14-4-2}$$

上式表明时移函数 N 只取决于分层而与 t^a 的选择无关. 反之, 位移矢量 N^a 则由于 t^a 选择的自由性而存在相当程度的任意性. 现在引入与上述参考系适配的坐标系. 设 $\{x^i\}$ 是 Σ_0 上的局域坐标系, 用观者世界线把这三个坐标携带出去, 即同一世界

线上各点定义相同的 x^i，再选时间函数 t 作为时间(第零)坐标，便得 4 维坐标系 $\{x^0 \equiv t,\ x^i\}$，它是该参考系的一个共动坐标系，其第 0 坐标基矢 $(\partial/\partial t)^a$ 切于 t^a 的积分曲线，即 $(\partial/\partial t)^a$ 平行于 t^a，再由 $1 = (\partial/\partial t)^a (\mathrm{d}t)_a = (\partial/\partial t)^a \nabla_a t$ 及 $t^a \nabla_a t = 1$ 便知 $(\partial/\partial t)^a = t^a$，可见 t^a 是上述共动坐标系的第 0 坐标基矢场. $\nabla_a t$ 为法余矢保证

$$N^0 = N^a (\mathrm{d}t)_a = N^a \nabla_a t = 0 .$$

令 $N^i \equiv N^a (\mathrm{d}x^i)_a$, $N_a \equiv g_{ab} N^b$, $N_i \equiv N_a (\partial/\partial x^i)^a$，则度规 g_{ab} 在这一坐标系的分量为

$$g_{0i} = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = g_{ab}(N n^a + N^a)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = N_b \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = N_i, \qquad i = 1,2,3 , \tag{14-4-3}$$

再令 $g_{ij} \equiv g_{ab} (\partial/\partial x^i)^a (\partial/\partial x^j)^b$，则 g_{ab} 在上述共动坐标系的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = (-N^2 + N^i N_i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i \mathrm{d}t \mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j . \tag{14-4-4}$$

又因 $N_i = N_a (\partial/\partial x^i)^a = g_{ab} N^b (\partial/\partial x^i)^a = g_{ij} N^j$，故上式等价于

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2 \mathrm{d}t^2 + g_{ij}(N^i \mathrm{d}t + \mathrm{d}x^i)(N^j \mathrm{d}t + \mathrm{d}x^j) . \tag{14-4-4'}$$

注 1　$N^0 = 0$ 导致 $N^a = N^i (\partial/\partial x^i)^a$，但请特别注意 $N_a \neq N_i (\mathrm{d}x^i)_a$ (除非 $N^a = 0$)，因为

$$N_a \equiv g_{ab} N^b = g_{ab} N^j (\partial/\partial x^j)^b = N^j g_{j\mu} (\mathrm{d}x^\mu)_a$$

$$= N^j g_{ji} (\mathrm{d}x^i)_a + N^j g_{j0} (\mathrm{d}t)_a = N_i (\mathrm{d}x^i)_a + N^i N_i (\mathrm{d}t)_a, \tag{14-4-5}$$

其中第三步用到式(2-6-10a)，第五步用到式(14-4-3).

以上就是借助于人为指定因素(包括单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 和观者世界线)对时空所作的 3 + 1 分解. 闵氏时空用惯性参考系和 RW 时空用各向同性参考系所作的分解是最简单的例子，它们有两个共同的简单性：①观者世界线处处与 Σ_t 正交，因而位移矢量场 $N^a = 0$；②在观者世界线上时间函数 t 与固有时 τ 的关系为 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$，故 $t^a = (\partial/\partial t)^a = (\partial/\partial \tau)^a$ 是单位切矢，即 t^a 等于观者 4 速，因而时移函数 $N = 1$. 施瓦西时空的静态参考系只有简单性①而无简单性②：在静态观者世界线上时间函数(施瓦西时间坐标) t 与观者固有时 τ 的关系为 $\mathrm{d}t = (-g_{00})^{-1/2}\mathrm{d}\tau \neq \mathrm{d}\tau$，因而 $t^a \equiv (\partial/\partial t)^a$ 不是单位切矢，不等于观者 4 速. 这使得施瓦西时空的上述分解只有 $N^a = 0$ 而无 $N = 1$. 简单性①，②都不具备的情况当然也存在，Kerr-Newman 时空(指可用 Boyer-Lindquist 坐标系覆盖的部分)用 BL 坐标系的分解就是一例. 在此例

中，BL 系的时间坐标 t 起到时间函数的作用，对比线元式(13-2-1)与(14-4-4)可知 $N^1=N^2=0$ 而 $N^3\neq 0$ (故 $N^a\neq 0$)以及 $N\neq 1$． $N^a\neq 0$ 表明矢量场 $t^a\equiv(\partial/\partial t)^a$ 与 Σ_t 不正交，即其积分曲线与 Σ_t 的法矢场 n^a 的积分曲线不重合. 如果改用 n^a 的积分曲线作为观者世界线重新定义矢量场 t^a (记作 t'^a)，则所得 3+1 分解有 $N'^a=0$，相应的线元式就是式(13-2-11)，特点是没有时空交叉项. 这两种 3+1 分解有相同的时间函数[由式(13-2-9)可知 $t'=t$]，因而有相同的单参族 $\{\Sigma_t\}$，区别在于两者以不同的类时矢量场(t^a 和 t'^a)的积分曲线作为观者世界线. 然而，正如选读 13-2-1 前所指出的，$(\partial/\partial t)^a$ 是 Killing 矢量场而 $(\partial/\partial t')^a$ 不是，所以式(13-2-11)隐藏了度规的稳态性. 可见这种分解法的简单性($N'^a=0$)是以牺牲明显表现时空稳态性为代价的. 给定时空后，坐标系的选择十分任意，然而选择能明显表现时空内禀对称性的坐标系往往可简化问题，因而受到青睐. 例如，在 RW 时空中虽然也允许不选各向同性坐标系(RW 系)，然而这种做法使时空的空间均匀性和各向同性性不能明显表出，很不方便. 回到 KN 时空，由于 $t^a\equiv(\partial/\partial t)^a$ 是类时 Killing 矢量场，把它的积分曲线(重参数化后)选作观者世界线正是充分表现时空对称性的做法. 因此，虽然这种分解存在 $N^a\neq 0$ 的缺点，在多数情况下人们仍愿意采用.

总之，时空的 3+1 分解依赖于两个人为(任意)因素. 首先，人为地选择一个单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 以便给时空分层. 一般愿意采用能明显反映时空对称性的分层方式，例如，对 RW 时空选用均匀面族，对闵氏时空选用任一惯性系的等 t 面族. 其次，在 $\{\Sigma_t\}$ 选定后，还要选择一个类时矢量场 t^a 并以其积分曲线(重参数化)作为观者世界线. 一般也愿意采用能明显反映时空对称性的矢量场. 例如，在 RW 时空中选定均匀面族为 $\{\Sigma_t\}$ 后，人们选择各向同性观者的世界线作为观者世界线；在 KN 时空中选定 BL 坐标系的等 t 面族为 $\{\Sigma_t\}$ 后，人们选择类时 Killing 矢量场的积分曲线为观者世界线. 对闵氏时空，在选定某一惯性系的等 t 面族为 $\{\Sigma_t\}$ 后，自然选该系的全体 t 坐标曲线为观者世界线，这是最简单的 3+1 分解，其中 $N^a=0$，$N=1$(图 14-18)，不妨称为**标准分解**. 由标准分解得到的空间和时间概念正是人们在用 3 维语言讨论狭义相对论时所用的空间和时间. 任何人开始学习狭义相对论时所用的空间和时间概念都是对闵氏时空作标准分解的结果，虽然他很可能尚未听过闵氏时空一词，遑论“3+1 分解”.

现在出现一个问题. 在 $N^a\neq 0$ 的情况下(不妨用 KN 时空为例帮助想象)，观者世界线与 Σ_t 并不正交(图 14-19). 设 $p\in\Sigma_t$，w^a 是 p 点切于 Σ_t 的矢量. 一方面，由于 Σ_t 代表 t 时刻的空间，切于 Σ_t 的矢量 w^a 应称为空间矢量；另一方面，由于 w^a 与观者的 4 速 Z^a 并不正交，按照早已习惯的想法，w^a 对观者来说又不是空间矢量. 为解决这一两难问题，应注意“只有与观者 4 速正交的矢量才是空间矢量”这一习

惯想法其实也只是一种人为约定(虽然是最方便的约定). 本书第一次介绍这种想法是在§6.3 注 2 后第二段之③. 论述中用到惯性系 $\mathscr{R}$ 的观者 4 速与等 t 面正交的事实. 就是说, 建立上述习惯想法的前提是图 14-18 那样的 3+1 分解. 然而, 原则上没有理由不允许图 14-19 的非正交分解. 既然坚持用 Σ_t 代表 t 时刻的空间, 就得承认切于 Σ_t 的矢量 w^a 为空间矢量, 虽然它同观者 4 速并不正交. 回到刚才提及的§6.3 的那段, 即 "你, 作为观者, ……, 在时刻 p (你的世界线 G 的一点)能感到的所有空间矢量的集合 W 当然是 3 维的, 而 p 作为 $\mathbb{R}^4$ 的一点, 其切空间 V_p 是 4 维的. " 于是提出了 W 该与 V_p 的哪个 3 维子空间对应(认同)的问题. 由于第 6 章采用图 14-18 的分解, 当时的答案自然是 W 对应于 V_p 中与观者 4 速 Z^a 正交的 3 维子空间. 然而, 如果一定要采用非正交分解, 而且坚持认为每个 Σ_t 代表一个时刻的空间, W 就只能对应于 V_p 中与 Σ_t 相切的所有矢量构成的 3 维子空间. 这一结论适用于任一 $N^a \neq 0$ 的分解(图 14-19). 这种做法在原则上没有不允许之处, 但因为前面早已习

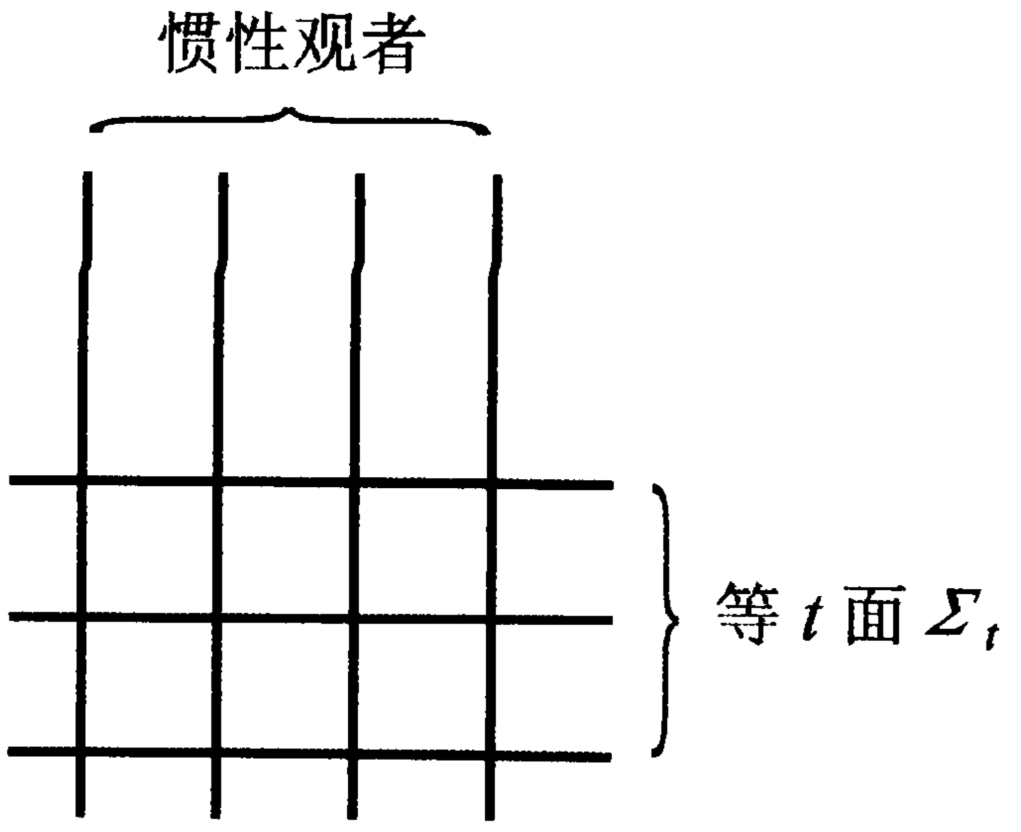


图 14-18　闵氏时空的标准分解

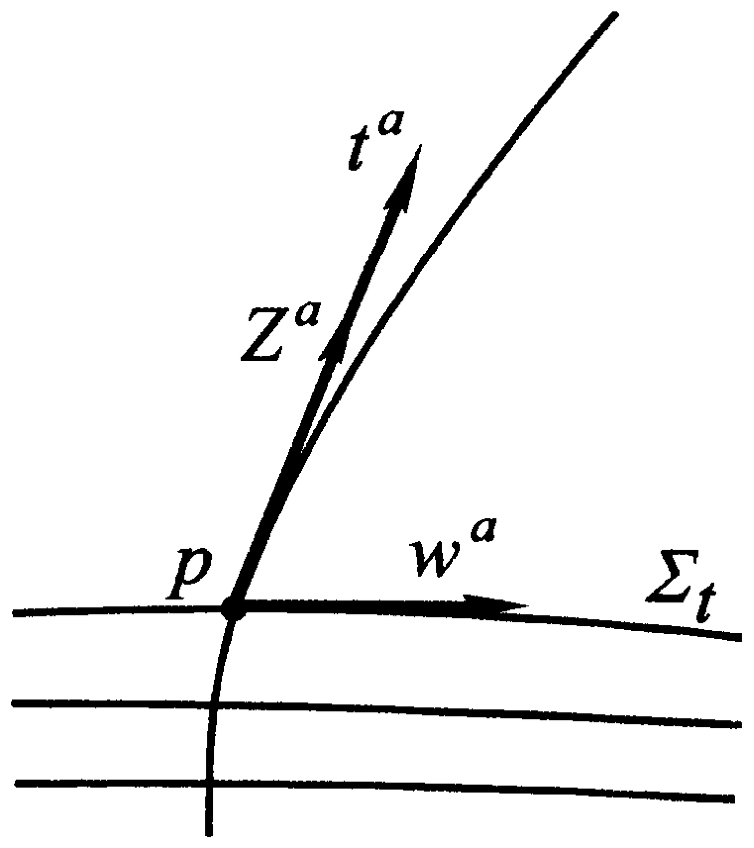


图 14-19　非正交分解

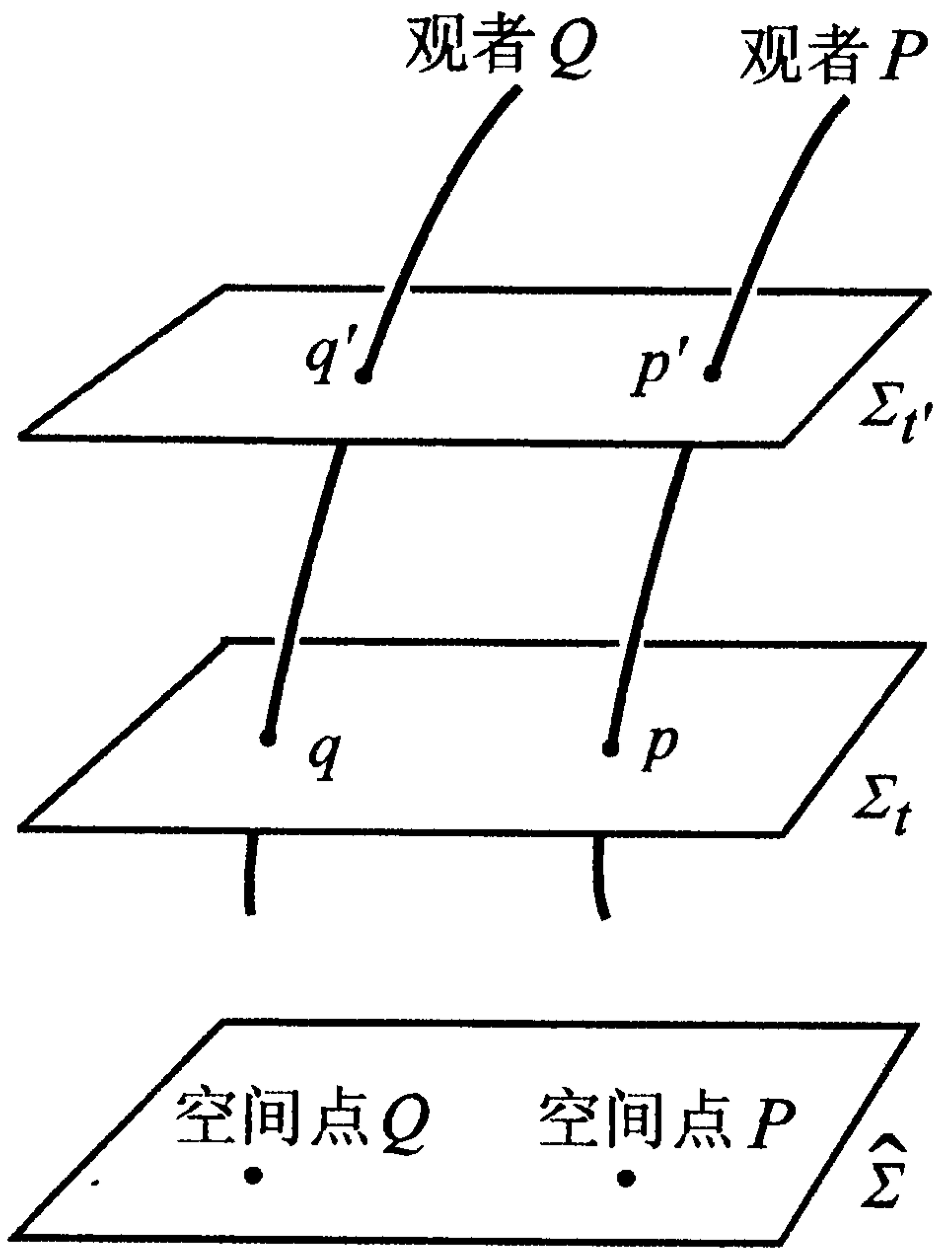


图 14-20　以观者世界线为元素构成的集合 $\hat{\Sigma}$ 叫空间. 它也可看作用观者世界线把各张 Σ_t 认同的结果

惯于把 W 认同为 V_p 与观者 4 速 Z^a 正交的 3 维子空间(一提到空间矢量就想到它同 Z^a 正交),在采用 $N^a \neq 0$ 的分解时对于许多早已熟悉的、由"空间矢量同 Z^a 正交"导出的定义和结论就应重新审视.例如,用 $E_a := F_{ab}Z^b$ 和 $B_a := -{}^*F_{ab}Z^b$ 定义的 E^a 和 B^a 对非正交分解不再是空间矢量,因为它们与 Z^a (而非 n^a)正交.对 Kerr-Newman 时空(更一般地,对稳态轴对称时空),定义 $\vec{E}, \vec{B}$ 等空间矢量场的一种方便做法是借用局域非转动观者(见小节13.4.4).注意到这些观者世界线与等 t 面的正交性,可知他们的 4 速也就是 Σ_t 的单位法矢 n^a .再配之以用局域非转动观者定义的电荷和电流密度,便可导出 3 维形式的麦氏方程(与平直时空惯性系的麦氏方程形式上只有少量差别),进而可讨论弯曲空间(含黑洞)的电动力学,详见 Thorne,Price,and Macdonald(1986).

最后对相对论的空间、时间概念作一概括性介绍并与牛顿理论的相应概念作一比较. 时空 (M, g_{ab}) 是绝对的. 选定一个分层 $\{\Sigma_t\}$ 和一个类时矢量场 t^a 可对时空作 $3+1$ 分解. t^a 的每一积分曲线(重参数化后)代表一个观者的世界线. 把每一观者世界线作为一个元素得到的集合 $\hat{\Sigma}$ 是一个 3 维流形(理由见选读 14-4-1, 小节 14.2.3 末的 $\hat{\Sigma}$ 就是一例), 是广义相对论中与牛顿空间最为类似的对象, 称为**空间**(space). [而分层中的每一类空超曲面 Σ_t 只能称为"时刻 t 的空间". 把各个时刻的空间 Σ_t 叠放在一起并保证每一观者世界线与各张 Σ_t 的交点(如图 14-20 中的 p, p')重合, 便得空间 $\hat{\Sigma}$.] 每一观者世界线则可称为一个**空间点**. 这一 3 维空间 $\hat{\Sigma}$ 可理解为 $3+1$ 分解中的"3". 把分层中的每一类空超曲面 Σ_t 看作一个元素得到的集合 $\mathscr{T} \equiv \{\Sigma_t\}$ 是个 1 维流形, 称为与所选 $3+1$ 分解相应的**时间**, 每一层 Σ_t 可称为一个时刻. 这个 1 维集合 $\mathscr{T}$ 可理解为 $3+1$ 分解中的"1", 它是广义相对论中与牛顿时间最为类似的对象, 区别在于, 牛顿力学中的分层是绝对的("只有一副扑克牌", 见小节 6.1.6), 而相对论的分层是相对的. (存在无数种分层方式, 即"无数副扑克牌".) 就是说, 牛顿的同时性是绝对的, 相对论的同时性是相对的. 不过应该注意, 在牛顿力学的 4 维表述(嘉当-牛顿理论, 见小节 6.1.6)中, 把参考系的每一观者世界线看作一个元素得到的 3 维流形 $\hat{\Sigma}$ 就是牛顿空间, 由于牛顿力学中参考系也可任意选择, 因此, 与相对论的空间类似, 嘉当-牛顿时空中的空间也是相对的(虽然牛顿本人在哲学上认为空间绝对)[本段可参阅 Kuchar(1988)]. 至此, 建议读者再次阅读并仔细品味本小节开头所引的闵可夫斯基等三人的原话, 进而达到如下认识: 时间和空间概念出现在 $3+1$ 分解之后而不是之前. 分解前, 我们有的只是时空及其中的各种物理客体, 例如电磁场(指张量场 F_{ab})和尺子(指其 2 维世界面). 它们不依赖于任何人为因素, 因此称为绝对的. 我们还不能谈及时间和空间, 不能谈及电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$, 也不能谈及尺长. 所有这些只在选定一个 $3+1$ 分解后才变得有意义. 分解的选定是人为的, 因此时间、空间、电场、磁场以及尺长等都是相对的概念.

你也许会说："我从来没听说过什么 3+1 分解, 但我从小就知道什么是时间、空间和尺长."事实上, 每个人都生活在近似闵氏的时空中, 他从小就形成的时间和空间观念虽然是牛顿时间和空间, 但其实是闵氏时空标准分解所得时间和空间在低速下的表现(虽然他并不自觉). 这种认识对他学习不明显涉及相对论的物理学不但无害, 而且必需. 然而, 如果他学习相对论(特别是广义相对论), 他就要逐渐建立时空概念, 这是每个学相对论的人都要经历的一种认识顺序. (先有时间和空间概念, 后有时空概念.) 随着学习的深入, 他应该从理性上对"先有什么后有什么"以及"什么是绝对的, 什么是相对的"这样一些问题取得一个全新的认识, 从而悟出"时空才是最基本的、不含任何人为因素的概念, 而我原先认为最自然、最清楚的时间和空间概念原来竟是对时空所作 3+1 分解的结果, 是相对的. 不选定 3+1 分解就谈时间和空间其实是没有意义的."

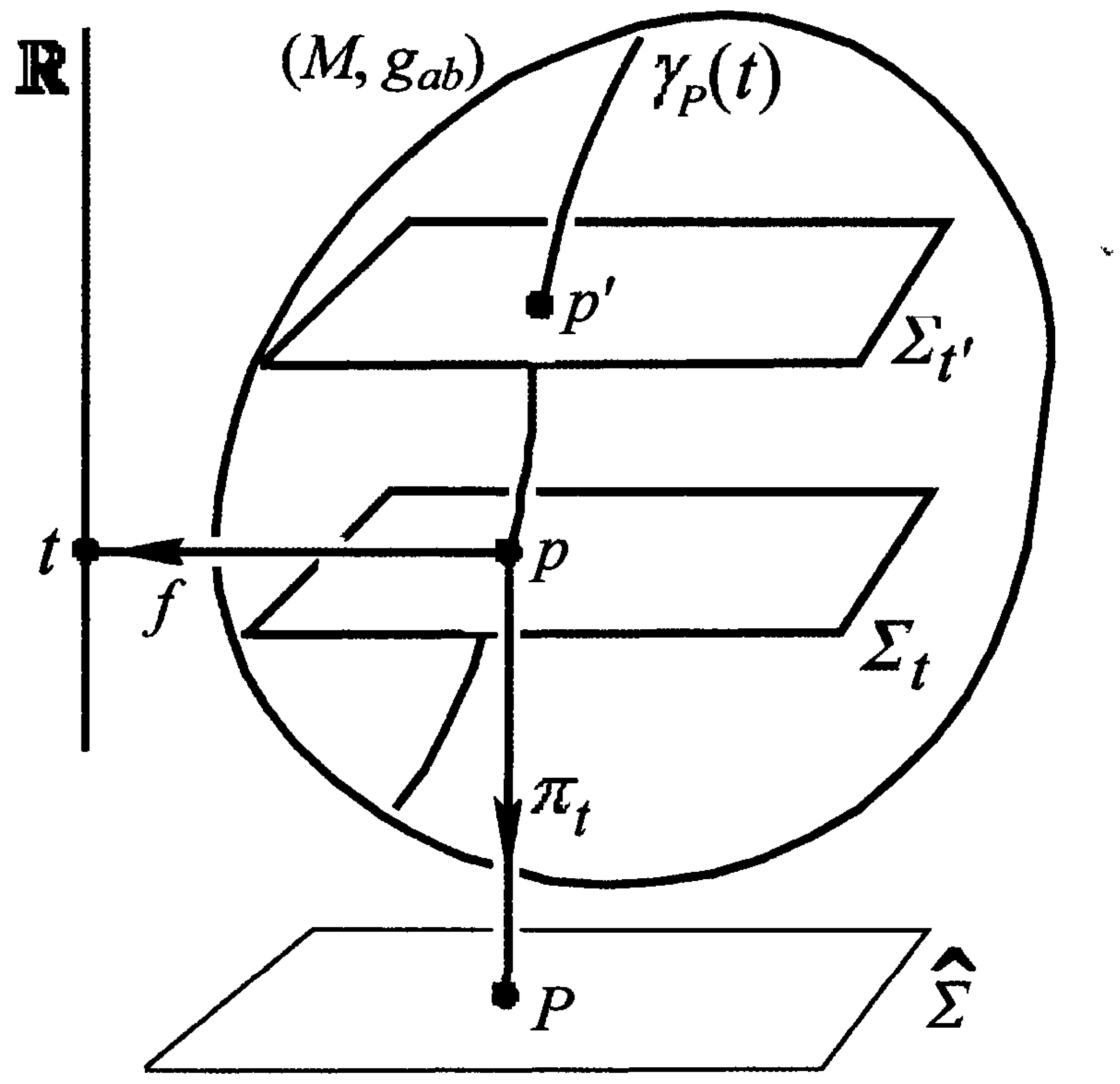


图 14-20′　3+1 分解的数学描述

[选读 14-4-1]

正文在介绍 (M,g_{ab}) 的 3+1 分解时侧重于物理图像, 本选读用数学语言加以准确化. 设存在微分同胚 $\beta: M\to\mathbb{R}\times\hat{\Sigma}$ (其中 $\hat{\Sigma}$ 是某 3 维流形). $\forall p\in M$, 记 $\beta(p)\equiv(f(p),\pi(p))$, 其中 $f(p)\in\mathbb{R}$, $\pi(p)\in\hat{\Sigma}$. 这表明 β 对应于两个映射 $f: M\to\mathbb{R}$ 和 $\pi: M\to\hat{\Sigma}$. $\forall t\in\mathbb{R}$ 令 $\Sigma_t\equiv\{p\in M\,|\,f(p)=t\}$, 则 $f: M\to\mathbb{R}$ 把整张面 Σ_t 映为一点 $t\in\mathbb{R}$ (图 14-20′), 自然无逆. 但 t 可看作 $\mathbb{R}$ 的独点子集 $\{t\}\subset\mathbb{R}$, 因而可谈及其"逆像"(见§1.1 注 5), 记作 $f^{-1}[t]$, 易见 $f^{-1}[t]=\Sigma_t$. 另一方面, 把 $\pi: M\to\hat{\Sigma}$ 的定义域限制在 Σ_t 上便得映射 $\pi_t: \Sigma_t\to\hat{\Sigma}$, 由 β 是微分同胚可知 π_t 是微分同胚. 不论 t 为何值都有 $\pi_t[\Sigma_t]=\hat{\Sigma}$, 故 $\pi[M]=\hat{\Sigma}$ (图 14-20′). 令 $\gamma\equiv\beta^{-1}$, 则 $\gamma: \mathbb{R}\times\hat{\Sigma}\to M$ 是微分同胚, $\forall P\in\hat{\Sigma}$ 所得的 $\gamma_P: \mathbb{R}\to M$ 是 M 中的曲线, 满足 $\gamma_P(t)=\beta^{-1}(t,P)$ $\forall t\in\mathbb{R}$. 这一曲线映射的像 $\gamma_P(t)$ 就是 $\pi^{-1}[P]$. 至今尚未涉及 M

上的度规 g_{ab}，所得结果只是“数学上的 3+1 分解”．要使之成为物理上的 3+1 分解，还须要求(用 g_{ab} 衡量)每一 Σ_t 都是类空超曲面(从而可解释为 t 时刻的全空间)，每一 γ_P 都是类时线(从而可解释为观者 P 的世界线)．

小结 时空 (M,g_{ab}) 在满足以下条件时可作(物理的) 3+1 分解：①∃微分同胚 $\beta: M\to\mathbb{R}\times\hat{\Sigma}$ (由此得分层面族 $\{\Sigma_t\}$ 和曲线族 $\{\gamma_P\}$)；②每一 Σ_t 是类空超曲面，每一 γ_P 是类时线．一个这样的微分同胚 β 对应于一个 3+1 分解． **[选读 14-4-1 完]**

[选读 14-4-2]

3+1 分解对参考系的概念提出了一个问题．根据§14.1 定义 1，图 14-19 中的矢量场 t^a 代表一个参考系．然而，决定一个 3+1 分解需要两个因素：一是 $\{\Sigma_t\}$，二是矢量场 t^a．因此给定参考系(即 t^a)还不足以确定 3+1 分解．这就使“一个参考系确定时空的一个 3+1 分解”的提法不成立(然而我们希望保留这一简便提法)．另外，更重要的是，我们希望参考系的定义能够包含每个观者每一时刻的空间矢量定义．在未涉及 $N^a\neq 0$ 的 3+1 分解时，人们默认观者在每一时刻的空间矢量同其 4 速正交，因此用类时矢量场作为参考系定义便已足够．然而在涉及 $N^a\neq 0$ 的 3+1 分解时，“空间矢量同观者 4 速正交”不再成立，必须定义什么是空间矢量，而最明确的定义就是给出 $\{\Sigma_t\}$．鉴于上述原因，在涉及 $N^a\neq 0$ 的 3+1 分解时不妨把参考系理解为由类时矢量场 t^a 和单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 两个要素组成(这与 Hilbert 当年的“时空固有坐标系”①的精神一致)，在这个意义上便可以说一个参考系决定时空的一个 3+1 分解． **[选读 14-4-2 完]**

14.4.3 空间张量场

在 3+1 分解中，只有切于 Σ_t 的矢量 w^a 才称为空间矢量．设 n^a 是 Σ_t 在 $q\in\Sigma_t$ 的单位法矢，则 $w^a\in V_q$ 是空间矢量的充要条件是 $g_{ab}n^a w^b=0$，即 $n_a w^a=0$．利用投影映射 $h^a{}_b\equiv\delta^a{}_b+n^a n_b$ 易证 $n_a w^a=0$ 的充要条件为 $h^a{}_b w^b=w^a$．由此可推广而得空间张量的如下定义．[仅以 (1,1) 型张量为例，不难推广至任意型．]

定义 1 点 $q\in\Sigma_t\subset M$ 的张量 $T^a{}_b$ 叫做**空间张量**(spatial tensor)，若它满足下列两个等价条件之一(二者等价性的证明留作习题)：

(a) $$n_a T^a{}_b=0,\quad n^b T^a{}_b=0\,; \tag{14-4-6}$$

---

① 为寻求对广义相对论的物理解释，早期文献在引入参考系时用过一系列不同的术语．爱因斯坦(至少从 1920 年起)把参考系形象地称为“软体动物”(mollusc)，这一提法很快被 Born 延伸为“参考软体动物”．Hilbert 在关于物理学基础的著名通讯的第二篇(1917)中，指出坐标系应该由一种物理流体来体现(这流体的每一质点携带一个钟)，并提出一系列不等式以保证参考系的每条世界线的类时性以及时间分层的每一分层面的类空性．他把这一流体称为“时空固有坐标系”(proper space-time coordinate system)．

[对 (k,l) 型张量, 要求每一上标与 n_a 缩并为零, 每一下标与 n^b 缩并为零.]

(b)
$$T^a{}_b = h^a{}_c h^d{}_b T^c{}_d \,. \tag{14-4-7}$$

设 $\{t,x^i\}$ 是所用 3+1 分解相应的坐标系, 则 $(\partial/\partial x^i)^a$ 自然是空间张量场(因它切于 Σ_t), 但 $(\mathrm{d}x^i)_a$ 却未必, 因为由式(14-4-1)易证 $n^a(\mathrm{d}x^i)_a = -N^{-1}N^i$, 对非正交分解可以非零, 不满足定义 1 条件(a). 等价地, 用式(14-4-1)和(14-4-2)也不难证明(习题)

$$h_a{}^b(\mathrm{d}x^i)_b = (\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a\,, \tag{14-4-8}$$

右边未必等于 $(\mathrm{d}x^i)_a$, 因而也不满足定义 1 条件(b).

[选读 14-4-3]

点 $q\in\Sigma_t\subset M$ 有两个切空间: V_q 是 q 作为 M 的一点的 4 维切空间, $W_q\subset V_q$ 是 V_q 中切于 Σ_t 的元素组成的 3 维子空间. 定义 1 中的 $T^a{}_b$ 原是 V_q 上的 (1,1) 型张量, 即 $T^a{}_b\in\mathscr{T}_{V_q}(1,1)$. 然而, 因为 $T^a{}_b$ 满足定义 1 条件(a), 也可看作 $\mathscr{T}_{W_q}(1,1)$ 的元素. 理由如下.

选读 14-4-1 介绍了微分同胚 $\pi_t:\Sigma_t\to\hat{\Sigma}$. 令 $\phi\equiv\pi_t{}^{-1}$, 则 $\phi:\hat{\Sigma}\to\Sigma_t\subset M$ 是嵌入映射, 满足 $\phi[\hat{\Sigma}]=\Sigma_t$. 设 $q\in\Sigma_t$ 的逆像是 $Q\in\hat{\Sigma}$, 即 $q=\phi(Q)$. 以 V_Q 代表 $Q\in\hat{\Sigma}$ 的切空间. 由于 V_Q 是 3 维而 V_q 是 4 维, 推前映射 $\phi_*:V_Q\to V_q$ 并非到上. 利用"曲线切矢的像等于曲线像的切矢"不难证明

$$\phi_*[V_Q]=\{w^a\in V_q\mid w^a n_a=0\},$$

而上式右边正是 W_q, 故 $\phi_*[V_Q]=W_q\subset V_q$, 因此 V_Q 可与 W_q 自然认同. 既然 $\hat{\Sigma}$ 可解释为空间, $Q\in\hat{\Sigma}$ 可解释为一个空间点, V_Q (因而 W_q)的元素自然称为空间矢量, 所以把 V_q 中满足 $w^a n_a=0$ [定义 1 条件(a)]的元素 w^a 称为空间矢量.

再讨论空间对偶矢量. 以 $V_Q{}^*$ 和 $V_q{}^*$ 分别代表 V_Q 和 V_q 的对偶空间. 因为 $\dim V_Q{}^*=3$ 而 $\dim V_q{}^*=4$, 嵌入映射 $\phi:\hat{\Sigma}\to M$ 在 q 点诱导的拉回映射 $\phi^*:V_q{}^*\to V_Q{}^*$ 不是一一映射. 考虑 $V_q{}^*$ 的 3 维子空间 $H_q{}^*\equiv\{\mu_a\in V_q{}^*\mid \mu_a n^a=0\}$, 把 ϕ^* 的定义域限制在 $H_q{}^*\subset V_q{}^*$, 并改记作 ψ^*, 则不难证明 $\psi^*:H_q{}^*\to V_Q{}^*$ 一一到上, 因而是同构映射, 于是 $(\psi^*)^{-1}$ 意义明确, 记作 $\psi_*:V_Q{}^*\to H_q{}^*$. 设 $\omega_a\in V_q{}^*$, 则 $\phi^*\omega_a\in V_Q{}^*$, 故 $\psi_*\phi^*\omega_a\in H_q{}^*$. 其实 $\psi_*\phi^*\omega_a$ 可看作(认同为) ω_a 在 W_q 上的限制 $\tilde{\omega}_a$ (见§5.2 定义 5). 同构映射 ψ^* 使 $V_Q{}^*$ 可与 $H_q{}^*$ 自然认同. 既然 Q 代表空间

点, $V_Q{}^*$ 的元素(因而 $V_q{}^*$ 中满足 $\omega_a n^a=0$ 的元素)自然称为空间对偶矢量.

映射 ψ_* 的定义域还可延拓.考虑 V_q 上全体 (k,l) 型张量的集合 $\mathscr{T}_{V_q}(k,l)$ 的如下子集:

$$\mathscr{S}_{V_q}(k,l)\equiv\{T^{\cdots}{}_{\cdots}\in\mathscr{T}_{V_q}(k,l)\,|\,T^{\cdots}{}_{\cdots}\text{ 的每一指标与 } n_a \text{ 或 } n^a \text{ 缩并为零}\},$$

[例如, $\mathscr{S}_{V_q}(1,0)=W_q$, $\mathscr{S}_{V_q}(0,1)=H_q{}^*$.] 可以证明 ψ_* 可延拓为

$$\psi_*:\mathscr{T}_{V_Q}(k,l)\to\mathscr{S}_{V_q}(k,l),$$

而且一一到上(对上指标张量, ψ_* 就是 ϕ_*). 故可把 $\mathscr{T}_{V_Q}(k,l)$ 与 $\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$ 自然认同.① 例如, V_Q 上的全体 $(0,2)$ 型张量的集合 $\mathscr{T}_{V_Q}(0,2)$ 可与 V_q 上全体 $(0,2)$ 型张量的集合 $\mathscr{T}_{V_q}(0,2)$ 的子集

$$\mathscr{S}_{V_q}(0,2)\equiv\{T_{ab}\in\mathscr{T}_{V_q}(0,2)\,|\,T_{ab}n^a=0,\ T_{ab}n^b=0\}$$

认同. q 点的度规 $g_{ab}\in\mathscr{T}_{V_q}(0,2)$ 由于 $g_{ab}n^a\neq 0$ 而不属于这一子集, 但诱导度规

$$h_{ab}\equiv g_{ab}+n_a n_b\in\mathscr{T}_{V_q}(0,2)$$

则因满足 $h_{ab}n^a=0$ 和 $h_{ab}n^b=0$ 而属于这一子集, 即

$$h_{ab}=\psi_*\phi^* g_{ab}\in\mathscr{S}_{V_q}(0,2),$$

因此是空间张量. h_{ab} 也可看作(认同为) g_{ab} 在 W_q 上的限制 $\tilde{g}_{ab}$ [见 Hawking and Ellis(1973)]. **[选读 14-4-3 完]**

有两个空间张量场最为基本和重要. 第一个是诱导度规场(亦称**空间度规场**) h_{ab}, 容易验证它满足定义 1; 第二个是超曲面 Σ_t 的**外曲率**(extrinsic curvature) K_{ab},② 定义为

$$K_{ab}:=h_a{}^c h_b{}^d\nabla_c n_d\,. \qquad (14\text{-}4\text{-}9)$$

上式表明 K_{ab} 是空间张量场[满足定义 1 条件(b)]. 把 n^a 看作§14.1 的参考系 4 速场

① 这一"自然认同"有双重含义: ① $\mathscr{T}_{V_Q}(k,l)$ 与 $\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$ 之间通过同构映射 ψ_* 相联系; ② $\mathscr{T}_{V_Q}(k,l)$ 与 $\mathscr{T}_{V_Q}(k',l')$ 中元素的张量积以及求积后的缩并对应于 $\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$ 与 $\mathscr{S}_{V_q}(k',l')$ 中相应元素的相应运算.

② h_{ab} 和 K_{ab} 在微分几何中又分别称为超曲面的**第一**和**第二基本形式**(first and second fundamental forms of a hypersurface).

Z^a 的特例, 对比式(14-4-9)和(14-1-11)可知 $K_{ab}=B_{ba}$. 这个参考系显然是超曲面正交的(正交于超曲面族 $\{\Sigma_t\}$), 所以是无旋参考系, 即 $0=\omega_{ab}\equiv B_{[ba]}$, 可见 $K_{ab}=K_{(ab)}$, 即外曲率必为对称张量. 又因为

$$h_b{}^d\nabla_c n_d=(\delta_b{}^d+n_b n^d)\nabla_c n_d=\nabla_c n_b+\frac{1}{2}n^b\nabla_c(n^d n_d)=\nabla_c n_b\,,$$

所以 K_{ab} 还有更简单的表达式:

$$K_{ab}=h_a{}^c\nabla_c n_b\,. \tag{14-4-10}$$

如果讨论的不是一个超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 而只是一张超曲面 Σ, 则式(14-4-10)中的 $\nabla_c n_b$ 没有意义: 导数 $\nabla_c n_b|_q$ (其中 $q\in\Sigma$)有意义的前提是 n_b 在 q 点的某个开邻域内有定义, 然而现在 n^a 的定义域是 M 的非开子集 Σ. (4 维流形的 3 维子集"装不下 4 维开球", 因此非开.) 幸好 K_{ab} 不是 $\nabla_a n_b$ 而是 $h_a{}^c\nabla_c n_b$, 投影映射 $h_a{}^c$ 的存在使情况发生质变. 设 $\{x^i\}$ 是 Σ 的一个坐标系, 坐标域 O 含 q. 用与 Σ 正交的曲线族把 x^i 携带至 O 外, 规定曲线与 O 的交点为曲线参数的零点, 选此参数为 x^0, 便得 4 维坐标系 $\{x^\mu\}$, 坐标域记作 U. 把 O 上的场 n_b 任意延拓为 U 上的场 $\bar{n}_b$, 则 $\nabla_c\bar{n}_b|_q$ 有意义, 现在证明 $h_a{}^c\nabla_c\bar{n}_b|_q$ 与延拓无关(因而可用来定义 $h_a{}^c\nabla_c n_b|_q$). 设 ∂_c 和 $\Gamma^d{}_{cb}$ 分别是坐标系 $\{x^\mu\}$ 的普通导数算符和克氏符, 则

$$h_a{}^c\nabla_c\bar{n}_b|_q=[h_a{}^c(\partial_c\bar{n}_b-\Gamma^d{}_{cb}\bar{n}_d)]|_q=[h_a{}^c(\partial_c\bar{n}_b-\Gamma^d{}_{cb}n_d)]|_q\,. \tag{14-4-11}$$

上式右边第一项又可表为(习题)

$$h_a{}^c\partial_c\bar{n}_b|_q=h_a{}^c(\mathrm{d}x^i)_c(\mathrm{d}x^\nu)_b\partial\bar{n}_\nu/\partial x^i|_q\,, \tag{14-4-12}$$

其中的 $\partial\bar{n}_\nu/\partial x^i$ 是函数 $\bar{n}_\nu$ 对空间坐标 x^i 的偏导数, 显然等于 $\partial n_\nu/\partial x^i$. 代入式(14-4-11)便得

$$h_a{}^c\nabla_c\bar{n}_b|_q=\{h_a{}^c[(\mathrm{d}x^i)_c(\mathrm{d}x^\nu)_b\partial n_\nu/\partial x^i-\Gamma^d{}_{cb}n_d)]\}|_q\,,$$

所以 $h_a{}^c\nabla_c\bar{n}_b|_q$ 与延拓方式无关.① 可见 $K_{ab}=h_a{}^c\nabla_c n_b$ 对单张超曲面也有明确意义.

下面讨论外曲率的几何意义. $\forall\, q\in\Sigma,\ w^a\in W_q$ 有 $K_{ab}w^a=w^c\nabla_c n_b$, 故

---

① 式(14-4-11)右边的 ∂_c 和 $\Gamma^d{}_{cb}$ 都同坐标系 $\{x^i\}$ 有关, 而符合正文要求的坐标系很多, 看来还应证明右边两项之和与坐标系无关. 实际上无须证明, 因为左边的 $h_a{}^c\nabla_c\bar{n}_b|_q$ 作为 q 点的张量与坐标系无关.

$$K_{ab}|_q = 0 \Leftrightarrow w^c \nabla_c n_b|_q = 0 \quad \forall w^c \in W_q \Leftrightarrow w^c \nabla_c n^a|_q = 0 \ \forall w^c \in W_q. \quad (14\text{-}4\text{-}13)$$

设 $C(s)$ 是从 q 出发、以 w^a 为切矢、躺在 Σ 上的曲线，p 是 q 在线上的邻点，Δs 是 p, q 点的参数差，则由式(3-2-14)得

$$w^c \nabla_c n^a|_q = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\tilde{n}^a|_q - n^a|_q}{\Delta s}, \quad (14\text{-}4\text{-}14)$$

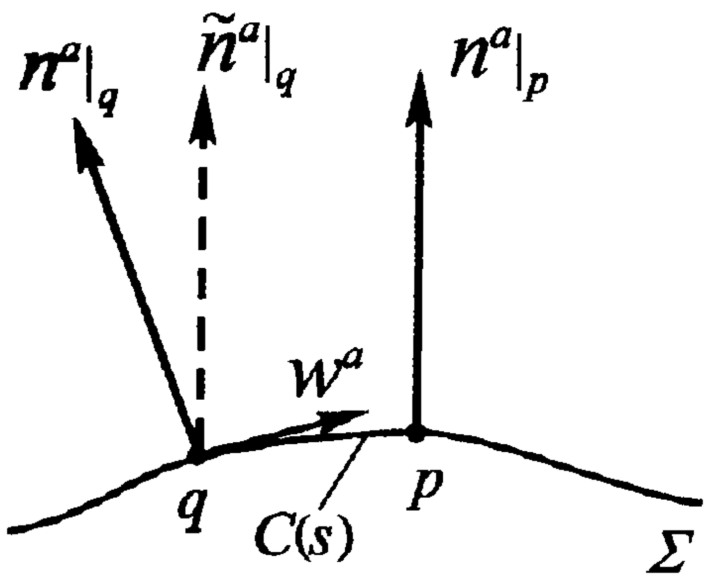


图 14-21　$\tilde{n}^a|_q$ 是法矢 $n^a|_p$ 沿曲线 C 平移至 q 点的结果. $\tilde{n}|_q \neq n|_q$ 表明 $K_{ab}|_q \neq 0$

其中 $\tilde{n}^a|_q$ 是 $n^a|_p$ 沿 $C(s)$ 平移至 q 的结果(图 14-21). 式(14-4-13)、(14-4-14)结合表明(在 Δs 足够小的条件下) $\tilde{n}^a|_q$ 与 $n^a|_q$ 是否相等取决于 $K_{ab}|_q$ 是否为零. 可见 K_{ab} 描述 Σ 的单位法矢场 n^a 沿 Σ 上曲线的变化(移动)情况与平移的偏离程度. 当 (M, g_{ab}) 平直时，这种偏离正好反映 Σ 在 M 中的弯曲情况(试以 3 维欧氏空间的球面或圆柱面为例想象)，因此对非平直的 (M, g_{ab}) 我们也形象地说 K_{ab} 描述 Σ 在 M 中的"弯曲"情况.

命题 14-4-1　$\{\Sigma_t\}$ 中任一 Σ_t 的外曲率 K_{ab} 在 3+1 分解的共动坐标系的分量为

$$K_{ij} = N\Gamma^0{}_{ij}, \qquad i, j = 1,2,3, \quad (14\text{-}4\text{-}15)$$

其中 $\Gamma^0{}_{ij}$ 是共动坐标系的克氏符的 $0, i, j$ 分量，N 是时移函数.

证明

$$K_{ij} = K_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a h_a{}^c \nabla_c n_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c \nabla_c n_b$$

$$= -n_b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c \nabla_c\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b = -n_b \Gamma^\sigma{}_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^b = -n_b \Gamma^0{}_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^b = N\Gamma^0{}_{ij},$$

其中第三、四、六步用到 $(\partial/\partial x^i)^c$ 的空间性，第五步用到克氏符的等价定义(第 3 章习题 4)，第七步用到 $(\partial/\partial x^0)^b = (\partial/\partial t)^b = t^b = Nn^b + N^b$. □

命题 14-4-2　外曲率 K_{ab} 等于空间度规场 h_{ab} 沿法矢场 n^a 的李导数之半：

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_n h_{ab}. \quad (14\text{-}4\text{-}16)$$

证明　上式无非是式(14-1-30)的特例. □

3 维语言涉及的张量都是某种 3+1 分解下的空间张量. 通常(在非广义相对论物理学中)见到的一般是闵氏时空在标准分解下的空间张量, 如电场 $\vec{E}$ 、磁场 $\vec{B}$ 、应力张量和介电常数张量等, 相应的空间度规 $h_{ab}=\delta_{ab}$ (3 维欧氏度规), 外曲率 $K_{ab}=0$.

14.4.4 空间张量场的空间导数

设 Σ 是 (M,g_{ab}) 中的一张类空超曲面, h_{ab} 是 g_{ab} 在 Σ 上的诱导度规, [Σ 既可以是类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 中的任一 Σ_t , 也可以是孤立的(同 3+1 分解无关的)一张类空超曲面.] 则 (Σ,h_{ab}) 是 3 维黎曼空间, 存在与 h_{ab} 适配的唯一导数算符, 记作 D_c , 即 $\mathrm{D}_c h_{ab}=0$. 这 D_c 可借 g_{ab} 的适配导数算符 ∇_a 求得. 设 $T^a{}_b$ (作为 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的简写)是 Σ 上的空间张量场. 由于 Σ 是 M 的非开子集, $\nabla_c T^a{}_b$ 并无意义. 然而仿照上小节关于 $h_a{}^c\nabla_c n_b$ 的讨论可知 $h_d{}^c\nabla_c T^a{}_b$ 有意义($h_d{}^c$ 的存在使 $h_d{}^c\nabla_c T^a{}_b$ 代表 $T^a{}_b$ 沿 Σ 切向的导数). 虽然 $h_d{}^c\nabla_c T^a{}_b$ 有意义, 却未必是空间张量场(虽然 $T^a{}_b$ 是). 以空间矢量场 $(\partial/\partial x^i)^b$ 为例, 利用式(14-4-1)、(14-4-2)和(14-4-6)可证(习题)

$$n_b\left[h_c{}^a\nabla_a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b\right]=-N\Gamma^0{}_{ji}h_c{}^a(\mathrm{d}x^j)_a, \tag{14-4-17}$$

右边对非正交分解可以非零, 可见 $h_c{}^a\nabla_a(\partial/\partial x^i)^b$ 未必是空间张量场. 为使空间张量场 $T^a{}_b$ 的导数仍是空间张量场, 可取 $h_d{}^c\nabla_c T^a{}_b$ 的投影 $h^a{}_e h^f{}_b h^d{}_c\nabla_d T^e{}_f$. 于是有如下定义:

定义 2　空间张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 的空间导数定义为

$$\mathrm{D}_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}:=h^{a_1}{}_{d_1}\cdots h^{a_k}{}_{d_k}h_{b_1}{}^{e_1}\cdots h_{b_l}{}^{e_l}h_c{}^f\,\nabla_f T^{d_1\cdots d_k}{}_{e_1\cdots e_l}\,. \tag{14-4-18}$$

注 2　虽然 $\Sigma\subset M$, 但不妨不去理会 Σ 面外的情况而把 (Σ,h_{ab}) 看作一个独立的 3 维黎曼空间. 作为 Σ 上的导数算符, D_c 只能作用于独立流形 Σ 上的张量场("切于" Σ 的 3 维张量场). 式(14-4-18)的 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 虽然称为空间张量场, 其实(按定义 1)仍是 4 维张量场, 只不过其每一上(及下)指标与 n_a (及 n^a)缩并为零. 然而 Σ 上每个这样的 4 维张量场都对应于 Σ 上的一个 3 维张量场(见选读 14-4-3, 正因如此才被称为空间张量场). 所以式(14-4-18)左边可看作独立流形 Σ 上的导数算符 D_c 对 Σ 上("切于" Σ 的)张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 的作用结果. 不难验证它的确满足导数算符定义(§3.1 定义 1)的全部条件.

例 1　上册式(6-6-15)中的 $\hat{\partial}_c$ 其实就是 D_c .

命题 14-4-3　由式(14-4-18)定义的 D_c 是与诱导度规 h_{ab} 适配的导数算符, 即 $\mathrm{D}_c h_{ab}=0$.

证明　习题. 提示: 利用 $h_a{}^b n_b=0$. □

(Σ,h_{ab}) 的适配导数算符 D_c 按式(3-4-3)决定一个 3 维黎曼张量, 记作 ${}^3R_{abc}{}^d$, 即

$$2\mathrm{D}_{[a}\mathrm{D}_{b]}\omega_c={}^3R_{abc}{}^d\omega_d\text{ , }\forall\text{空间 }\omega_c\text{ (即满足 }n^c\omega_c=0\text{ 的 }\omega_c\text{).}\qquad(14\text{-}4\text{-}19)$$

命题 14-4-4　3 维(空间)黎曼张量 ${}^3R_{abc}{}^d$ 同 4 维(时空)黎曼张量 $R_{abc}{}^d$ 有如下关系:

$${}^3R_{abc}{}^d=h_a{}^e h_b{}^f h_c{}^l h^d{}_m R_{efl}{}^m-2K_{c[a}K_{b]}{}^d\text{ ,}\qquad(14\text{-}4\text{-}20)$$

其中 K_{ca} 是超曲面的外曲率.

证明　从 D_c 的定义式(14-4-18)出发经计算(习题)得

$$2\mathrm{D}_a\mathrm{D}_b\omega_c=2h_a{}^e h_b{}^f h_c{}^g\nabla_e\nabla_f\omega_g-2K_{ac}K_b{}^m\omega_m+2K_{ab}h_c{}^g n^m\nabla_m\omega_g\text{ .}\qquad(14\text{-}4\text{-}21)$$

[提示: 用 $h_a{}^b n_b=0$ 和 $n^a\nabla_b\omega_a=\nabla_b(n^a\omega_a)-\omega_a\nabla_b n^a=-\omega_a\nabla_b n^a$.] 对 a,b 作反称化, 注意到 $K_{[ab]}=0$ 及 $R_{efg}{}^m\omega_m=h^d{}_m R_{efg}{}^m\omega_d$, 便可由式(14-4-19)、(14-4-21)得(14-4-20). □

14.4.5　空间张量场的时间导数

选定 3+1 分解后便有明确的时间概念(单参族 $\{\Sigma_t\}$ 的参数 t), 物理学自然要关心(也只有到了这一步才可谈及)空间张量场随时间变化的问题. 用 3 维语言讲, 就是要关心 3 维空间 $\hat{\Sigma}$ 上的矢量场的时间变化率, 其中"时间"就是指 4 维坐标系 $\{t,x^i\}$ 中的 t . 空间张量场的时间导数既可用分量语言也可用几何语言表述. 以空间张量场 $T^a{}_b$ 为例. 分量语言关心 $T^a{}_b$ 的分量 $T^i{}_j$ 对时间的偏导数 $\partial T^i{}_j/\partial t$, 通常记作 $\dot{T}^i{}_j$, 这是人们较熟悉的. 下面介绍几何语言中时间导数的等价表述. 先以闵氏时空的标准分解为例(图 14-22). 设 Σ_t 和 $\Sigma_{t'}$ 是两个邻近等 t 面, q 和 q' 是某惯

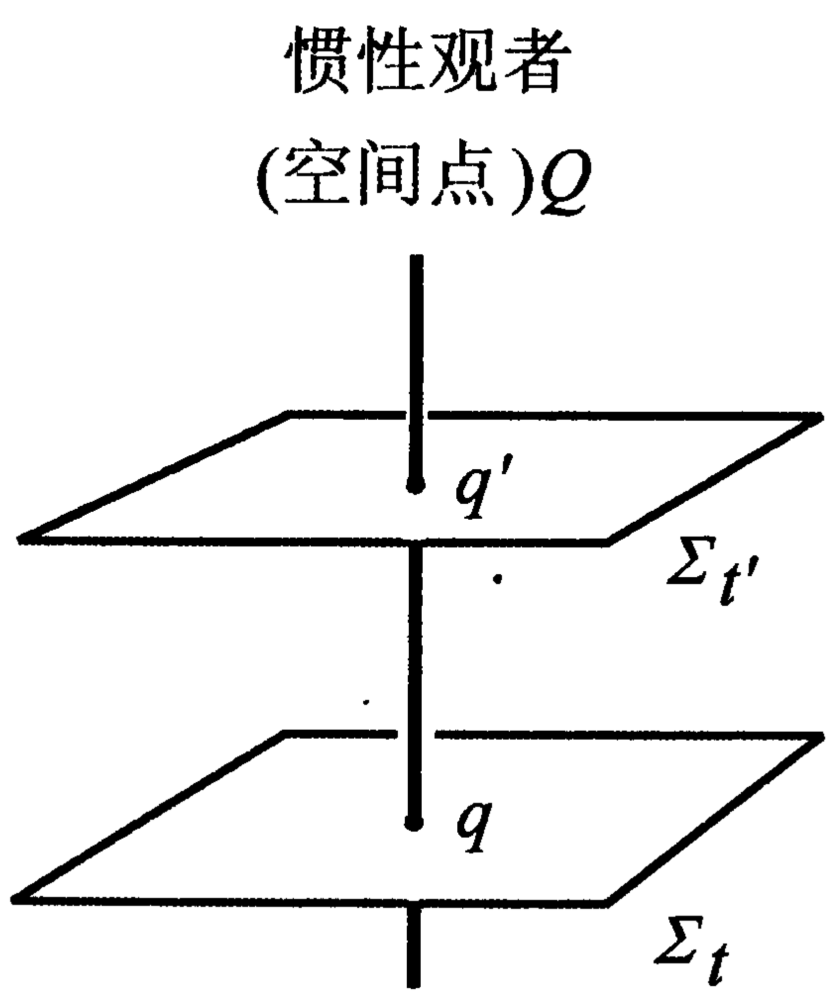


图 14-22　闵氏时空的标准分解. q 和 q' 是观者 Q 代表的空间点在时刻 t 和 t' 的表现

性观者 Q 的世界线与 Σ_t 和 $\Sigma_{t'}$ 的交点. 由于 Q 认为自己的空间位置没有变化(认为自己不动), q 和 q' 就是同一空间点(记作 Q)在时刻 t 和 t' 的表现. 假定我们关心的是代表某一物理量的标量场 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, 如果 $f|_{q'}\neq f|_q$, 则观者 Q 认为自己所在空间点的 f 值在从 t 到 t' 时有了变化. 令 $\Delta t\equiv t'-t$, 则 f 在时刻 t 的时间导数为

$$\dot{f}|_q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f|_{q'}-f|_q}{\Delta t}=(\mathscr{L}_{\vec{t}}f)|_q\,. \tag{14-4-22}$$

(为强调 $\mathscr{L}$ 的下标是矢量场 t^a 而非时间函数 t, 特以 $\mathscr{L}_{\vec{t}}$ 标出.) 以上讨论可自然推广到弯曲时空的任意 3+1 分解. 默认 t^a 为 C^∞, 则它对应于 M 上的一个单参微分同胚族. 令 $\Delta t\equiv t'-t$, 以 $\eta_{\Delta t}$ 代表参数为 Δt 的那个微分同胚映射, 则 $q'\equiv\eta_{\Delta t}(q)$ 与 q 同在一条观者世界线上. 把 $\eta_{\Delta t}$ 的定义域限制于 Σ_t 便成为一个从 Σ_t 到 $\Sigma_{t'}$ 的微分同胚映射. 与图 14-22 类似, q 和 q' 点也可看作同一空间点 Q 在时刻 t 和 t' 的表现. 如果 $f|_{q'}\neq f|_q$, 则空间点 Q 在时刻 t 和 t' 有不同的 f 值. 因此 f 的时间导数仍可用式(14-4-22)定义. 再讨论空间矢量场 w^a 的时间导数. 由于微分同胚映射 $\eta_{\Delta t}:\Sigma_t\to\Sigma_{t'}$ 诱导出拉回映射 $\eta_{\Delta t}{}^*:W_{q'}\to W_q$ [$\eta_{\Delta t}{}^*$ 是指 $(\eta_{\Delta t}{}^{-1})_*$], Σ_t 上既有矢量场 w^a 又有矢量场 $\eta_{\Delta t}{}^*w^a$, (后者是"活"的, 取决于 t', 见图 14-23. 由"曲线切矢的像等于曲线像的切矢"可知 $\eta_{\Delta t}{}^*w^a$ 也是 Σ_t 上的空间矢量场.) 于是空间矢量场 w^a 在 q 点的**时间导数**自然定义为

$$\dot{w}^a|_q:=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\eta_{\Delta t}{}^*w^a)|_q-w^a|_q}{\Delta t}\,. \tag{14-4-23}$$

然而上式右边正是 w^a 沿矢量场 t^a 的李导数, 故

$$\dot{w}^a|_q=\mathscr{L}_{\vec{t}}w^a|_q\,. \tag{14-4-23$'$}$$

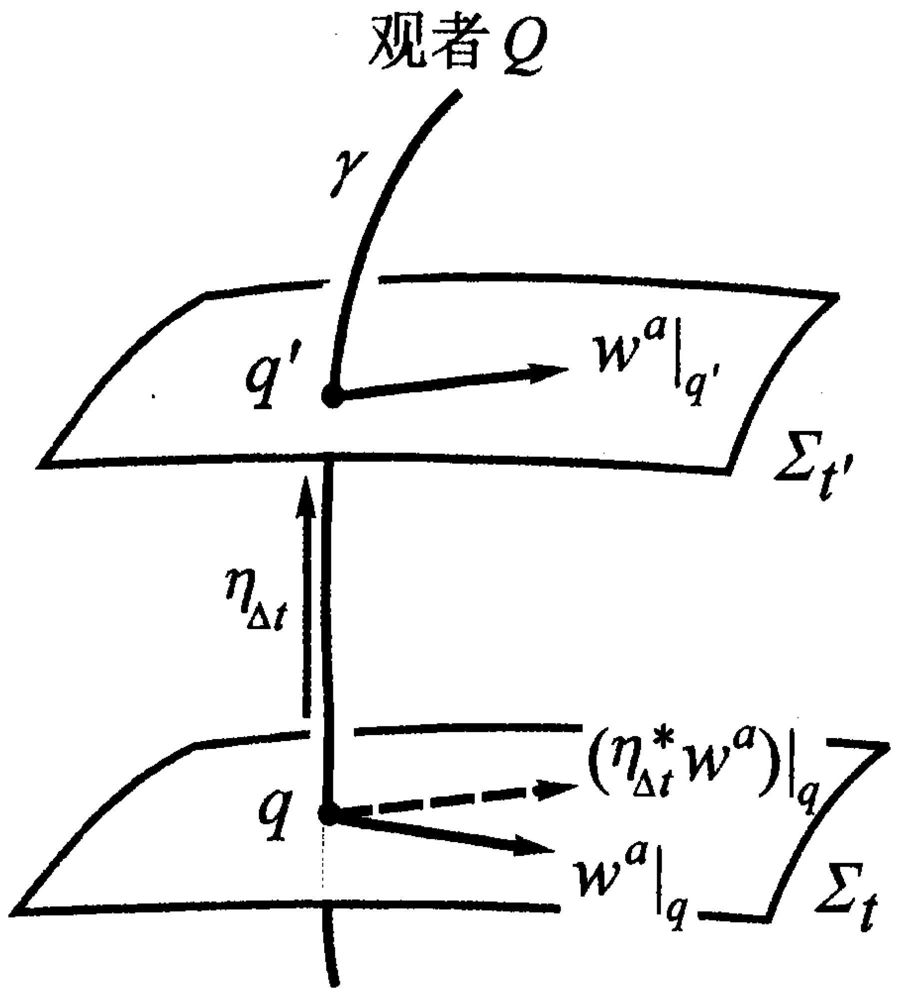


图 14-23　$(\eta_{\Delta t}{}^*w^a)|_q$ 是 $w^a|_{q'}$ 在 $\eta_{\Delta t}{}^*$ 下的像. $[(\eta_{\Delta t}{}^*w^a)|_q-w^a|_q]/\Delta t$ 的极限代表空间点 Q 的矢量 w^a 在时刻 t 的时间导数

上式表明 $\dot{w}^a|_q$ 是 q 点的空间矢量.

下面讨论空间对偶矢量场 ω_a 的时间导数 $\dot{\omega}_a$. 由于法矢 n^a 在 $\eta_{\Delta t}{}^*$ 下的像未必是法矢, $\mathscr{L}_t\omega_a$ 未必是空间张量场, 即 $n^a\mathscr{L}_t\omega_a$ 未必为零. 仿照空间导数的定义方法, 我们把 ω_a 的时间导数 $\dot{\omega}_a$ 定义为 $\mathscr{L}_t\omega_a$ 的投影, 即

$$\dot{\omega}_a := h_a{}^b\mathscr{L}_t\omega_b . \tag{14-4-24}$$

以 $\tilde{\mathscr{L}}_t\omega_a$ 代表 $\mathscr{L}_t\omega_a$ 的投影, 则

$$\dot{\omega}_a := \tilde{\mathscr{L}}_t\omega_a . \tag{14-4-25}$$

推广以上考虑便得任意空间张量场 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的时间导数定义:

$$\dot{T}^{a\cdots}{}_{b\cdots} := \tilde{\mathscr{L}}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots} . \tag{14-4-26}$$

其中 $\tilde{\mathscr{L}}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 代表 $\mathscr{L}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的空间投影, 即

$$\tilde{\mathscr{L}}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots} \equiv h^a{}_c\cdots h_b{}^d\cdots\mathscr{L}_t T^{c\cdots}{}_{d\cdots} . \tag{14-4-27}$$

式(14-4-22)、(14-4-23′)及(14-4-25)都是式(14-4-27)的特例. 空间张量场的时间导数的这一几何定义与坐标语言定义的等价性的证明见选读 14-4-5.

正如 $\tilde{\mathscr{L}}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 代表 $\mathscr{L}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的空间投影那样, 今后也用 $\tilde{\mathscr{L}}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 代表 $\mathscr{L}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的空间投影(其中 $\vec{v}$ 是任意矢量场). 不过大多数文献[Isenberg and Nester(1980)例外]都把 $\tilde{\mathscr{L}}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 简写作 $\mathscr{L}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$. 一般来说, 只要 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 是空间张量场, $\mathscr{L}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 就自动代表 $\tilde{\mathscr{L}}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$. 本书以下也沿用这一惯例.

由 $t^a = Nn^a + N^a$ 及式(14-4-26)不难证明在作用于空间张量场 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 时有

$$\mathscr{L}_t = N\mathscr{L}_n + \mathscr{L}_N . \quad (\text{所有 } \mathscr{L} \text{ 都是 } \tilde{\mathscr{L}} \text{ 的简写}) \tag{14-4-28}$$

由于 $\mathscr{L}_N$ 只涉及在 Σ_t 面内的移动, $\mathscr{L}_n$ 包含了 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的时间演化的全部实质性信息.

命题 14-4-5

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + \mathscr{L}_N h_{ab} , \tag{14-4-29}$$

证明　由式(14-4-28)及(14-4-16)得

$$\dot{h}_{ab} = \mathscr{L}_t h_{ab} = N\mathscr{L}_n h_{ab} + \mathscr{L}_N h_{ab} = 2NK_{ab} + \mathscr{L}_N h_{ab} .$$ □

注 3　式(14-4-28)的 $\mathscr{L}_n$ 本是 $\tilde{\mathscr{L}}_n$ 的简写, 而式(14-4-16)右边却是 $\mathscr{L}_n h_{ab}$ 本身. 然而, 因为 K_{ab} 是空间张量, 式(14-4-16)表明 $\mathscr{L}_n h_{ab} = \tilde{\mathscr{L}}_n h_{ab}$, 所以上述证明合法.

命题 14-4-6

$$\dot{K}_{ab}=Nh^c{}_a h^d{}_b R_{cd}-N\,{}^3\!R_{ab}+2NK^c{}_a K_{cb}-NKK_{ab}+\mathrm{D}_a\mathrm{D}_b N+\mathscr{L}_{\vec{N}}K_{ab}\,, \qquad (14\text{-}4\text{-}30)$$

其中 $K\equiv h^{ab}K_{ab}$ 是外曲率 K_{ab} 的迹.

证明　推证过程很长,有余力的读者不妨作为练习. □

[选读 14-4-4]

把 §14.1 关于邻居 w^a 相对于观者 $\gamma(\tau)$ 的 3 速 u^a (w^a 的时间变化率)的定义与本节关于空间张量场 $T^a{}_b$ 的时间变化率 $\dot{T}^a{}_b$ 的定义作一对比有助于加深理解. u^a 用费米导数定义,而 $\dot{T}^a{}_b$ 用李导数定义. 使用两种不同导数对物理量的时间变化率下定义起因于两种情况下“时”、“空”概念的微妙不同. §14.1 关心的只是参考系 $\mathscr{R}$ 中的一个观者 $\gamma(\tau)$, 对他而言, 最自然的时间概念是固有时 τ, 在任一时刻 $p\in\gamma(\tau)$ 的最自然的空间概念是 V_p 中与 Z^a 正交的子集 W_p, 最自然的 3 标架场是沿线费移的正交归一标架场, 所以该观者把与 Z^a 正交(并满足一定条件)的矢量 w^a 看作邻居, 把沿线费移的 w^a 看作“不动”, 因而把 w^a 沿线的费米导数 $\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau$ 定义为邻居的 3 速 u^a. 这一 3 速的物理意义十分清晰: 若邻居 w^a 费移, 则其 3 速 $u^a=0$; 若 w^a 非费移, 则其 3 速(在费移正交归一标架)的分量 u^i 正好等于 w^a 的相应分量 w^i 的时间变化率 $\mathrm{d}w^i/\mathrm{d}\tau$. 与此不同, 本节关心的是整个参考系(与指定 3+1 分解相应的参考系) $\mathscr{R}$ 而不是个别观者, 最自然的时间概念是坐标时 t 而非固有时 τ, 最自然的空间概念是等 t 面 Σ_t (未必与观者世界线正交), 最自然的空间 3 标架场是任一共动坐标系的 3 个空间基矢场 $(\partial/\partial x^i)^a$. 因此, 如果空间矢量 w^a (现在要切于 Σ_t)的坐标分量 w^i 不随 t 而变($\partial w^i/\partial t=0$), 就认为 w^a 代表的物理量不变, 而 $\partial w^i/\partial t$ 正是 $\mathscr{L}_{\vec{t}}w^a$ 的坐标分量, 所以自然把 $\mathscr{L}_{\vec{t}}w^a$ 定义为 w^a 的时间导数. 推广到任意空间张量场 $T^a{}_b$ 时, 考虑到 $\mathscr{L}_{\vec{t}}T^a{}_b$ 可能不再是空间张量场, 便取其空间投影 $\tilde{\mathscr{L}}_{\vec{t}}T^a{}_b$. 这在如下一点上也与 §14.1 类似: §14.1 的 w^a 的时间导数定义为 w^a 的协变导数的空间投影(即费米导数), 而本节的 $T^a{}_b$ 的时间导数定义为 $T^a{}_b$ 的李导数的空间投影.

[选读 14-4-4 完]

[选读 14-4-5]

正如选读 14-4-3 所指出的, 点 $q\in\Sigma_t\subset M$ 涉及 3 类张量 [仅以 (1,1) 型张量为例]: ① $\mathscr{T}_{V_q}(1,1)$ 的元素, 即 q 点的 4 维 (1,1) 型张量; ② $\mathscr{T}_{W_q}(1,1)$ 的元素, 即 q 点的 3 维 (1,1) 型张量; ③ $\mathscr{T}_{V_q}(1,1)$ 的子集 $\mathscr{S}_{V_q}(1,1)\equiv\{T^a{}_b\in\mathscr{T}_{V_q}(1,1)\,|\,n_aT^a{}_b=0,n^bT^a{}_b=0\}$ 的元素, 它们也是 q 点的 4 维 (1,1) 型张量, 只是凑巧与 n^a 及 n_a 分别缩并为零. 我们称之为 q 点的空间张量(虽然实质上不是 3 维张量). 在涉及 3+1 分解的物理问题时,

最关心的是$\mathscr{T}_{W_q}(1,1)$的元素，或者，由于$Q\in\hat{\Sigma}$的3维切空间V_Q与W_q自然认同(见选读14-4-3)，也可说最关心的是$\mathscr{T}_{V_Q}(1,1)$的元素. 因为它们是3维流形$\hat{\Sigma}$中Q点的张量，为明确起见，在本选读中特以$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$代表，即$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}\in\mathscr{T}_{V_Q}(1,1)$. 既然$Q\in\hat{\Sigma}$代表一个空间点(一个观者)，$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$就代表$Q$点的一个物理量，$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$随时间$t$的变化就代表该量的演化. 正文中把空间张量$T^a{}_b\in\mathscr{S}_{V_q}(1,1)$($q$跑遍$\Sigma_t$得$\Sigma_t$上的空间张量场)的李导数(必要时投影)定义为$T^a{}_b$所代表的物理量的时间导数，本选读则直接对$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$的时间导数给出自然的定义，并印证正文对$\dot{T}^a_b$所下定义的合理性.

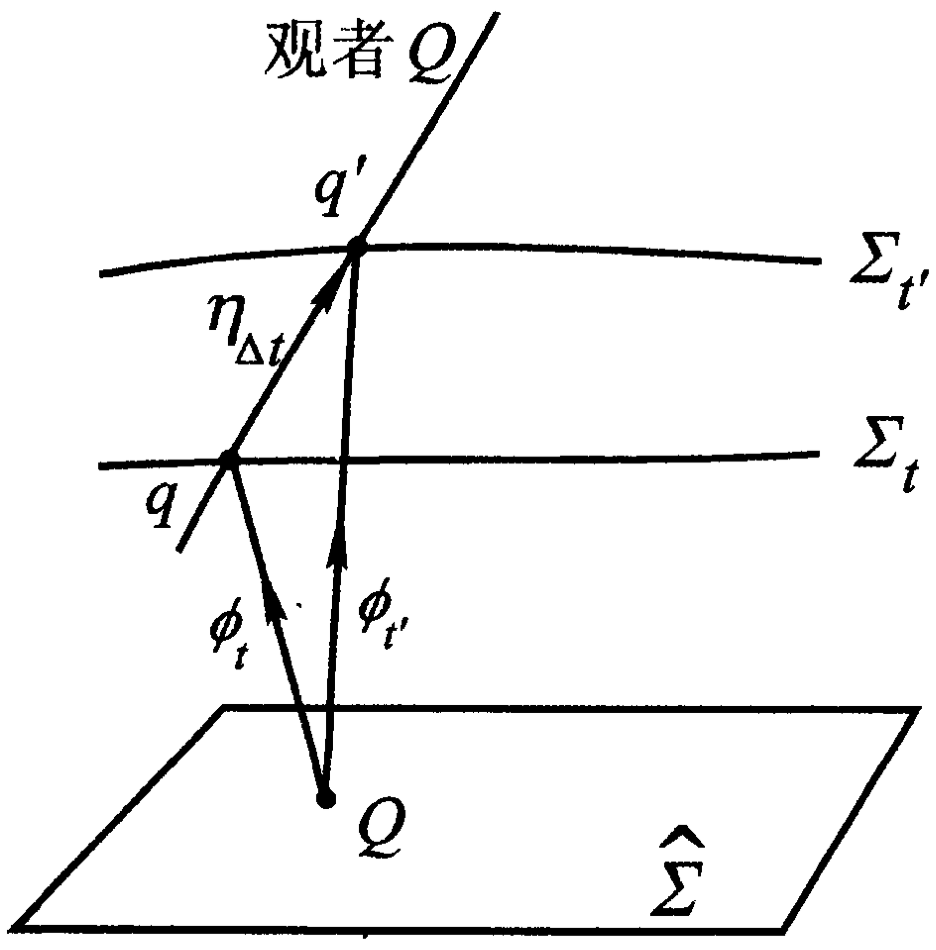


图 14-24　微分同胚映射ϕ_t，$\phi_{t'}$与$\eta_{\Delta t}$之间的关系

选读14-4-3中的嵌入映射$\phi:\hat{\Sigma}\to M$可看作从$\hat{\Sigma}$到$\Sigma_t\subset M$的微分同胚. 由于现在涉及时间导数，我们把这一微分同胚记作$\phi_t:\hat{\Sigma}\to\Sigma_t$. 考虑$\Sigma_t$附近的另一分层面$\Sigma_{t'}$，又有微分同胚$\phi_{t'}:\hat{\Sigma}\to\Sigma_{t'}$，与$\phi_t$的关系为$\phi_{t'}=\eta_{\Delta t}\circ\phi_t$，其中$\eta_{\Delta t}:M\to M$代表由观者世界线定义的微分同胚映射(见图14-24). 设$\{t,x^i\}$是M中与所选3+1分解相应的一个共动坐标系，则$y^i:=\phi_t^*x^i(i=1,2,3)$给出$\hat{\Sigma}$上的一个局域坐标系. 如果改用$\phi_{t'}^*x^i$定义$y^i$，则由于$Q=\phi_t^{-1}(q)=\phi_{t'}^{-1}(q')$以及$x^i(q)=x^i(q')$，所得$y^i$一样. 可见$y^i$的定义合法. 把坐标系$\{y^i\}$的坐标基矢和对偶坐标基矢分别记作$(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}$和$(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}$. 选读14-4-3引入的$\psi^*$和$\psi_*$现在应改记为$\psi_t{}^*$和$\psi_{t*}$，它们是$\mathscr{T}_{V_Q}(k,l)$与$\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$之间的同构映射. $(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}|_Q$在这一映射下自然对应于$\Sigma_t$上的坐标基矢$(\partial/\partial x^i)^a|_q$，即

$$\psi_{t*}\left[\left.\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^{\hat{a}}\right|_Q\right]=\left.\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\right|_q.\tag{14-4-31}$$

但$(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}|_Q$未必对应于$(\mathrm{d}x^i)_a|_q$，因为$(\mathrm{d}x^i)_a|_q$一般不是空间对偶矢量(见选读

14-4-3 前的几行). 事实上对 Q 点有 $(\phi_t{}^* \mathrm{d}x^i)_{\hat{a}} = (\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}$ [两边作用于基矢 $(\partial/\partial y^j)^{\hat{a}}$ 便可证明], 这表明 $(\psi_{t*}\mathrm{d}y^i)_a$ 是 $(\mathrm{d}x^i)_a$ 在 Σ_t 上的限制, 所以

$$(\psi_{t*}\mathrm{d}y^i)_a = h_a{}^b(\mathrm{d}x^i)_b = (\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a, \qquad (14\text{-}4\text{-}32)$$

其中第二步用到式(14-4-8). 令

$$(E_i)^a \equiv (\partial/\partial x^i)^a, \qquad (E^i)_a \equiv (\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a, \qquad (14\text{-}4\text{-}33)$$

则 $(E_i)^a$ 和 $(E^i)_a$ 有如下性质: ①它们是空间张量, $\{(E_i)^a\}$ 是 W_q 的一个基底, $(E^i)_a$ 则满足 $(E^i)_a(E_j)^a = \delta^i{}_j$, 由它们出发通过张量积可得 $\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$ [而非 $\mathscr{T}_{V_q}(k,l)$] 的基底, 例如 $\{(E_i)^a(E^j)_b,\ i,j=1,2,3\}$ 构成 $\mathscr{S}_{V_q}(1,1)$ 的一个基底. 但是 $\{(E^i)_a\}$ 不是共动坐标系的对偶坐标基, 即 $(E^i)_a \neq (\mathrm{d}x^i)_a$, 除非 $N^i = 0$. ② $(E_i)^a|_q$ 和 $(E^i)_a|_q$ 通过 $\psi_t{}^*$ 分别同 $(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}|_Q$ 和 $(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}|_Q$ 对应; 类似地, $(E_i)^a|_{q'}$ 和 $(E^i)_a|_{q'}$ 通过 $\psi_{t'}{}^*$ 分别同 $(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}|_Q$ 和 $(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}|_Q$ 对应, 即

$$\begin{aligned}\psi_t{}^*[(E_i)^a|_q] &= (\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}|_Q, \qquad \psi_t{}^*[(E^i)_a|_q] = (\mathrm{d}y^i)^{\hat{a}}|_Q,\\ \psi_{t'}{}^*[(E_i)^a|_{q'}] &= (\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}|_Q, \qquad \psi_{t'}{}^*[(E^i)_a|_{q'}] = (\mathrm{d}y^i)^{\hat{a}}|_Q.\end{aligned} \qquad (14\text{-}4\text{-}34)$$

于是有如下命题:

命题 14-4-7
$$\psi_{t'}{}^* = \psi_t{}^* \circ P \circ \eta_{\Delta t}{}^*, \qquad (14\text{-}4\text{-}35)$$

其中 P 是从 $\mathscr{T}_{V_q}(k,l)$ 到 $\mathscr{S}_{V_q}(k,l)$ 的投影映射.

证明　$T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 可用 $(E_i)^a\cdots(E^j)_b\cdots$ 线性表出, 且式(14-4-35)对 $(E_i)^a \in \mathscr{S}_{V_q}(1,0)$ 显然成立, 所以只须证明式(14-4-35)对 $(E^i)_a$ 也成立.

$$\begin{aligned}\eta_{\Delta t}{}^*[(E^i)_a|_{q'}] &= \eta_{\Delta t}{}^*\{[(\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a]_{q'}\}\\ &= \eta_{\Delta t}{}^*[(\mathrm{d}x^i)_a|_{q'}] + N^i|_{q'}\,\eta_{\Delta t}{}^*[(\mathrm{d}t)_a|_{q'}] = (\mathrm{d}x^i)_a|_q + N^i|_{q'}(\mathrm{d}t)_a|_q,\end{aligned}$$

其中最末一步用到式(4-1-4)和(4-1-5). 对上式投影得

$$P\eta_{\Delta t}{}^*[(E^i)_a|_{q'}] = P[(\mathrm{d}x^i)_a|_q] + N^i|_{q'}\,P[(\mathrm{d}t)_a|_q] = (E^i)_a|_q, \qquad (14\text{-}4\text{-}36)$$

其中最末一步是因为对 q 点有

$$P[(\mathrm{d}x^i)_a] = h_a{}^b(\mathrm{d}x^i)_b = (\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a = (E^i)_a$$

及 $P[(\mathrm{d}t)_a] = h_a{}^b\nabla_b t = 0$. 式(14-4-36)与(14-4-34)结合便得

$$\psi_{t'}{}^*(E^i)_a = (\psi_t{}^* \circ P \circ \eta_{\Delta t}{}^*)(E^i)_a. \qquad \square$$

现在就可对正文中关于空间张量场$T^a{}_b$的时间导数$\dot{T}^a{}_b$的定义的合理性作出解释. 我们最关心的是$\hat{\Sigma}$上的张量场$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$的时间导数. 设空间点$Q \in \hat{\Sigma}$的$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$值在t和t'时刻分别为$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}|_t$和$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}|_{t'}$, 则它在时刻$t$的时间导数自然定义为

$$\dot{T}^{\hat{a}}_{\hat{b}}|_{Q,t} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}|_{Q,t'} - T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}|_{Q,t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{t'}{}^*(T^a{}_b|_{q'}) - \psi_t{}^*(T^a{}_b|_q)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\psi_t{}^* \circ P \circ \eta_{\Delta t}{}^*)(T^a{}_b|_{q'}) - (\psi_t{}^* \circ P)(T^a{}_b|_q)}{\Delta t}$$

$$= (\psi_t{}^* \circ P) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta_{\Delta t}{}^*(T^a{}_b|_{q'}) - T^a{}_b|_q}{\Delta t} = (\psi_t{}^* \circ P)\, \mathscr{L}_t T^a{}_b = (\psi_t{}^* \circ P)\, \mathscr{L}_t(\psi_{t*} T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}), \tag{14-4-37}$$

其中第三步用到命题 14-4-7 以及$P(T^a{}_b|_q) = T^a{}_b|_q$. 以$\mathscr{D}$代表$\hat{\Sigma}$上张量场$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$的时间导数算符, 即$\mathscr{D}T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} \equiv \dot{T}^{\hat{a}}_{\hat{b}}$, 则式(14-4-37)表明

$$\mathscr{D} \equiv \psi_t{}^* \circ P \circ \mathscr{L}_t \circ \psi_{t*} \equiv \psi_t{}^* \circ \widetilde{\mathscr{L}_t} \circ \psi_{t*}. \tag{14-4-38}$$

不难看出上式对$\dot{T}^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$的定义与正文对$\dot{T}^a{}_b$的定义一致.

命题 14-4-8　　$\mathscr{D}(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}} = 0, \qquad \mathscr{D}(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}} = 0.$　　(14-4-39)

证明　在$\hat{\Sigma}$上定义坐标y^i时已证明y^i与t无关(用$\phi_t{}^*$和$\phi_{t'}{}^*$定义出的y^i一样),因而坐标基矢$(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}$和对偶基矢$(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}$也与$t$无关,所以由$\mathscr{D}T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} \equiv \dot{T}^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$及$\dot{T}^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$的定义立即有式(14-4-39).不过,如果愿意,也可借用式(14-4-38)给出一下较长的证明.

$$\mathscr{D}(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}} = (\psi_t{}^* \circ P \circ \mathscr{L}_t \circ \psi_{t*})(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}} = (\psi_t{}^* \circ P \circ \mathscr{L}_t)(\partial/\partial x^i)^a$$

$$= (\psi_t{}^* \circ P)\, \mathscr{L}_{\partial/\partial t}(\partial/\partial x^i)^a = (\psi_t{}^* \circ P)[\partial/\partial t, \partial/\partial x^i]^a = 0,$$

注意到对共动坐标系任一对偶坐标基矢有$\mathscr{L}_t(\mathrm{d}x^\mu)_a = 0$, 可知

$$\mathscr{D}(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}} = (\psi_t{}^* \circ P \circ \mathscr{L}_t \circ \psi_{t*})(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}} = (\psi_t{}^* \circ P \circ \mathscr{L}_t)[(\mathrm{d}x^i)_a + N^i(\mathrm{d}t)_a]$$

$$= (\psi_t{}^* \circ P)(\mathrm{d}t)_a \mathscr{L}_t N^i = \psi_t{}^*[P((\mathrm{d}t)_a \mathscr{L}_t N^i)] = 0,$$

因为$P(\mathrm{d}t)_a = 0$. $\square$

由命题 14-4-8 可知

$$\mathscr{D}T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}=\mathscr{D}\left[T^i{}_j\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^{\hat{a}}(\mathrm{d}y^j)_{\hat{b}}\right]=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^{\hat{a}}(\mathrm{d}y^j)_{\hat{b}}\mathscr{D}T^i{}_j,$$

而由 $\mathscr{D}$ 的定义不难看出 $\mathscr{D}T^i{}_j=\partial T^i{}_j/\partial t$，故

$$\mathscr{D}T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^{\hat{a}}(\mathrm{d}y^j)_{\hat{b}}\frac{\partial T^i{}_j}{\partial t},\tag{14-4-40}$$

可见 $\hat{\Sigma}$ 上张量场 $T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}$ 的时间导数的坐标分量等于 $\partial T^i{}_j/\partial t$．在使用坐标分量的文献中[如 Arnowitt, Deser, and Misner(1962)]，$\hat{\Sigma}$ 上的张量场用 $T^i{}_j$ 代表 [$T^i{}_j\equiv T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}(\mathrm{d}y^i)_{\hat{a}}(\partial/\partial y^j)^{\hat{b}}$]，该场的时间导数用 $\dot{T}^i{}_j$ 或 $\partial_t T^i{}_j$ 代表，它指的就是 $\partial T^i{}_j/\partial t$．式(14-4-40)证明了分量语言和张量语言在描述时间导数上的一致性. $T^i{}_j$ 也可看作 $T^a{}_b$ 的坐标分量，因为由

$$T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}=T^i{}_j(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}(\mathrm{d}y^j)_{\hat{b}}$$

可知　$T^a{}_b=\psi_{t*}(T^{\hat{a}}{}_{\hat{b}})=T^i{}_j\,\psi_{t*}[(\partial/\partial y^i)^{\hat{a}}]\,\psi_{t*}[(\mathrm{d}y^j)_{\hat{b}}]=T^i{}_j\,(E_i)^a(E^j)_b,$

从而

$$T^i{}_j=T^a{}_b(E^i)_a(E_j)^b=T^a{}_b[(\mathrm{d}x^i)_a+N^i(\mathrm{d}t)_a](\partial/\partial x^j)^b=T^a{}_b(\mathrm{d}x^i)_a(\partial/\partial x^j)^b,$$

[最末一步是因为 $T^a{}_b$ 的空间性导致 $T^a{}_b(\mathrm{d}t)_a=0$.] 即 $T^i{}_j$ 是 $T^a{}_b$ 的第 ij 坐标分量. 不过要注意 $T^a{}_b\neq T^i{}_j(\partial/\partial x^i)^a(\mathrm{d}x^i)_b$，除非 $N^a=0$.　**[选读 14-4-5 完]**

§ 14.5　3+1 分解应用举例——广义相对论初值问题简介

初值问题对物理理论是一个重要问题. 如果某一物理理论不具备好的初值表述，它就没有预言能力. 广义相对论的初值问题之所以备受关注，除了因为广义相对论作为一种物理理论必须接受这一检验之外，还因为人们对广义相对论的许多物理理解(包括时空的总能量、总动量和总角动量的概念及总能量的正定性)都有赖于广义相对论存在一个好的初值表述. 本节只对真空引力场的初值表述作粗浅介绍. 为便于理解，先简略回顾闵氏时空无源电磁场的初值表述. 初值理论研究系统在给定初值后的演化，无源电磁场的演化由麦氏方程组

$$\partial^a F_{ab}=0,\qquad \partial_{[a}F_{bc]}=0\tag{14-5-1}$$

描述. 选定闵氏时空的一个标准 3+1 分解后, 麦氏方程可表为 3 维形式:

$$\dot{\vec{E}} \equiv \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B}, \qquad \dot{\vec{B}} \equiv \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}\ ; \qquad (14\text{-}5\text{-}2a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \qquad (14\text{-}5\text{-}2b)$$

笼统地说, 式(14-5-2)可称为电磁场的运动(演化)方程, 然而仔细说来还应注意式(14-5-2a)同(14-5-2b)的区别. 式(14-5-2b)不含时间导数, 因而与演化无关, 它反映的无非是任一时刻(标准 3+1 分解中任一类空超曲面 Σ_t)的空间矢量场 $\vec{E}(t)$ 和 $\vec{B}(t)$ 各自应服从的条件: 两者的散度都必须为零. 这表明只有散度为零的空间矢量场才可充当电场和磁场. 这种由理论自身对场量的瞬时值所加的限制称为**约束**(constraint). 约束又称**瞬时定律**(instantaneous law), 以区别于由演化方程描述的**演化定律**(evolution law).① 麦氏方程(14-5-2)中真正反映演化的其实只有式(14-5-2a). 可以证明[参见 Wald(1984)P.252~254]电磁理论具有如下的好的初值表述: 设在标准分解中某一类空超曲面 Σ_0 (柯西面)上给定满足约束 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$ 的任意光滑空间矢量场 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{B}_0$, 则时空中存在麦氏方程组(14-5-1)的唯一解 F_{ab}, 它在 Σ_0 的表现就是 $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$. 再者, F_{ab} 对初值的依赖是连续的; (直观地说就是: 只要初值改变足够小, 则 F_{ab} 的改变也足够小. "足够小"的准确含义略.) 而且在 $J^+(\Sigma_0)$ (含义见 §11.1定义 8)内的任一点 p 的 F_{ab} 只依赖于 $J^-(p) \cap \Sigma_0$ 上的初值(图 14-25). 最后还应指出: 只要所指定的初值 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{B}_0$ 满足约束条件(14-5-2b), 则按演化方程(14-5-2a) 所得的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 在任一时刻都必定满足约束条件 [因为 $\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})/\partial t = \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{E}/\partial t) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ 及 $\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})/\partial t = 0$]. 可见演化是保约束的.

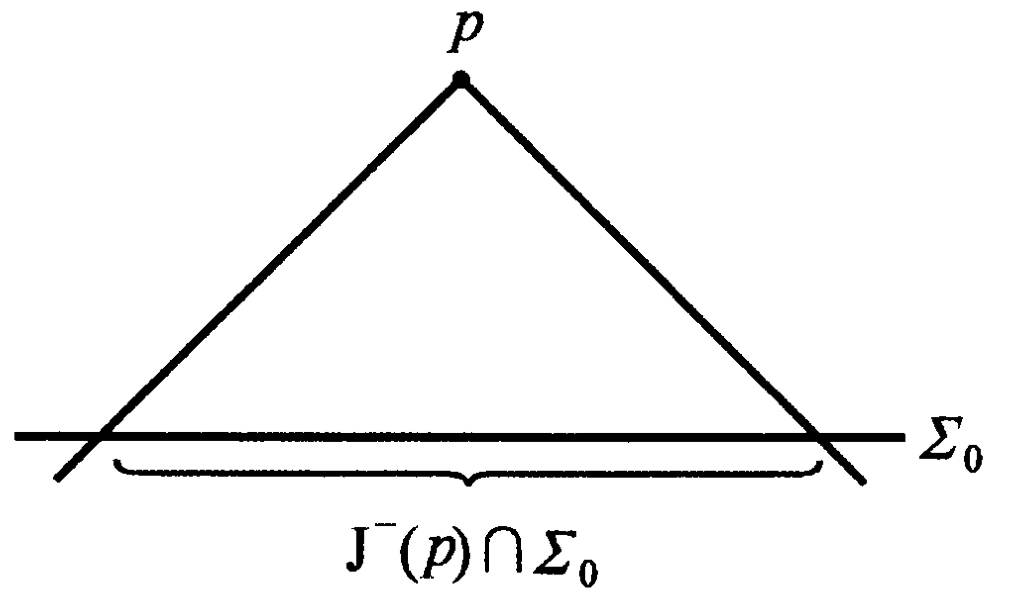


图 14-25　设 $p \in J^+(\Sigma_0)$, 则 $F_{ab}|_p$ 只取决于 $J^-(p) \cap \Sigma_0$ 上的初值

麦氏理论的上述初值表述(特别是对其中存在约束的认识)对理解广义相对论的初值表述很有帮助. 然而, 广义相对论与任何一种其他场论在初值问题上有一个根本不同: 其他场论在讨论初值问题前早已约定一个时空背景(例如上述麦氏理论

---

① 物理学史中的第一个演化定律(动力学定律)是牛顿定律, 第一个瞬时定律是高斯的 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$.

以闵氏时空为背景)，唯独广义相对论的初值问题的待求对象却是时空本身. 这似乎很奇怪：连时空都还没有，又如何在一个类空柯西面 Σ_0 上指定初值？(没有度规时，连超曲面的类空性都没有定义!) 答案虽然似乎出奇，却很巧妙：先在一个抽象的 3 维流形 Σ 上指定“初值”，即一个正定度规场 $\overset{0}{h}_{ab}$ 和一个对称的 (0,2) 型张量场 $\overset{0}{K}_{ab}$，(也要满足一定的约束条件，见后.) 然后证明存在某个 4 维时空 (M,g_{ab}) (g_{ab} 满足真空爱因斯坦方程)，对它作适当的 3+1 分解后，每张类空超曲面 Σ_t 都微分同胚于 Σ，其中一张(记作 Σ_0)上的诱导度规 h_{ab} 和外曲率 K_{ab} 正好分别等于(通过映射对应于) $\overset{0}{h}_{ab}$ 和 $\overset{0}{K}_{ab}$. 这时就可把 Σ_0 及其上的 (h_{ab},K_{ab}) 分别解释为初始类空超曲面 Σ_0 上的初值(代表初始时刻的引力场)，把 (M,g_{ab}) 解释为这个初值经演化而得的产物[任一 Σ_t 上由 g_{ab} 确定的 (h_{ab},K_{ab}) 代表时刻 t 的引力场]. 可见，在广义相对论中，“初始面”、“初值”和“时间演化”等词只在求得初值问题的解之后才获得意义. 下面是这一认识的具体化. 顺便一提，由式(14-4-16)以及“$\mathscr{L}_{\vec{n}}$ 包含了被求导空间张量场的时间演化的全部实质性信息”可知 K_{ab} 实质上代表 h_{ab} 的时间导数 $\dot{h}_{ab}$，因此，所谓给定初值 $\overset{0}{h}_{ab}$ 和 $\overset{0}{K}_{ab}$ 实质上也就是给定了初始 h_{ab} 及其初始时间导数.

无源电磁场的运动方程是无源麦氏方程，无源引力场的运动方程则是真空爱因斯坦方程

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0\,. \tag{14-5-3}$$

麦氏方程组(14-5-2)共有 8 个分量方程，其中两个[式(14-5-2b)]是约束方程，其余 6 个[式(14-5-2a)]才是演化方程. 类似地，式(14-5-3)相当于 10 个分量方程. 下面证明这 10 个方程中有 4 个是约束方程，其余 6 个才是演化方程. 具体说，在选定 3+1 分解后，我们要证明 $G_{ab}=0$ 的“时-时分量” $G_{ab}n^a n^b=0$ (一个方程)和“时-空分量” $G_{ab}n^a h^b{}_c=0$ (相当于 3 个方程)是约束方程，“空-空分量” $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ (相当于 6 个方程)是演化方程.

命题 14-5-1
$$2G_{ab}n^a n^b = {}^3R - K_{ab}K^{ab} + K^2\,. \tag{14-5-4}$$

证明
$$\begin{aligned} {}^3R \equiv h^{ac}h^{bd}\,{}^3R_{abcd} &= h^{ac}h^{bd}h_a{}^e h_b{}^f h_c{}^l h_d{}^m R_{eflm} - h^{ac}h^{bd}(K_{ca}K_{bd} - K_{cb}K_{ad}) \\ &= h^{el}h^{fm}R_{eflm} - K^2 + K^{ab}K_{ab}\,, \end{aligned} \tag{14-5-5}$$

其中第二步用到式(14-4-20). 而

$$h^{el}h^{fm}R_{eflm} = (g^{el} + n^e n^l)(g^{fm} + n^f n^m)R_{eflm} = R + 2n^a n^b R_{ab} = 2G_{ab}n^a n^b, \qquad (14\text{-}5\text{-}6)$$

其中第二步用到 $n^e n^f n^l n^m R_{eflm} = n^{(e}n^{f)}n^l n^m R_{[ef]lm} = 0$，第三步用到 $G_{ab} \equiv R_{ab} - Rg_{ab}/2$ 以及 $n^a n^b g_{ab} = -1$. 式(14-5-5)与(14-5-6)结合便得式(14-5-4).

□

命题 14-5-2

$$G_{ab}n^a h^b{}_e = \mathrm{D}_a K^a{}_e - \mathrm{D}_e K. \qquad (14\text{-}5\text{-}7)$$

证明　由 $R_{abc}{}^d$ 的定义得

$$R_{abc}{}^d n_d = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}n_c, \qquad (14\text{-}5\text{-}8)$$

以 $h^b{}_e g^{ac}$ 作用于上式两边，易见左边等于式(14-5-7)左边，经一番推导后发现(习题)右边也等于式(14-5-7)右边. 提示：令 $A_e \equiv h^b{}_e g^{ac} 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}n_c$，得

$$A_e = h^b{}_e \nabla^a K_{ab} - h^b{}_e \nabla_b K + \text{附加项}.$$

再用 $\mathrm{D}_a K^a{}_e$ 表出 $h^b{}_e \nabla^a K_{ab}$，便得 $A_e = \mathrm{D}_a K^a{}_e - \mathrm{D}_e K$. □

由式(14-5-4)和(14-5-7)可知真空爱因斯坦方程 $G_{ab} = 0$ 的时-时和时-空分量方程可分别表为

$$^3R - K_{ab}K^{ab} + K^2 = 0, \qquad (14\text{-}5\text{-}9)$$

$$\mathrm{D}_a K^a{}_c - \mathrm{D}_c K = 0. \qquad (14\text{-}5\text{-}10)$$

上两式左边都是 Σ_t 上的空间张量场，只含基本动力学变量 h_{ab}, K_{ab} 及其空间导数而不含其时间导数，因此只对基本变量在每一瞬时的值 $h_{ab}(t), K_{ab}(t)$ 给出限制，这就是广义相对论中的约束. 因式(14-5-9)和(14-5-10)分别为标量场和对偶矢量场等式，故共含 4 个约束.

设时空 (M, g_{ab}) 满足 $G_{ab} = 0$，则其时-时和时-空分量方程表明时空的任一 $3+1$ 分解所得的空间张量场 (h_{ab}, K_{ab}) 满足约束(14-5-9)和(14-5-10). 下面讨论由 $G_{ab} = 0$ 的空-空分量方程 $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d = 0$ 所给出的 h_{ab} 和 K_{ab} 的演化方程，即 $\dot{h}_{ab}$ 和 $\dot{K}_{ab}$ 所满足的方程. 前面已从纯数学角度推出 $\dot{h}_{ab}$ 和 $\dot{K}_{ab}$ 的表达式，即式(14-4-29)和(14-4-30)，它们不论 $G_{ab} = 0$ 是否满足都成立. 两式中与 G_{ab} 是否为零有关的只有式(14-4-30)右边第一项 $Nh^c{}_a h^d{}_b R_{cd}$，当 $G_{ab} = 0$ 时 $R_{ab} = 0$，导致该项为零，因此 $G_{ab} = 0$ 所给出的演化方程为

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + \mathscr{L}_{\vec{N}} h_{ab}, \qquad (14\text{-}5\text{-}11)$$

$$\dot{K}_{ab} = -N\,{}^3R_{ab} + 2NK^c{}_a K_{cb} - NKK_{ab} + \mathrm{D}_a\mathrm{D}_b N + \mathscr{L}_{\vec{N}} K_{ab}. \qquad (14\text{-}5\text{-}12)$$

反之，我们来证明，只要 (h_{ab},K_{ab}) 满足演化方程(14-5-11)、(14-5-12)和约束方程(14-5-9)、(14-5-10)，则 (M,g_{ab}) 满足真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=0$. 对比式(14-5-12)和(14-4-30)(它不论 $G_{ab}=0$ 是否满足都成立)可知 $R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$. 只要证明在约束方程(14-5-9)、(14-5-10)满足时 $R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ 能导致 $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$，便知 $G_{ab}=0$. 下面给出这一证明.

命题 14-5-3　约束方程(14-5-9)、(14-5-10)满足时，$R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ 导致 $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$.

注 1　本命题还可强化为：当式(14-5-9)、(14-5-10)满足时 $R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ 等价于 $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$.

证明　式(14-5-9)相当于 $G_{ab}n^a n^b=0$，由此不难推出

$$R_{ab}n^a n^b=-\frac{1}{2}R, \tag{14-5-13}$$

式(14-5-10)相当于 $G_{ab}n^a h^b{}_c=0$，由此不难推出(注意到 $g_{ab}n^a h^b{}_c=n_b h^b{}_c=0$)

$$R_{ab}n^a n^b n_c=-R_{ac}n^a. \tag{14-5-14}$$

由式(14-5-13)、(14-5-14)得

$$R_{ac}n^a=\frac{1}{2}Rn_c. \tag{14-5-15}$$

借助于上式及式(14-5-14)，由 $R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ 不难推出 $R_{cd}+Rn_c n_d/2=0$，两边与 g^{cd} 缩并得 $R=0$，于是 $G_{ab}=R_{ab}$，故 $R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$ 导致 $G_{ab}h^a{}_c h^b{}_d=0$. □

可见约束方程(14-5-9)、(14-5-10)和演化方程(14-5-11)、(14-5-12)反映了真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=0$ 的全部内容，可以看作 $G_{ab}=0$ 的 3 维表述. 演化方程(14-5-11)、(14-5-12)所代表的 (h_{ab},K_{ab}) 的演化也称为**几何动力学**(geometrodynamics). 在这种动力学中，整个时空被视为正定几何沿着由类空超曲面所代表的时间而演化的一部动力学历史.

最后说明两点. 第一，借助于演化方程(14-5-11)、(14-5-12)可以证明约束方程(14-5-9)、(14-5-10)左边的时间导数为零，即

$$\mathscr{L}_{\vec{t}}({}^3R-K_{ab}K^{ab}+K^2)=0,\quad \mathscr{L}_{\vec{t}}(\mathrm{D}_a K^a{}_c-\mathrm{D}_c K)=0.$$

(利用下章的知识，这一证明变得很容易. 见小节 15.7.4 末段.) 可见，只要在初值面 Σ 上指定的初值 $\overset{0}{h}_{ab}$ 和 $\overset{0}{K}_{ab}$ 满足约束方程(14-5-9)、(14-5-10)，则它在按照方程(14-5-11)、(14-5-12)演化的过程中的任一时刻都满足约束方程(演化保约束). 第二，由于麦氏方程是线性方程而爱因斯坦方程为非线性方程，后者的初值问题比前者

复杂得多. 然而, 可以证明如下定理[准确提法及证明见 Wald(1984)10.2 节]: 设Σ是 3 维流形, $\overset{0}{h}_{ab}$是Σ上的光滑正定度规场, $\overset{0}{K}_{ab}$是Σ上的光滑对称张量场, $\overset{0}{h}_{ab}$、$\overset{0}{K}_{ab}$满足约束方程(14-5-9)、(14-5-10), 则存在满足以下要求的唯一时空(M,g_{ab}): (a)g_{ab}是真空爱因斯坦方程$G_{ab}=0$的解; (b)存在嵌入映射$\psi:\Sigma\to M$使$\psi[\Sigma]$是(M,g_{ab})的柯西面(图 14-26), 因而(M,g_{ab})是整体双曲时空; (c)$\psi[\Sigma]$上的诱导度规h_{ab}和外曲率K_{ab}满足$\overset{0}{h}_{ab}=\psi^* h_{ab}$, $\overset{0}{K}_{ab}=\psi^* K_{ab}$. 所谓 (M,g_{ab})的唯一性是指: 若∃其他满足以上三要求的时空(M',g'_{ab}), 则∃嵌入映射ϕ : $M'\to M$, 其中ϕ : $M'\to\phi[M']\subset M$是等度规映射[因此称(M,g_{ab})为初值$(\Sigma,\overset{0}{h}_{ab},\overset{0}{k}_{ab})$的**最大柯西发展**(maximal Cauchy development)]. 再者, g_{ab}对初值$\overset{0}{h}_{ab}$和$\overset{0}{K}_{ab}$有连续的依赖关系, 等等.

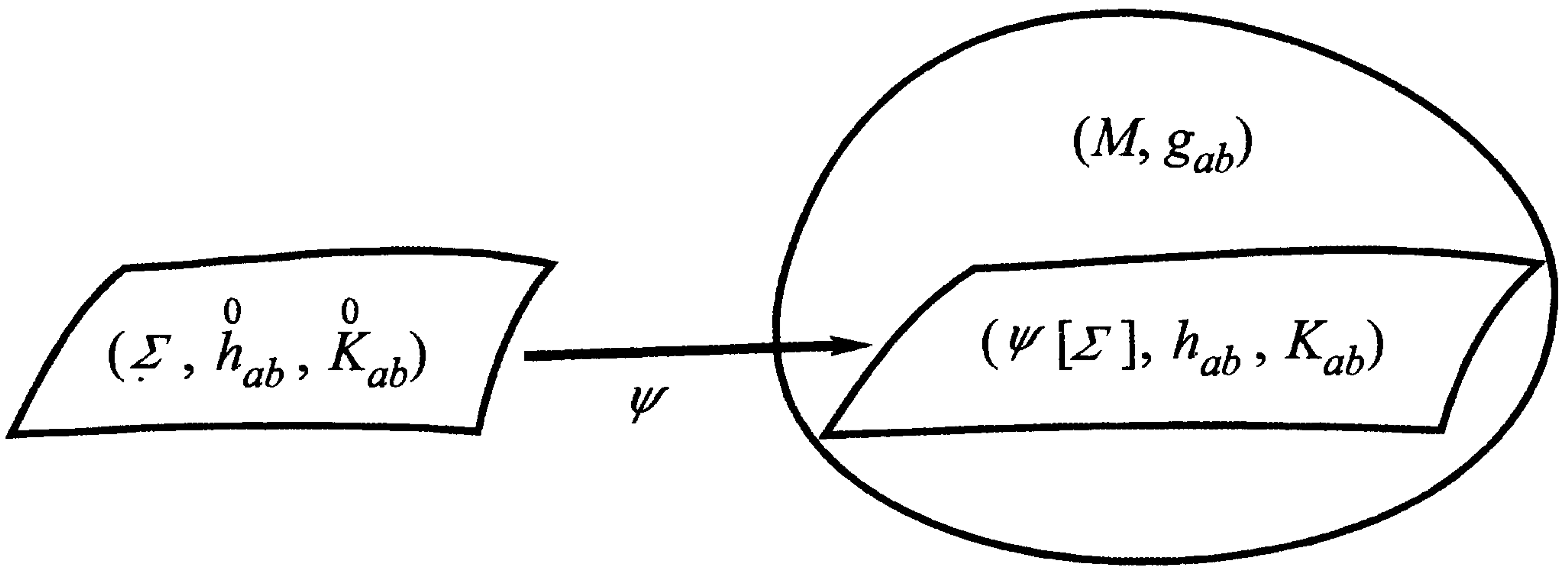


图 14-26 存在嵌入映射ψ : $\Sigma\to M$使$\psi[\Sigma]$是(M,g_{ab})的柯西面

注 2 定理中"再者"的结论表明广义相对论存在一个"好的"初值表述, "好的"的专业术语是**适定的**(well posed), 准确定义见 Wald(1984)第 10 章; Hawking and Ellis(1973)第 7 章.

习 题

~1. 试证 §14.1 注 2①中方括号内的公式, 即$\mathscr{L}_Z w^a = Z^a \eta^b A_b$.

~2. 设Z^a是参考系$\mathscr{R}$的观者 4 速场, $\gamma(\tau)$是$\mathscr{R}$内的一个观者, w^a是$\gamma(\tau)$上的空间矢量场, 试证w^a是$\gamma(\tau)$的邻居的充要条件是$\gamma(\tau)$上有函数α使$\mathscr{L}_Z w^a=\alpha Z^a$.

3. 借用式(14-1-30)和命题 14-1-2 重解 §14.1 例 1. 提示: 由式(10-1-19)可知对 RW 系有$Z^a=(\partial/\partial t)^a$, $h_{ab}=a^2(t)\hat{h}_{ab}$, 其中

$$\hat{h}_{ab}\equiv\frac{1}{1-kr^2}(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b+r^2(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b .$$

先证$\mathscr{L}_Z\hat{h}_{ab}=0$, 再证$\mathscr{L}_Z h_{ab}=2a^{-1}\dot{a}\,h_{ab}$ (每步都不难), 便易得式(14-1-25)和(14-1-26). 再由$Z_a=-(\mathrm{d}t)_a$易见$(\mathrm{d}Z)_{ab}=0$, 满足式(14-1-27), 由命题 14-1-2 便知$\omega_{ab}=0$.

~4. 求 Reissner-Nordstrom 时空中 Reissner-Nordstrom 参考系的θ, σ_{ab}和ω_{ab}.

5. 补证推论 14-1-5 和 14-1-6.

~6. (a)试证闵氏时空中以式(14-1-36)的 Z^a 为观者4速场的参考系的 B_{ab} 为零. (b)计算该系观者的 4 加速 A^a 并验证 $(\mathrm{d}A)_{ab} \neq 0$, 除非 $\mathrm{d}g(t)/\mathrm{d}t = 0$.

7. 写出图 14-5 中类空曲线 L 的方程并用闵氏度规计算 L_{ad} 段的长度.

8. 式(14-2-15)的 3 维线元的非欧性其实来自前两项. 略去第 3 项所得到的 2 维线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(1-\omega^2 r^2)^{-1}\mathrm{d}\varphi^2$ 物理上描述转盘观者测得的转盘表面的非欧几何. 计算此 2 维线元的黎曼张量并验证它为零当且仅当 $\omega = 0$.

~9. 仍讨论上题的 2 维非欧线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$, 试证

(a) 径向线是以 r 为仿射参数(而且是线长参数)的测地线.

(b) 圆周率等于 $\Gamma\pi$,其中 $\Gamma \equiv (1-\omega^2 R^2)^{-1/2}$, R 是所论圆周的半径.

10. 试证静态参考系必为坐标时可同步参考系.

~11. 用“是”和“非”在表 14-1 中填空.

表 14-1　习题 11 用表

	测地系	稳态系	静态系	刚性系	无转动系	任一观者觉得其他观者不动	固有时可同步系	局部固有时可同步系	坐标时可同步系	局部坐标时可同步系	Z类系
施瓦西系											
RN 系											
KN 时空的 BL 系											
式(14-1-33)对应系											
爱因斯坦转盘系											
标准宇宙模型的 RW 系											
闵氏时空惯性系											
闵氏时空 Rindler 系											

~12. 求 RN 时空用 RN 坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 所作 3+1 分解的位移矢量 N^a 和时移函数 N.

13. 在用 $\{\Sigma_t\}$ 分层的 3+1 分解中, 设 $G(\tau)$ (τ 代表固有时)是一个与 $\{\Sigma_t\}$ 正交的观者, 试证时移函数 $N = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$. (可见 N 等于正交观者身上单位坐标时间内所流逝的固有时间. 英语中 lapse 代表时间的流逝, 故称 N 为 lapse function.)

14. 试证 §14.4 定义 1 中条件(a), (b)的等价性.

15. 试证式(14-4-8)、(14-4-12)和(14-4-17).

~16. 试证命题 14-4-3.

~17. 试给式(14-4-21)补上推导.

18. 试证命题 14-5-2, 即式(14-5-7)(提示在该命题证明之末).

附录B 量子力学数学基础简介

量子力学数学基础的主要内容是泛函分析，特别是希尔伯特空间及线性算符的理论. 读过本书第 1, 2 章的读者对集合、映射、拓扑、矢量空间及其对偶空间、张量、度规等概念比较熟悉，这为学习泛函分析提供了一定的方便. 学过上述概念的物理系学生往往跃跃欲试地把量子力学的内积、左右矢、线性算符以及波函数用正交归一基底展开等一系列问题同上述概念联系起来思考，力图求得更为深入和清晰的理解. 他们希望有一份简明读物作参考. 本附录主要为满足这种需要而产生，此外也为附录C 的学习提供必要的基础. 讲解中尽量与本书前两章以及量子力学的有关内容(特别是Dirac 的左右矢记号)相联系或对比. 为了尽量节省读者的时间，我们只介绍最为必需的概念和定理，而且略去其中少数概念的定义和某些定理的证明. 想深入学习泛函分析的读者则应阅读有关教程或专著.

§B.1 Hilbert 空间初步

B.1.1 Hilbert 空间及其对偶空间

§2.2 定义 1 的矢量空间称为实矢量空间. 把定义中的 $\mathbb{R}$ 改为全体复数的集合 $\mathbb{C}$ 便得复矢量空间. 定义了内积的复矢量空间 V 称为(复)内积空间. 内积是一个从 $V\times V$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射. 以 i 代表这一映射，即 $i: V\times V\to\mathbb{C}$，则 i 可看作有两个槽的机器，在两槽中分别输入 $f, g\in V$，便得一个复数. 因此，i 也可形象地记作 $i(\cdot,\cdot)$，括号中的两个圆点代表两个槽. 为简单起见，索性把 $i(\cdot,\cdot)$ 简写为 $(\cdot,\cdot)$，确切定义如下：

定义 1 复矢量空间 V 称为**内积空间**(inner product space)，若存在内积映射 $(\cdot,\cdot)$： $V\times V\to\mathbb{C}$，对任意 $f,g,h\in V$ 和任意 $c\in\mathbb{C}$ 满足

(a) $(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$；

(b) $(f,cg)=c(f,g)$；

(c) $(f,g)=\overline{(g,f)}$ [其中 $\overline{(g,f)}$ 代表复数 (g,f) 的共轭复数]；

(d) $(f,f)\geqslant 0$，且 $(f,f)=0\Leftrightarrow f=0$.[①]

注 1 定义 1 的条件(a), (b)表明内积映射 $(\cdot,\cdot)$ 对第二槽是线性的. 条件(c)[配以条件(a), (b)]则表明 $(f+g, h)=(f,h)+(g,h)$ 及 $(cf,g)=\bar{c}(f,g)$. 由于具有这种

① 只含零元的空间也可看作内积空间，但本附录在不加声明时只讨论维数大于零的内积空间.

性质, 我们说映射 $(\cdot,\cdot)$ 对第一槽是**反线性(或共轭线性)的**. 条件(d)表明 $(f,g)=0\ \forall g\in V \Rightarrow f=0$, 因可取 $g=f$.

注 2 定义 1 对实矢量空间也适用, 只须把 $\mathbb{C}$ 改为 $\mathbb{R}$. 实空间的内积就是§2.5 定义的正定度规, 但是, 由于非正定度规不满足定义 1 的条件(d), 所以度规未必是内积.

例 1 $\mathrm{C}[a,b]\equiv\{[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上连续复值函数 $f(x)\}$

是无限维复矢量空间. 定义内积

$$(f,g) := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall f,g\in \mathrm{C}[a,b], \tag{B-1-1}$$

则 $\mathrm{C}[a,b]$ 是内积空间(请读者自行验证上式定义的内积的确满足定义 1).

利用内积可自然定义内积空间中任意两点的距离, 进而定义空间的拓扑.

定义 2 内积空间 V 中任意两元素 f 和 g 的距离定义为

$$d(f,g) := \sqrt{(f-g,f-g)}\,.$$

易见 $d(f,g)=d(g,f)$. 设 $f\in V$, $r>0$, 则以 f 为心、以 r 为半径的**开球**定义为

$$B(f,r) := \{\, g\in V \mid d(g,f)<r \,\}\ .$$

用开球可给 V 定义拓扑(类似于§1.2 例 3 的"通常拓扑"):

$$\mathscr{T} := \{\text{空集或 } V \text{ 中能表为开球之并的子集}\}.$$

可见内积空间 V 可自然地被定义为一个拓扑空间. 上式定义的拓扑 $\mathscr{T}$ 叫做 V 的自然拓扑. 今后如无特别声明, 凡涉及 V 的拓扑时一律指这一拓扑.

§2.3 讲过(有限维)实矢量空间 V 的对偶空间 V^*, 它是由 V 到 $\mathbb{R}$ 的全体线性映射的集合. 对(有限或无限维)复矢量空间 V, 对偶矢量可定义为由 V 到 $\mathbb{C}$ 的线性映射. 然而内积空间除了是复矢量空间外还是拓扑空间, 因此对映射 $\eta: V\to\mathbb{C}$ 还可问及是否连续的问题. [这时还涉及 $\mathbb{C}$ 的拓扑, 其定义也很自然: 设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 且 $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$, $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ (其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$), 则 z_1,z_2 的距离可定义为 $d(z_1,z_2) := [(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2]^{1/2}$, 用此距离便可定义开球, 从而定义 $\mathbb{C}$ 的拓扑.] 在泛函分析中, 每个连续的线性映射 $\eta: V\to\mathbb{C}$ 称为 V 上的一个**连续线性泛函**(continuous linear functional). 我们关心 V 上全体连续线性泛函的集合(它有许多好的性质), 并称它为 V 的对偶空间. ①

① 若 V 为有限维, 则 V 上的线性泛函必定连续. 因此只当 V 为无限维时连续性才是对线性泛函有实质意义的要求.

定义 3　内积空间 V 的**对偶空间**(又称**共轭空间**)定义为

$$V^* := \{\eta: V \to \mathbb{C} \mid \eta \text{ 为连续的线性映射}\}.$$

V^* 也可看作复矢量空间, 为此只须用如下的自然方法定义加法和数乘:

加法　$(\eta_1+\eta_2)(f) := \eta_1(f)+\eta_2(f), \quad \forall \eta_1,\eta_2 \in V^*, f\in V$;

数乘　$(c\eta)(f) := c\cdot\eta(f), \quad \forall \eta\in V^*, f\in V, c\in\mathbb{C}$.

(由此可知零元是 V^* 中这样的元素, 它作用于任意 $f\in V$ 都得零.)

读者至此自然会联想到量子力学的右矢和左矢空间, 并猜想右矢空间是内积空间 V, 而左矢空间则是 V^*. 然而事情比此略为复杂. 要保证 Dirac 的左右矢记号得心应手, 左右逢源, 左、右矢空间应该"完全对等". 这似乎不难: 根据§2.5, 有限维实矢量空间 V 上的度规自然诱导一个从 V 到 V^* 的一一到上的线性映射. 然而, 由于复空间的内积与实空间的度规的少许不同, 复空间 V 上的内积自然诱导的从 V 到 V^* 的映射不是线性而是反线性的. 不过这不构成什么问题. 真正构成问题的是量子力学中用到的内积空间多数是无限维的, 而这导致上述映射未必到上, 即 V 与 V^* "不一样大". 先看如下命题:

命题 B-1-1　内积映射 $(\cdot,\cdot)$ 自然诱导出一个一一的、反线性的映射 $\nu: V\to V^*$.

证明　设, 则 $\eta_f \equiv (f,\cdot)$ 是从 V 到 $\mathbb{C}$ 的映射. 由内积定义可知它是线性的. 还可证明(略)它是连续的, 因此 $\eta_f \in V^*$. 具体说, η_f 是 V^* 的这样一个元素, 它作用于 $g\in V$ 的结果为 $\eta_f(g) := (f,g)$. 可见 $(\cdot,\cdot)$ 自然诱导出一个映射 $\nu: V\to V^*$, 定义为 $\nu(f) := \eta_f$. 映射 ν 的一一性和反线性性的证明留作习题. 反线性性是指

$$\nu(f+h)=\nu(f)+\nu(h), \quad \nu(cf)=\bar{c}\nu(f), \quad \forall f,h\in V,\ c\in\mathbb{C}. \qquad \square$$

若 V 是有限维空间, 则 V^* 与 V 有相同维数, 因而上述反线性映射 $\nu: V\to V^*$ 一定到上. 若 V 是无限维的, 则 V^* 也是无限维的, 这时 $\nu: V\to V^*$ 不一定到上. 直观地说, V^* 有可能"比 V 大", 即 $\nu[V]\subset V^*$ 但 $\nu[V]\neq V^*$. 然而, 为保证 Dirac 的左右矢运算给出正确结果, 我们需要 V^* 同 V "一样大", 即 $\nu[V]=V^*$. 不久将看到, 其实 V^* 比 V 最多"只多一层皮", 只要给 V 适当地"补上一层皮", $\nu: V\to V^*$ 就可到上, V 与 V^* 就"一样大". 为了用准确语言表述这些直观思考, 我们先介绍下列数学概念.

定义 4　设 V 为内积空间, $f\in V$, $\{f_n\}$ 是 V 中的一个序列(见§1.3 定义 6). 我们说 $\{f_n\}$ **收敛于** f (记作 $f_n\to f$), 若 $\lim_{n\to\infty} d(f,f_n)=0$. f 称为序列 $\{f_n\}$ 的**极限**,[①] 记

① 内积空间可自然看作拓扑空间, 而拓扑空间中的点序列的极限已有定义(§1.3 定义 7). 不难证明该定义同本页定义等价.

作 $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

定义 5 V 中的序列 $\{f_n\}$ 称为**柯西序列**(Cauchy sequence), 若 $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$ 使当 $n,m\geqslant N$ 时有 $d(f_n,f_m)<\varepsilon$.

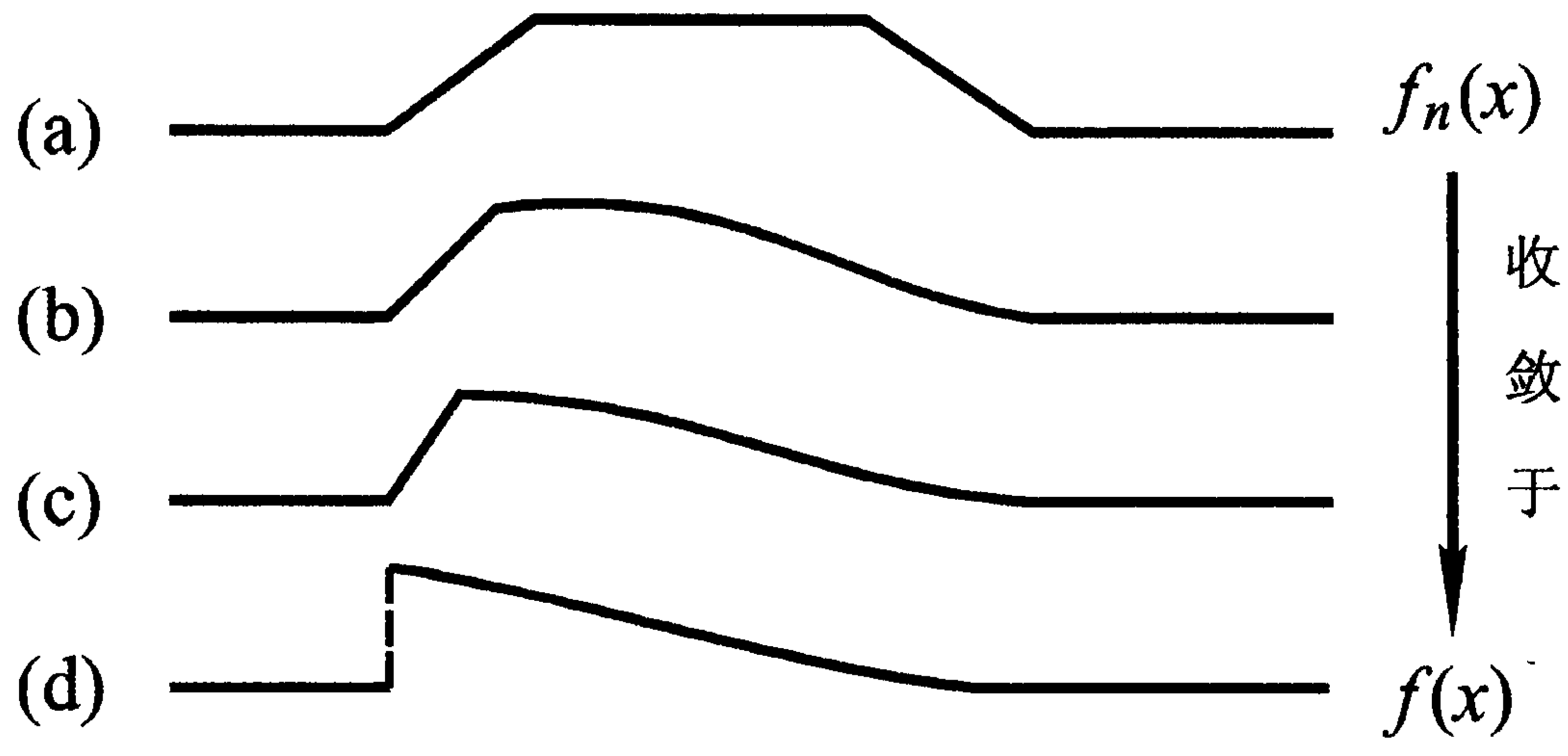


图 B-1 连续实值函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 C$[a,b]$ 中不收敛, 因 $f(x)\notin$ C$[a,b]$

可以证明, 收敛(于任一 $f\in V$)的序列一定是柯西序列, 但反之不然.

定义 6 内积空间 V 称为**完备的**(complete), 若其中任一柯西序列收敛.

例 1 的C$[a,b]$是不完备的内积空间. 图 B-1 是对此的一个直观解释. 图中(a), (b), (c)代表C$[a,b]$中的某一柯西序列 $\{f_n(x)\}$ 的三个元素(其序号 n 依次增大). 序列 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于C$[a,b]$的任何元素. [如果一定要谈收敛, 则也可说它收敛于(d)代表的函数 $f(x)$, 但 $f(x)\notin$ C$[a,b]$, 因为它不连续.] 柯西序列 $\{f_n(x)\}$ 在C$[a,b]$内没有极限表明C$[a,b]$不完备. 为使之完备化, 可把$[a,b]$上虽不连续却平方可积的复值函数[例如图 B-1 的 $f(x)$]包含进去, 扩大后的空间记作 $\mathrm{L}^2[a,b]$, 即

$$\mathrm{L}^2[a,b]\equiv\{f:[a,b]\to\mathbb{C}\mid f\text{ 满足}\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty\}.^{①}\qquad\text{(B-1-2)}$$

仍用式(B-1-1)为内积定义, 则可证 $\mathrm{L}^2[a,b]$ 是完备的内积空间.

内积空间C$[a,b]$的这一完备化程序很有启发性. 事实上, 任何不完备的内积空间 V 都可以完备化, 为此只须把它略加扩大——把所有柯西序列“应有的极限点”都补进 V 中. 可以证明, 对任何不完备内积空间 V, 总可找到完备的内积空间 $\tilde{V}$, 使得 $V\subset\tilde{V}$ 而且 $\bar{V}=\tilde{V}$, 其中 $\bar{V}$ 是把 $\tilde{V}$ 看作拓扑空间(用其内积定义拓扑)时子集 V 的闭包. 直观地可以说 $\tilde{V}$ 比 V “最多只多一层皮”.

定义 7 完备的内积空间叫**希尔伯特空间**(Hilbert space), 记作 $\mathscr{H}$.

① 式中的积分是指 Lebesgue 积分. 严格地说, 函数 $f(x)$ 还应具有“可测性”. 可以这样说: 物理上遇到的函数都满足这一要求. 此外, 两个函数如果只在测度为零的集上不同就应被视为 $\mathrm{L}^2[a,b]$ 的同一元素. 本脚注同样适用于 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

注 3 有限维的内积空间一定完备，因此一定是Hilbert空间. 然而量子力学中用到的 Hilbert 空间多数是无限维的. 无限维是许多问题变得复杂的根源.

同 $L^2[a,b]$ 相仿,

$$L^2(\mathbb{R}^n) \equiv \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \text{ 满足} \int |f|^2 \, d^n x < \infty\} \quad [\text{内积定义仿式(B-1-1)}] \qquad \text{(B-1-3)}$$

也是 Hilbert 空间，其中 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 是量子力学常用的波函数空间.

由于具有完备性，Hilbert 空间有许多很好的性质，其中对我们特别有用的就是 $\mathscr{H}$ 与其对偶空间 $\mathscr{H}^*$ "一样大"，即 $v[\mathscr{H}] = \mathscr{H}^*$，见如下命题:

命题 B-1-2 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，$\mathscr{H}^*$ 是其对偶空间，则 $\forall \eta \in \mathscr{H}^*$，有唯一的 $f_\eta \in \mathscr{H}$ 使 $\eta(g) = (f_\eta, g)$ $\forall g \in \mathscr{H}$.

证明 见任一泛函分析教程中关于 Riesz 表现定理的证明. □

注 4 命题 B-1-2 表明，对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，命题 B-1-1 的 v: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ 是到上的，即 v 是一一到上的反线性映射. 这个命题的重要性在于保证 $\mathscr{H}$ 同 $\mathscr{H}^*$ "一样大"，请注意不完备内积空间没有这样好的结论. 可见物理学不但需要内积空间，而且需要完备的内积空间——Hilbert 空间.

利用映射 v : $\mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ 还可把 $\mathscr{H}^*$ 定义为 Hilbert 空间: $\forall \eta, \xi \in \mathscr{H}^*$，由命题 B-1-2 可知有唯一的 $f_\eta, f_\xi \in \mathscr{H}$ 使 $\eta = v(f_\eta), \xi = v(f_\xi)$. 定义 η 和 ξ 的内积为

$$(\eta, \xi) := (f_\xi, f_\eta), \qquad \text{(B-1-4)}$$

则不难验证(习题) (η, ξ) 满足内积定义，故 $\mathscr{H}^*$ 是内积空间. 还可证明 $\mathscr{H}^*$ 是完备的，因而也是 Hilbert 空间. 可见 $\mathscr{H}^*$ 与 $\mathscr{H}$ 实在非常"像"：它们之间不但存在一一到上的反线性映射，而且这一映射还在式(B-1-4)的意义上保内积. $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}^*$ 的这种相像性使我们可以把它们分别用作量子力学中的右矢和左矢空间(详见小节 B.1.4).

[选读 B-1-1]

设 V 是不完备的内积空间(因而不是 Hilbert 空间)，我们来说明 V^* 仍可被自然地定义为 Hilbert 空间. 以 $\mathscr{H}$ 代表把 V 完备化后得到的 Hilbert 空间，则 $\mathscr{H} = \overline{V}$. 按照命题 B-1-2 及其后面的讨论，$\mathscr{H}^*$ 也是 Hilbert 空间. $\mathscr{H}^*$ 的任一元素 η 是 $\mathscr{H}$ 上的连续线性泛函，把它的作用范围限制在 $V \subset \mathscr{H}$，便得 V 上的一个连续线性泛函，记作 $\tilde{\eta} \in V^*$. 可见存在映射 β : $\mathscr{H}^* \to V^*$，定义为 $\beta(\eta) := \tilde{\eta}$. 由 $\mathscr{H} = \overline{V}$ 并借助柯西序列可以证明映射 β 是一一到上的线性映射. 于是可用 β 将 V^* 和 $\mathscr{H}^*$ 认同，从而使 V^* 也获得 Hilbert 空间的结构.

小结 无论内积空间 V 是否完备，其对偶空间 V^* 一定完备(一定是 Hilbert 空间). 若 V 不完备，则 $v[V] \neq V^*$ 而 $\overline{v[V]} = V^*$(此即"最多只多一层皮"的含义)；若 V

完备, 则 $\nu[V]=V^*$. **[选读 B-1-1 完]**

[选读 B-1-2]

利用连续线性泛函的概念还可对 δ 函数赋予准确的数学含义. 众所周知, Dirac 最先提出 δ 函数概念并用它成功地解决了许多物理问题. 他把 $\delta(x)$ 定义为满足如下要求的“一元函数”:

(a) $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$,

(b)对 $\mathbb{R}$ 上任意函数 $\varphi(x)$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$. (B-1-5)

然而这样定义的 $\delta(x)$ 无论如何不是普通意义下的一元函数, 因为 $\delta(0)=\infty$ 不符合“一元函数是从 $\mathbb{R}$ (或其子集)到 $\mathbb{R}$ 的映射”这一定义. 而且, 更重要的, 条件(a)表明 $\delta(x)$ 几乎处处为零, 根据 Lebesgue 积分理论, 只能有 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=0$, 而条件(b)却要求 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$. 这使得数学界开始时拒绝接受 δ 函数. 然而 δ 函数“屡战屡捷”的事实引起了某些数学家的兴趣, 他们经过努力后提出了广义函数理论(20 世纪 40 年代左右), 从而把 δ 函数置于严格的数学基础之上. 简单地说, δ 函数不是普通意义的函数而是某个特定的函数空间 K (带拓扑)上的连续线性泛函. 观察式(B-1-5b)不难发现 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)(\cdot)\mathrm{d}x$ 是一部有一个输入槽的机器, 输入任一函数 $\varphi(x)$ 就产出一个复(或实)数 $\varphi(0)$, 可见 $\delta(x)$ 的实质是函数空间上的线性泛函. 用以定义广义函数的那个函数空间 K 是全体“足够好”的函数的集合, 定义为

$$K:=\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,|\,\varphi\text{为}C^{\infty},\ \varphi\text{的支集}^{①}\text{有界}\}. \tag{B-1-6}$$

再在其上定义适当的拓扑(从略. 定义了这一拓扑的 K 称为**基本空间**), 则对 K 上的线性泛函便可问及是否连续的问题. K 上的每个连续线性泛函称为一个**广义函数**(generalized function), 亦称一个**分布**(distribution). 可以证明: ① $\mathbb{R}$ 上任一局部可积函数 $f(x)$ ②都可看作一个广义函数 η, 更确切地说, $f(x)$ 按下式定义的泛函 η_f

$$\eta_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in K \tag{B-1-7}$$

是一个广义函数, 称为**函数型的广义函数**, 可见广义函数可看作普通函数在某种意义上的推广. ② $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 用下式定义的连续线性泛函 δ_{x_0}

---

① 函数 $\varphi(x)$ 的**支集**定义为子集 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,\varphi(x)\neq 0\}$ 的闭包.

② 函数 $f(x)$ 称为**局部可积**的, 若它在 $\mathbb{R}$ 的每一有界区域内可积.

$$\delta_{x_0}(f) := f(x_0), \quad \forall f \in K \tag{B-1-8}$$

也是一个广义函数(当 $x_0 = 0$ 时又简记为 δ)，但是不存在任何局部可积函数 $f(x)$ 满足 $\eta_f = \delta_{x_0}$，因此 δ_{x_0} 属于**非函数型的广义函数**. 式(B-1-8)也可形式地表为

$$\delta_{x_0}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = f(x_0), \quad \forall f \in K, \tag{B-1-9}$$

其中 $\delta(x - x_0)$ 只是一个象征性的符号而不是什么函数. Dirac 把记号 $\delta(x - x_0)$ 看作函数(看作把实数变为实数的映射)虽然不对，但他从来都只把 $\delta(x - x_0)$ 置于积分号内使用，就是说，他只用它把函数映射(变)为复(实)数，实际上也就是把它作为泛函使用，这就是他“屡战屡捷”的原因.

对广义函数还可定义导函数. 众所周知，许多普通函数都没有导数. 然而广义函数都有导函数(无限阶可微)，而且导函数都是广义函数，详见参考文献.

初学者在得知 δ 函数是连续线性泛函后，往往误以为它是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的连续线性泛函. 如果果真如此，δ 函数就属于 $\mathscr{H}^*$，由命题 B-1-2 便知 $\mathscr{H}$ 必有元素与之对应，而这样一来 δ 就成为函数型广义函数(即普通意义下的函数)了. 事实上，广义函数(含 δ 函数)是基本空间 K 上的连续线性泛函，而基本空间一定不是 Hilbert 空间. 上述误解的产生原因与下述情况有关：由于 Dirac 在讨论量子力学时经常使用 δ 函数，人们总以为 δ 函数与量子力学密切相关. 其实，冯·诺依曼等人为量子力学建立的一整套严密的数学基础根本不涉及 δ 函数，详见§B.2.

本选读主要参考文献：夏道行等(1985)；盖尔芳特等(1965).　　**[选读 B-1-2 完]**

B.1.2　Hilbert 空间的正交归一基

N 维矢量空间 V 的一个基底无非是由 N 个元素组成的、满足如下两个要求的一个序列 $\{e_1, \cdots, e_N\}$：① $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 线性独立；② V 的任一元素 f 可由 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 线性表出. 我们想把基底概念推广至无限维的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$.

定义 8　$\mathscr{H}$ 的有限子集 $\{f_1, \cdots, f_N\}$ 称为**线性独立的**，若

$$\sum_{n=1}^{N} c_n f_n = 0 \Rightarrow c_n = 0, \ n = 1, \cdots, N.$$

$\mathscr{H}$ 的任一子集 $\{f_\alpha\}$ 称为**线性独立的**，若 $\{f_\alpha\}$ 的任一非空有限子集线性独立.

如果 $\mathscr{H}$ 中存在满足以下两条件的无限序列 $\{e_n\}$：① $\{e_n\}$ 线性独立；② $\mathscr{H}$ 的任一元素 f 可由 $\{e_n\}$ 线性表出：

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \tag{B-1-10}$$

就说 $\{e_n\}$ 构成 $\mathscr{H}$ 的一个基底. (上式中的 $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ 是 $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ 的简写.

请注意这里的极限涉及 $\mathscr{H}$ 的拓扑，对于未定义拓扑的矢量空间无意义.)

下面再讨论 $\mathscr{H}$ 的正交归一基.

定义 9　Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的序列 $\{f_n\}$ 叫**正交归一序列**，若

$$(f_m, f_n) = \delta_{mn} . \tag{B-1-11}$$

不难证明(习题) $\mathscr{H}$ 中的任一正交归一序列都线性独立. 所以，若 $\mathscr{H}$ 的维数有限，则当 $\{f_n\}$ 的元素个数等于 $\mathscr{H}$ 的维数时，$\{f_n\}$ 自然构成 $\mathscr{H}$ 的一个基底，而且是正交归一基. 当 $\mathscr{H}$ 是无限维时，要成为正交归一基，$\{f_n\}$ 的元素必须无限多个. 然而，并非由无限多个元素构成的正交归一序列 $\{f_n\}$ 都是正交归一基，这里有一个是否已把元素"选够"的问题(例如，设 $\{f_n\}$ 是基底，则只取 n 为偶数的子集也含无限多个元素，但却不是基底)，只有满足下面定义的完备性条件的 $\{f_n\}$ 才能成为正交归一基.

定义 10　$\mathscr{H}$ 中的正交归一序列 $\{f_n\}$ 叫**完备的**(complete)，若 $\mathscr{H}$ 中除零元外不存在与每个 f_n 都正交的元素(即不能通过给 $\{f_n\}$ 添加新元素而得到"更大"的正交归一序列).

$\{f_n\}$ 的完备性保证 $\mathscr{H}$ 的任一元素 f 都可用 $\{f_n\}$ 线性表出，因此 $\mathscr{H}$ 的任一完备的正交归一序列(如果存在)都是 $\mathscr{H}$ 的正交归一基[证明见 Roman(1975)定理 10.4(4)]. 改用 $\{e_n\}$ 代表完备的正交归一序列，则任一 $f \in \mathscr{H}$ 都可用 $\{e_n\}$ 线性表出[见式(B-1-10)]. 由式(B-1-10)和(B-1-11)得

$$c_n = (e_n, f) , \tag{B-1-12}$$

故

$$f = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (e_n, f) e_n . \tag{B-1-13}$$

[选读 B-1-3]

由正交归一序列构成的正交归一基 $\{e_n\}$ 虽然有无限多个元素，但 n 为自然数就表明 $\{e_n\}$ 是可数的(countable)(可以一个一个地数). 然而，并非任意 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 都有可数的正交归一基，因此还要谈及不可数的正交归一基 $\{e_\alpha\}$，其中 α 只用于识别子集中的元素，不代表自然数，$\{e_\alpha\}$ 不是序列而是不可数子集. 下面给出最一般的 Hilbert 空间的基底定义：

定义 11　$\mathscr{H}$ 的子集 $\{e_\alpha\}$(其元素个数可以无限，而且可以不可数)称为 $\mathscr{H}$ 的一个**基底**，若 $\{e_\alpha\}$ 是线性独立的，且 $\overline{\mathscr{S}} = \mathscr{H}$，其中

$$\mathscr{S} := \{f \in \mathscr{H} \mid f \text{ 可表为 } \{e_\alpha\} \text{ 中的有限个元素的线性组合}\}.$$

每一 Hilbert 空间都有正交归一基[证明见 Reed and Simon(1980)定理 II.5]，但只当它具有**可分性**(separability，定义略)时才有可数的正交归一基[见 Roman(1975)定理 10.2(5) and 10.2(7)]. 可喜的是，实用中遇到的 Hilbert 空间多数是

可分的, 平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 就是一例.

若 $\{e_\alpha\}$ 为可数基, 则任一 $f\in\mathscr{H}$ 自然可以表为基矢的取和展开式(B-1-13). 有趣的是, 即使 $\{e_\alpha\}$ 为不可数基, 任一 $f\in\mathscr{H}$ 仍可用式(B-1-13)表示, 这是因为泛函分析有如下结论[证明见 Reed and Simon(1980)定理 II.6]: $\forall f\in\mathscr{H}$, 满足 $(e_\alpha,f)\neq 0$ 的 e_α 必组成可数子集, 即 f 在 $\{e_\alpha\}$ 中挑出一个可数子集 $\{e_n\}$ (不同 f 挑出的子集可不同), 用它可把 f 表为可数项之和. 结论: 即使是不可分的 Hilbert 空间, 其任一元素 f 仍可用基矢表为可数项之和, 即式(B-1-13)仍成立. **[选读 B-1-3 完]**

B.1.3 Hilbert 空间上的线性算符

定义 12 映射 $A:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{H}$ 上的**算符**(operator), 数学书一般译作算子. A 作用于 $f\in\mathscr{H}$ 的结果记作 Af. A 称为**线性算符**(linear operator), 若

$$A(c_1f_1+c_2f_2)=c_1Af_1+c_2Af_2\,,\quad \forall f_1,f_2\in\mathscr{H},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

定义 13 算符 $A:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 和 $B:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 称为**相等的**, 若 $Af=Bf\quad \forall f\in\mathscr{H}$.

今后如无特别声明, 行文中的算符均指线性算符. $\mathscr{H}$ 上全体线性算符的集合 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 也是个复矢量空间, 只要用如下的自然方式定义加法和数乘:

加法　$(A_1+A_2)f:=A_1f+A_2f\,,\quad \forall A_1,A_2\in\mathscr{L}(\mathscr{H}),\ f\in\mathscr{H}\,;$　　(B-1-14)

数乘　$(cA)f:=c(Af),\quad \forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{H}),\ f\in\mathscr{H},\ c\in\mathbb{C}\,;$　　(B-1-15)

[$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的零元(也叫**零算符**)是这样的算符, 它作用于任意 $f\in\mathscr{H}$ 都得 $\mathscr{H}$ 的零元.]

算符分为有界算符和无界算符两大类(定义见下节). 本节只讨论有界算符.

定义 14 $\mathscr{H}$ 上的一个线性算符 $A:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 自然诱导出 $\mathscr{H}^*$ 上的一个线性算符 $A^*:\mathscr{H}^*\to\mathscr{H}^*$, 定义为

$$(A^*\eta)(f):=\eta(Af),\quad \forall f\in\mathscr{H},\ \eta\in\mathscr{H}^*.\qquad\text{(B-1-16)}$$

易见 $A^*\eta$ (作为从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射)是线性的, 还可证明它是连续的,因此 $A^*\eta\in\mathscr{H}^*$, 从而保证 A^* 是从 $\mathscr{H}^*$ 到 $\mathscr{H}^*$ 的映射. 这样定义的 A^* 称为算符 A 的**对偶算符**(dual operator).

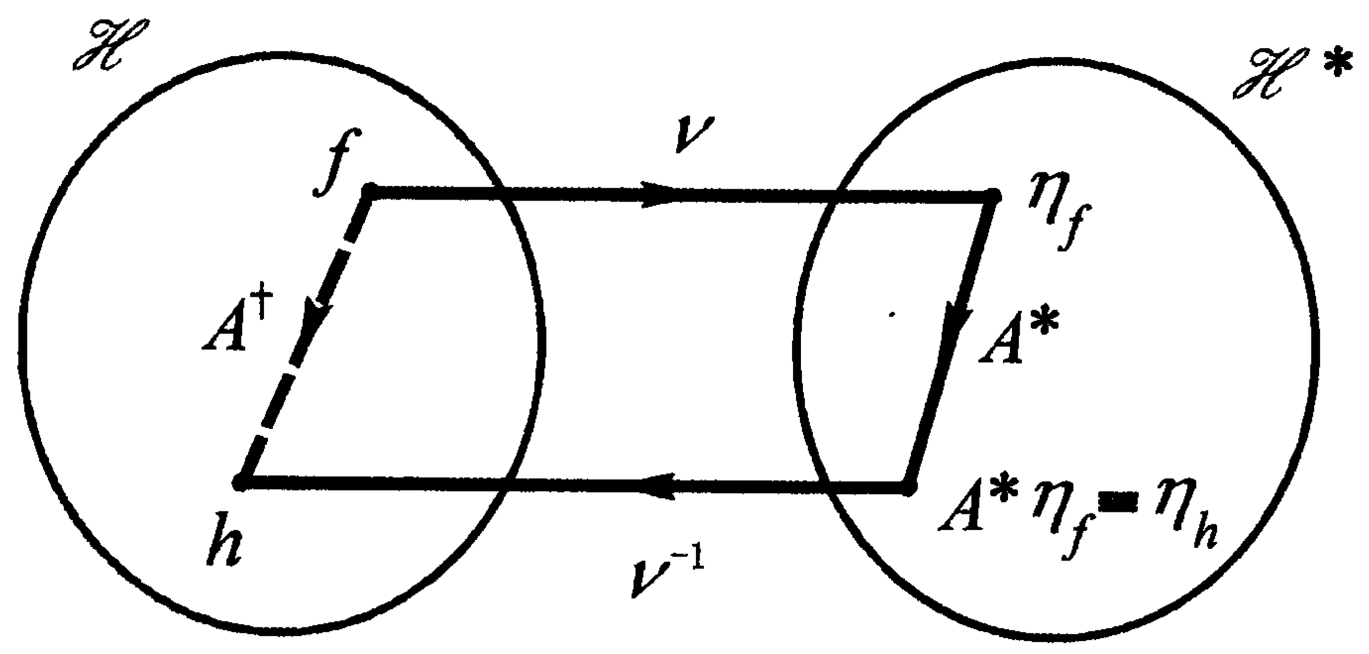


图 B-2　用映射 ν 和 A^* 定义 $A^\dagger$

注 5　①A 和 A^* 是两个不同 Hilbert 空间上的算符, 其中 A: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 而 A^*: $\mathscr{H}^*\to\mathscr{H}^*$. ②请读者证明: (a) A^* 的确是线性算符; (b) A^* 与 A 的对应关系是线性的, 即

$$(A_1+A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \qquad (cA)^* = cA^* .$$

$\mathscr{H}$ 上的任一线性算符 A 的对偶算符 A^* 又可自然诱导出 $\mathscr{H}$ 上的一个线性算符 $A^\dagger$: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$. 设 ν: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$ 是小节 B.1.1 中的一一、到上、反线性映射, 则 $\forall f\in\mathscr{H}$, 由图 B-2 所示的映射路径可知有唯一的 $h\in\mathscr{H}$ 与之对应, 故可自然地定义

$$A^\dagger f := h, \tag{B-1-17}$$

就是说, $A^\dagger$ 由如下的复合映射定义:

$$A^\dagger := \nu^{-1}\circ A^*\circ \nu . \tag{B-1-18}$$

ν 的反线性性导致 ν^{-1} 的反线性性, 加上 A^* 的线性性, 便知 $A^\dagger$ 是线性的.

定义 15　式(B-1-18)定义的 $A^\dagger$: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 叫 A 的**伴随算符**(adjoint operator).

注 6　A 和 $A^\dagger$ 都是 $\mathscr{H}$ 上的算符, 但 A^* 是 $\mathscr{H}^*$ 上的算符.

命题 B-1-3　设 $A^\dagger$ 是 A 的伴随算符, 则

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g), \quad \forall f, g\in\mathscr{H} . \tag{B-1-19}$$

反之, 若 B: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 满足

$$(f, Ag) = (Bf, g), \quad \forall f, g\in\mathscr{H}, \tag{B-1-20}$$

则 $B = A^\dagger$.

证明　$(f, Ag) = \eta_f(Ag) = (A^*\eta_f)(g) \equiv \eta_h(g) = (h, g) = (A^\dagger f, g)$,

其中第一步用到 η_f 的定义, 第二步用到 A^* 的定义, 第三步无非是把 $A^*\eta_f$ 记作 η_h (见图 B-2), 第五步用到 $A^\dagger$ 的定义式(B-1-17). 反之, 式(B-1-20)减式(B-1-19)得

$$0 = (Bf, g) - (A^\dagger f, g) = (Bf - A^\dagger f, g), \quad \forall f, g\in\mathscr{H},$$

故 $0 = Bf - A^\dagger f = (B - A^\dagger)f \quad \forall f\in\mathscr{H}$, 因而 $B = A^\dagger$. □

注 7　可见式(B-1-19)可用作 $A^\dagger$ 的等价定义.

命题 B-1-4　$A^\dagger$ 与 A 的对应关系是反线性的, 即

$$(A_1+A_2)^\dagger = A_1^\dagger + A_2^\dagger, \tag{B-1-21}$$

$$(cA)^\dagger = \bar{c}A^\dagger, \quad \forall c\in\mathbb{C} . \tag{B-1-22}$$

证明　习题.　□

命题 B-1-5　设 A 为 $\mathscr{H}$ 上的有界算符, 则 $A^{\dagger\dagger}=A$.

证明　习题.　□

定义 16　(有界)线性算符 $A: \mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 称为**自伴的**(self-adjoint)或者**厄米的**(hermitean), 若 $A=A^{\dagger}$, 即

$$(f, Ag)=(Af, g), \quad \forall f, g\in\mathscr{H}. \tag{B-1-23}$$

注 8　"厄米算符就是自伴算符"的说法只对有界算符成立. 对无界算符, 自伴性强于厄米性, 详见下节.

B.1.4　Dirac 的左右矢记号

在Dirac的记号中, 每一 $f\in\mathscr{H}$ 记作 $|f\rangle$, 称为**右矢**(ket); 每一 $\eta\in\mathscr{H}^*$ 记作 $\langle\eta|$, 称为**左矢**(bra). $\langle\eta|$ 作用于 $|f\rangle$ 所得复数记作 $\langle\eta|f\rangle$, 即 $\langle\eta|f\rangle\equiv\eta(f)$. 物理学家常把 $\langle\eta|f\rangle$ 称为 $\langle\eta|$ 与 $|f\rangle$ 的内积, 在泛函分析中 $\langle\eta|f\rangle$ 则是 g_η 与 f 的内积, 其中 $g_\eta\equiv\nu^{-1}(\eta)\in\mathscr{H}$. 记号 $\langle\eta|f\rangle$ 中的 $\langle\ \rangle$ 可看作一个尖括号, "括号"在英文中是"bracket", 去掉字母 c 并拆为两半, 自然把左半 $\langle\ |$ 称为 bra, 而右半 $|\ \rangle$ 称为 ket. $|f\rangle\in\mathscr{H}$ 在 $\nu: \mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$ 映射下的像 $\eta_f\in\mathscr{H}^*$ 本应记作 $\langle\eta_f|$, 但可简记为 $\langle f|$, 这不会与 $|f\rangle$ 混淆, 却可形象地表明 $\langle f|$ 就是 $|f\rangle$ 在 ν 映射下的对应物. 通常也把这种对应关系记作 $\langle f|\leftrightarrow|f\rangle$. 同样, $\langle\eta|\in\mathscr{H}^*$ 的逆像 $\nu^{-1}(\eta)$ 可简记为 $|\eta\rangle$, 即 $\langle\eta|\leftrightarrow|\eta\rangle$, 原来的 $(f,g)=\eta_f(g)$ 则可表为 $(f,g)=\langle f|g\rangle$. 实际上, 使用 Dirac 记号后无需再以拉丁字母 $f, g, \cdots$ 和希腊字母 $\eta, \xi, \cdots$ 分别代表 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}^*$ 的元素. 设 $|\psi\rangle\in\mathscr{H}, c\in\mathbb{C}$, 则 $c|\psi\rangle\in\mathscr{H}$, 也可记作 $|c\psi\rangle$, 即 $c|\psi\rangle\equiv|c\psi\rangle$. 由定义1 的(c)和(b)有

$$\langle\psi|\phi\rangle=\overline{\langle\phi|\psi\rangle}, \tag{B-1-24}$$

$$\langle\psi|c\phi\rangle=c\langle\psi|\phi\rangle, \tag{B-1-25}$$

和

$$\langle c\psi|\phi\rangle=\bar{c}\langle\psi|\phi\rangle, \tag{B-1-26}$$

其中 $\langle c\psi|$ 代表 $|c\psi\rangle$ 在映射 ν 下的像,即 $\langle c\psi|\leftrightarrow|c\psi\rangle$. 注意到 ν 的反线性性, 得

$$\langle c\psi|=\nu(c\psi)=\bar{c}\,\nu(\psi)=\bar{c}\langle\psi|,$$

故映射 $\nu: \mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$ 的反线性性体现为

$$\langle c\psi|=\bar{c}\langle\psi| \tag{B-1-27}$$

或
$$c|\psi\rangle \leftrightarrow \bar{c}\langle\psi|, \tag{B-1-28}$$
其中$\bar{c}\langle\psi|$是复数$\bar{c}$乘左矢$\langle\psi|$所得的左矢，也可记为$\langle\psi|\bar{c}$.

算符A作用于右矢$|\psi\rangle\in\mathscr{H}$所得的右矢记作$|A\psi\rangle$，即$A|\psi\rangle\equiv|A\psi\rangle$. 把$A^*$作用于左矢$\langle\eta|\in\mathscr{H}^*$的结果记作$A^*\langle\eta|$，则$A^*$的定义式(B-1-16)可表为
$$(A^*\langle\eta|)|f\rangle=\langle\eta|(A|f\rangle),\quad \forall|f\rangle\in\mathscr{H},\ \langle\eta|\in\mathscr{H}^*. \tag{B-1-16$'$}$$
现在说明上式右边的圆括号可以去掉. 先回到不用 Dirac 记号的式(B-1-16). 因为$A:\ \mathscr{H}\to\mathscr{H}$而$\eta:\ \mathscr{H}\to\mathbb{C}$，所以$\eta\circ A:\ \mathscr{H}\to\mathbb{C}$. η是$\mathscr{H}$上的连续线性泛函保证$\eta\circ A$也是，故$\eta\circ A\in\mathscr{H}^*$. 进一步把$\eta\circ A$简记作$\eta A$，则式(B-1-16)又可表为
$$(A^*\eta)(f)=(\eta\circ A)(f)=(\eta A)(f),\quad \forall f\in\mathscr{H},\quad \eta\in\mathscr{H}^*,$$
因而$A^*\eta=\eta A\ (\in\mathscr{H}^*)$，用 Dirac 记号则为$A^*\langle\eta|=\langle\eta|A$，于是式(B-1-16′)左边等于$(\langle\eta|A)|f\rangle$，故式(B-1-16′)其实是
$$(\langle\eta|A)|f\rangle=\langle\eta|(A|f\rangle). \tag{B-1-29}$$
上式表明圆括号没有必要，$\langle\eta|A|f\rangle$有明确含义，它既可理解为$(\langle\eta|A)|f\rangle$，也可理解为$\langle\eta|(A|f\rangle)$. 有人把$A^\dagger$记作A^*，则他们的$\langle\eta|A^*$是我们的$\langle\eta|A^\dagger=A^{\dagger *}\langle\eta|$.

命题 B-1-6
$$A|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi|A^\dagger. \tag{B-1-30}$$
证明　因$A|\psi\rangle\equiv|A\psi\rangle\leftrightarrow\langle A\psi|$，故只须证$\langle A\psi|\phi\rangle=(\langle\psi|A^\dagger)|\phi\rangle\ \ \forall|\phi\rangle\in\mathscr{H}$. 由式(B-1-29)得
$$(\langle\psi|A^\dagger)|\phi\rangle=\langle\psi|(A^\dagger|\phi\rangle)=\langle\psi|A^\dagger\phi\rangle\doteq\langle A\psi|\phi\rangle,$$
其中第一步用到式(B-1-29)，第二步用到$A^\dagger|\phi\rangle=|A^\dagger\phi\rangle$，第三步用到式(B-1-19)及$A^{\dagger\dagger}=A$(命题 B-1-5). □

由式(B-1-30)和(B-1-27)可知任一算符A的本征方程$A|\psi\rangle=c|\psi\rangle$的左矢形式为
$$\langle\psi|A^\dagger=\langle\psi|\bar{c}. \tag{B-1-31}$$
设$\{|e_n\rangle\}$是$\mathscr{H}$的正交归一基，则可定义$\mathscr{H}$上的线性算符$\sum\limits_n|e_n\rangle\langle e_n|$为
$$\left(\textstyle\sum_n|e_n\rangle\langle e_n|\right)|\psi\rangle:=\textstyle\sum_n|e_n\rangle\langle e_n|\psi\rangle\in\mathscr{H},\quad \forall|\psi\rangle\in\mathscr{H}. \tag{B-1-32}$$
与式(B-1-13)结合得

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = I\,, \tag{B-1-33}$$

其中 I 代表单位算符(恒等映射), 其定义为 $I|\psi\rangle := |\psi\rangle \ \forall |\psi\rangle \in \mathscr{H}$. 式(B-1-33)便是量子力学中常用的**完备性关系**.

B.1.5 态矢和射线

量子系统每一时刻的态由 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中的一个矢量(右矢$|\psi\rangle$)表示, 因此右矢叫做**态矢**(state vector). 然而态矢与态的对应关系不是一一的. Dirac(1981)P.17 说过(大意): 设由 $|\psi\rangle$ 代表的态与自己叠加, 结果将对应于态矢 $c_1|\psi\rangle + c_2|\psi\rangle = (c_1 + c_2)|\psi\rangle$, 其中 c_1 和 c_2 是任意复数. 我们应该假定, 除了 $c_1 + c_2 = 0$ 的情况外, 结果态 $(c_1 + c_2)|\psi\rangle$ 与原始态 $|\psi\rangle$ 相同, 即态矢 $(c_1 + c_2)|\psi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 应代表相同的态. ("自己与自己叠加不会得出新态", 请注意这与经典物理非常不同.) 就是说, 右矢 $|\psi\rangle$ 和 $c|\psi\rangle$ (c 为任意非零复数)代表同一状态. 于是, 若对 $\mathscr{H}$ 的任意非零元素 $|\psi\rangle$ 定义 $\mathscr{H}$ 的子集 $r_\psi := \{c|\psi\rangle \mid c \in \mathbb{C}, c \neq 0\}$, 并称 r_ψ 为过 $|\psi\rangle$ 的一条**射线**(ray), 则一条射线对应于量子系统的一个态. 以 $\mathscr{H}$ 中的所有射线为元素的集合 $\mathscr{R}$ 叫**射线空间**(ray space), 对讨论"AA 几何相"(见§C.2)有重要作用.

§B.2 无界算符及其自伴性

§B.1讨论的是"$\mathscr{H}$ 上的""有界"线性算符. 下面先解释这两个定语的含义.

"$\mathscr{H}$ **上的算符**(operator **on** $\mathscr{H}$)"是指从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的映射, 其定义域是整个 $\mathscr{H}$. 然而量子力学中大多数算符 A 的定义域(记作 D_A)都只能是 $\mathscr{H}$ 的一个真子集, 即 A 只能是从 $D_A \subset \mathscr{H}$ ($D_A \neq \mathscr{H}$)到 $\mathscr{H}$ 的映射. 这称为 $\mathscr{H}$ **中的算符**(operator **in** $\mathscr{H}$).① 以 1 维空间的波函数空间 $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 为例. (如前所述, 此乃无限维 Hilbert 空间.) 定义**位置算符**(position operator) X: $D_X \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 为

$$(X\psi)(x) := x\psi(x), \quad \forall \psi \in D_X, x \in \mathbb{R}\,. \tag{B-2-1}$$

上式的含义是: X 作用于 D_X 的任一元素 ψ 的结果是这样一个波函数, 其在点 $x \in \mathbb{R}$ 的值等于 ψ 在点 x 的值 $\psi(x)$ 乘以 x . 算符 X 的定义域 $D_X \neq \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, 因为 $\exists \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 使 $X\psi \notin \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. 例如, 函数

① 这种用 on 和 in 形容算符定义域的约定只在部分文献中采用. 在不采用这种约定的文献[如 Reed and Simon(1980)]中"operator on $\mathscr{H}$"不表明该算符的定义域是 $\mathscr{H}$.

$$\psi(x)=\begin{cases}1/x, & x\geqslant 1\\ 0, & x<1\end{cases}$$

是平方可积的, 但函数

$$(X\psi)(x)=x\psi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 1\\ 0, & x<1\end{cases}$$

却非平方可积, 说明 $\psi\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 而 $\psi\notin D_X$. 因而位置算符 X 只是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 中[而非 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 上]的线性算符. 第二个例子是**动量算符**(momentum operator) P : $D_P\to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, 其定义为

$$(P\psi)(x):=-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x},\quad \forall\psi\in D_P. \tag{B-2-2}$$

D_P 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 的这样的子集, 其中每个元素 $\psi(x)$ 几乎处处可微,① 而且

$$\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

并非 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 的每个元素都满足这一条件, 所以 $D_P\neq \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, 即动量算符 P 也只是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 中[而非 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 上]的线性算符.

下面介绍有界算符的定义.

定义 1　线性算符 A: $D_A(\subset\mathscr{H})\to\mathscr{H}$ 称为**有界算符**(bounded operator), 若 $\exists M>0$ 使

$$\sqrt{(Af,Af)}\leqslant M\sqrt{(f,f)},\quad \forall f\in D_A, \tag{B-2-3}$$

否则称为**无界算符**(unbounded operator).

命题 B-2-1　设 A 是 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算符, 则 $A^\dagger$ [由式(B-1-18)定义]也是 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算符.

证明　见 Roman(1975)定理 12.3a(1)的证明. □

对有限维 Hilbert 空间, 所有线性算符都是有界的. 反之, 量子力学用到的无限维 Hilbert 空间中许多重要线性算符(例如位置算符 X, 动量算符 P 和哈氏算符 H)都是无界算符. X 的无界性可证明如下: 考虑波函数序列 $\{\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x),\cdots\}$, 其中 $\psi_n(x)$ 定义为

---

① 关于 D_P 的进一步限制见命题 B-2-5 证明的脚注.

$$\psi_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[n,\ n+1)\\ 0, & x\notin[n,\ n+1)\end{cases},$$

则易见$\psi_n \in D_X$. 由式(B-1-1)有

$$(\psi_n,\psi_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi_n(x)}\,\psi_n(x)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}\mathrm{d}x=1,$$

另一方面,

$$(X\psi_n,X\psi_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\overline{\psi_n(x)}\ \psi_n(x)\ \mathrm{d}x=\int_n^{n+1}x^2\mathrm{d}x>n^2.$$

因为n可为任意大的自然数, 所以不存在 $M>0$使

$$\sqrt{(X\psi_n,X\psi_n)}\leqslant M\sqrt{(\psi_n,\psi_n)},\quad \forall\psi_n(x).$$

可见X无界.

对无界算符的研究是在20世纪20年代为把量子力学置于严密的数学基础之上而激发起来的. von Neumann (冯·诺依曼) 的 "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Functionaloperatoren" [Math. Ann. **102**, 49~131(1923~1930).] 和 M. Stone 的"Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis" [Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **15**, New York(1932)]对这一理论的发展起了决定性的作用. 虽然一般量子力学教材和文献的某些提法在数学上不严格, 但都可以严格化, 因为存在着以上述工作为基础的数学上严密的一整套量子力学理论(这套理论根本不涉及δ函数). 与此相反, 量子场论的某些方面至今尚无满意的数学基础.

可以证明, 有界算符的定义域总可延拓至整个$\mathscr{H}$, 因此讨论有界算符时可只关心$\mathscr{H}$上的算符. 然而对无界算符不能如此简化, 所以涉及无界算符时要格外注意定义域问题.

设A是$\mathscr{H}$中的无界算符, 定义域$D_A\neq\mathscr{H}$. 我们遇到的第一个问题是如何定义其伴随算符$A^\dagger$. 首先回忆小节B.1.3对$\mathscr{H}$上的算符A的对偶算符A^*和伴随算符$A^\dagger$的定义. 先用下式定义A^*:

$$(A^*\eta)(f):=\eta(Af),\quad \forall f\in\mathscr{H}, \tag{B-2-4}$$

再用A^*借式(B-1-18)定义$A^\dagger$. 可以证明这样定义的A^*(和$A^\dagger$)是$\mathscr{H}^*$上(和$\mathscr{H}$上)的有界算符. 然而, A^*的上述定义对$\mathscr{H}$中的算符A不适用. 由于$D_A\neq\mathscr{H}$, Af对于不在D_A中的f无意义, 因此式(B-2-4)中的"$\forall f\in\mathscr{H}$"应改为"$\forall f\in D_A$". 然而这样改后的式(B-2-4)就不成其为A^*的定义, 因为要定义$\mathscr{H}^*$的元素$A^*\eta$必须定义它对$\mathscr{H}$的每一元素的作用. 可见当$D_A\neq\mathscr{H}$时$A^\dagger$需要另给定义. 注意到式

(B-1-19), 可考虑用下法直接定义$A^\dagger$. 对给定的$f\in\mathscr{H}$, 若存在唯一的$h_f\in\mathscr{H}$使

$$(f,Ag)=(h_f,g),\quad \forall g\in D_A, \tag{B-2-5}$$

就把$A^\dagger f$定义为h_f, 即

$$A^\dagger f:=h_f. \tag{B-2-6}$$

$A^\dagger$的定义域自然为

$$D_{A^\dagger}=\{f\in\mathscr{H}\,|\,\exists 唯一\ h_f\in\mathscr{H}\ 使\ (f,Ag)=(h_f,g)\ \forall g\in D_A\}. \tag{B-2-7}$$

用此法定义$A^\dagger$的可能性取决于满足式$(f,Ag)=(h_f,g)\ \forall g\in D_A$的$h_f$的唯一性, 其充要条件将由命题 B-2-2 给出. 为讲此命题先介绍两个术语: 拓扑空间X的子集$U\subset X$称为**稠密子集**(dense subset), 若$\overline{U}=X$ ($\overline{U}$代表U的闭包); Hilbert 空间$\mathscr{H}$中的算符A称为**稠定的**(densely defined), 若$\overline{D_A}=\mathscr{H}$.

命题 B-2-2　设A是$\mathscr{H}$中的线性算符, $f\in\mathscr{H}$, 则满足

$$(f,Ag)=(h,g),\quad \forall g\in D_A \tag{B-2-8}$$

的$h\in\mathscr{H}$是唯一的当且仅当A是稠定的.

证明[选读]

(A) 先证"当"部分. 设$h,\ h'\in\mathscr{H}$满足$(f,Ag)=(h_f,g)\ \forall g\in D_A$. 令$h''\equiv h-h'$, 则

$$(h'',g)=0,\quad \forall g\in D_A. \tag{B-2-9}$$

欲证$h''=0$需要比上式更强的条件, 即$(h'',\psi)=0\ \forall\psi\in\mathscr{H}$. A的稠定性$\overline{D_A}=\mathscr{H}$保证$D_A$内存在点序列$\{g_n\}$, 它以$\psi$为极限. 由内积的连续性①可知

$$(h'',\psi)=\lim_{n\to\infty}(h'',g_n)=0,\quad \forall\psi\in\mathscr{H}, \tag{B-2-10}$$

其中第二步用到$g_n\in D_A$及式(B-2-9). 可见$h''=0$, 即满足式(B-2-8)的h必唯一.

(B) 再证"仅当"部分, 即"A非稠定$\Rightarrow h\in\mathscr{H}$不唯一". 设$h\in\mathscr{H}$满足式(B-2-8). 可以证明, 只要$\overline{D_A}\neq\mathscr{H}$, 则$\mathscr{H}$必有非零元$h_1$与$D_A$的任一元素正交, ② 即$(h_1,g)=0\ \forall g\in D_A$. 令$h'=h+h_1$, 便有

$$(h',g)=(h,g)=(f,Ag),\quad \forall g\in D_A.$$

---

① 内积的连续性的含义如下: 设V为内积空间, $f\in V$和$g\in V$分别是V中序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$的极限, 则$(f,g)=\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)$. 有余力的读者可借用 Schwarz 不等式(见习题 3)对此作出证明.

② $\bar{D}_A$的正交补(见选读 B-2-1 开头)的任一非零元素都可充当h_1.

可见满足式(B-2-8)的 h 不唯一. □

由命题 B-2-2 可知, 当且仅当 $\mathscr{H}$ 中的算符 A 为稠定时, 其伴随算符 $A^\dagger$ 可由式(B-2-5)和(B-2-6)定义, 其定义域由式(B-2-7)表示. 式(B-2-5)和(B-2-6)结合得

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g), \quad \forall g \in D_A, f \in D_{A^\dagger}, \ f \in D_{A^\dagger}. \qquad \text{(B-2-11)}$$

不难证明这样定义的 $A^\dagger$ 是线性的, 而且若 A 是 $\mathscr{H}$ 上的有界算符, 则这样定义的 $A^\dagger$ 与由式(B-1-19)定义的 $A^\dagger$ 相同(这时 $A^\dagger$ 也是 $\mathscr{H}$ 上的有界算符). 考虑到命题 B-2-2, 今后凡谈到算符 A 的伴随算符 $A^\dagger$ 时都默认 A 是稠定的. 可以证明位置和动量算符都是稠定算符. 应该指出, D_A 稠密并不保证 $D_{A^\dagger}$ 稠密. 在最坏的情况下, $D_{A^\dagger}$ 可以"小"到只含零元的程度, 即 $D_{A^\dagger} = \{0\}$. 幸好这种情况很少出现. 定义域不稠密的无界算符在量子力学中没有什么用处.

算符的厄米性对量子力学的重要性是众所周知的. 上节已对 $\mathscr{H}$ 上的算符 A 的厄米性下了如下定义:

$$(f, Ag) = (Af, g), \quad \forall f, g \in \mathscr{H}. \quad \text{[即式(B-1-23)]}$$

$\mathscr{H}$ 中的算符 $A: D_A \to \mathscr{H}$ 的厄米性仍可用上式定义, 只须把式中的 $\forall f, g \in \mathscr{H}$ 改为 $\forall f, g \in D_A$. 然而, 泛函分析有个 Hellinger-Toeplitz 定理, 它断言 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上满足式(B-1-23)的算符 A 必然有界. 这就导致如下的严酷结论: 无界的厄米算符的定义域不可能是全 $\mathscr{H}$. 因此涉及无界厄米算符时必须格外注意定义域问题. 下面将看到, 无界算符的厄米性和自伴性的关键区别就在于定义域.

设 A, B 是 $\mathscr{H}$ 上的算符, 则其和、积及相等的定义十分简单:

和 $(A+B)f := Af + Bf, \quad \forall f \in \mathscr{H}$,

积 $(AB)f := A(Bf), \quad \forall f \in \mathscr{H}$,

相等 $A = B$ 当且仅当 $Af = Bf, \ \forall f \in \mathscr{H}$.

然而对 $\mathscr{H}$ 中的算符就要麻烦一些. 例如, $A + B$ 的定义域只能是 $D_A \cap D_B$, 而 AB 的定义域则还涉及 B 的值域, 因为只当 $Bf \in D_A$ 时 ABf 才有意义. A 与 B 的相等性和相互包含性则由如下定义规定:

定义 2 设 A, B 是 $\mathscr{H}$ 中的线性算符, 其定义域分别为 D_A 和 D_B, 则

(a) $A = B$ 若 $D_A = D_B$ 而且 $Af = Bf \ \forall f \in D_A = D_B$;

(b) $A \subset B$ 若 $D_A \subset D_B$ 而且 $Af = Bf \ \forall f \in D_A$ [把 B 称为 A 的**延拓**或**扩张**(extension)].

定义 3 $\mathscr{H}$ 中的任意(有界或无界)稠定线性算符 A 称为**厄米的**(hermitean), 若

$$(f, Ag) = (Af, g), \quad \forall f, g \in D_A. \qquad \text{(B-2-12)}$$

命题 B-2-3　$\mathscr{H}$ 中的稠定算符 A 为厄米算符的充要条件是 $A \subset A^\dagger$. ①

证明

(A) 设 A 为厄米, 则 $\forall f \in D_A$ 有 $(f, Ag) = (h_f, g)\ \forall g \in D_A$. 与式(B-2-7)对比发现 $f \in D_{A^\dagger}$ (其中的 h_f 的唯一性由 A 的稠定性保证, h_f 就是 Af). 所以 $f \in D_A \Rightarrow f \in D_{A^\dagger}$, 因而 $A \subset A^\dagger$.

(B) 设 $A \subset A^\dagger$, 则 $D_A \subset D_{A^\dagger}$ 且 $\forall f \in D_A$ 有 $A^\dagger f = Af$, 故由式(B-2-11)有

$$(f, Ag) = (Af, g), \quad \forall f, g \in D_A,$$

可见 A 是厄米的. □

注 1　讨论表明(此处只介绍结论), 若厄米算符 A 有界, 可把 A 唯一地延拓为 $\mathscr{H}$ 上的有界算符, 仍记作 A (唯一性由 D_A 的稠密性保证). 同样, $A^\dagger$ 也可被唯一地延拓为 $\mathscr{H}$ 上的有界算符, 而且 $(f, Ag) = (Af, g) = (A^\dagger f, g)\ \forall f, g \in \mathscr{H}$. 可见命题 B-2-3 中的 $A \subset A^\dagger$ 对有界厄米算符 A 可表为 $A = A^\dagger$. 然而确实存在 $D_A \neq D_{A^\dagger}$ (因而 $A \neq A^\dagger$)的无界厄米算符 A, 对这种算符一般只能写 $A \subset A^\dagger$. 这说明对无界算符 A 来说, $A = A^\dagger$ 是比 $A \subset A^\dagger$ 更高的要求. 满足 $A = A^\dagger$ 的算符非常重要, 值得赋予专名:

定义 4　$\mathscr{H}$ 中的任意(有界或无界)稠定算符 A 称为**自伴的**(self-adjoint), 若 $A = A^\dagger$.

由命题 B-2-3 后的注和定义 4 可知, 无界算符的自伴性强于厄米性. 偏偏量子力学中多数算符是无界算符, 因此区分厄米性和自伴性就成为重要问题. 厄米性和自伴性的关键差别在于定义域, 所以对量子力学的算符应该特别注意定义域及其有关问题(例如定义域的延拓或压缩以及算符的性质在定义域延拓或压缩时的可能改变).讨论量子力学问题时出现的若干混淆正是不注意算符的定义域问题所致.

命题 B-2-4　$L^2(\mathbb{R})$ 中的位置算符 $X: D_X \to L^2(\mathbb{R})$ 是自伴算符.

证明　前已述及 X 是稠定的, 由下式易见 X 是厄米的:

$$(f, Xg) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, x g(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x f(x)} g(x) \mathrm{d}x = (Xf, g), \quad \forall f, g \in D_X.$$

由命题 B-2-3 可知 $X \subset X^\dagger$, 因此为证自伴性只须证 $X^\dagger \subset X$. 设 $f \in D_{X^\dagger}$, 则由式(B-2-11)可知 $\forall g \in D_X$ 有 $(f, Xg) = (X^\dagger f, g)$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, x g(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(X^\dagger f)\, x)} g(x) \mathrm{d}x,$$

---

① A 为厄米不保证 $A^\dagger$ 为厄米. 事实上, 对厄米算符 A 有 $A \subset A^{\dagger\dagger} \subset A^\dagger$ [证明见 Roman(1975)], 却未必有 $A^\dagger \subset A^{\dagger\dagger}$.

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\overline{xf(x)}-\overline{(X^{\dagger}f)(x)}\right]g(x)\mathrm{d}x=0,\quad \forall g\in D_X, f\in D_{X^{\dagger}}. \tag{B-2-13}$$

因为在有界区间 (a,b) 外为零的任一函数都属于 D_X，可取

$$g(x)=\begin{cases} xf(x)-(X^{\dagger}f)(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b),\end{cases}$$

从而由式(B-2-13)得 $\int_a^b |xf(x)-(X^{\dagger}f)(x)|^2\,\mathrm{d}x=0$，故在 (a,b) 上[①]有

$$xf(x)=(X^{\dagger}f)(x).$$

因 (a,b) 任意，故 $\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $xf(x)=(X^{\dagger}f)(x)$. 而 $f\in D_{X^{\dagger}}$ 保证 $X^{\dagger}f\in L^2(\mathbb{R})$，所以上式可改写为 $(Xf)(x)=(X^{\dagger}f)(x)$. 可见 $f\in D_{X^{\dagger}}$ 导致 $f\in D_X$. 加之 $Xf=X^{\dagger}f\ \forall\phi\in D_{X^{\dagger}}$，便有 $X^{\dagger}\subset X$. □

命题 B-2-5　$L^2(\mathbb{R})$ 中的动量算符 $P:\ D_P\to L^2(\mathbb{R})$ 是自伴算符.

证明　可参阅, 例如, Kreyszig(1978).[②] □

注 2　P 的定义式(B-2-2)中的 $-\mathrm{i}$ 对保证厄米性有关键作用.

知道 X 和 P 是自伴算符后, 自然希望哈氏算符 H 也是自伴算符. 虽然动能和势能算符的自伴性的证明相对简单, 作为它们之和的哈氏算符的自伴性的证明却要困难得多(这也许有点出人意料). 幸好, 泛函分析中存在各种定理(如 Kato 定理), 在许多场合下可用以证明哈氏算符的自伴性. 在一般性讨论中则假定哈氏算符是自伴算符.

无论从历史发展还是当今教学的角度看, 如果一味追求数学严格性, 量子力学也许寸步难行. 物理学家通常采用的实际可行的做法是默认有限维的结论也适用于无限维(把有限项之和改为无限项之和或积分), 借助于这种默认并配以 Dirac 巧妙发明的 δ 函数, 往往可以简单快捷地得出正确结果. 不妨称这种做法为物理做法. 然而学生在学习过程中可能出现某些困扰, 甚至达到百思不解的程度. 例如, 教科书上都说动量算符 P 和位置算符 X 的本征矢(本征函数)构成 Hilbert 空间的正交归一基底, P 的本征矢是平面波 $\exp(\mathrm{i}\hbar^{-1}\vec{p}\cdot\vec{r})$，$X$ 的本征矢是 $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$. 然而前者因为非平方可积而不属于 Hilbert 空间[指 $L^2(\mathbb{R}^3)$], 后者则根本不是通常意义下的函数, 更谈不上属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$. 连空间的元素都不是, 怎么竟成为该空间的基矢? 这

---

① 更准确的提法是 “在 (a,b) 上几乎处处”，即测度为零的集可以例外.

② 证明厄米性需要分部积分. 为此对 P 的定义域 D_P 要作进一步限制: D_P 只含 $L^2(\mathbb{R})$ 中这样的函数, 它们在每一有界区间 $[a,b]$ 上绝对连续[含义见 Kreyszig(1978)]且导数属于 $L^2(\mathbb{R})$. 可证 D_P 是稠密的.

正如把不是委员的人说成是常委那样不可思议. 由此还会引申出许多难以回答的问题, 例如: 谐振子的波函数 $|\psi\rangle$ 既可用能量本征矢表为分立的取和式 $|\psi\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n|n\rangle$, 也可用位置(或动量)本征矢表为连续的取和式 $|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|\psi\rangle \mathrm{d}x$, 这个Hilbert空间的维数如何考虑?[虽然都是 ∞, 但可数的 ∞ 与不可数的 ∞ 并不相同.] 其实, 泛函分析对所有这些问题都能给出数学上严密的回答(因而可充当"后台"). 下面略做一点粗浅介绍.

众所周知, 有限维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的厄米(因而自伴)算符 A 存在有限个实本征值, 全部线性独立的本征矢组成 $\mathscr{H}$ 的一组正交归一基底, 任一矢量 $f\in\mathscr{H}$ 可用此基底展开, 任一算符可用此基底表为 $N\times N$ 矩阵($N\equiv\dim\mathscr{H}$). 特别是, A 自己在此基底下的矩阵是对角矩阵, 且对角元为实本征值. 可惜这些既简单又实用的结论对无限维Hilbert空间并不成立. 幸好无限维Hilbert空间中的自伴算符(不论有界无界)具有一系列好的性质, 足以保证默认有限维的结论适用于无限维的许多物理做法给出正确结果. 例如, 自伴算符的确可以实现"对角化", 不过不是表现为有限维空间中那样简单的形式, 因此最好称为广义对角化. 在介绍广义对角化之前, 有必要说明无限维 Hilbert 空间在涉及自伴算符的问题上与有限维 Hilbert 空间的诸多区别. 首先, 无限维 Hilbert 空间中无界的厄米算符未必是自伴算符, 而非自伴的厄米算符未必能实现广义对角化. 其次, 即使是自伴算符, 也未必存在本征值和本征矢, 更不用说本征矢构成基底. 以最常用的 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的位置、动量和哈氏算符为例. 位置算符 X 和动量算符 P 虽然都是自伴算符, 却根本没有本征值和本征矢(本征函数), 因为根本不存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 满足本征方程 $X\psi=\lambda\psi$ 和 $P\psi=\lambda\psi$ [如前所述, $\exp(\mathrm{i}\hbar^{-1}\vec{p}\cdot\vec{r})$ 和 $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$ 都不属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$] 哈氏算符 H 的情况则有所不同: 某些系统(如谐振子)的 H 有完备的本征矢(分立的能量本征态), 而某些系统(如自由质点)则没有: 其 H 的本征方程的解是平面波, 因而不是 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的元素(矢量), 更谈不上是本征矢. ① 第三, 即使自伴算符存在本征值和本征矢, 其本征矢也未必足以构成基底, 只用本征值也未必足以解决算符的广义对角化问题. 解决问题的根本途径是依靠本征值概念的推广——谱(spectrum)——及其有关定理. 然而谱定理不适用于非自伴的厄米算符, 这就是严格规定可观察量(observable)必须是自伴算符(而不只是厄米算符)的理由之一. (然而通常的物理讲法却把可观察量定义为有完备本征矢的厄米算符. 现在可看出这种讲法的不严格性.) 顺便

---

① 并非不能用平面波展开波函数, 事实上, 对任意波包作平面波展开不但允许(无非是把函数写成傅里叶积分)而且很重要, 只是不应称之为用基底展开. 根据泛函分析, Hilbert 空间必有基底, 因而任一元素可用基底展开, 但展开式一定是可数项之和($\psi=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e_n$)而绝决不是积分. [就连不可分的 Hilbert 空间(它只有不可数基底)也如此(见选读 B-1-3), 更何况动量算符涉及的 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 是可分空间.]

一提，作为自伴算符重要性的另一例子，我们指出只有自伴算符 A 才可用指数方式生成一个决定量子系统动力学的单参酉群 $U(t)=e^{itA}$，它在量子力学中的重要作用是人所共知的. 谱理论是泛函分析中的一个精彩而重要的部分，已超出本附录范围. 然而，为使物理读者对自伴算符的广义对角化(及相关问题)有一个粗略的了解，我们在选读 B-2-1 中对自伴算符的谱定理作一个非常简略的介绍.

[选读 B-2-1]

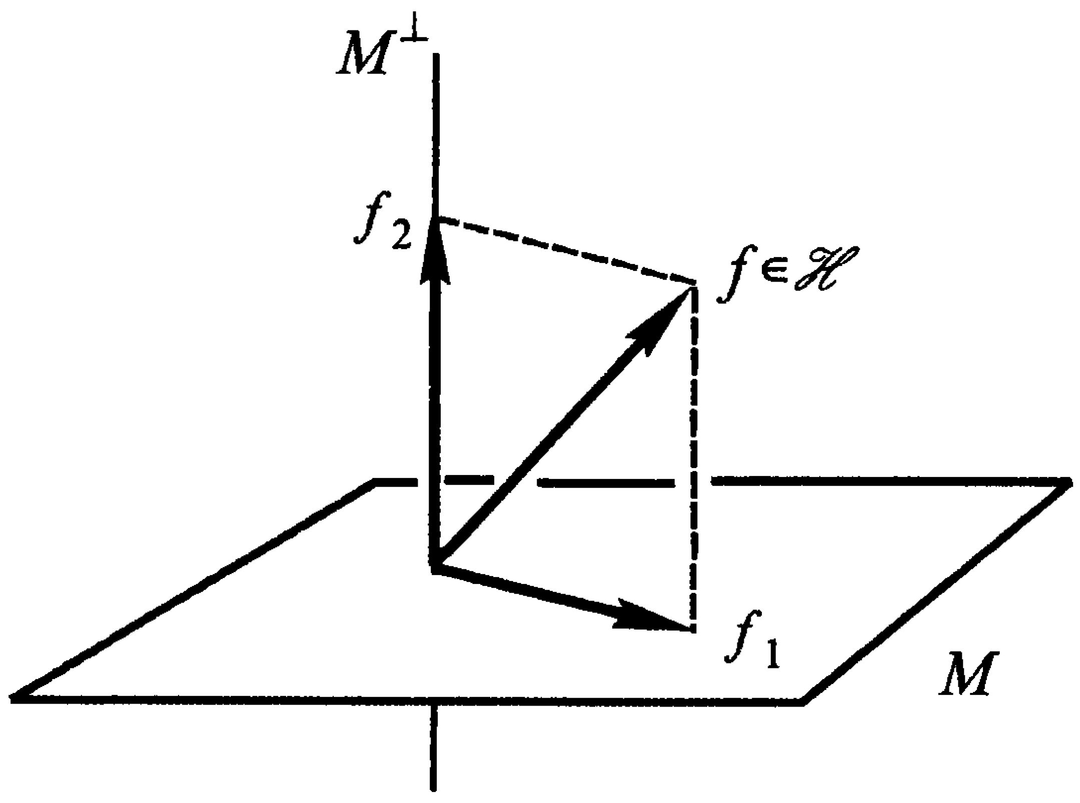


图 B-3　投影定理示意

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的子集 $M\subset\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{H}$ 的**子空间**(subspace)，如果 M 在线性运算(加法和数乘)下自身封闭而且用 $\mathscr{H}$ 的拓扑衡量是闭集. 设 M 是 $\mathscr{H}$ 的任一子集，则子集 $M^\perp\equiv\{f\in\mathscr{H}|\ (f,g)=0\ \ \forall g\in M\}$ 称为 M 的**正交补**(orthogonal complement). 若 M 是 $\mathscr{H}$ 的子空间，则可以证明：① $M^\perp$ 也是 $\mathscr{H}$ 的子空间；② $M\cap M^\perp=\{0\}$；③只要 $M\neq\mathscr{H}$，则 $M^\perp$ 必含非零元；④存在如下的**投影定理**：$\forall f\in\mathscr{H}$，$\exists$ 唯一的 $f_1\in M$ 和 $f_2\in M^\perp$ 使 $f=f_1+f_2$. f_1 称为 f 在 M 上的**投影**(图 B-3). 用下式定义到上映射 $P:\mathscr{H}\to M$：

$$Pf:=f_1,\quad \forall f\in\mathscr{H},$$

则易见 P 是线性算符，其定义域 $D_P=\mathscr{H}$，值域 $R_P=M$，称为**到 M 上的投影算符**(projection operator onto M)，简称 **M 上的投影算符**.

给定 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上(或中)的任一线性算符 A，若 $\exists\lambda\in\mathbb{C}, f\in\mathscr{H}(f\neq0)$ 使 $Af=\lambda f$，则称 λ 为 A 的一个**本征值**(eigenvalue)，称 f 为 A 的、相应于本征值 λ 的**本征矢**(eigenvector). $\forall\lambda\in\mathbb{C}$，以 M_λ 代表 A 的、相应于 λ 的所有本征矢(以及 $0\in\mathscr{H}$)的集合，则 M_λ 的闭包 $\overline{M_\lambda}$ 是 $\mathscr{H}$ 的子空间，称为 A 的、相应于本征值 λ 的**本征空间**(eigenspace)，对有限维 $\mathscr{H}$ 有 $\overline{M_\lambda}=M_\lambda$. 若 $\overline{M_\lambda}$ 的维数 $m>1$，就说 λ 是 **m 重简并的**(m-fold degenerate). 自伴算符的、相应于不同本征值的本征空间互相正交. 有限维 Hilbert 空间上的厄米算符 A 可用自己的独立本征矢构成的基底表为对角矩阵，而且对角元为本征值(实数). 为了把这一简单而重要的性质尽可能推广到无

限维的$\mathscr{H}$，有必要改用算符语言(脱离基底)表述. 先看一个简单例子. 设A是3维Hilbert空间上的厄米算符，$e_1, e_2, e_3 \in \mathscr{H}$是$A$的本征矢(三者线性独立)，满足

$$Ae_1 = 4e_1, \quad Ae_2 = 4e_2, \quad Ae_3 = 7e_3,$$

则A的本征值为4和7，相应的本征空间M_4和M_7分别是由$\{e_1, e_2\}$和e_3生成的子空间. 以P_4和P_7分别代表到M_4和M_7上的投影算符，则它们在基底$\{e_1, e_2, e_3\}$下的矩阵分别是$\mathrm{diag}(1,1,0)$和$\mathrm{diag}(0,0,1)$. 因为A在此基底下的矩阵是以本征值为对角元的对角矩阵，即$\mathrm{diag}(4,4,7)$，所以有矩阵元等式$A_{ij} = 4(P_4)_{ij} + 7(P_7)_{ij}$，配上基矢便得算符等式$A = 4P_4 + 7P_7$. 一般地，可以证明，设$\lambda_k (k = 1, \cdots, K \leqslant N)$是$N(<\infty)$维Hilbert空间$\mathscr{H}$上厄米算符$A$的不同本征值，$P_k$是从$\mathscr{H}$到$M_\lambda$上的投影算符，则$A$可用$P_k$作如下线性表出：

$$A = \sum\nolimits_{k=1}^{K} \lambda_k P_k, \tag{B-2-14}$$

而且P_k满足

$$\text{(a)} \quad I = \sum\nolimits_{k=1}^{K} P_k, \qquad \text{(b)}\ P_k P_j = O \text{ 若 } k \neq j, \tag{B-2-15}$$

其中I是恒等算符，O是零算符，定义为$O(f) \equiv 0 \in \mathscr{H} \quad \forall f \in \mathscr{H}$. 请注意式(B-2-14)及(B-2-15)是算符等式(而非矩阵等式)，这其实是用简单得多的投影算符表示算符A，也可称为“把算符A对角化”. 在$\mathscr{H}$是有限维时，“把厄米算符A对角化”和“寻找A的全部本征矢”可以看作同一问题. 然而当$\mathscr{H}$是无限维时情况就要复杂得多，因为厄米(甚至自伴)算符未必有本征矢，即使有也未必完备，即未必能构成基底. 这时就要借用本征值概念的推广——谱——来实现广义对角化. 算符A的谱是复数空间$\mathbb{C}$中的一个闭子集$\sigma(A)$. 若A有本征值λ，则$\lambda \in \sigma(A)$，然而$\sigma(A)$中的点(谱点)却不一定是A的本征值. 谱理论的一个重要结论是自伴算符A的谱点必为实数. (可以是也可以不是A的本征值. 这可看作是对“厄米算符的本征值必为实数”这一不准确物理提法的准确化. 然而，厄米而非自伴的算符的谱却可包含非实数.) 动量算符P(勿与投影算符P相混)和位置算符X是两个特殊的无界自伴算符，它们的谱$\sigma(P)$和$\sigma(X)$是$\mathbb{C}$中的整个实数轴，而且只有连续谱，任一谱点都不是本征值. 所谓对自伴算符A实现广义对角化，就是要把A表示为式(B-2-14)的推广形式. 为了介绍推广的思路，先定义一个投影算符族$\{Q_i \mid i = 0, 1, \cdots, K \leqslant N\}$如下：

$$Q_0 := O\text{(零算符)}, \quad Q_i := \sum\nolimits_{k=1}^{i} P_k, \quad i = 1, 2, \cdots, K. \tag{B-2-16}$$

由此易见

$$P_k = Q_k - Q_{k-1} \quad (1 \leqslant k \leqslant K), \tag{B-2-17}$$

$$Q_K = \sum\nolimits_{k=1}^{K} P_k = I \quad [\text{用到式(B-2-15a)}]. \tag{B-2-18}$$

借助于式(B-2-17)可把式(B-2-14)改写为

$$A = \sum\nolimits_{k=1}^{K} \lambda_k (Q_k - Q_{k-1})\,. \tag{B-2-14'}$$

为把上式改写成便于推广到连续谱的形式，定义一个新的、不可数的投影算符族 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 如下：

$$E_\lambda := \begin{cases} O & \text{若 } \lambda < \lambda_1, \\ Q_k & \text{若 } \lambda_k \leqslant \lambda < \lambda_{k+1}, (k = 1, 2, \cdots, K-1) \\ I & \text{若 } \lambda \geqslant \lambda_K. \end{cases} \tag{B-2-19}$$

图 B-4 有助于读者理解 E_λ 的上述定义，图中横轴代表 λ (实数)，纵轴象征性地代表算符 E_λ. 虽然至今仍只是对有分立谱的算符 A 的投影展开式的改写，但已提供强烈暗示：当 A 有连续谱时，分立的投影算符 P_k 大概可被单参投影算符族 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ [称为 A 的**谱族**(spectral family)]所代替，式(B-2-14′)和(B-2-18)的求和则应改为积分：

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda\,, \tag{B-2-20}$$

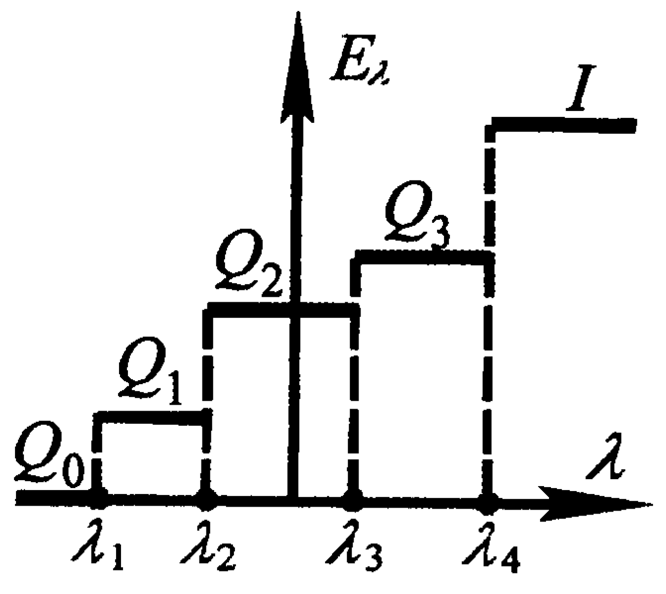


图 B-4　E_λ 定义示意

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E_\lambda\,, \tag{B-2-21}$$

由于 E_λ 是算符(一般不是数)，上两式的含义还应解释. 以式(B-2-21)为例，其含义是

$$(f, Ig) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(f, E_\lambda g), \quad \forall f, g \in \mathscr{H}\,. \tag{B-2-21'}$$

上式左边就是 (f, g)，右边积分意义明确：因 $E_\lambda g \in \mathscr{H}$，故 $(f, E_\lambda g)$ 无非是个依赖于 λ 的复数(实变数 λ 的复值函数)，记作 $\Phi(\lambda)$，则式(B-2-21′)右边的准确含义可用

Lebesgue 积分阐述，粗略地理解就是$\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{\Phi}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.

以上只是半直观性的思辨，但谱理论的严格讨论表明这一思辨是可行的，这里只介绍谱理论中对量子力学最为重要的一个定理：

命题 B-2-6(自伴算符的谱分解定理) Hilbert 空间(可以是无限维)$\mathscr{H}$中任一稠定自伴算符A(不论有无界，也不论有无本征值)有唯一的谱族$\{E_\lambda \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$使$A$可被表为

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda\,, \tag{B-2-22}$$

具体含义是

$$(f,Ag)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\mathrm{d}(f,E_\lambda g)\,,\quad \forall f,g\in\mathscr{H}\,. \tag{B-2-22'}$$

证明 略. □

式(B-2-22)可看作(B-2-14)的推广，因而可称为A的广义对角化形式. E_λ具有一系列相对简单的性质，式(B-2-22)可理解为把自伴算符A约化为简单得多的无数投影算符E_λ.

例 1 找出$\mathscr{H}\equiv \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$中位置算符$X$的谱族并用谱分解定理把$X$表为广义对角化形式.

解 谱族$\{E_\lambda\}$中的λ是任意实数，也可改写为x. $\forall x\in\mathbb{R}$定义映射$E_x:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$为

$$(E_x g)(y):=\begin{cases} g(y), & y\leqslant x\\ 0, & y>x\end{cases}\quad \forall g\in\mathscr{H}\,, \tag{B-2-23}$$

则E_x是从$\mathscr{H}$到$\mathscr{H}$的子空间$M_x\equiv\{h\in\mathscr{H}\mid h(y)=0\ \ \forall y>x\}$上的投影算符，因此$\{E_x\mid x\in\mathbb{R}\}$是一个单参投影算符族. 可以验证它满足谱族的条件(特别是，它的确是恒等算符的分解，即$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E_x$). 现在证明位置算符$X$可用它表为如下的广义对角化形式：

$$X=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}E_x\,. \tag{B-2-24}$$

$\forall g\in D_X, f\in\mathscr{H}\equiv \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$有

$$(f,Xg)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}\,xg(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}\left(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(y)}\,g(y)\,\mathrm{d}y\right). \tag{B-2-25}$$

借用式(B-2-23)可把上式右边d后的积分表为

$$\int_{-\infty}^{x} \overline{f(y)}\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(y)}\, (E_x g)(y)\, \mathrm{d}y = (f, E_x g),$$

所以式(B-2-25)成为

$$(f, Xg) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \mathrm{d}(f, E_x g), \qquad \forall g \in D_X, f \in \mathscr{H},$$

此即式(B-2-24).　　**[解毕]**

自伴算符的谱分解定理功能强大，它原则上可对量子力学中基于默认自伴算符有完备本征矢的各种物理说法和做法给出明确、严格的解释(充当后台). 例如，用位置算符 X 的"本征矢" $|x\rangle$ 表示的"完备性关系" $I=\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x$ 其实是 X 的谱族 $\{E_x \mid x\in\mathbb{R}\}$ 的单位分解 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E_x$ 的物理写法，而 $X=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|$ 则是 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E_x$ 的物理写法. 总之，量子力学中许多数学上不严密的物理做法之所以能给出正确结果，是因为所涉及的算符是自伴算符，结果的正确性由谱定理暗中保证. 然而谱定理不适用于非自伴的厄米算符，因此分清厄米性和自伴性至关紧要. Roman(1975)P.533 的脚注告诫说："缺乏经验的量子力学学生的一个常犯错误是无视无界性以及失于区分厄米和自伴算符. 这一失察可能导致灾难性后果." 我们绝非提倡放弃行之有效的种种物理做法，只想使读者了解其结果的正确性的本质原因和适用范围，并在一旦遇到百思不解的问题时提供一条可能思路. Kreyszig(1978)是一本泛函分析入门教材，其最末一章提供了一种数学上严密(而又不过多使用数学)的、介绍量子力学基本原理的讲法.　　**[选读 B-2-1 完]**

习　题

~1. 设 V 是内积空间，它(作为矢量空间)的零元记作 0，试证 $(0,g)=0\in\mathbb{C}\ \ \forall g\in V$.

~2. 验证用式(B-1-1)定义的 (f,g) 满足内积定义(§B.1 定义 1)的 4 个条件.

3. 设 V 是内积空间，试证如下不等式(称为 Schwarz 不等式):

$$|(f,g)|^2 \leqslant (f,f)(g,g),\quad \forall f,g\in V.\quad [\,|(f,g)|\text{代表复数}\,(f,g)\text{的模}]$$

提示: 令 $h\equiv f-[(g,f)/(g,g)]\,g$，利用 $(h,h)\geqslant 0$.

~4. 试证命题 B-1-1 中的映射 $v: V\to V^*$ 是一一的和反线性的.

~5. 验证由式(B-1-4)定义的 $\mathscr{H}^*$ 的内积满足内积定义的 4 个条件.

~6. 试证 Hillbert 空间的任一正交归一序列都线性独立.

~7. 试证由式(B-1-16)定义的 $A^*: \mathscr{H}^*\to\mathscr{H}^*$ 是线性的.

8. 试证由式(B-1-16)定义的 A^* 与 A 的对应关系是线性的, 即

$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \quad (cA)^* = cA^* .$$

~9. 试证由式(B-1-17)或(B-1-18)定义的 $A^\dagger$ 与 A 的对应关系是反线性的(命题 B-1-4).

10. 试证命题 B-1-5,即 $A^{\dagger\dagger} = A$ 对 $\mathscr{H}$ 上的有界算符 A 成立.

11. 设 $\{|e_n\rangle\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的正交归一基,试证算符等式 $\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = I$.

附录C 量子力学的几何相

相位问题历来是物理学的重要问题. 在Berry(1984)明确提出几何相概念之前, 物理学家早已在许多具体领域中注意并学会处理与该领域有关的几何相问题(虽然还没有“几何相”一词). 例如, ①光学中的Pancharatnam相导致可测量的干涉效应; ②分子物理学中的分子 AB 效应对分子的动力学有重要影响. AB 效应是Aharonov-Bohm 效应的简称. 经典电磁理论引入标势和矢势的目的是便于计算电磁场强, 势的规范变换对场没有影响, 因此普遍认为场有物理意义而势则只是辅助量. 量子力学的表述需要哈密顿正则形式, 而在电磁方程的正则形式中出现的是电磁矢势 $\vec{A}$ 而非磁场 $\vec{B}$ (详见下册第15章). 尽管如此, 人们长期以来仍以为即使在量子力学中电磁势仍无独立意义. 1959年, Aharonov和Bohm(简称AB)首次对此提出异议[Aharonov and Bohm(1959)], 他们建议做图C-1的实验: 把通电直长螺线管放在图示位置, 电子束在 A 处一分为二, 分别经螺线管两侧(可用金属箔使之避开螺线管)后在 F 处汇合并发生干涉. 螺线管外部磁场为零而矢势却不会处处为零, 因为

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi \neq 0 .$$

(其中 L 是绕螺线管一周的闭曲线, S 是以 L 为边线的曲面.) 哈氏量 H 中含 $\vec{A}$, 量子力学的计算表明两个分电子束到达F时相位不同, 因而AB的文章预言干涉花样与没有螺线管时有别. 实验(1960)果然证实了AB的预言, 后人遂称此现象为AB效应. 电子束涉及的磁场 $\vec{B}$ 无论螺线管存在与否都为零, 只要坚持场的作用的局域性, 就只能承认在此情况下矢势 $\vec{A}$ 确有物理意义. Berry(1984)首次明确提出带有普遍性的几何相概念, 起到了“一石激起千层浪”的作用. 从此, 对几何相的研究成了国际物理界的热点之一, 在国际重要学术刊物上发表的有关文章不计其数, 内容多数集中在两方面: ①探讨几何相在众多物理领域中的表现及其实验验证; ②在理论上对Berry几何相作不断深入的研究和推广, 其中若干理论物理和数学高手的精彩文

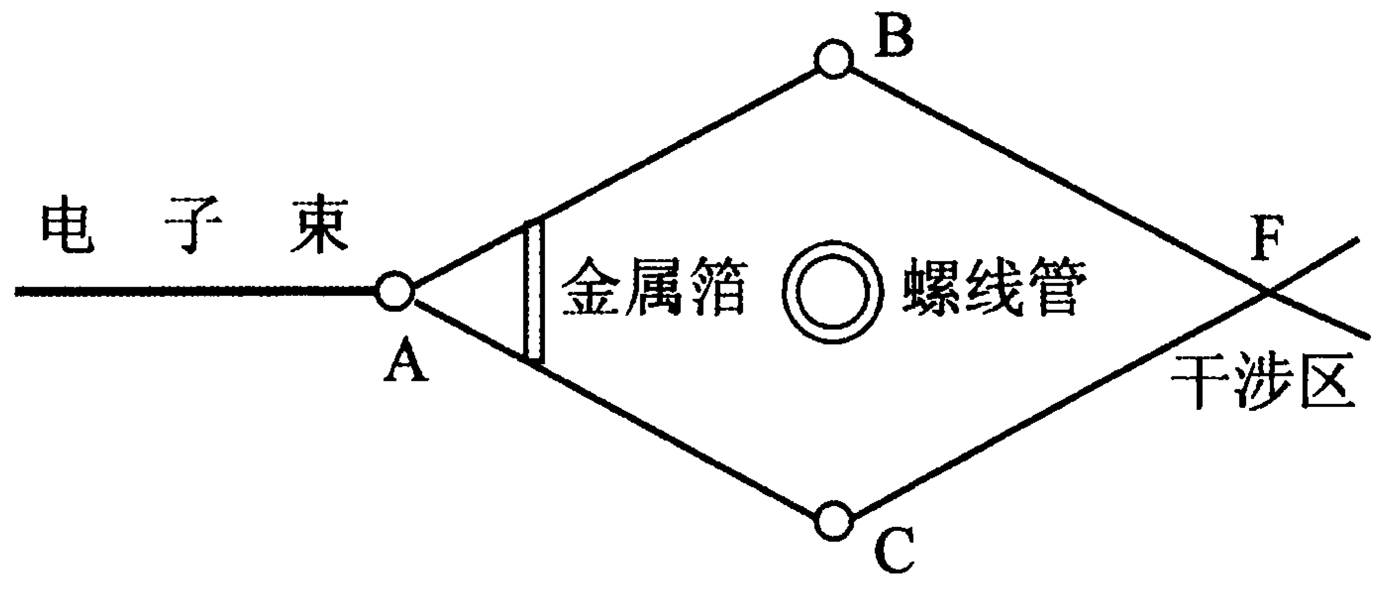


图 C-1 AB 实验示意(取自 AB 文)

章更是起到推波助澜的重要作用. 此外, 几何相还在某些领域找到了实际应用的可能性, 例如用 Berry 几何相原则上可以制造逻辑门从而用于量子计算, 并有许多优点. 本附录§C.1介绍 Berry 相的基本概念和推导, §C.2 介绍 Aharonov 和 Anandan 对 Berry 相的推广(简称AA几何相), 并简介 Samuel 等对 AA 相的进一步推广的思路. 阅读本附录之前最好先阅读附录 B 的小节 B.1.4 和 B.1.5 .

§C.1 Berry 几何相

在非相对论量子力学中, 系统的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 按薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=H\,|\psi(t)\rangle \tag{C-1-1}$$

演化, 演化过程可用 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的一条以时间 t 为参数的曲线描述. 若系统的哈氏量 H 不含时, 则系统能量守恒, 并存在严格的定态. 这里只讨论 H 有分立本征态的情况. 设系统的初态为 H 的第 n 本征态, 即 $|\psi(0)\rangle=|n\rangle$, 其中 $|n\rangle$ 满足

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle\,, \tag{C-1-2}$$

则系统在任一时刻 t 的态为

$$|\psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n(t)}|n\rangle\,, \tag{C-1-3}$$

其中

$$\lambda_n(t)=-\hbar^{-1}E_n t\,. \tag{C-1-4}$$

这表明 $|\psi(t)\rangle$ 与 $|\psi(0)\rangle=|n\rangle$ 位于 $\mathscr{H}$ 中的同一射线上, 差别只在于一个相因子 $\exp[\mathrm{i}\lambda_n(t)]$, 通常称为**动力学相因子**, $\lambda_n(t)$ 则称为**动力学相**(dynamical phase). 容易验证式(C-1-3)、(C-1-4)满足薛定谔方程(C-1-1).

下面讨论 H 随时间变化的情况. 设 H 依赖于一组随时间而变的参数 $R=(X_1, X_2, \cdots)$ [例如 (X_1, X_2, X_3) 代表磁场的三个分量], 则 $H=H(R(t))$ 将通过参数 R 依赖于 t. 所有可能参数 R 的集合 P 叫**参数空间**(parameter space), 设它是一个流形. R 随 t 的变化对应于 P 中的一条以 t 为参数的曲线. 系统的演化遵从薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=H(R(t))\,|\psi(t)\rangle\,. \tag{C-1-5}$$

我们只讨论 $H(R)\;(\forall R\in P)$ 有分立本征值且无简并的情况. 如果初态 $|\psi(0)\rangle$ 是

$H(R(0))$ 的第 n 本征态 $|n(R(0))\rangle$，而且 R 随 t 的变化足够缓慢，则根据量子力学的**缓变定理**(adiabatic theorem, 又译作**浸渐定理**或**绝热定理**), 系统在每一时刻 t 近似处于 $H(R(t))$ 的第 n 本征态 $|n(R(t))\rangle$，即近似有

$$|\psi(t)\rangle = \exp[\mathrm{i}\lambda_n(t)]\,|n(R(t))\rangle, \qquad \text{(C-1-6)}$$

其中 $|n(R)\rangle$ 满足本征方程

$$H(R)|n(R)\rangle = E_n(R)|n(R)\rangle. \qquad \text{(C-1-7)}$$

应当说明，方程(C-1-7)只能把 $|n(R)\rangle$ 确定到“差一个相因子”的程度，因为若 $|n(R)\rangle$ 满足式(C-1-7), 则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(R)}|n(R)\rangle$ [其中 $\mu(R)$ 为 R 的任意实值函数]也满足式(C-1-7). 为确定起见，我们对参数空间 P 中每点 R 指定一个 $|n(R)\rangle$，从而使 $|n\rangle$ 成为由 P 到 $\mathscr{H}$ 的映射，即 $\forall R\in P$ 有唯一的 $|n(R)\rangle\in\mathscr{H}$ 与之对应.我们要求这个映射是 C^1 (可微)的，其他则完全任意. 后面将看到这种任意性并不影响我们关心的结果.

设参数 R 从 $t=0$ 开始缓慢变化，经时间 T 后恢复原值，则这一过程对应于参数空间 P 中的一条闭曲线 $C(t)$，且 $C(T)=C(0)$. 设系统初态为 $|\psi(0)\rangle=|n(R(0))\rangle$ [其中 $R(0)$ 其实就是 $C(0)$], 则由缓变定理可知系统在时刻 t 的态 $|\psi(t)\rangle$ 满足式(C-1-6), 即 $|\psi(t)\rangle$ 与 $|n(R(t))\rangle$ 只差一个相因子 $\exp[\mathrm{i}\lambda_n(t)]$，其中 $\lambda_n(t)$ 是 t 的某一实值函数. 长期以来，人们似乎默认 $\lambda_n(t)$ 由下式表示：

$$\lambda_n(t) = -\hbar^{-1}\int_0^t E_n(R(t'))\,\mathrm{d}t'. \qquad \text{(C-1-8)}$$

然而用此 $\lambda_n(t)$ 代入式(C-1-6)所得的 $|\psi(t)\rangle$ 一般不满足薛定谔方程(C-1-5). Berry(1984)指出式(C-1-8)应修正为

$$\lambda_n(t) = \eta_n(t) + \gamma_n(t), \qquad \text{(C-1-9)}$$

其中

$$\eta_n(t) = -\hbar^{-1}\int_0^t E_n(R(t'))\,\mathrm{d}t', \qquad \text{(C-1-10)}$$

而附加相 $\gamma_n(t)$ 则可由薛定谔方程确定. 把式(C-1-6)、(C-1-9)代入薛定谔方程(C-1-5), 利用式(C-1-7)和(C-1-10), 经计算得

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_n(t)}{\mathrm{d}t}|n(R(t))\rangle = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(R(t))\rangle. \qquad \text{(C-1-11)}$$

用 $\langle n(R(t))|$ 作用于上式两边，注意到归一化条件 $\langle n(R(t))|n(R(t))\rangle=1$，有

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_n(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\left\langle n(R(t))\right|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|n(R(t))\right\rangle. \tag{C-1-12}$$

在进一步讨论之前，应分清两类随t而变的量：①$H,|n\rangle$和E_n等本来是R的"函数"(是从流形P到某一集合的映射)，只因P中指定了一条以t为参数的曲线$C(t)$才诱导出t的函数$H(R(t))$，$|n(R(t))\rangle$和$E_n(R(t))$；②$|\psi\rangle,\eta_n$和γ_n等并非R的函数(并非从P到某一集合的映射)，不能指着P中一点R问其$|\psi\rangle,\eta_n$和γ_n的值. 例如，$C(0)$和$C(T)$是P的同一点，但它们有不同的γ_n值. 从物理角度看，系统的演化是指$|\psi\rangle$随t而变，因此有一元函数$\gamma_n(t)$，它可看作$\mathbb{R}$上的标量场，一般说$\gamma_n(T)\neq\gamma_n(0)$. 由于$\mathrm{d}\gamma_n/\mathrm{d}t$满足式(C-1-12)，该式右边由流形$P$及其上的闭曲线$C(t)$的几何决定，所以有可能对$\gamma_n$作几何解释. 为此，我们希望把$\gamma_n$解释为$C(t)\subset P$上的标量场. 然而这是不可能的，因为，例如，$C(0)$和$C(T)$是$C(t)\subset P$的同一点，但$\gamma_n(T)\neq\gamma_n(0)$. 解决办法是考虑"几乎闭合"的曲线$C':(0,T)\to P$，满足$C'(t)=C(t)\ \forall t\in(0,T)$. 以$C'$简记曲线映射的像，则$C'$是$P$的1维子流形. 这时可自然地把$\gamma_n$解释为$C'$上的标量场(即$\gamma_n:C'\to\mathbb{R}$)，把$\mathrm{d}\gamma_n/\mathrm{d}t$解释为曲线$C'$的切矢$\partial/\partial t$作用于$\gamma_n$的结果，即

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_n}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\gamma_n)=(\mathrm{d}\gamma_n)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{C-1-13}$$

其中第二步用到§2.3中由函数f(现在是γ_n)定义的对偶矢量场$\mathrm{d}f$(现在是$\mathrm{d}\gamma_n$)的式(2-3-7)，$(\mathrm{d}\gamma_n)(\partial/\partial t)$代表$C'$上的1形式场$\mathrm{d}\gamma_n$对$C'$上的切矢场$\partial/\partial t$作用的结果. 因此

$$\text{式(C-1-12)左边}=(\mathrm{d}\gamma_n)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\text{在点}R(t)\in C'\text{的值}. \tag{C-1-14}$$

下面再介绍对式(C-1-12)右边的理解. 为此先补充一点数学知识[见 Bleecker (1981)].

如所熟知，流形M上的函数f是指映射$f:M\to\mathbb{R}$. 函数也可看作0形式场，若以$\Lambda_M(0)$代表M上全体光滑0形式场的集合，则$f\in\Lambda_M(0)$. 量子力学经常用到流形M上的复值函数f，即$f:M\to\mathbb{C}$，可记作$f\in\Lambda_M(0,\mathbb{C})$，而$\Lambda_M(0)$则可看作$\Lambda_M(0,\mathbb{R})$的简写. $\Lambda_M(0)$和$\Lambda_M(0,\mathbb{C})$的元素可分别称为M上的**实值0形式场**和**复值0形式场**. 注意到$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$都是矢量空间，推广到任意矢量空间$\mathscr{V}$便可定义M上的"$\mathscr{V}$值0形式场"如下.

定义1 设$\mathscr{V}$是R维实(或复)矢量空间，$\{e_1,\cdots,e_R\}$是$\mathscr{V}$的一个基底，$f^1,\cdots,f^R$是流形M上的R个实值(或复值)光滑函数，即

$f^1,\cdots,f^R \in \Lambda_M(0,\mathbb{R}$或$\mathbb{C})$，则

$$f \equiv f^1 e_1 + \cdots + f^R e_R = f^r e_r \quad (\text{重复 } r \text{ 表示对 } r \text{ 从 1 到 } R \text{ 求和})$$

称为 M 上的一个(光滑)$\mathscr{V}$ **值 0 形式场**($\mathscr{V}$-valued 0-form field)，记作 $f \in \Lambda_M(0,\mathscr{V})$，它是由 M 到 $\mathscr{V}$ 的映射，其在 M 中任一点 p 的值 $f(p)$ 由下式定义：

$$f(p) := f^1(p)e_1 + \cdots + f^R(p)e_R \equiv f^r(p)e_r \in \mathscr{V}.$$

定义 2　设 $\mathscr{V}$ 是 R 维实(或复)矢量空间，$\{e_1,\cdots,e_R\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的一个基底，$\varphi^1,\cdots,\varphi^R$ 是流形 M 上 R 个光滑的实值(或复值) l 形式场，即 $\varphi^1,\cdots,\varphi^R \in \Lambda_M(l,\mathbb{R}$或$\mathbb{C})$，则

$$\varphi \equiv \varphi^1 e_1 + \cdots + \varphi^R e_R \equiv \varphi^r e_r$$

称为 M 上的一个 $\mathscr{V}$ **值 l 形式场**，记作 $\varphi \in \Lambda_M(l,\mathscr{V})$，它在 M 中任一点 p 的值 $\varphi|_p$ 把 p 点的 l 个矢量 $v_1,\cdots,v_l$ 映射为 $\mathscr{V}$ 的一个元素：

$$\varphi|_p(v_1,\cdots,v_l) := e_r\varphi^r|_p(v_1,\cdots,v_l) \in \mathscr{V}. \quad [\text{请注意 } \varphi^r|_p(v_1,\cdots,v_l) \in \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}]$$

定义 3　设 $\varphi = \varphi^r e_r \in \Lambda_M(l,\mathscr{V})$，则 φ 的**外微分** $\mathrm{d}\varphi$ 定义为

$$\mathrm{d}\varphi := e_r(\mathrm{d}\varphi^r) \in \Lambda_M(l+1,\mathscr{V}),$$

它在 M 中任一点 p 的值 $\mathrm{d}\varphi|_p$ 把 p 点的 $l+1$ 个矢量 $v_1,\cdots,v_{l+1}$ 映射为 $\mathscr{V}$ 的一个元素：

$$\mathrm{d}\varphi|_p(v_1,\cdots,v_{l+1}) := e_r\,\mathrm{d}\varphi^r|_p(v_1,\cdots,v_{l+1}) \in \mathscr{V}.$$

注 1　不难证明由定义 2, 3 定义的 φ 和 $\mathrm{d}\varphi$ 与所选的基底 $\{e_1,\cdots,e_R\}$ 无关.

定义 1~3 涉及的 $\mathscr{V}$ 可推广为无限维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$. 例如式(C-1-7)后一段的 $|n\rangle$ 可看作 P 上的 $\mathscr{H}$ 值 0 形式场，即 $|n\rangle \in \Lambda_P(0,\mathscr{H})$，因为 $\forall R \in P$ 有唯一的 $|n(R)\rangle \in \mathscr{H}$. 设 $\{|e_r\rangle\}$ 为 $\mathscr{H}$ 的基底，则 $|n(R)\rangle = n^r(R)|e_r\rangle$ (右边是 $\sum_{n=1}^{\infty} n^r(R)|e_r\rangle$ 的简写)，其中 $n^r \in \Lambda_P(0,\mathbb{C})$. 进一步说，$|n\rangle \in \Lambda_P(0,\mathscr{H})$ 还导致 $|\mathrm{d}n\rangle \in \Lambda_P(1,\mathscr{H})$，用 $\mathscr{H}$ 的基矢展开则为 $|\mathrm{d}n\rangle = (\mathrm{d}n^r)|e_r\rangle$，其中 $\mathrm{d}n^r \in \Lambda_P(1,\mathbb{C})$.

现在回到式(C-1-12). 把 $|n\rangle \in \Lambda_P(0,\mathscr{H})$ 的定义域限制于 C' 上便诱导出 $|n(t)\rangle$. 因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n^r(t)|e_r\rangle) = \mathrm{d}n^r\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\bigg|_{R(t)}|e_r\rangle = |\mathrm{d}n\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\bigg|_{R(t)},$$

故

$$\langle n|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n\rangle = \langle n|\mathrm{d}n\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{C-1-15}$$

其中$\langle n|\mathrm{d}n\rangle \in \Lambda_P(1,\mathbb{C})$，含义是：对$P$中任一点$R$及$R$点的任一矢量$v$，有

$$\langle n|\mathrm{d}n\rangle|_R(v) = \langle n(R)|\mathrm{d}n|_R(v)\rangle \in \mathbb{C}.$$

于是

$$\text{式(C-1-12)右边} = \mathrm{i}\langle n|\mathrm{d}n\rangle(\partial/\partial t)\text{ 在点 }R(t)\in C'\text{ 的值}. \tag{C-1-16}$$

对比式(C-1-14)和(C-1-16)，考虑到γ_n只在C'上有定义，便得C'上的1形式场等式

$$\mathrm{d}\gamma_n = \mathrm{i}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle, \tag{C-1-17}$$

其中$|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$是$|\mathrm{d}n\rangle$限制在$C'$上每点的切空间的结果.（$|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$与$|\mathrm{d}n\rangle$的关系类似于§5.2末的$\tilde{\mu}$与$\mu$的关系）. γ_n为实值函数表明$\mathrm{i}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle \in \Lambda_{C'}(1,\mathbb{R})$，即$\mathrm{i}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$是$C'$上的实值1形式场. 这一结论也可从另一侧面验证：由归一化条件$1=\langle n|n\rangle$ 得 $0=\langle n|\mathrm{d}n\rangle+\langle \mathrm{d}n|n\rangle=\langle n|\mathrm{d}n\rangle+\overline{\langle n|\mathrm{d}n\rangle}$. 设 $\langle n|\mathrm{d}n\rangle = a+\mathrm{i}b$，其中$a,b\in\Lambda_P(1,\mathbb{R})$，则$0=2a$，故$\langle n|\mathrm{d}n\rangle=\mathrm{i}b$，$\mathrm{i}\langle n|\mathrm{d}n\rangle = -b\in\Lambda_P(1,\mathbb{R})$. 以$\mathrm{Im}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$代表$\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$的虚部，则式(C-1-17)可改写为

$$\mathrm{d}\gamma_n = -\mathrm{Im}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle. \tag{C-1-17'}$$

参数在P中沿C转一圈所获得的γ_n的增量为$\gamma_n(T)-\gamma_n(0)$，简记作$\gamma_n(C)$，则

$$\gamma_n(C) = -\mathrm{Im}\oint_{C'}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle = -\mathrm{Im}\oint_C\langle n|\mathrm{d}n\rangle, \tag{C-1-18}$$

上式中间是1维流形C'上的实值1形式场$-\mathrm{Im}\langle n|(\mathrm{d}n)^{\sim}\rangle$的积分.令$\alpha\equiv-\mathrm{Im}\langle n|\mathrm{d}n\rangle$，则

$$\mathrm{d}\alpha = -\mathrm{Im}\langle \mathrm{d}n|\wedge|\mathrm{d}n\rangle \in \Lambda_P(2,\mathbb{R}),$$

于是式(C-1-18)可用Stokes定理改写为[①]

$$\gamma_n(C) = -\mathrm{Im}\iint_S\langle \mathrm{d}n|\wedge|\mathrm{d}n\rangle, \tag{C-1-19}$$

其中S是P中以C为边线的任一曲面(图C-2). 上式亦可表为

$$\gamma_n(C) = -\iint_S \Phi_n, \tag{C-1-20}$$

其中

$$\Phi_n \equiv \mathrm{Im}\langle \mathrm{d}n|\wedge|\mathrm{d}n\rangle \tag{C-1-21}$$

---

① 我们要求C是这样的闭曲线，它是P中某曲面的边界，从而可用Stokes定理把闭曲线积分化为曲面积分.

称为**相位 2 形式**(phase 2-form), 是参数空间(流形)P 上的一个实值 2 形式场, 即 $\Phi_n \in \Lambda_P(2,\mathbb{R})$.

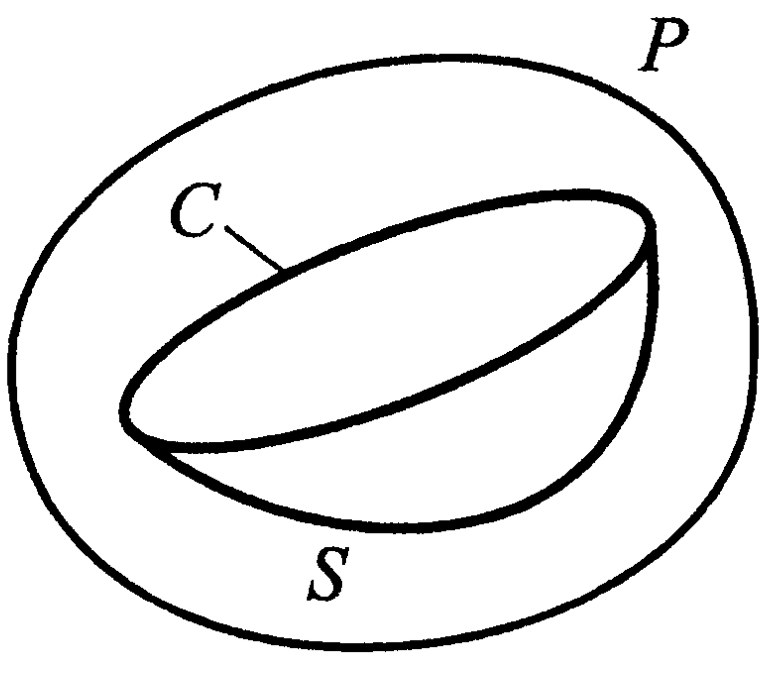


图 C-2　参数空间 P 中以闭曲线 C 为边线的任一曲面 S

前已指出, 本征方程(C-1-7)仅能把 $|n(R)\rangle$ 确定到差一个相因子的程度, 只是由于事先对参数空间 P 的每点 R 指定了一个 $|n(R)\rangle$ 才使 $|n(R)\rangle$ 成为 P 上的一个 0 形式场. 如果改用另一种指定, 就会得到另一个 0 形式场 $|n'(R)\rangle$. 任意两种指定的结果 $|n(R)\rangle$ 和 $|n'(R)\rangle$ 最多只差一个相因子, 可设 $|n'(R)\rangle = e^{i\mu(R)}|n(R)\rangle$, 从而 $\langle n'(R)| = \langle n(R)|\ e^{-i\mu(R)}$ [这是式(B-1-28)的应用]及 $|dn'\rangle = e^{i\mu}\ |dn\rangle + i\,(d\mu)\ e^{i\mu}\,|n\rangle$, 故

$$\langle n'|dn'\rangle = \langle n|\ e^{-i\mu}e^{i\mu}\,|dn\rangle + \langle n|\ e^{-i\mu}\,i\,(d\mu)\ e^{i\mu}\,|n\rangle = \langle n|dn\rangle + i\,d\mu\,. \qquad \text{(C-1-22)}$$

这表明 $\langle n'|dn'\rangle \neq \langle n|dn\rangle$, 由式(C-1-18)似乎会得到不同的 $\gamma_n(C)$, 其实这只是一种错觉. $\langle n'|dn'\rangle \neq \langle n|dn\rangle$ 不表明 $\oint_C \langle n'|dn'\rangle \neq \oint_C \langle n|dn\rangle$, 事实上, 式(C-1-18)可改写为式(C-1-19), 后者只涉及 $\langle dn|\wedge|dn\rangle$ 的积分, 对式(C-1-22)两边求外微分得 $\langle dn'|\wedge|dn'\rangle = \langle dn|\wedge|dn\rangle$, 可见 $\gamma_n(C)$ 在变换 $|n(R)\rangle \mapsto |n'(R)\rangle$ 下不变. 于是可称 $|n(R)\rangle \mapsto |n'(R)\rangle$ 为规范变换, 并说 $\gamma_n(C)$ 有规范不变性. 由式(C-1-18)或(C-1-19)还可知 $\gamma_n(C)$ 只取决于曲线 C(指映射 C 的像)而与其参数化无关. (这里的参数是指曲线的参数 t, 勿与物理参数 R 相混.) 可见 Berry 的附加相 $\gamma_n(C)$ 完全由参数空间 P 及其中的一条闭合曲线(指映射的像)的几何性质决定, 因此称为系统演化一周所获得的 **Berry 几何相**(Berry's geometrical phase), 而由式(C-1-10)求得的

$$\eta_n(T) = -\hbar^{-1}\int_0^T E_n(R(t))\,dt \qquad \text{(C-1-23)}$$

则称为系统演化一周所获得的**动力学相**. 与几何相不同, 式(C-1-23)表明动力学相与参数 R 如何经历曲线 C(指"走得快慢")有关, 亦即与 C 的参数化有关. 形象地说, 设想某人在参数空间 P 中沿曲线 C 足够缓慢地旅行一周, 则几何相 $\gamma_n(C)$ 只取决于他旅行的路线, 而动力学相 $\eta_n(C)$ 还取决于他在旅行过程中在经过各处时行走得快慢. 例如, 设他在时刻 $t_1 \in [0,T]$ 停下休息一段时间 Δt_1, 他将获得附加的动力学相 $-\hbar^{-1}E_n(R(t_1))\Delta t_1$.

Berry(1984)指出，要使$\left|\mathrm{d}n\right\rangle$有意义就要事先把$\left|n\right\rangle$指定为$R$的单值函数，而这给$\left|\mathrm{d}n\right\rangle$的直接计算带来不便，因此他又设法把$\Phi_n$改用不涉及$\left|\mathrm{d}n\right\rangle$的形式表出. 利用完备性关系$\sum_m |m\rangle\langle m| = I$把式(C-1-21)改写为

$$\Phi_n = \mathrm{Im}\sum\nolimits_m \langle \mathrm{d}n|m\rangle \wedge \langle m|\mathrm{d}n\rangle = \mathrm{Im}\sum\nolimits_{m\neq n} \langle \mathrm{d}n|m\rangle \wedge \langle m|\mathrm{d}n\rangle, \qquad \text{(C-1-24)}$$

上式的第二步用到如下事实：$\langle \mathrm{d}n|n\rangle \wedge \langle n|\mathrm{d}n\rangle = \overline{\langle n|\mathrm{d}n\rangle} \wedge \langle n|\mathrm{d}n\rangle = \overline{\mathrm{i}b} \wedge \mathrm{i}b = 0$，其中$b \equiv \langle n|\mathrm{d}n\rangle$. 由本征方程(C-1-7)得$H|\mathrm{d}n\rangle + (\mathrm{d}H)|n\rangle = E_n|\mathrm{d}n\rangle + (\mathrm{d}E_n)|n\rangle$. 以$\langle m| \neq \langle n|$作用于两边得

$$\langle m|H|\mathrm{d}n\rangle + \langle m|\mathrm{d}H|n\rangle = \langle m|E_n|\mathrm{d}n\rangle + \langle m|\mathrm{d}E_n|n\rangle = E_n\langle m|\mathrm{d}n\rangle, \qquad \text{(C-1-25)}$$

上式左边第一项可改写为

$$\langle m|H|\mathrm{d}n\rangle = \langle m|H^\dagger|\mathrm{d}n\rangle = (\langle m|\overline{E}_m)|\mathrm{d}n\rangle = E_m\langle m|\mathrm{d}n\rangle, \qquad \text{(C-1-26)}$$

其中第一步用到哈氏算符H的自伴性，即$H = H^\dagger$，第二步用到本征方程$H|m\rangle = E_m|m\rangle$的左矢形式$\langle m|H^\dagger = \langle m|\overline{E}_m$ [见式(B-1-31)]，第三步是因为自伴算符本征值为实数. 由式(C-1-25)、(C-1-26)可得$\langle m|\mathrm{d}n\rangle = \langle m|\mathrm{d}H|n\rangle/(E_n - E_m)$（对$m \neq n$）. 类似地，从$\langle n|H^\dagger = \langle n|\overline{E}_n$出发又得$\langle \mathrm{d}n|m\rangle = \langle n|\mathrm{d}H|m\rangle/(E_n - E_m)$（对$m \neq n$）. 于是式(C-1-21)可改写为

$$\Phi_n = \mathrm{Im}\sum_{m\neq n} \frac{\langle n|\mathrm{d}H|m\rangle \wedge \langle m|\mathrm{d}H|n\rangle}{(E_n - E_m)^2}. \qquad \text{(C-1-27)}$$

与式(C-1-21)不同，现在的Φ_n不含$\langle \mathrm{d}n|$和$|\mathrm{d}n\rangle$，因此谈Φ_n时无须事先约定P中每点R如何对应于唯一的$|n(R)\rangle$. 事实上，以本征方程(C-1-7)的任一解$|n(R)\rangle$和$|m(R)\rangle$代入式(C-1-27)都可求得同一$\Phi_n(R)$（请读者自行验证）.

[选读 C-1-1]

然而，依笔者管见，式(C-1-27)的适用范可能比式(C-1-21)要窄. 关键是对$\mathrm{d}H$的准确含义如何解释. 先讨论$\mathscr{H}$是有限维 Hilbert 空间这一简单情况(例如只涉及自旋的 Hilbert 空间)，这时$\mathscr{H}$上的算符必然有界. 以$\mathscr{O}$代表$\mathscr{H}$上一切线性算符的集合，则$\mathscr{O}$是有限维线性空间，因此H可解释为$H \in \Lambda_P(0,\mathscr{O})$，$\mathrm{d}H$也可相应地解释为$\mathrm{d}H \in \Lambda_P(1,\mathscr{O})$，意义明确. 然而，如果$\mathscr{H}$是无限维 Hilbert 空间，则$H$只是$\mathscr{H}$中(而非$\mathscr{H}$上)的算符，而且无界. 这时$\mathscr{O}$的定义变得非常微妙. (例如，$\mathscr{O}$代表以什么子集为定义域的全体算符的集合?) 无论如何定义，$\mathscr{O}$现在只能是无限维线性空间，而且难以保证它一定有基底，即使有，也难以保证它的任一元素一定能用基矢

表为可数项之和的形式. 这导致"P 上的 $\mathscr{G}$ 值形式场 $\Lambda_P(0,\mathscr{G})$"在定义上遇到困难(至少无法用定义 2), 从而使对 dH 的解释发生困难. 因此, 笔者不敢说式(C-1-27)在一般情况下有明确意义.

[选读 C-1-1 完]

以上是对 Berry 文章基本思想的解释, 侧重于几何角度. 该文还包含以下三方面内容: ①简并情况的讨论; ②缓变磁场中的自旋粒子的几何相及其实验验证的建议; ③AB 效应作为 Berry 几何相的特例的讨论. 不再详述.

理解 Berry 相的两个关键概念是不可积性(non-integrability)和缓变性. 不可积性[也称**不完整性**(anholonomy)]在这里是指 γ_n 不能表为 R 的函数, 即 γ_n 不能被定义为 P 上的 0 形式场, 特别是 $\gamma_n(T)\neq\gamma_n(0)$. 一般地, 如果某些变量在情况变化一周后不能恢复原值而其他(引起情况变化的)变量都已恢复原值, 就说存在不可积性. 最简单的例子是广义黎曼空间中矢量沿闭曲线转一周不恢复原值的现象. 傅科摆的摆平面在地球旋转一周后有所变化则是不可积性在经典力学中的例子. Berry 文章的发表引起了人们在各自熟悉的领域中寻找几何相的热潮.

Simon(1983)在对 Berry 文的原始版本作评述时从微分几何的高度指出 Berry 几何相与纤维丛上的联络有密切联系: Berry 相可解释为以参数空间为底流形的某种纤维丛上的一个"和乐"(holonomy). 关于纤维丛、丛上的联络及曲率等问题将在下册附录 I 中详述.

§ C.2　AA 几何相

Berry(1984)发表后不久, Aharonov 和 Anandan (简称 AA)就发表文章把几何相概念作了推广[Aharonov and Anandan(1987)]. 该文指出, 在量子系统的各种演化中有一类特别重要, 其特点是演化的末态与初态属于同一量子态(属于 Hilbert 空间中的同一射线), 即两者的态矢之间只差一个相因子. 该文称这类演化为**循环演化**(cyclic evolution). Berry 文章研究的都是循环演化, 它们是依靠以下三个条件实现的: ①演化起因于系统的参数在参数空间 P 中走出一条闭曲线; ②系统的演化是缓变过程; ③系统的初态是能量的本征态. Berry 特别强调缓变过程, 因为以能量本征态为初态的系统在缓变过程中的每一时刻都近似为能量本征态, 于是当参数回到初值时, 末态与初态只差一个相因子, 从而实现循环演化. 然而 AA 文则指出, 即使上述三个条件全都不满足(特别是, 即使非缓变), 也有可能实现循环演化(文中举了具体例子); 而只要是循环演化, 演化一周所获得的相位就可以自然分为动力学相和几何相两部分, 而且在满足 Berry 的三个条件时这两部分将分别等于 Berry 的动力学相和几何相. 因此 AA 的循环演化可看作 Berry 的循环演化的推广. 下面介绍

AA 文的主要思想.

以$\mathscr{R}$代表$\mathscr{H}$中所有射线的集合(射线空间), 则存在从$\mathscr{H}-\{0\}$到$\mathscr{R}$的自然的投影映射$\pi: \mathscr{H}-\{0\}\to\mathscr{R}$, 定义为

$$\pi(|\psi\rangle) := |\psi\rangle \text{ 所在射线}, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathscr{H}-\{0\}.$$

设哈氏算符为$H(t)$的系统从任意归一化初态$|\psi(0)\rangle$出发按薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{C-2-1}$$

演化, 而且(不论什么原因)末态$|\psi(T)\rangle$与初态在同一射线上, 即

$$|\psi(T)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi(0)\rangle, \quad \phi\in\mathbb{R}. \tag{C-2-2}$$

上式表明这是一个循环演化, 对应于$\mathscr{H}$中一条以时间t为参数的曲线$C: [0,T]\to\mathscr{H}$, 其始末两点在同一射线上, 因此其投影$\hat{C}=\pi\circ C: [0,T]\to\mathscr{R}$是$\mathscr{R}$中一条以$t$为参数的闭曲线, 见图 C-3. 给定这样的曲线$C(t)$后, 在$\mathscr{H}$中任选闭曲线$\tilde{C}(t)$, 满足$\pi(\tilde{C}(t))=\pi(C(t))\equiv\hat{C}(t)$(仍见图 C-3), 则由$\tilde{C}(t)$所代表的“演化”$|\tilde{\psi}(t)\rangle$在任一时刻$t\in[0,T]$必与$|\psi(t)\rangle$在同一射线上, 故存在实值函数$f$: $[0,T]\to\mathbb{R}$使

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \tag{C-2-3}$$

$$f(T)-f(0)=\phi. \tag{C-2-4}$$

由薛定谔方程(C-2-1)得

$$-\mathrm{i}\hbar^{-1}H(t)|\psi(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}|\tilde{\psi}(t)\rangle) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle,$$

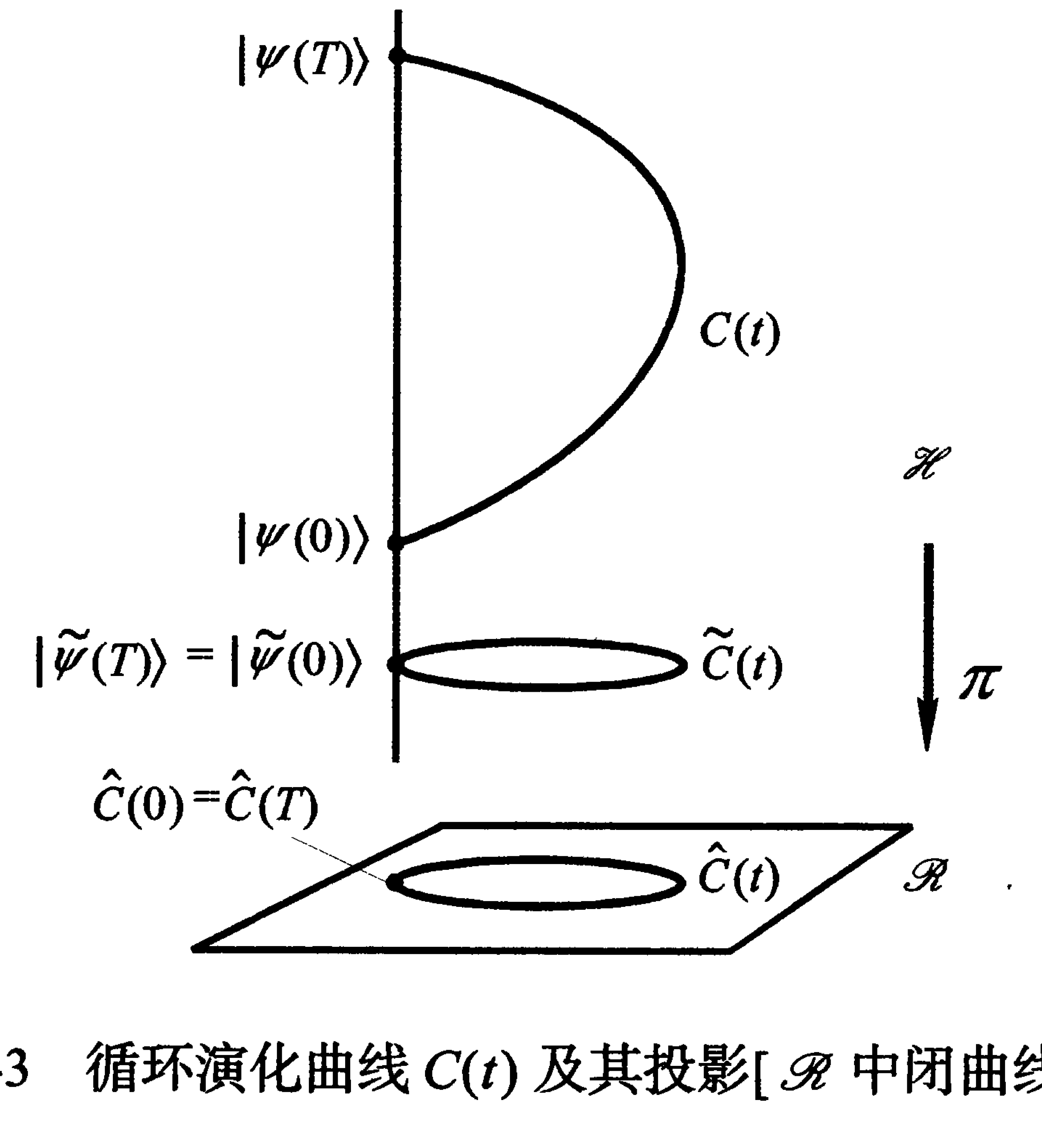


图 C-3　循环演化曲线$C(t)$及其投影[$\mathscr{R}$中闭曲线$\hat{C}(t)$]

以 $\mathrm{i}\langle\psi(t)|$ 作用两边得 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=-\hbar^{-1}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle+\mathrm{i}\langle\tilde{\psi}(t)|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle$. 积分得

$$\phi=-\hbar^{-1}\int_0^T\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^T\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle\mathrm{d}t. \tag{C-2-5}$$

令

$$\alpha\equiv-\hbar^{-1}\int_0^T\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle\mathrm{d}t\,,\quad \beta\equiv\mathrm{i}\int_0^T\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle\mathrm{d}t\,, \tag{C-2-6}$$

则 $\phi=\alpha+\beta$. 把 Berry 情况作为特例, 在该情况下有 $|\psi(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\lambda_n(t)]\,|n(R(t))\rangle$ [即式(C-1-6)], 故

$$\alpha=-\hbar^{-1}\int_0^T\langle n(R(t))|\,H(R(t))|n(R(t))\rangle\mathrm{d}t=-\hbar^{-1}\int_0^T E_n(R(t))\,\mathrm{d}t=\eta_n(T)\ ,$$

即 α 在Berry情况下等于动力学相 $\eta_n(T)$, 所以AA文把 α 称为动力学相. 另一方面, 不难看出 β 在 Berry 情况下就是几何相 γ_n [只须把式(C-1-12)的 $|n(R(t))\rangle$ 看作 AA 的 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$], 因此自然希望对一般的循环演化来说 β 也能被解释为几何相. 事实上, β 的确是一种几何相, 不过一般而言它涉及的不是参数空间 P 而是射线空间 $\mathscr{R}$ 的几何. 给定 $\mathscr{R}$ 中任一闭曲线 $\hat{C}:[0,T]\to\mathscr{R}$, 可在 $\pi^{-1}[\hat{C}(0)]$ 上任取一点 $p\in\mathscr{H}$, 定义 $\mathscr{H}$ 中的闭曲线 $\tilde{C}:[0,T]\to\mathscr{H}$ 使 $\tilde{C}(0)=p$, $\pi(\tilde{C}(t))=\hat{C}(t)$ [见图 C-4, 暂不看图中的 $\tilde{C}'(t)$]. 此 $\tilde{C}(t)$ 相应的 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 按式(C-2-6)决定一个 β 值, 下面证明它只由 $\hat{C}(t)$ 决定而与 $\tilde{C}(t)$ 的选法无关. 设另选 $\tilde{C}'(t)$, 满足 $\pi(\tilde{C}'(t))=\hat{C}(t)$, 则它相应

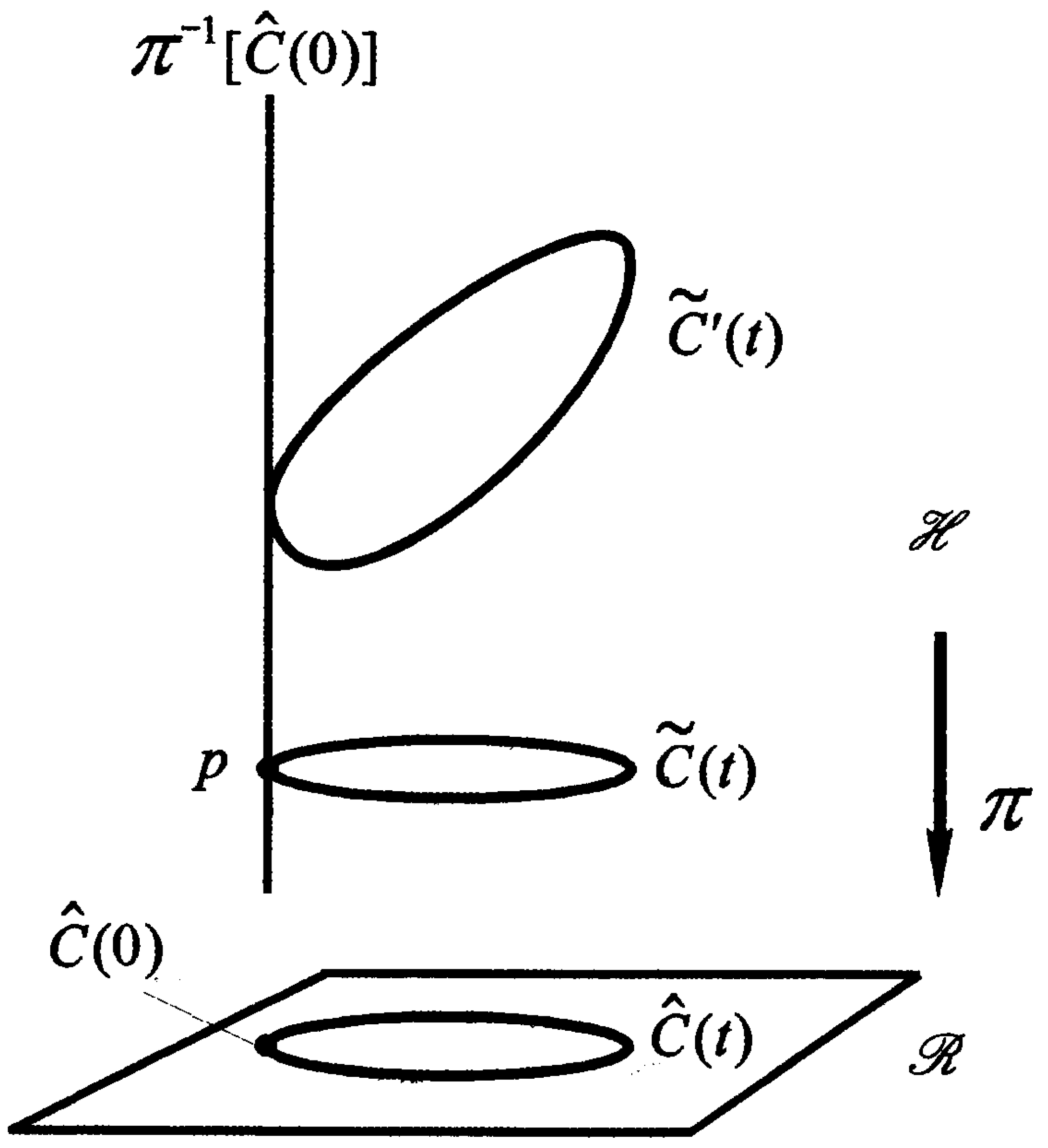


图 C-4　β 值只取决于闭曲线 $\hat{C}(t)$

的 $|\tilde{\psi}'(t)\rangle$ 满足 $|\tilde{\psi}'(t)\rangle = e^{i\sigma(t)}|\tilde{\psi}(t)\rangle$，其中 $\sigma(t)$ 相当任意，但自动满足 $\sigma(0)=\sigma(T)$．由下式可知 $|\tilde{\psi}'(t)\rangle$ 按式(C-2-6)决定的 β' 等于 β：

$$\beta' \equiv i\int_0^T \langle\tilde{\psi}'(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}'(t)\rangle dt = i\int_0^T \langle\tilde{\psi}(t)|\, e^{-i\sigma(t)}\frac{d}{dt}e^{i\sigma(t)}|\tilde{\psi}(t)\rangle dt$$

$$= i\int_0^T \langle\tilde{\psi}(t)|\, e^{-i\sigma(t)}\left[e^{i\sigma(t)}\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle + i\frac{d\sigma(t)}{dt}e^{i\sigma}|\tilde{\psi}(t)\rangle\right]dt$$

$$= i\int_0^T \langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle dt - \int_0^T \frac{d\sigma(t)}{dt}dt = \beta - [\sigma(T)-\sigma(0)] = \beta \ .$$

可见从 $\tilde{C}(t)$ 到 $\tilde{C}'(t)$ 的变换可看作一种规范变换，而 β 具有规范不变性，即 β 只取决于射线空间 $\mathscr{R}$ 中的闭曲线 $\hat{C}(t)$．再者，仿照上节由式(C-1-12)得出式(C-1-18)的讨论可知式(C-2-6)可改写为 $\beta = i\int_{\tilde{C}}\langle\tilde{\psi}|d\tilde{\psi}\rangle$，这表明 β 与曲线 $\tilde{C}(t)$ [从而 $\hat{C}(t)$]的参数化无关．可见 $\mathscr{R}$ 中每一(非参数化的)闭曲线 $\hat{C}$ 都有一个确定的 β 值，因此 β 是 $\mathscr{R}$ 中非参数化闭曲线 $\hat{C}$ 的一个几何性质，故可称为曲线 C 的 AA 几何相．从物理上看，$\mathscr{H}$ 中以 $\mathscr{R}$ 中闭曲线 $\hat{C}$ 为投影的曲线 C 有无限多种，它们代表量子系统在各种可能的哈氏量 $H(t)$ 作用下按薛定谔方程所作的各种可能的循环演化，这些循环演化都有相同的 AA 几何相．

AA 几何相不但比 Berry 几何相有宽广得多的应用范围，而且，正如 AA 文所指出的，由于缓变定理只是近似定理，Berry 几何相只在缓变近似下成立，而 AA 几何相则是精确结果，完全不含近似．

除了提出和论证 AA 几何相的概念之外，AA 文还包含以下内容：①讨论了两个(也可说三个)例子，说明在缓变近似不成立时 AA 相也可以出现并且原则上可以观测．其中一个例子(外磁场中的电子)表明 AB 效应是 AA 相的一个特例，另一例子涉及 Berry 及许多人都讨论过的自旋 $1/2$ 粒子在时变外磁场中的进动问题，事实上，磁共振的 AA 相已被实验所测出．这两个应用例子的一个附带作用是表明"在参数空间中走一条闭曲线"对于实现循环演化既非必要条件也非充分条件．②指出 AA 相是以射线空间 $\mathscr{R}$ 为底流形的某一主纤维丛(其丛流形为 $\mathscr{H}-\{0\}$)上的和乐．此处不再介绍．

有趣的是，AA 对 Berry 相的推广又进一步被 Samuel and Bhandari(1988)所推广．如前所述，谈及 AA 相的前提是系统作循环演化(用数学语言说就是给定射线空间 $\mathscr{R}$ 的一条闭曲线)，而 Samuel 和 Bhandari 则指出这也不是谈及几何相的必要条件：给定 $\mathscr{R}$ 中任一非闭合曲线(对应于一个非循环演化，即初态和末态不在 $\mathscr{H}$ 的同一射线的演化)，他们都能设法使之闭合起来．这种"闭合术"基于如下思路：利用 $\mathscr{H}$

的内积可给$\mathscr{R}$定义一个度规, 有度规就可谈及测地线, 因此可用测地线把非闭合线的两端连接而成一条闭合曲线, 从而可谈及其几何相. 虽然连接两端点的测地线并不唯一, 但他们证明几何相与所选测地线无关. 于是得出惊人结论: 射线空间$\mathscr{R}$中的任一曲线(不论闭合与否)都有一个推广后的AA几何相(不妨称为SB几何相)! 很难想象还有比"SB 几何相"更一般的结论了, 因为它涵盖了所有想象得出来的量子演化过程. 这一做法与本附录开始时谈到的 Pancharatnam 在光学中的工作有密切关系. 事实上, Samuel 等正是受到该工作的启发而提出这一推广方案的.

附录D 能 量 条 件

爱因斯坦方程的精确解似乎并不难求. 设 g_{ab} 为任意度规, 算出其爱因斯坦张量 G_{ab} 后, g_{ab} 便可看作相应于能动张量 $T_{ab}=G_{ab}/8\pi$ 的度规, 因而是爱因斯坦方程的一个解. 问题在于这样任意得出的 T_{ab} 未必是某种物质场的能动张量, 所以这样的"解"未必有物理意义. 根据对各种已知物质场的观察和物理上的考虑, 人们普遍相信任何物质场的能动张量必须满足若干"合理的"条件(至少在经典广义相对论范畴内), 统称**能量条件**(energy condition), 大致包含以下三方面内容:

1. 弱能量条件(weak energy condition)

本条件要求任一瞬时观者 (p,Z^a) 测得的能量密度非负. (这在经典物理中自然是合理要求, 但有迹象表明在量子物理中存在反例.) 弱能量条件也可用数学语言表述为

$$T_{ab}u^a u^b \geqslant 0, \quad \forall 类时矢量场\ u^a. \tag{D-1}$$

2. 强能量条件(strong energy condition)

在证明奇性定理时, 人们发现在一个重要方程中出现 $R_{ab}Z^aZ^b$ 项, 其中 R_{ab} 是里奇张量, Z^a 是单位类时矢量场. 利用爱因斯坦方程可把该项表为

$$R_{ab}Z^aZ^b = 8\pi(T_{ab}Z^aZ^b + \frac{1}{2}T). \tag{D-2}$$

讨论表明, 如果上式右边大于或等于零, 再加上某些合理条件, 奇性定理就得以证明. 对 $T\equiv g^{ab}T_{ab}\geqslant 0$ 的情况, 弱能量条件自然保证上式右边大于或等于零; 当压强为负以至 $T<0$ 时, 人们从物理考虑出发相信负压强的绝对值不会大到使 $T_{ab}Z^aZ^b + T/2 < 0$, 即相信经典物质场还满足如下的强能量条件:

$$T_{ab}Z^aZ^b \geqslant -\frac{1}{2}T, \quad \forall 单位类时矢量场\ Z^a, \tag{D-3}$$

请注意强、弱能量条件互不蕴含.

3. 主能量条件(dominant energy condition)

本条件要求任一瞬时观者 (p,Z^a) 测得的4动量密度 $W^a\equiv -T^a{}_bZ^b$(见§6.4定

义 1)是指向未来的类时或类光矢量，其物理解释是物质场的能量流动速率小于或等于光速.① 下面为类时和类光的 W^a 各举一例.

例 1　尘埃的能动张量为 $T_{ab}=\rho U_a U_b$，其中 U^a 是尘埃的 4 速场(指向未来类时矢量场). 任一瞬时观者 (p,Z^a) 测得的 4 动量密度

$$W^a \equiv -T^a{}_b Z^b = -\rho U^a U_b Z^b = \gamma\rho U^a,$$

其中 $\gamma \equiv -U_b Z^b$. 因 U^b 和 Z^b 都是指向未来类时矢量，故由命题 11-1-1(1)可知 $\gamma>0$. 注意到 $\rho>0$ (默认弱能量条件成立)，便知 W^b 为指向未来类时矢量.

例 2　类光电磁场满足 $F_{ab}F^{ab}=0$ [见式(8-4-8a)]，由式(7-2-6)可知其能动张量为

$$T_{ab}=\frac{1}{4\pi}F_{ac}F_b{}^c. \tag{D-4}$$

选正交归一 4 标架 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_0)^a$ 为指向未来类时，则 $(e_0)^a$ 可看作某瞬时观者的 4 速 Z^a，他测得的电场和磁场为 $E_a\equiv F_{ab}(e_0)^b$ 和 $B_a\equiv -{}^*F_{ab}(e_0)^b$. 以 E, B 分别代表 E^a 和 B^a 的长度，则由 F_{ab} 的类光性可知 $B^2=E^2$，$g_{ab}E^aB^b=0$ [式(8-4-11)]，故可重选 $\{(e_\mu)^a\}$ 的空间基矢使 $\vec{E}=(E,0,0)$，$\vec{B}=(0,E,0)$. 令

$$k^a\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[(e_0)^a+(e_3)^a],$$

则 k^a 为指向未来类光矢量场. 由 $F_{ac}=\sum_C F_{\mu\sigma}(e^\mu)_a\wedge(e^\sigma)_c$ [见式(5-1-6)]不难证明

$$F_{ac}=\sqrt{2}Ek_a\wedge(e^1)_c, \tag{D-5}$$

代入式(D-4)得

$$T_{ab}=\frac{1}{2\pi}E^2k_ak_b, \tag{D-6}$$

于是任一瞬时观者 (p,Z^a) 测 F_{ab} 所得的 4 动量密度为

$$W^a\equiv -T^a{}_bZ^b=-\frac{1}{2\pi}E^2k^ak_bZ^b. \tag{D-7}$$

k^a 和 Z^a 分别为指向未来的类光和类时矢量，由命题 11-1-1(1)可知 $k_bZ^b<0$，于是

---

① 其准确含义是：设 T_{ab} 满足主能量条件，则由 $\nabla^a T_{ab}=0$ 可以证明 T_{ab} 在非编时闭集 S 上为零必导致它在 $D^+(S)$ 上为零. 注意到 $D^+(S)$ 的定义(见§11.4)，这一结论便可解释为能量(物质)的流动不能超光速. 详见 Hawking and Ellis(1973)引理 4.3.1.

式(D-7)说明W^a是指向未来类光矢量，满足主能量条件. W^a的类光性是电磁场F_{ab}的类光性的结果.

注 1 因为纯辐射场的能动张量也可表为与式(D-6)类似的形式(见小节 8.9.1)，所以任一瞬时观者测纯辐射场所得的 4 动量密度W^a也类光.

注 2 常遇到这样的问题："黑体辐射(如恒温箱内或宇宙背景的电磁辐射)由大量光子组成("光子气")，其相应的电磁场F_{ab}(或$\vec{E}$和$\vec{B}$)取怎样的表达式?其能动张量T_{ab}为什么不取式(D-6)的形式而取理想流体的形式(见§6.5)，而且压强等于能量密度的$1/3$?"下面是答案.

黑体辐射的电磁场随时间迅速变化，对恒温箱观者，光子的运动平均而言没有一个特殊的方向(该观者是各向同性观者)，所以他测得的电场$\vec{E}$和磁场$\vec{B}$的时间平均值皆为零. 但是，E^2和B^2等二次项的时间平均值却非零，因而黑体辐射的T_{ab}即使平均而言也非零，并取理想流体T_{ab}的形式(虽然T_{ab}的瞬时值不取这种形式)，它在各向同性系的分量排成矩阵$(T_{\mu\nu})=\mathrm{diag}(\rho,p,p,p)$. ($\rho$为能量密度，$p$为正压强.) 这与非相干光的叠加类似. 两束相干光叠加时要对$\vec{E}$的瞬时值求和，其结果依赖于两者在各点的相位差(于是出现干涉花样)；然而非相干光的叠加却是强度(正比于E^2)叠加. 电磁场能动张量瞬时值的迹恒为零(第 8 章习题 4)，这种无迹性在取时间平均中不改变，因而平均后(即黑体辐射的T_{ab})仍然无迹，即$T^\mu{}_\mu=0$，与$(T_{\mu\nu})=\mathrm{diag}(\rho,p,p,p)$结合得$0=T^\mu{}_\mu=-\rho+3p$，由此可知辐射压强$p=\rho/3$.

设Z^a, Z'^a是任意两个指向未来单位类时矢量场，则

$$T_{ab}Z^aZ'^b=T^b{}_aZ^aZ'_b=-W^bZ'_b.$$

由此以及命题 11-1-1(1)可知主能量条件又可纯数学地表述为

$$T_{ab}u^au'^b\geqslant 0,\quad \forall\text{指向未来类时矢量场 } u^a,u'^b\ (\text{等号只适用于 } T_{ab}=0). \qquad \text{(D-8)}$$

若取$u'^a=u^a$，则上式回到式(D-1)，可见主能量条件蕴含弱能量条件. 三个能量条件之间除此蕴含关系外是相互独立的.

如能选择正交归一基底使T_{ab}的矩阵为对角矩阵，则能量条件可表述为更加具体实用的形式. T_{ab}是对称张量保证存在基底使T_{ab}的矩阵为对角矩阵. 然而，由于时空度规g_{ab}的非正定性，能完成这一任务(能把T_{ab}对角化)的基底未必正交归一. 某些T_{ab}在任何正交归一基底下的矩阵都不是对角矩阵. 例如，式(D-6)的T_{ab}在导出该式所用的正交归一标架的分量$T_{\mu\nu}$的矩阵

$$(T_{\mu\nu}) = \frac{E^2}{4\pi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{D-9}$$

就是非对角的，而且不存在可使它表为对角矩阵的正交归一标架. 幸好，除零质量的场外，所有被认为物理上合理的物质场的 T_{ab} 都可用正交归一基底对角化[见 Hawking and Ellis(1973)；Wald(1984)]，即存在正交归一标架 $\{(e_\mu)^a\}$ [其中 $(e_0)^a$ 指向未来类时]使 T_{ab} 可表为

$$T_{ab} = \rho(e^0)_a(e^0)_b + p_1(e^1)_a(e^1)_b + p_2(e^2)_a(e^2)_b + p_3(e^3)_a(e^3)_b, \tag{D-10}$$

式中 ρ 可解释为以 $(e_0)^a$ 为 4 速的观者测得的能量密度，p_1, p_2, p_3 则称为他测得的**主压强**(principal pressure). 对于可由式(D-10)表述的 T_{ab}，能量条件有如下等价表述：

命题 D-1　设存在正交归一标架 $\{(e_\mu)^a\}$ [其中 $(e_0)^a$ 指向未来类时]使 T_{ab} 可表为式(D-10)，则

(1) 弱能量条件等价于

$$\rho \geqslant 0 \text{ 且 } \rho + p_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3, \tag{D-11}$$

(2) 强能量条件等价于

$$\rho + \sum_i p_i \geqslant 0 \text{ 且 } \rho + p_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3, \tag{D-12}$$

(3) 主能量条件等价于

$$\rho \geqslant |p_i|, \quad i = 1,2,3. \tag{D-13}$$

证明　我们只对(1)给出证明. (2), (3)的证明留作练习.

(A) 设 $T_{ab}u^a u^b \geqslant 0$ $\forall$ 类时矢量 u^a，欲证式(D-11). 先取 u^a 为 $(e_0)^a$，则由式(D-10)可得 $T_{ab}u^a u^b = \rho$，故 $T_{ab}u^a u^b \geqslant 0$ 导致 $\rho \geqslant 0$. 再取

$$u^a \equiv (1+\varepsilon)(e_0)^a + (e_1)^a \text{（其中 } \varepsilon \text{ 为任一正数），}$$

则 u^a 显然类时. 由式(D-10)得 $T_{ab}u^a u^b = \rho(1+\varepsilon)^2 + p_1$. 由条件 $0 \leqslant T_{ab}u^a u^b$ 得

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0}[\rho(1+\varepsilon)^2 + p_1] = \rho + p_1,$$

同理可证 $0 \leqslant \rho + p_2$ 和 $0 \leqslant \rho + p_3$.

(B) 设式(D-11)成立，欲证 $T_{ab}u^a u^b \geqslant 0$ $\forall$类时矢量 u^a. 设 u^μ 是 u^a 在式(D-10)

所用标架的分量，令 $\alpha \equiv u^0$，$\beta^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (u^i)^2$，则由 u^a 的类时性可得 $\alpha^2 > \beta^2$. 由式(D-10)得

$$T_{ab}u^a u^b = \rho\alpha^2 + \sum_i p_i (u^i)^2 .$$

不失一般性，设 p_1 为 p_1, p_2, p_3 中的最小者，则

$$T_{ab}u^a u^b \geqslant \rho\alpha^2 + p_1\beta^2 \geqslant (\rho + p_1)\beta^2, \quad (\text{第二步用到}\ \rho \geqslant 0)$$

故由 $\rho \geqslant 0$ 和 $\rho + p_1 \geqslant 0$ 可得 $T_{ab}u^a u^b \geqslant 0$. □

注 3 ①由上述命题也可看出主能量条件蕴含弱能量条件. ②条件(D-13)表明主能量条件等价于 T_{ab} 在上述正交归一标架的第 0 分量(能量密度)大于(优于，即 dominates)任一其他分量(的绝对值)，这可看作 "主能量条件" (dominant energy condition) 一词的来源.

附录E　奇性定理和宇宙监督假设

§E.1　奇性定理简介

广义相对论的奇性疑难几乎与广义相对论同时诞生. 最令人困惑(因而最难接受)的是恒星晚期坍缩和宇宙开端的时空奇性. 数年后一些先驱人物(如 Eddington)对坐标奇性和时空奇性的本质差别的注意代表着认识的一大进步. Chandrasekhar 在 1931 年推出白矮星质量上限后就已意识到大质量恒星的晚年命运有待进一步揣测, 但 Eddington 断然否定黑洞(含时空奇点)存在的可能性. Oppenheimer and Volkoff(1939)把 Chandrasekhar 和朗道的工作拓展到中子星, 指出满足适当条件的恒星到了晚期必然无限收缩. 稍后, Oppenheimer and Snyder(1939)对球对称均匀密度尘埃球(dust ball)的晚期径向坍缩作了定量计算(求解爱因斯坦方程), 其结果强烈暗示大质量球对称恒星在热核燃料耗尽后将坍缩成黑洞. 这实际上是爱因斯坦方程有史以来第一个描写黑洞形成的精确解, 其重要性不容低估. 可惜爱因斯坦至少直到 1942 年尚未注意到这一文章. 由于已经放弃宇宙常数, 爱因斯坦被迫承认 Friedmann 宇宙模型中存在初始奇性, 然而直至生命末期他仍不相信这些奇性会存在于真实世界中. 那时许多物理学家认为恒星晚期坍缩导致的奇性只是由于恒星模型的理想球对称性所致, 而宇宙的原初奇性则源于宇宙模型的均匀性和各向同性性. 真实恒星和宇宙不可能有模型中那样精确的对称性, 因此他们认为真实世界未必存在奇性. Lifshitz 和 Khalatnikov 还用场方程在奇点附近的幂级数解支持上述论点. 然而, Penrose 和 Hawking 在 1965~1970 年的独辟蹊径的研究表明, 无需依赖对称性假设, 大质量恒星晚期坍缩和宇宙原初的奇性在一定条件下都是不可避免的. 他们的工作主要是抽象推理, 所用工具(技术)包括新近发展起来的类光(时)测地线汇理论、时空整体因果结构和整体微分拓扑理论. 整个推理可看作这三种理论(技术)的有机结合. Penrose 的开创性论文[Penrose(1965a)]可视为第一个不要求对称性的奇性定理, 证明中的一个关键概念是陷俘面. 时空中的2维类空闭曲面(通常是 2 球面)称为**陷俘面**(trapped surface), 如果与它正交的外向和内向类光测地线都会聚.[①] 这是十分非同寻常的曲面, 只存在于引力异常强大的时空区域. 要理解陷俘面最好从非陷俘的 2 维面谈起. 设Σ是闵氏时空中某惯性系的一个同时面,

---

① §14.1 讲过类时线汇的膨胀 θ 的概念. 类似地可定义类光测地线汇的膨胀 $\hat{\theta}$. 当 $\hat{\theta}$ 为负(正)时, 该线汇称为**会聚**(**发散**)的. 陷俘面的准确定义见下册第 16 章.

$S \subset \Sigma$ 是一个 2 维球面光源, 它的每点都向四面八方发光, 其中两条光线正交于球面并分居内外两侧, 相应的光子世界线(测地线)分别称为**内向**和**外向线**. 从球面各点发出的这两条线分别组成内向和外向类光测地线族, 其中每条都同 S 正交(图 E-1). 内向测地线族处处会聚而外向测地线族处处发散. 一小段时间后, 内外向光子分别到达球面(波前) S_1 和 S_2, 其面积分别小于和大于 S 的面积. 这样的 S 当然再正常不过. 然而, 由球对称星体坍缩形成的黑洞内部的 2 维类空面 T(图 E-2)的表现却非常不同. 由于黑洞内引力异常强大, 从 T 发出的两族类光测地线中不但内向测地线会聚, 就连 "外向" 测地线也会聚[它虽企图向外(逃离黑洞), 但强大的引力迫使它不得不向内(指向奇点)]. 于是两族测地线在下一时刻到达的球面 S_1 和 S_2 的面积都比 T 的面积小[图 E-2(b)]. 读者不妨在图 9-13 或图 12-9 的黑洞区 B 内补画几条类空双曲线(等 r 线), 它们的 r 值自然是从 $<2M$ 开始自下而上渐减, 直到逼近奇性时 $r \to 0$. 在某条双曲线上任取一点 p (代表一个半径为 r_p 的 2 维球面), 再从 p 出发画两个向左上方和右上方的 $45°$ 箭头(表示 p 所发出的两族类光测地线), 便会发现它们在一小段时间后到达的双曲线的 r 值都小于 r_p, 即到达的两个球面的面积都小于 p 代表的球面 T 的面积. 这 T 就是陷俘面的直观例子. 事实上, 施瓦西时空中任何 $t=$ 常数, $r=$ 常数 $<2M$ 的 2 维球面都是陷俘面. 陷俘面的存在是引力场甚强(以致企图向外的类光测地线也被迫向内)的结果. 由于任何粒子都不能超光速, 陷俘面 S 内的物质只能陷入越来越小的 2 维闭曲面内, 于是, 诸如时空奇点一类怪事的出现看来是自然的. 对非球对称恒星, 只要初始状态与球对称差别不是太大, 恒星在坍缩到一定程度时(引力足够强时)也会出现陷俘面[证明见 Hawking and Ellis(1973)P.301]. Penrose 的第一个奇性定理的实质是: 只要时空满足某些合理的因果条件(整体双曲条件)和能量条件, 则陷俘面的存在必然导致不完备类光测地线的存在. 根据 § 9.4 关于时空奇性的定义 1′, 便知必然存在时空奇性. 重要的是这个定理不以球对称性为条件, 该文第 58 页原话为: "对球对称性的偏离不能防止时空奇点的出现."

上述文章只是 Penrose 的一系列关于奇性的文章的第一篇, 它的出现立即引起一批同行的注意, 他们尽快熟悉有关工具并寻找能做出成果的课题. Hawking 便是其中的佼佼者, 他马上意识到 Penrose 的证明可以被 "底朝天" 地用到宇宙的研究

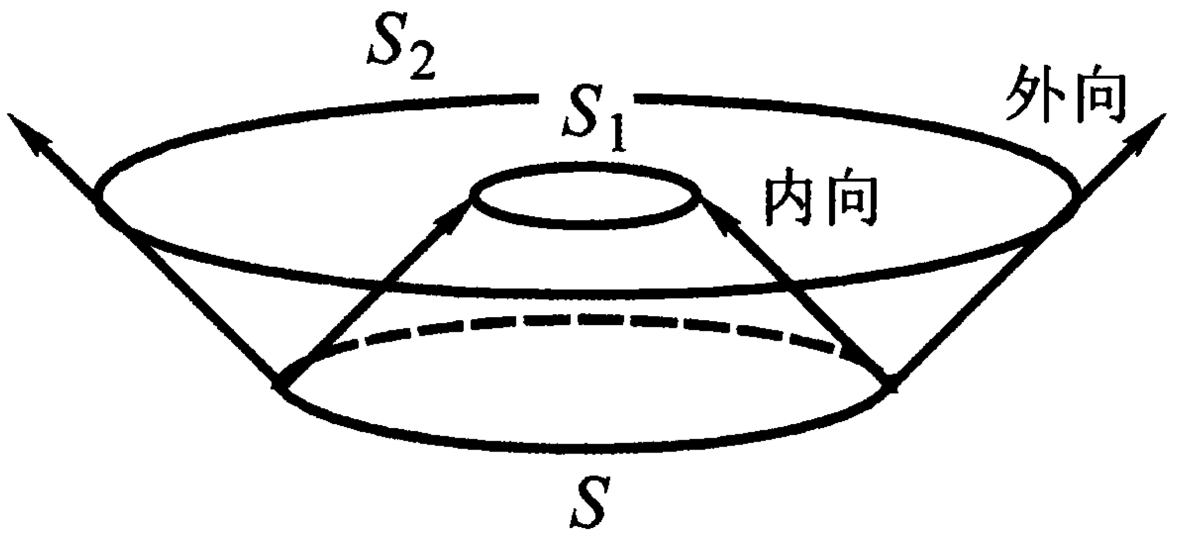
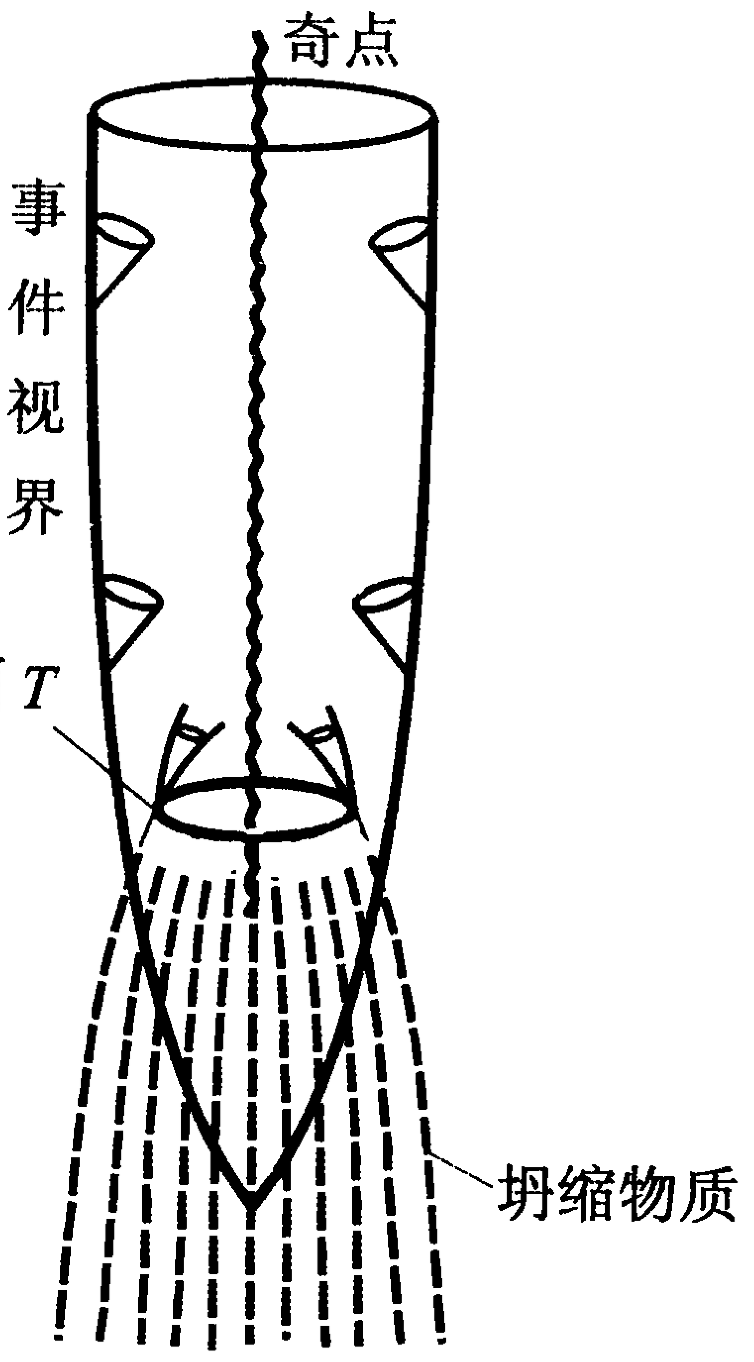
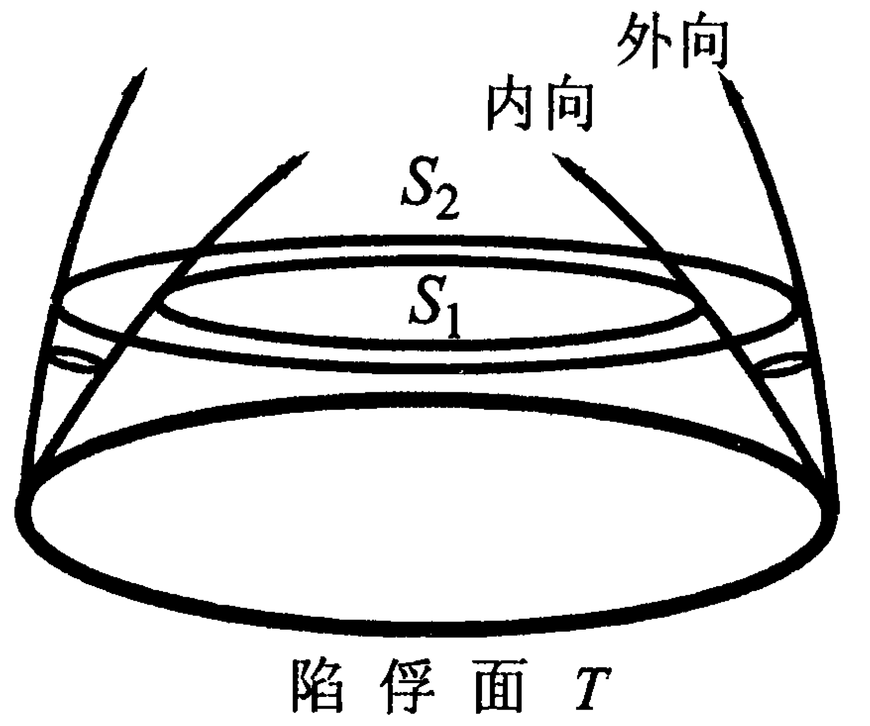


图 E-1　闵氏时空中 S 不是陷俘面



(a) 2 维球面 T 是陷俘面



(b) 陷俘面 T 及其类光测地线汇的放大，S_1 和 S_2 的面积都小于 T 的面积

图 E-2　Oppenheimer-Snyder 坍缩均匀密度尘埃球的陷俘面

中，很快便发表文章[Hawking(1965)]证明 $k=0$ 或 -1 的 RW 宇宙在 r 值足够大(宇宙尺度)时由 $t=$ 常数 和 $r=$ 常数 定义的 S 是(时间反演的)陷俘面. 该文表明，只要满足能量条件，局部非均匀性不会影响宇宙原初奇性的存在. Hawking 紧接着与 Ellis 合作发表了第二篇论文[Hawking and Ellis(1965)]. 此后，一系列有关文章的预印件相继出现. 由于所需的某些工具当时尚不够成熟，某些结果(或证明)并不正确. Hawking 的第三篇文章(1967)对预印件的某些结果作了改正，并增加了新的结果. 其实所有奇性定理都离不开以下三个前提条件：①能量条件；②整体因果性条件；③时空中某些区域的引力强到任何物质一旦被俘获就无法逃逸的程度. (其表现可以是陷俘面，也可以是其他形式，例如要求宇宙的空间截面为闭曲面，这表明没有外部地区可供逃逸.) 各种奇性定理无非是说，只要上述三类条件的某种适当组合成立，时空就必然存在不完备类时或类光测地线. 如果要弱化三类条件的某一类，就要对其他两类适当强化. 第一个奇性定理的最大缺点就是因果性条件太强(要求时空为整体双曲)，因而它对“物理时空是否真有奇性”的问题并未给出完全肯定的回答，因为人们可以说“我宁愿要非整体双曲的非奇异时空也不愿接受整体双曲的奇异时空”，从而否定时空奇性. 第一个定理的这一缺点在 Hawking 和 Penrose 合作证明的最末一个奇性定理[Hawking and Penrose(1970)]中得到很好的克服. 该定理把因果条件从要求最高的整体双曲条件降至要求最低的编时条件，其代价是要用最强的一种能量条件，称为**普通能量条件**(generic energy condition)，它除要求时空满足强能量条件(见附录 D)外还要求每一类光或类时测地线含有满足如下条件的一个点：$k_{[a}R_{b]cd[e}k_{f]}k^c k^d \neq 0$，其中 k^c 是该线的切矢，R_{bcde} 是降指标

后的时空黎曼张量. 虽然在某些特殊的(不“普通”的)、理想化的时空模型中这一条件可以不满足, 但有理由相信它在物理真实的“普通”时空中是满足的. 至于第三类条件, 该定理的要求是最一般的, 即要求下列三者中至少有一者成立:(a)存在一个陷俘面; (b)存在一个无边缘的紧致非编时集; (c)存在 $p\in M$, 使得由 p 发出的、指向过去(或未来)的类光测地线汇在走过适当的仿射参数后重新变得会聚(见图 E-3). (就是说, 虽然从 p 出发的类光测地线是发散的, 但由于物质或时空曲率的作用, 它们逐渐变得会聚.) 条件(c)与陷俘面的存在性有密切联系, 但用(c)的表述形式可使它在某些情况下的应用更方便. 例如, 由第 10 章可知我们的宇宙(至少从光子退耦时刻 $t_{\gamma d}$ 开始至今)可以相当好地用 Robertson-Walker 模型描述. 设 p 代表我们(银河系)的当今时刻. 可以证明从 p 发出的指向过去的类光测地线汇在比 $t_{\gamma d}$ 大得多的时刻(由图 E-3 的 q 点代表)就开始重新会聚, 即宇宙时空满足条件(c). 因此由最末一个奇性定理可知它必定存在奇性.

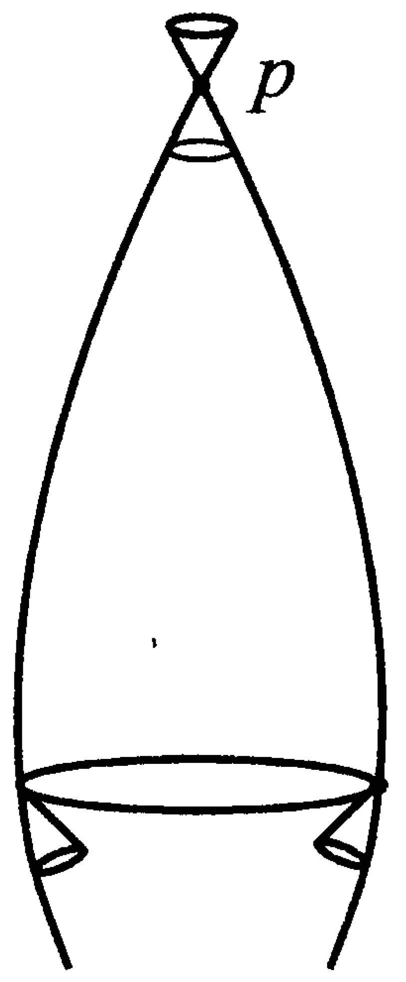


图 E-3　从 p 发出的指向过去类光测地线汇在 q 处开始重新会聚

时空奇性的定义一直是个有争论的问题. 用测地不完备性所下的定义虽然被多数人所接受, 它本身仍有缺点(见小节 9.4.1). 事实上, 仍然存在与之密切相关却并不完全等价的若干其他定义[见 Earman(1999)]. 例如, ①“时空称为奇异的, 若某个有关物理量发散”. ②“时空称为奇异的, 若其中因某些点被挖去而存在‘洞’”. 请注意有“洞”的时空必然测地不完备(见小节 9.4.1), 但却存在着测地不完备的无“洞”时空[见 Wald(1984)]. 自然要问:奇性定理证明存在的奇性是哪个定义的奇性?答案是用测地不完备性定义的奇性. 所有奇性定理所证明的无非是如下结论:只要满足定理条件, 则时空至少存在一条不完备的类时或类光测地线. 至于是否有某个物理量(如曲率或密度)发散, 则几乎没有给出任何回答.

小节 10.3.1 的 **1** 曾指出奇性定理是经典广义相对论范畴的定理, 完全不涉及量子理论. (事实上, 能量条件在量子理论中可以不满足.) 鉴于奇性是如此之奇怪, 也可换一角度看待奇性定理:与其说奇性定理证明了奇性的存在性, 不如说它表明经典广义相对论在时空曲率很大时的不适用性——那时必须考虑量子理论. 不少学者(如 Hawking)相信在量子广义相对论中奇性不再存在, 但其他学者对此还有不同看法, 例如, 见 Penrose 在 The Nature of Space and Time[Hawking and Penrose (1996)]第二章末答问中的论述.

注 1　Penrose 和 Hawking 于1994 年在英国剑桥大学举行了一场关于宇宙本

性的最基本观念的学术辩论，实质问题是如何把广义相对论与量子理论有机地结合以形成一套量子引力论(其中自然离不开奇性问题). 从某种意义上说，这是大约 60 年前 Bohr(玻尔)和 Einstein(爱因斯坦)的那场关于量子力学基础的辩论的继续，其中 Penrose 和 Hawking 分别扮演 Einstein 和 Bohr 的角色. Penrose 和 Hawking 两人在经典理论方面的观点相当一致，但在涉及量子理论时却存在明显分歧. Hawking and Penrose(1996)(有中译本)的 1~6 章是两人的讲演(每人三次)，第 7 章主要是他们之间的辩论.

§ E.2 宇宙监督假设

上节讲过，爱因斯坦方程的第一个描写黑洞的精确解是 Oppenheimer-Snyder 均匀密度尘埃球解，它细致地描写了一个具体的球对称黑洞的形成过程. 图 E-4 左边是在坐标系 $\{\tilde{t}, r\}$ (见小节 9.4.6)中的 2 维时空图，右边是其 Penrose 图. Birkhoff 定理保证星外区域有施瓦西度规. 此图的一大特点是存在绝对事件视界 H，它使时空区域 B 不为外部观者所看见. 说得更准确些，设 G 是 H 外的任一观者，则不论他坚持观测多么长时间，(无限长时间，以至他趋近无限远.) 也不会收到从 B 区发来的任何信息. 通常称这一现象为"黑洞内的信息不能逃逸到无限远". 从几何角度看，这是因为事件视界 H 既是黑洞区 B 的边界又是 $\mathscr{I}^+$ 的编时过去 $I^-(\mathscr{I}^+)$ 的边界，即 $H = \dot{I}^-(\mathscr{I}^+)$，[①] 因此黑洞内任一点与 $\mathscr{I}^+$ 都没有因果联系. 这与闵氏时空的情况非常不同. 闵氏时空的 Penrose 图(图 12-7)表明 $I^-(\mathscr{I}^+)$ 就是全时空，因此任一时空点所发信号都能到达 $\mathscr{I}^+$，不存在黑洞区. 虽然奇点奇得不可思议(物理定律在奇点失效)，但由于藏在事件视界之内，视界外的观者(直至无限远)对奇性无所察觉. 然而图 E-4 所描述的只是标准的球对称坍缩(其中 Birkhoff 定理起到重要作用)，它是否有代表性仍然存在疑问. 奇性的存在不是问题：根据奇性定理，当坍缩导致足够大量物质聚集于足够小区域时奇性必将出现，问题在于不能保证这奇性一定藏在一个(绝对)事件视界之内，因而不能肯定非球对称坍缩一定导致黑洞. 人们把不藏在事件视界之内的奇点称为**裸奇点**(naked singularity)，利用这一术语可以说，满足奇性定理条件时，恒星晚期坍缩的结果要么是黑洞，要么是裸奇点. 人们

① 准确地应为 $H = \dot{I}^-(\mathscr{I}^+) \cap M$，其中 M 为物理时空. (请注意与非物理时空 $\tilde{M} \supset M$ 的区别，见§12.4.) 补上 $\cap M$ 旨在除去所有无限远点(它们在 $\tilde{M}$ 内而不在 M 内). H 又分为两部分：星外(真空)部分是由 $r = 2M$ 刻画的类光超曲面，星内(物质)部分则是这样的类光超曲面，它是 p 点(星体球心的某一时刻)的编时未来的边界，与 $r = 2M$ 超曲面在星体表面光滑连接.

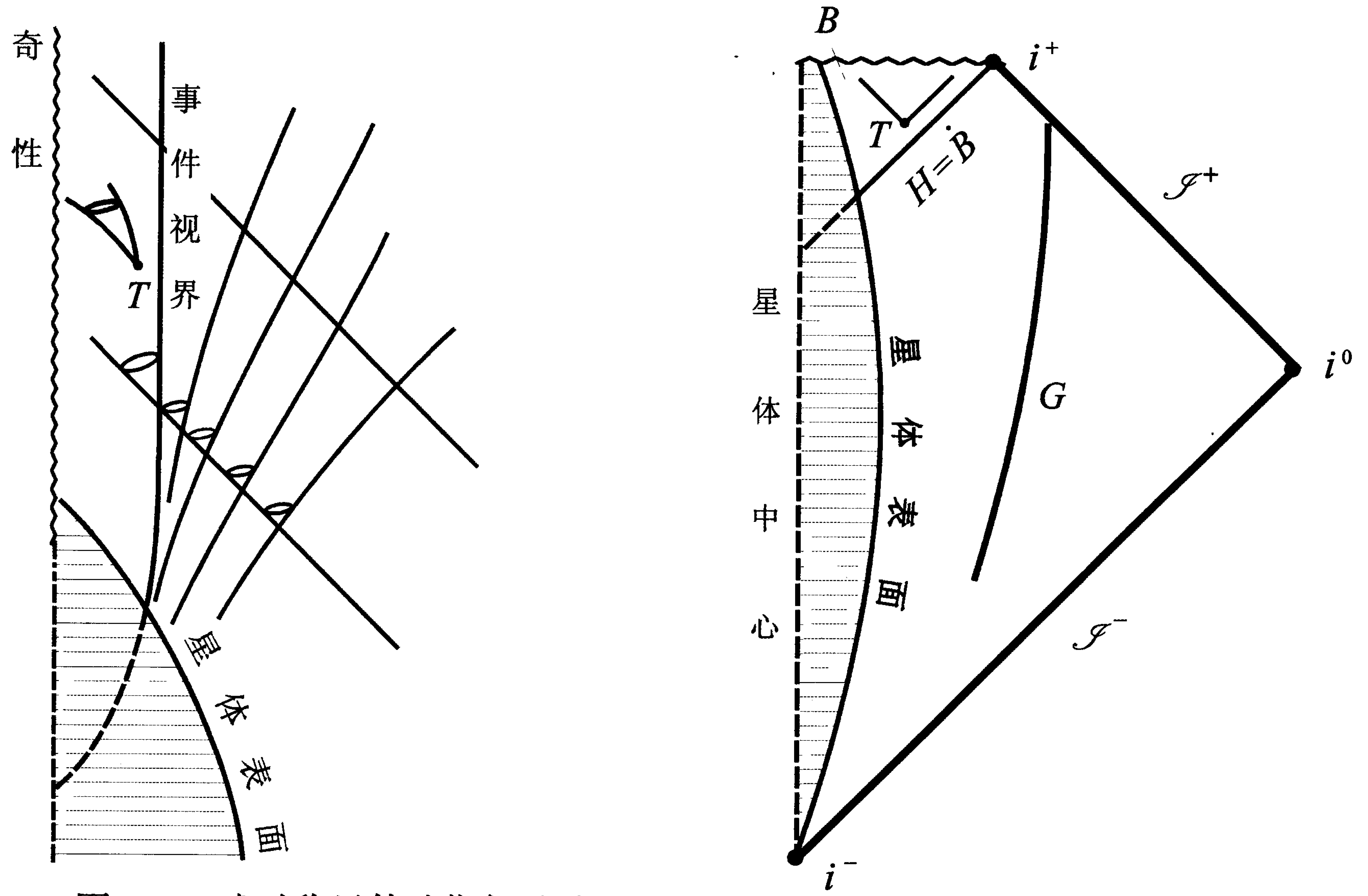


图 E-4　球对称星体晚期坍缩成黑洞. T 为陷俘面. 右图为 Penrose 图

通常认为非裸奇点比裸奇点要无害得多. 为了摒除裸奇点存在的可能性, Penrose 曾于1969 年提出如下的**宇宙监督**(cosmic censorship)**假设**: 任何物理上真实的坍缩都不造成裸奇点, 形象地说就是“上帝憎恶裸奇点”. 这一假设并不排除爱因斯坦方程存在含有裸奇性的解, (事实上早已知道存在若干含有裸奇性的解, 如 $M<0$ 的施瓦西解和 Taub 的平面对称真空解.) 甚至也不排除从非常正规的初始状态演化为裸奇点的坍缩解. (这种解的确存在, 但没有理由相信它们所代表的特殊情况会出现在真实的坍缩中.) 宇宙监督假设所排除(禁止)的只是稳定地导致裸奇点的任何坍缩过程, 其中坍缩物质的物态方程在适当意义上说并不过于特殊或物理上不真实, 准确提法见 Wald(1984)和 Wald(1999). 如果宇宙监督假设成立, 满足奇性定理条件的坍缩结果就只能是黑洞. 注意到黑洞无毛猜想(见§13.6), 恒星在经历不稳定坍缩期(那时要发射引力波)后终将成为稳定的 Kerr-Newman 黑洞. 这是一个非常诱人的简单结果. (同球对称的坍缩结果——施瓦西黑洞——相当类似, 只是略微复杂一些.) 反之, 如果宇宙监督假设不正确, 我们就必须面对作为坍缩结果的形形色色的裸奇点, 问题就要复杂得多. 然而, 尽管大量的黑洞微扰计算(以及其他考虑)倾向于支持这一假设, 人们至今仍然既不能严格证明它也无法举出足够有力的反例推翻它.① Penrose 以及许多学者在这两个方面都曾做过大量努力, 也曾经并且正在不断取得研究成果, 但至今未能得出明确的肯定或否定结论[虽然有利

① 宇宙监督假设在量子引力论中很可能不成立. 特别是, Hawking 关于黑洞的量子辐射过程(从“蒸发”到“爆炸”)会导致裸奇点. 正文中关心的只是在经典广义相对论范畴内这一假设的正确性.

于这一假设的证据越来越多(强)]. 这早已成为经典广义相对论的一个老大难问题. 目前似乎多数人相信这一假设至少在一定意义上正确. Wald(1999)对有利于和不利于这一假设的主要讨论方法和论据做了回顾, 特别是介绍了有利于这一假设的新进展.

注 1　①宇宙监督假设的证明(或否定)的高难度来自多方面原因, 其中之一是假设中涉及某些难以准确化的提法. 例如, 该假设要求系统的初态由某个柯西面上的普通的(generic)非奇异初始数据描述, 并断言这种初态按照经典广义相对论和合理的态方程演化的结果不会包含裸奇点. 然而上述提法中的"普通的"和"合理的"两词的含义都难以准确界定. ②黑洞和裸奇点原本都是对渐近平直时空定义的. 然而, 由于暗能量的发现等原因, 渐近 anti-de Sitter 时空(见 § J.6)越来越受到重视. Hertog et al.(2003)给出了一个在渐近anti-de Sitter时空中存在裸奇点的例子, 声称这是宇宙监督假设的反例, 但翌年又载文[Hertog et al.(2004)]表示发现上文存在一个未能克服的漏洞, 因此明确地说在渐近 anti-de Sitter 时空中是否真有反例仍然是个开放课题.

注 2　Censor 一词是指政府部门对书面和声像出版物的审查和监察, 他们有权要求删除其中的淫猥内容. 不妨由此体会 Penrose 把禁止裸奇性的假设称为 cosmic censorship 的幽默用心. 有鉴于此, 译为宇宙监察假设也许更为贴切.

以上讨论的裸奇性也可称为"整体性裸奇性", 因为黑洞的事件视界是 $I^-(\mathscr{I}^+)$ 的边界, 而 $\mathscr{I}^+$ 是个整体概念. Penrose 在后来的许多文献中又表达出进一步的看法(与 1969 年提出宇宙监督假设时的看法不尽相同), 他认为, 在只涉及时空的某一局部地区的物理时本来就不应关心从奇点发出的光线是否能最终到达无限远的问题, 位于事件视界以内的观者虽然不在无限远, 但却可能收到从奇性处发出的光线, 从而带来使物理学家深感头痛的不可预言性. 他指出, 图 E-4 右侧的奇性之所以比较"无害", 关键不在于它藏在事件视界 H 之内, 而是因为它是类空的. 反之, 如果时空存在类时奇性, 则不论它是否藏在某个事件视界之内, 它附近的观者都会收到它发出的光线, 即他会受到不可预言的影响. [笔者注:类时奇性的存在使得时空没有柯西面, 于是, 更形象地说, 假定你是奇点附近的一个观者, 从奇点飞出一颗定时炸弹在你身上爆炸, 这一爆炸事件就不能根据某个柯西面上的初始数据加以预言.] 所以, 即使所有奇性都藏在事件视界之内, 仍然不能解决问题. 要从根本上解决问题, 就得要求(假设)任何真实时空不存在类时奇性. Penrose 把类时奇性称为局部裸奇性, 把不存在局部裸奇性的这一要求(假设)称为强宇宙监督原理, 详见下节. 然而, 度规在奇性处失去定义, 奇性的"类时"性如何定义?下节将同时回答这一问题.

一个常见的问题是:RW 宇宙的大爆炸奇性是不是裸奇性?(人们心中非常清楚:如果大爆炸竟然属于裸奇性, 岂不是也要被宇宙监督原理所禁止?) 问题的答案取

决于你谈的是整体裸奇性还是局部裸奇性. 对前者, 问题根本无意义, 因为定义整体裸奇性时只关心星体的坍缩问题, 或者说只关心渐近平直时空(可谈及其无限远), 而 RW 时空并非渐近平直. 对后者的答案则是: 按照下节关于局部裸奇性的定义, 大爆炸奇性不是局部裸奇性. 直观地说, 强宇宙监督假设要排除的是类时奇性, 而大爆炸奇性直观看来是类空的, 不属于被排除之列. 详见下节.

§E.3　用 TIP 语言表述强宇宙监督假设[选读]

为了给局部裸奇性下一个准确定义, Penrose 借用了"理想点"以及 TIP 和 TIF 等概念[见 Geroch, Kronheimer, and Penrose(1972)]. 下面首先介绍这些概念, 读过本书第 11 章的读者对此不难理解. 奇点和无限远点都不是时空点, 但可用一种巧妙手法把它们看作时空点的某种推广, 称为理想点. 设 (M, g_{ab}) 是强因果时空, 则 $\forall p, q \in M$ 有 $p = q \Leftrightarrow I^-(p) = I^-(q)$, 因而时空点与可表为 $I^-(p)$ 的开子集一一对应. 为推广时空点以获得理想点的概念就要研究 $I^-(p)$ 的性质, 为此先建立如下两个概念:

定义 1　$W \subset M$ 称为**过去集**(past set), 若 $W = I^-(W)$. 过去集 W 称为**不可分过去集**(indecomposable past set), 简称 **IP** (读做 ip), 若 W 不能表为 $A \cup B$, 其中 A, B 为过去集而且 $A \neq W, B \neq W$.

不难看出任一时空点 p 对应的 $I^-(p)$ 是一个 IP. 图 E-5 的 W 是过去集, 却不是 IP, 因它可表为过去集 $I^-(p)$ 和 $I^-(q)$ 之并, 而且 $I^-(p) \neq W$, $I^-(q) \neq W$.

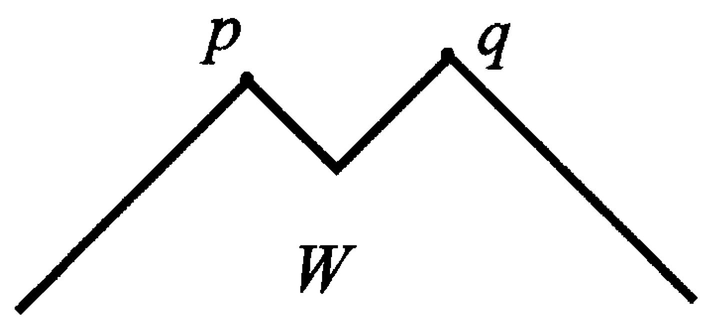


图 E-5　不是 IP 的过去集 W

并非每个 IP 都可表为 $I^-(p), p \in M$ 的形式. 例如, 设 $W = I^-(p)$, 则 $p \notin W$. 把 p 从 M 中挖去, W 不改变, 但不再能表为 $I^-(p), p \in M$ 的形式. 于是又有如下定义:

定义 2　设 W 是一个 IP. 若有 $p \in M$ 使 $W = I^-(p)$, 则称 W 为一个 **PIP** (Proper IP, 读做 pip), 否则称为一个 **TIP** (Terminal IP, 读做 tip).

既然每个 PIP 对应于一个时空点, 仿此可把每个 TIP 称为一个**理想点**(ideal point). 下面的讨论有助于直观地理解理想点. 设 W 是 PIP, 则 $\exists p \in M$ 使 $W = I^-(p)$. 设 γ 是 M 中一条以 p 为未来端点的类时线, 则 $W = I^-(\gamma)$, 而且两条类时线 γ 和 γ' 代表同一个 PIP [即 $I^-(\gamma) = I^-(\gamma')$] 当且仅当它们有相同的未来端点. 因此, 有相同未来端点的所有类时线构成一个等价类, 等价类中的所有类时线描述同一个 PIP. 自然想到是否也可用类时线的等价类描述 TIP. 下述命题是这种描述的理论基础.

命题 E-3-1　$W\subset M$ 是 TIP 的充要条件是存在未来不可延类时线 γ 使 $W=\mathrm{I}^-(\gamma)$.

证明　见 Hawking and Ellis(1973)命题 6.8.1 的证明(P.218).　□

只要存在一条未来不可延类时线 γ 满足 $W=\mathrm{I}^-(\gamma)$，便有一系列未来不可延类时线，其中每条 γ' 满足 $W=\mathrm{I}^-(\gamma')$(见图 E-6). 自然把 γ 和 γ' 称为等价的，因为它们对应于同一理想点 W(图中为直观起见又记作 $\tilde{p}$). 可见，与每个 PIP 对应于类时线的一个等价类一样，每个 TIP 也对应于类时线的一个等价类，不过这些类时线都是未来不可延的，它们本来没有未来端点，但不妨认为它们对应的 TIP 所代表的理想点是它们的"未来端点". 这些"未来端点"不是时空点，但可看作时空的某种边界的点. 图 E-7 是理想点的一些直观例子.

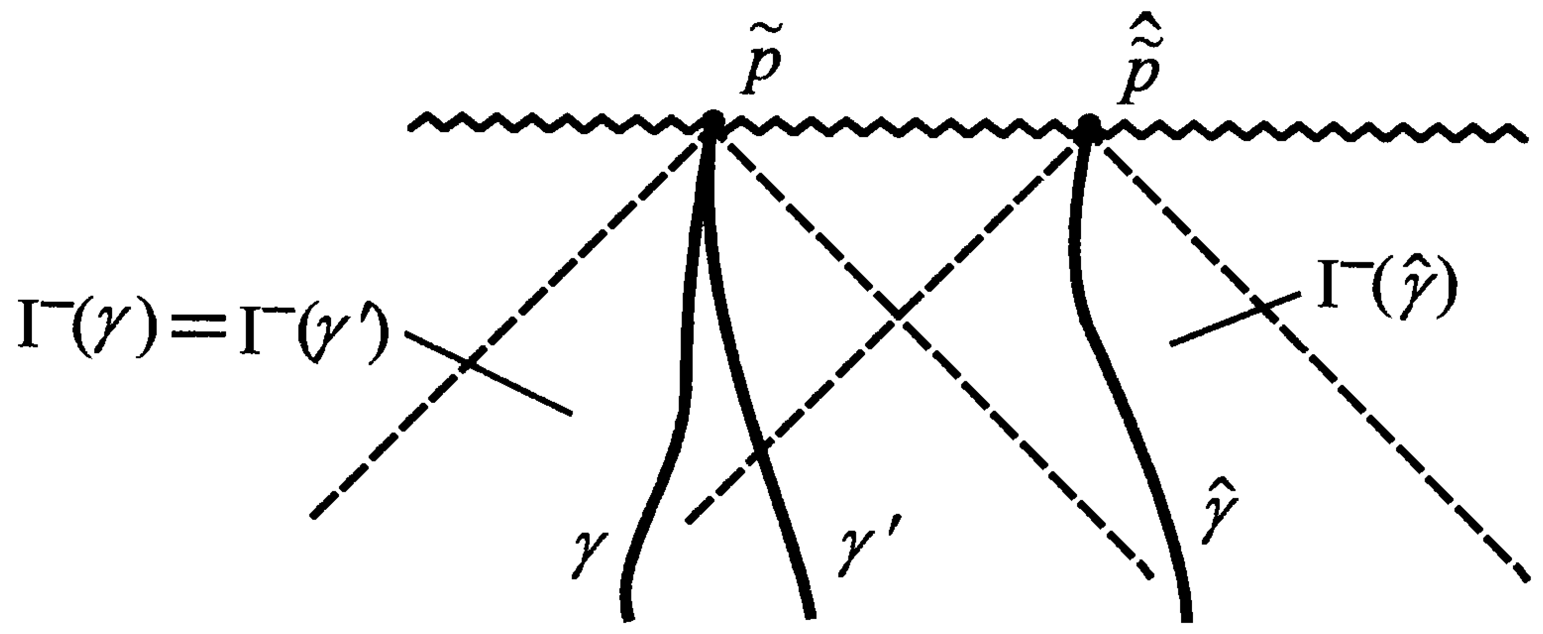


图 E-6　未来不可延类时线 γ 和 γ' 描述相同的未来理想点当且仅当 $\mathrm{I}^-(\gamma)=\mathrm{I}^-(\gamma')$

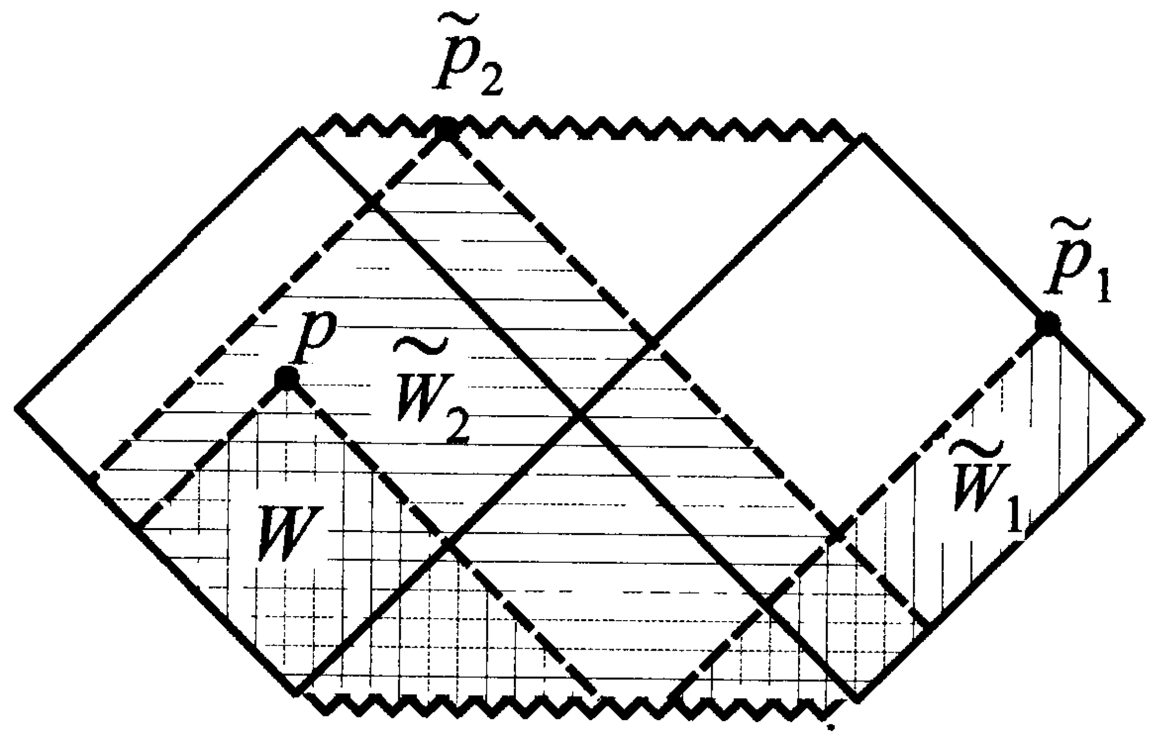


图 E-7　最大延拓施瓦西时空的 Penrose 图. W 是 PIP，对应于时空点 p；$\tilde{W}_1$ 和 $\tilde{W}_2$ 是 TIP，分别对应于理想点 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$

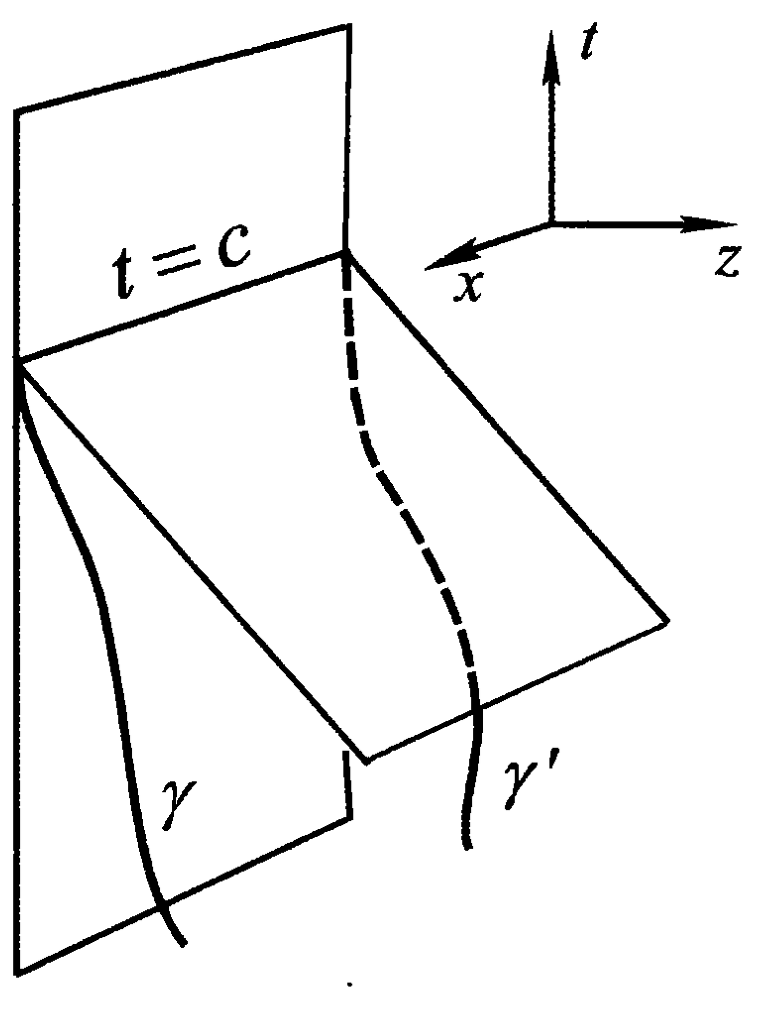
虽然图 E-6 和 E-7 让人感到每个理想点是很直观的一"点"，但应该清醒地记住理想点其实不过是 TIP 的另一称谓.对于某些时空,理想点可以很不像一个点.考虑由线元

$$\mathrm{d}s^2=z^{-1/2}(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2)+z(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2),\quad z>0 \tag{E-1}$$

代表的Taub平面对称真空时空(详见§8.6)，它有到达 $z=0$ 的不完备类光测地线，而且存在 s.p. 曲率发散性，所以 $z=0$ 是时空奇性(裸奇性)所在处. 设 γ 是一条未来不可延类时线，其 $z\to0$, $t\to c$ (常数)，则可证[见 Kuang et al.(1986)]

$$\mathrm{I}^-(\gamma)=\{(t,z,x,y)\,|\,t+z<c,\ z>0\}. \tag{E-2}$$

与直观想象不同，上式表明$\mathrm{I}^-(\gamma)$不是“锥形”而是“劈形”.（图E-8，可沿x, y方向延伸.）设γ和γ'是两条未来不可延类时线，满足$z\to 0,\ t\to c,\ x\to a,\ y\to b$和$z'\to 0,\ t'\to c,\ x'\to a'(\neq a),\ y'\to b'(\neq b)$，则直观看来它们各自趋于不同的“未来端点”，但式(E-2)却说明它们对应于同一个TIP [即$\mathrm{I}^-(\gamma)=\mathrm{I}^-(\gamma')$]，因而对应于同一理想点. 就是说，图E-8中由$z=0, t=c$定义的2维面(图中压缩一维)的所有点都应看作同一理想点. 可见Taub时空的全体奇异理想点的集合是1维而非3维集. 以上结果也适用于RN奇性.



图E-8 γ和γ'“奔向”(代表)同一理想点

用类时线等价类描述TIP的一个好处是便于区分无限远理想点和奇异理想点. 下面是Penrose(1978)的定义.

定义3 设W是TIP. W称为**无限远TIP**(记作∞-TIP)，若存在线长为无限的类时线γ使$W=\mathrm{I}^-(\gamma)$ [从任一起点(即过去端点)开始向未来计算线长都得无限大]，否则称为**奇异TIP**. ①

注1 ①闵氏时空的TIP都是∞-TIP，因为它们要么对应于i^+，要么对应于$\mathscr{I}^+$的某点. 前者可取类时测地线(惯性坐标x, y, z为常数的线)为γ；后者可取类时双曲线为γ. 两种情况下γ的线长都无限. ②任何时空的任何TIP都存在线长有限的类时线γ使$\mathrm{I}^-(\gamma)$等于该TIP，② 问题在于有些时空的有些TIP不存在线长无限的类时线γ使$\mathrm{I}^-(\gamma)$等于该TIP，这些TIP就称为奇异TIP. 因此，粗略地说，所有观者都在有限固有时间内“到达”奇异理想点，而总有观者只在经历无限长固有时间后才“到达”无限远理想点.

把过去改为未来便可得到IF(读做if)，PIF和TIF等概念及类似性质.

既然奇性可用奇异TIP(或TIF)代表，局部裸奇性也应该可以通过定义局部裸奇TIP(TIF)加以定义. 构思时首先应该注意，无论如何定义，大爆炸奇性都不应被

---

① 定义3其实并不很好，因为对某些时空，明明是代表奇点的TIP按此判据也成了∞-TIP(因而不是奇异TIP). 有鉴于此，Penrose又提出另一(不等价的)判据(此处称为定义3′)：一个TIP称为**类光有限的**(null-finite)，若它可表为$\mathrm{I}^-(\mu)$，其中μ是仿射长度有限的类光测地线；否则称为**类光无限的**(null-infinite). 类光有限的TIP对应的理想点可看作奇异理想点. [详见Penrose(1978)]. 事实上，Kuang et al.(1986)在研究Taub的平面对称真空时空时发现，虽然该时空的全部TIP明明应该分为∞-TIP和奇异TIP两部分，[后者应是$z=0$的点，是时空奇性(且为曲率奇性).] 但按定义3判断却全部是∞-TIP!反之，若改用定义3′判断，则与$z=0$对应的所有TIP都是奇异TIP，这才在物理上合理.

② 例如，设W是闵氏时空中由$t<z$定义的TIP，γ是由$x=0,\ y=0,\ z+t=(z-t)^{-1/2}>0$定义的类时线，则$W=\mathrm{I}^-(\gamma)$且$\gamma$的线长有限.

视作局部裸奇性, 否则要么强宇宙监督假设不成立, 要么招致所有广义相对论(特别是宇宙论)学者的群起围攻. Penrose 提出如下定义:

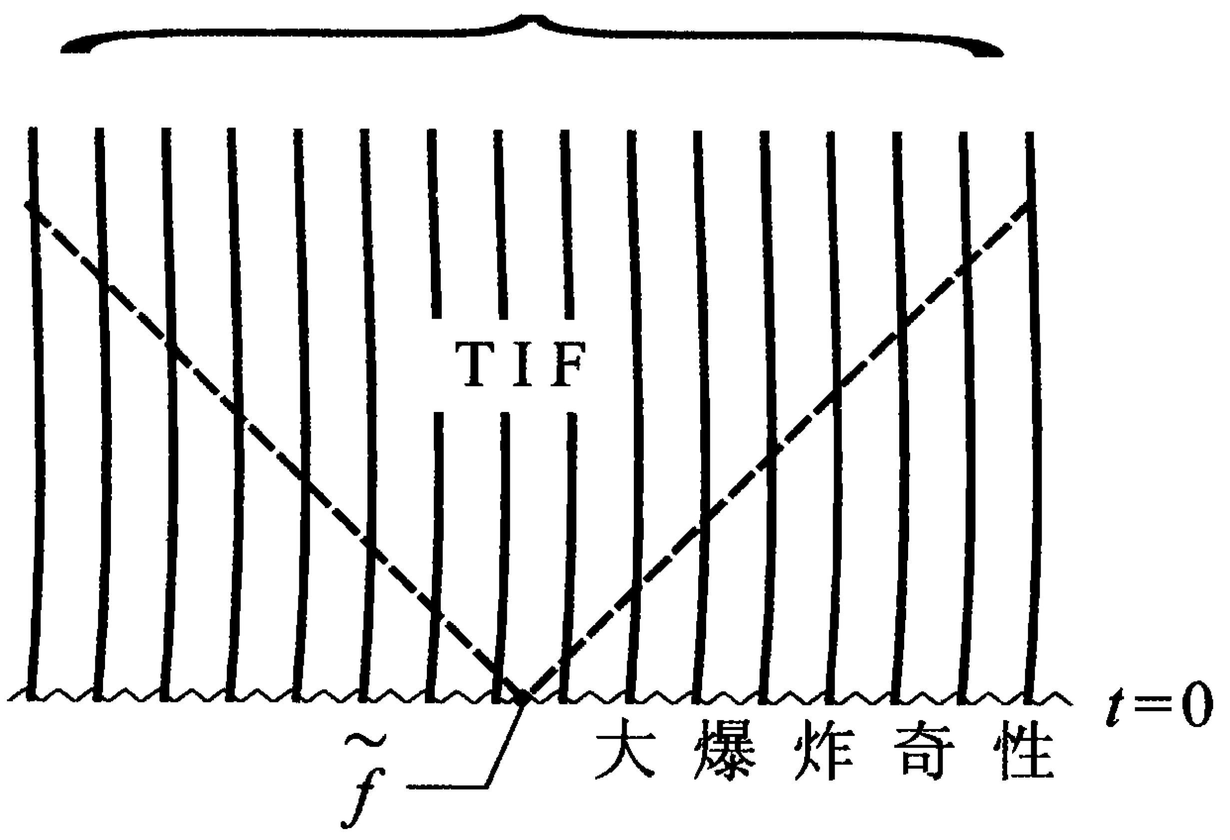


图 E-9　大爆炸奇性不裸, 因为任一奇异 TIF 都不含于任一 PIF 中

定义 4　含于 PIP 中的 TIP 称为**局部裸(locally naked) TIP**. 对偶地, 含于 PIF 中的 TIF 称为**局部裸 TIF**. 对应于局部裸 TIP 或局部裸 TIF 的奇异理想点称为**局部裸奇点**.

因为大爆炸奇性的任一奇异 TIF 都不含于任一 PIF 中(图 E-9), 上述定义保证它不是局部裸的.

此外, 出于某些考虑, Penrose 还认为不但局部裸的奇异 TIP(TIF)不应存在, 而且连局部裸的 ∞-TIP(∞-TIF)也不应存在. [认为两者"一样糟", 见 Penrose (1978); Penrose(1979); Hawking and Penrose(1996).] 于是又假设真实时空不存在局部裸的 TIP 和 TIF, 并称之为**强宇宙监督假设**.

事实上, 时空 (M, g_{ab}) 不存在局部裸 TIP 和不存在局部裸 TIF 这两个要求互相等价, 因为它们都等价于要求 (M, g_{ab}) 为整体双曲时空[证明见 Penrose(1979)]. 可见强宇宙监督实际上假设所有真实时空都为整体双曲. 从这个角度看, 大爆炸奇性之所以不被强宇宙监督所禁止, 是因为 RW 宇宙本来就是整体双曲时空. 整体双曲性是一个很强的要求. 然而, 即使这一要求得到满足, 仍不足以排除某些我们不希望出现的特殊情况. 因此 Penrose(1978)又在强宇宙监督的基础上提出进一步的假设, 略.

强宇宙监督假设还有第三种等价表述. 为此先要介绍 Penrose 关于理想点集合的类时性的如下定义:

全体未来理想点(TIP)的集合称为**类时的**, 若每个 TIP 都含于一个 PIP 中; 称为**类光的**, 若每个 TIP 都含于另一个 TIP 但不含于一个 PIP 中; 称为**类空的**, 若每个 TIP 都不含于一个 IP 中. 未来边界称为**非编时的**(achronal), 若它是类空或类光的. 过去理想点的集合的类时、类光和类空性可对偶地定义. 利用这一术语就可给出强宇宙监督假设的第三种表述, 见下面的小结之(3).

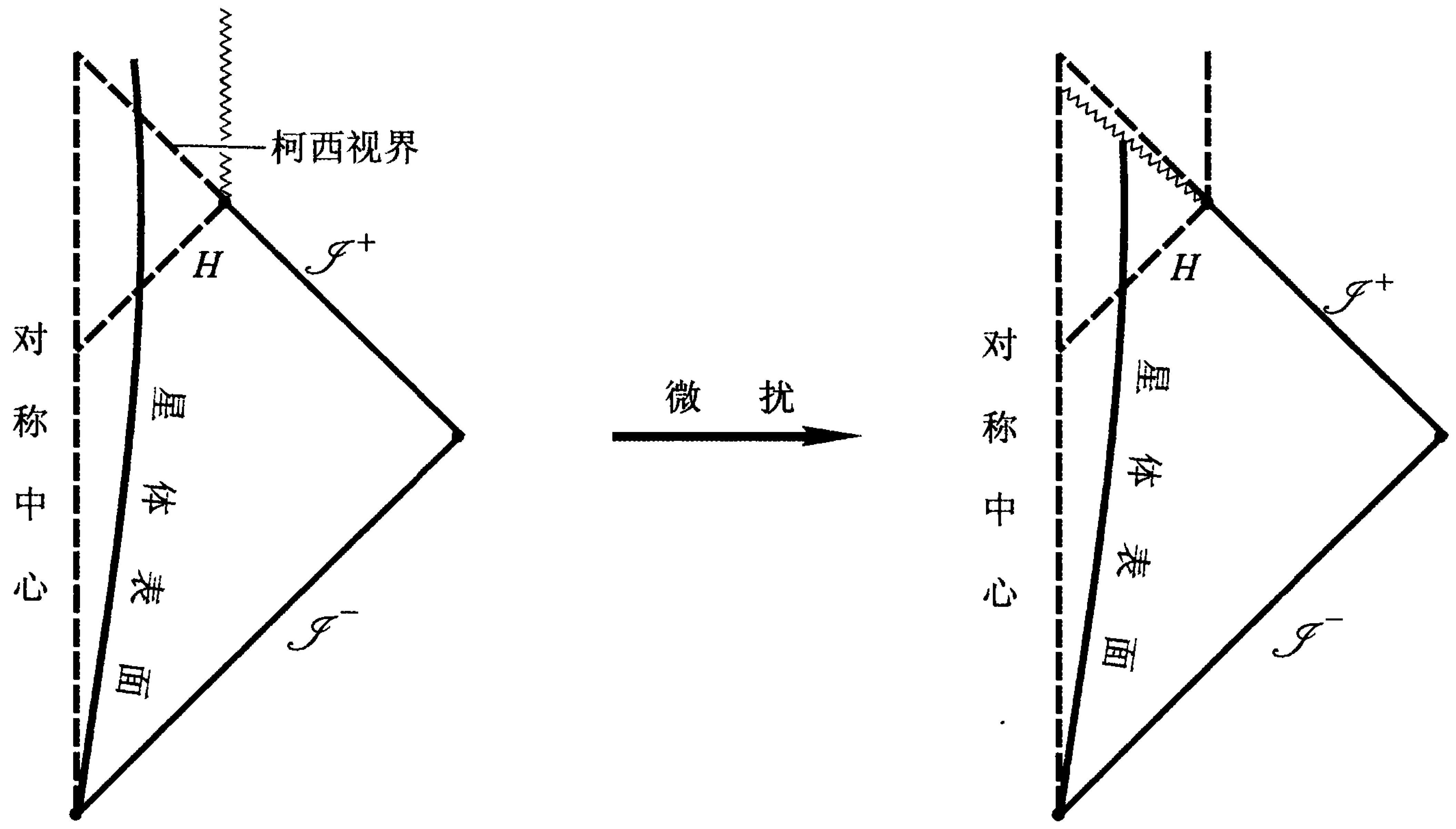
小结 强宇宙监督假设有以下三种等价提法:

(1) 真实时空不存在局部裸的TIP和TIF.

(2) 真实时空是整体双曲时空.

(3) 真实时空的TIP(和TIF)的集合是非编时的(因而不是类时的).

作为例子,先看球对称坍缩导致的施瓦西奇性. 由图 E-4 右边的共形 Penrose 图可知这奇性是类空(而且非编时)的,因此符合强宇宙监督原理. 从现在的观点看来,这种奇性之所以"无害"(之所以不是裸的),不但因为它藏在事件视界之内,更因为它根本就不是编时的. 反之,带电球对称恒星($Q < M$)如果坍缩为RN黑洞,其奇性是类时的(图 E-10a). 它虽然也藏在事件视界H之内,却仍属于局部裸之列:一个相继穿越事件视界H和柯西视界($r = r_-$)的适当观者将能看到这一奇性. 幸好这种时空(指事件视界以内)是不稳定的(见选读 13-1-1),只要略受微扰就会在其柯西视界($r = r_-$)附近发展出一个类空(或类光)奇性,见图 E-10(b),因而不再为局部裸.



(a) RN奇性是类时的,但不稳定 (b) 微扰后在柯西视界附近出现类空(或类光)奇性

图 E-10 球对称带电恒星坍缩导致的 Reissner-Nordstrom 奇性[见 Penrose(1978)图 6]

§E.4 奇异边界

奇性定理证明了许多真实时空不可避免地存在奇性,但对奇性的性质并未提供任何信息. 要对此作详细研究就要对奇性的"大小"、"形状"、"位置"等一系列概念赋予明确意义. 奇点不属于时空流形的事实给上述研究带来许多困难. 虽然奇点应从时空中开除出去,它们与时空的千丝万缕的联系肯定还会在时空中留下印记,例如那些表明时空有奇性的不完备测地线就是"冲着"奇点去的. 一个诱人的设想是把时空流形 M 延拓为"更大"的集合 $\overline{M} = M \cup \partial M$,其内部就是$M$,其边界$\partial M$则代表所有奇点的集合(称为奇异边界). 为反映边界点与时空点的"血

肉”联系(而不是生硬地拼在一起), ∂M 应由时空 (M,g_{ab}) 的几何结构决定,而且至少 M 的拓扑结构可以自然延拓至集合 $\overline{M}$. 就是说,至少应把 $\overline{M}$ 定义为拓扑空间,当限于 $\overline{M}$ 的内部 M 时,其拓扑应还原为 M 的拓扑,但若关心 ∂M 的一点 s (奇点),则 $\overline{M}$ 的拓扑应能描述 s 与其他奇点以及时空点(M 的内点)之间的“远近”关系.更准确地说,就是要使 $\overline{M}$ 的拓扑能反映 M 的一个点序列如何趋近一个边界点. 如能进一步给 $\overline{M}$ 定义微分结构甚至度规自然更好[Hawking and Ellis(1973)第 8.3 节对此有所论述]. 如果不能,也可退一步(在 $\overline{M}$ 是拓扑空间的基础上)考虑可否把 $\overline{M}$ 定义为因果空间. (即对 $\overline{M}$ 赋予因果结构,根据这一结构,对 $\overline{M}$ 的任一对点都可问及有无因果联系,如果有,还可问及谁先谁后.) 这一想法在 20 世纪 60 年代和 70 年代前期曾吸引过许多著名学者. Geroch(1968b)提出用不完备测地线的等价类定义奇异边界的方案,所得边界称为 **g 边界**. (g-boundary, g 代表 geodesic, 即测地线.) 文末计算了 6 个时空(包括施瓦西和 RN 时空)的 g 边界,结果都同人们在物理上希望的奇点结构相吻合. Schmidt(1971)利用纤维丛理论提出称为 **b 边界**的方案, (b-boundary, b 代表 bundle, 即纤维丛.) 依靠给每一不完备曲线(含非测地线)赋予一个端点而构成. 这被公认为最漂亮的边界方案,然而具体计算却十分困难,事实上 Schmidt 的文章只提出理论而未给出哪怕一个时空的计算实例. Geroch, Kronheimer, and Penrose(1972)又提出用因果结构(含 TIP 及理想点概念)构造的 **c 边界**(c-boundary, c 代表 causal, 即因果)方案,要点如下. 把时空 (M,g_{ab}) 中所有 IP 的集合和所有 IF 的集合分别记作 $\hat{M}$ 和 $\check{M}$. 由于每一时空点 $p\in M$ 既对应于一个 PIP 又对应于一个 PIF, 应把并集 $\hat{M}\cup\check{M}$ 中的每一对(PIP, PIF)认同为一点. 认同后的 $\hat{M}\cup\check{M}$ 记作 $M^\#$. 用自然方法给 $M^\#$ 定义拓扑使成拓扑空间,发现它不一定有 T_2 性(T_2 的概念见§1.3). 把 $M^\#$ 的点按指定规则作认同后便得一个 T_2 拓扑空间,记作 $\overline{M}$, 而 $\partial M\equiv\overline{M}-M$ 就称为时空 (M,g_{ab}) 的 c 边界(包含奇点和无限远点). 这一方案有许多优点,但正如作者自己指出的,这样得到的 $\overline{M}$ 不能成为因果空间(无法定义合理的因果关系). 为克服这一缺点, Budic and Sachs(1974)提出另一套十分不同的 c 边界方案. 作者证明,只要 (M,g_{ab}) 满足一定的因果条件,所得的 T_2 拓扑空间 $\overline{M}$ 同时也是一个因果空间,且其因果结构是由原时空的因果结构延拓而来,因此便可意义明确地谈及一个时空点同一个理想点之间可否传递信号(不超光速)的问题. 下面把前后两种 c 边界方案分别称为 GKP 方案和 BS 方案. 上述四种奇异边界方案提出后逐渐暴露出一些缺点和问题,比较致命的有以下几点.

1. Johnson(1977)指出爱因斯坦方程的常见解的 b 边界有物理上无法接受的拓扑结构. 例如,最大延拓施瓦西时空的 b 边界含有这样一个奇点,它的任一邻域都包含全时空!这表明连渐近平直区的任一时空点都是“任意靠近”奇点的. 这在物理上显然无法接受.

2. Geroch, Liang, and Wald(1982)举出一个人为的奇异时空例子，证明g边界方案以及一切满足某些不苛刻条件的奇异边界方案在这个例子中都表现出如下拓扑性质：存在一个奇点s和一个时空点r使s的每一邻域都含有r. 可见这一拓扑不但不是T_2的，就连T_1的也达不到，[注：拓扑空间$(X,\mathscr{T})$叫做$\mathbf{T_1}$**的**，如果$\forall x, y \in X\ \exists O_1, O_2 \in \mathscr{T}$使$x \in O_1, y \notin O_1$及$y \in O_2\ x \notin O_2$.] 因而被认为是非物理的拓扑. 这表明g边界以及一切满足某些不苛刻条件的奇异边界方案(含b边界)都只能放弃. 但c边界不属此列：两种c边界方案都不满足上面提到的“不苛刻”的条件.

3. 邝志全等[Kuang, Li, and Liang(1986)]证明，根据GKP方案的认同规则，Taub的平面对称时空的c边界的奇异部分竟然只含一个奇点，而按照物理想象这应是一个含无限多奇点的1维集合. (事实上，按照BS的c边界方案，结论的确是1维集合.) GKP方案的认同规则把这个1维集合的所有点都不合理地认同为一点. 这表明GKP的c边界方案存在某种困难，至少远不如原来以为的那样有用.

4. 邝志全等[Kuang and Liang(1988a)]证明GKP方案的认同规则在一个很简单的人为例子中给出不可接受的结果——该规则对本应认同的一对(PIP, PIF)竟然不予认同，即它们竟被视为$\overline{M}$的两个不同元素. 而按照BS方案，它们的确代表$\overline{M}$的同一元素. GKP方案的上述两个困难表明它的认同规则很成问题：应该认同的两点不予认同，不该认同的许多点(指Taub时空的1维奇点集)却被全部认同为一点！这两个困难在BS方案中都不存在，看来BS方案更具可接受性. 然而，邝等的1988a文的后一部分又证明了BS方案在一个简单人为例子中表现出不可接受的拓扑性质.

GKP方案的上述两个困难都起因于其认同规则. 针对Kuang, Li, and Liang(1986)所指出的问题，匈牙利学者Racz和Szabados分别提出，只要对认同规则作足够修改便可“挽救”(Racz原话)该方案. 两人先后独立地发表了自己的修正方案. [Racz(1987)； Szabados (1988, 1989).] 然而，邝志全等后来指出[Kuang and Liang(1992)]这两种修正方案也各自存在问题. 虽然原则上可以继续不断创立新的边界方案，然而很难保证它对一切奇异时空都能给出满意的边界结构. 反之，公平地说，举例证明某一已知方案给出不满意结果比创立新方案容易得多. 因此完全不敢肯定存在(或将出现)一个对任何奇异时空都能给出满意结果的方案. 用奇异边界描述时空奇性的诱人设想看来不得不放弃. 这当然丝毫不表明经典广义相对论中不存在奇性，只表明不能用这一途径描述奇性.

指出某一边界方案的问题的通常手法是找出某些时空(可以是爱因斯坦方程的解，也可以是人为例子)并证明该边界方案对该时空给出不满意结果. 然而在满意与否的判断上往往存在含糊性. 特别是，如果两个不同方案对同一时空给出不同

的奇异边界, 其中每个都不那么明显地不可接受, 那么哪个正确?(应该只有一个, 因为奇异边界就是为描述给定时空的奇性结构而创立的.) 看来不存在不含糊的判别标准, 因为“判别标准”本身的提出就只能是直观的(物理上“可接受”和“不可接受”的区分本身就带有直观思辨). 这是笔者倾向于相信用奇异边界描述奇性的整个设想应该放弃的又一原因.

附录 F Frobenius 定理

设v^a是n维流形M(或其开子集)上的处处非零光滑矢量场. $\forall p\in M$, 以$v^a|_p$为基底构造的V_p的 2 维子空间记作W_p. 因为每点p都有一个这样的子空间, 所以v^a给出了M上的一个 1 维子空间场. 第 2 章已讨论过v^a的积分曲线的存在性, 结论是:过M的任一点p必有一条曲线(现在指曲线映射的像), 其上每点q的切矢都属于W_q(且非零). 本附录旨在推广这一讨论, 即讨论$m\,(<n)$维子空间场的积分“曲面”的存在性. 与 1 维子空间场不同, $m\,(\neq 1)$维子空间场的可积性并非是无条件成立的.

定义 1 给n维流形M的每点p的切空间V_p指定一个m维子空间$W_p\subset V_p$, 就得到M上的一个$\boldsymbol{m}$ **维子空间场**W, 又称$\boldsymbol{m}$ **维分布**(*m*-dimensional distribution). [①] $\boldsymbol{m}$ **维分布**W**称为**$\mathbf{C}^\infty$ **的**, 如果任一$p\in M$有邻域U, 其上存在m个C^∞矢量场$(e_1)^a,\cdots,(e_m)^a$使得$\forall q\in U$, $\{(e_1)^a|_q,\ \cdots,(e_m)^a|_q\}$是$W_q$的一组基矢. 今后谈到分布都指$C^\infty$分布. M上C^∞矢量场w^a称为属于W的(即可写$w^a\in W$), 若$w^a|_p\in W_p\quad \forall p\in M$.

定义 2 m维嵌入子流形$S\subset M$称为m维分布W的**积分子流形**(integral submanifold), 如果任一$q\in S$的(切于S的)切空间重合于W_q. W称为**可积的**(integrable), 若$\forall p\in M$有W的积分子流形S使$p\in S$. 过p的积分子流形可以“大小不一”(一个含于另一个中). 积分子流形称为**最大的**, 若它不含于更大的连通积分子流形中.

下面的重要定理给出W可积的充要条件.

定理 F-1 (Frobenius 定理, 矢量表述) n维流形M上的m维分布W可积的充要条件是

$$[w,w']^a\in W,\qquad \forall\, w^a,w'^a\in W. \tag{F-1}$$

证明 见 Westenholz(1981)第 8 章定理 3.9 的证明. 我们只介绍必要性的证明, 即由W可积证明式(F-1)成立. 为此只须证明$[w,w']^a|_p\in W_p\quad \forall p\in M$. W的可积性保证$\forall p\in M$存在W的积分子流形S使$p\in S$, 因而存在$p\in M$的坐标邻域$O\subset M$, 其前m个坐标基矢场$(\partial/\partial x^1)^a$, $\cdots,(\partial/\partial x^m)^a$切于$S$, 它们足以在$O$上展开$w^a$和

---

① 请勿与选读 B-1-2 的分布(广义函数)混同.

w'^a :①

$$w^a = w^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^a, \quad w'^a = w'^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^a. \qquad (\rho \text{ 从 } 1 \text{ 到 } m \text{ 取和})$$

以 ∂_a 代表该坐标系的普通导数算符, 则

$$[w, w']^a|_p = (w^b \partial_b w'^a - w'^b \partial_b w^a)_p = (w^b \partial_b w'^\rho - w'^b \partial_b w^\rho)|_p \, (\partial/\partial x^\rho)^a|_p \in W_p.$$

□

注 1　当条件(F-1)满足时, 不但 m 维分布 W 可积, 而且 $\forall p \in M$ 都存在唯一的最大积分子流形 Σ 使 $p \in \Sigma$. 这是 Frobenius 定理的整体表述中的一个结论[见 Westenholz(1981) 第 8 章定理 3.17].

下面给出一个用 Frobenius 定理求解偏微分方程组的例子.

假定要求解关于未知函数 $u(x,y)$ 的下列偏微分方程组:

$$\text{(a)}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = F(x,y,u(x,y)), \qquad \text{(b)}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = G(x,y,u(x,y)), \tag{F-2}$$

其中 $F(x,y,u)$ 和 $G(x,y,u)$ 是两个给定的 3 元光滑函数.

首先, 如果存在函数 $u(x,y)$ 满足方程组(F-2), 则由式(F-2a)和(F-2b)分别得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{F-3a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} + F\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{F-3b}$$

故

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial x} + F\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0. \tag{F-4}$$

可见式(F-4)是方程组(F-2)有解的必要条件. 反之, 它是否也是有解的充分条件?下面的定理不但给出肯定的回答, 而且还给出更强的结果.

定理 F-2　以 x, y, u 代表 $\mathbb{R}^3$ 的自然坐标. 若函数 $F(x,y,u)$ 和 $G(x,y,u)$ 满足式(F-4), 则 $\forall q_0 = (x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$, 存在方程组(F-2)的一个解 $u(x,y)$, 满足 $u(x_0, y_0) = u_0$.

证明　$\mathbb{R}^3$ 上的矢量场

① 这一断言的证明亦见 Westenholz(1981)第 8 章命题 3.9 的证明.

$$(w_1)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + F(x,y,u)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a, \qquad (w_2)^a = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + G(x,y,u)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a \tag{F-5}$$

给出 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 2 维分布 W. 以 ∂_a 代表自然坐标系 $\{x,y,u\}$ 的普通导数算符, 则

$$[w_1,w_2]^a = (w_1)^b \partial_b (w_2)^a - (w_2)^b \partial_b (w_1)^a .$$

把式(F-5)代入上式, 稍加计算便得

$$[w_1,w_2]^a = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} + F\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right],$$

可见 $[w_1,w_2]^a = 0$ 等价于式(F-4). 另一方面, 设 $[w_1,w_2]^a = 0$ 成立, 则由 Frobenius 定理可知 $\forall q_0 \in \mathbb{R}^3$ 存在 W 的 2 维最大积分子流形 S 使 $q_0 \in S$. 根据定理 2-2-7 后的脚注, $[w_1,w_2]^a = 0$ 还保证 S 上存在坐标系(坐标域含 q_0) $\{\alpha^1,\alpha^2\}$ 使

$$(w_i)^a = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}\right)^a, \qquad i = 1,2. \tag{F-6}$$

坐标域中任一点 q 当然有两个坐标 α^1,α^2; 但作为 $\mathbb{R}^3$ 的一点, q 又有 3 个坐标 x, y, u, 它们由 α^1,α^2 决定, 即 $x = x(\alpha^1,\alpha^2), y = y(\alpha^1,\alpha^2), u = u(\alpha^1,\alpha^2)$. 故

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}\right)^a = \frac{\partial x}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + \frac{\partial y}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + \frac{\partial u}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a, \qquad i = 1,2,$$

代入式(F-6)后再与(F-5)对比得

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha^1} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha^1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha^1} = F; \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha^2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha^2} = G. \tag{F-7}$$

由此解得 $x = \alpha^1 + c_1, y = \alpha^2 + c_2$ (c_1, c_2 为常数). 重选 α^1,α^2 可使 $x = \alpha^1, y = \alpha^2$, 故式(F-7)给出 $\partial u/\partial x = F, \partial u/\partial y = G$, 可见由 S 确定的 $u(x,y)$ 满足方程组(F-2). 又因 $q_0 = (x_0,y_0,u_0) \in S$, 故 $u(x_0,y_0) = u_0$. □

以上讨论未涉及度规. 如果 M 上有度规场 g_{ab}, 就可借用 Frobenius 定理讨论 M 上处处非零的 C^∞ 矢量场 v^a 是否超曲面正交这一重要问题(第 14 章多处涉及), 这是因为 v^a 在每一 $p \in M$ 的切空间 V_p 中挑出了一个与 v^a 正交的 $n-1$ 维子空间 W_p, 相应的分布 W 的积分子流形(如果存在)就是与 v^a 正交的超曲面. v^a 的超曲面正交性就等价于相应的 W 的可积性. 下面讨论这一问题.

先就无度规的情况讨论. 设 W 是 n 维流形 M 上的一个 $n-1$ 维分布. 满足如下

条件的余矢(对偶矢量)场 ω_a 称为 W 的**消灭**(annihilated)**余矢场**:

$$\omega_a w^a = 0, \quad \forall w^a \in W. \tag{F-8}$$

$\forall p \in M$, 在 p 的适当邻域上选择 n 维基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 及其对偶基底场 $\{(e^\mu)_a\}$ 使

$$(e_\lambda)^a \in W, \quad \lambda = 2, \cdots, n, \tag{F-9}$$

则 ω_a 在此基底的第 λ 分量 $\omega_\lambda = \omega_a (e_\lambda)^a = 0,\ \lambda = 2, \cdots, n$, 故

$$\omega_a = \omega_1 (e^1)_a. \tag{F-10}$$

可见任一 $p \in M$ 的 $V_p{}^*$ 中的所有消灭余矢构成 $V_p{}^*$ 的一个 1 维子空间.

定理 F-3　n 维流形 M 上的 $n-1$ 维分布 W 可积的充要条件是:对 W 的任一(可微的)消灭余矢场 ω_a 及任意 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U 及 W 在 U 上的消灭余矢场 μ_a 和 U 上的余矢场 ψ_a 使

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\psi}. \tag{F-11}$$

证明　设 ω_a 是 W 的任一消灭余矢场, 则由 Frobinius 定理(定理 F-1)和式(F-8)得知 W 可积的充要条件为

$$\omega_a [w, w']^a = 0, \quad \forall w^a, w'^a \in W. \tag{F-12}$$

用 M 上任一无挠导数算符 ∇_a 表出 $[w, w']^a$, 则上式可改写为

$$\omega_a (w^b \nabla_b w'^a - w'^b \nabla_b w^a) = 0, \quad \forall w^a, w'^a \in W. \tag{F-12$'$}$$

由 $\omega_a w^a = 0$ 得 $\nabla_b (\omega_a w^a) = 0$, 从而

$$\omega_a \nabla_b w^a = -w^a \nabla_b \omega_a, \quad \forall w^a \in W. \tag{F-13}$$

代入式(F-12′), 注意到 $(\mathrm{d}\omega)_{ab} = 2\nabla_{[a}\omega_{b]}$, 得

$$(\mathrm{d}\omega)_{ab} w'^a w^b = 0, \quad \forall w^a, w'^a \in W. \tag{F-14}$$

$(\mathrm{d}\omega)_{ab}$ 在任一对偶基底场 $\{(e^\mu)_a\}$ 的表示式为[见式(5-1-6′)]

$$(\mathrm{d}\omega)_{ab} = \frac{1}{2} (\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu} (e^\mu)_a \wedge (e^\nu)_b, \quad (\text{对}\mu, \nu\text{ 从 1 到 }n\text{ 取和}) \tag{F-15}$$

其中

$$(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu} = (\mathrm{d}\omega)_{ab} (e_\mu)^a (e_\nu)^b. \quad [\text{见式(5-1-7)}] \tag{F-16}$$

$\forall p \in M$, 在 p 的适当邻域 U 上选择基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_\lambda)^a \in W,\ \lambda = 2, \cdots, n$, 则由

$(e^1)_a(e_\lambda)^a = 0$ 可知 $(e^1)_a$ 是 W 的消灭余矢场. 由式(F-16)和(F-14)又知 $(\mathrm{d}\omega)_{ab}$ 在这个基底的分量 $(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu}$ 满足

$$(\mathrm{d}\omega)_{\lambda\tau} = (\mathrm{d}\omega)_{ab}(e_\lambda)^a(e_\tau)^b = 0, \quad \lambda, \tau = 2, \cdots, n,$$

于是式(F-15)简化为

$$(\mathrm{d}\omega)_{ab} = (\mathrm{d}\omega)_{1\nu}(e^1)_a \wedge (e^\nu)_b. \quad (\text{对 } \nu \text{ 从 } 1 \text{ 到 } n \text{ 取和})$$

令 $\mu_a \equiv (e^1)_a$, $\psi_b \equiv (\mathrm{d}\omega)_{1\nu}(e^\nu)_b$, 得 $(\mathrm{d}\omega)_{ab} = \mu_a \wedge \psi_b$. 此即式(F-11). 上述推理可逆, 即由 $(\mathrm{d}\omega)_{ab} = \mu_a \wedge \psi_b$ 可得式(F-12), 故 W 可积. □

当 M 上有度规场 g_{ab} 时, 由定理 F-3 还可证明如下重要定理:

定理 F-4　(M, g_{ab}) 上处处非零的 C^∞ 矢量场 v^a 是超曲面正交的充要条件是以下三条之任一(其中 $\boldsymbol{v}$ 是指 $v_a \equiv g_{ab}v^b$):

(a) M 上有余矢场 ψ_a 使

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\psi}, \tag{F-17a}$$

(b)
$$\boldsymbol{v} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0, \tag{F-17b}$$

(c)设 ∇_b 为任一无挠导数算符, 则

$$v_{[a}\nabla_b v_{c]} = 0, \tag{F-17c}$$

证明　$\forall p \in M$, $v^a|_p$ 按下式定义了 V_p 的一个 $n-1$ 维子空间 W_p:

$$W_p := \{w^b \in V_p \mid g_{ab}v^a w^b = 0\},$$

所以 v^a 定义了 M 上的一个 $n-1$ 维分布 W. $v_a \equiv g_{ab}v^b$ 由于满足 $v_a w^a = 0$ 而显然是 W 的消灭余矢场, 而且任一消灭余矢场 μ_a 都可表为 v_a 乘以函数, 故由定理 F-3 可知 v^a 超曲面正交的充要条件是条件(a). 另一方面, 由 $\boldsymbol{v} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{v} = 3v_{[c}(\mathrm{d}v)_{ab]} = 3v_{[c}2\nabla_{[a}v_{b]]} = 6v_{[c}\nabla_a v_{b]}$ 可知条件(b)与(c)等价, 于是只须证明它们还等价于(a). 由(a)可知 $\boldsymbol{v} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\psi} = 0$, 故 (a) $\Rightarrow$ (b). 为证 (b) $\Rightarrow$ (a), 可选局域对偶基底场 $\{(e^\mu)_a\}$ 使 $(e^1)_a = v_a$, 并把 $(\mathrm{d}v)_{ab}$ 在此基底按式(5-1-6′)展开:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(\mathrm{d}v)_{\mu\nu}\,\boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{e}^\nu = \sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{d}v)_{1\nu}\,\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^\nu + \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\tau=2}^{n}(\mathrm{d}v)_{\lambda\tau}\,\boldsymbol{e}^\lambda \wedge \boldsymbol{e}^\tau. \tag{F-18}$$

于是由(b)得

$$0 = \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\tau=2}^{n} (\mathrm{d}v)_{\lambda\tau}\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^\lambda \wedge \boldsymbol{e}^\tau ,$$

所以 $(\mathrm{d}v)_{\lambda\tau} = 0,\ \lambda,\tau = 2,\cdots,n$. 代入式(F-18), 令 $\psi \equiv \sum_{\nu=1}^{n} (\mathrm{d}v)_{1\nu}\boldsymbol{e}^\nu$, 便得 $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \wedge \psi$, 此即条件(a). □

注 2　由式(F-17c)可知 2 维流形上处处非零的矢量场(如果存在)必超曲面正交.

定理 F-3 可称为 Frobenius 定理在 $\dim W = n-1$ 的特例下的对偶表述. 不难将这一表述推广至 $\dim W = m\ (m<n)$ 的一般情况, 只须注意这时 $p \in M$ 的全体消灭余矢构成 $V_p{}^*$ 的一个 $n-m$ 维子空间. 推广后的对偶表述为:

定理 F-5 (Frobenius 定理, 对偶表述)　n 维流形 M 上的 m 维分布 W 可积的充要条件是: 对 W 的任一(可微的)消灭余矢场 ω_a 及任意 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U 及 U 上的 $n-m$ 个处处独立的消灭余矢场 $(\mu^\alpha)_b$ 和 $n-m$ 个余矢场 $(\psi^\alpha)_b\ (\alpha = 1,\cdots,n-m)$ 使

$$\mathrm{d}\omega = \mu^\alpha \wedge \psi^\alpha .\quad (\text{对}\ \alpha\ \text{从}\ 1\ \text{到}\ n-m\ \text{取和}) \tag{F-19}$$

证明　练习. □

附录G　李群和李代数

§G.1　群 论 初 步

定义 1　集合 G 配以满足以下条件的映射 $G\times G\to G$ (叫**群乘法**)称为**群**(group):

(a) $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3),\ \forall g_1,g_2,g_3\in G$;

(b) ∃**恒等元**(identity element) $e\in G$ 使 $eg=ge=g,\ \ \forall g\in G$;

(c) $\forall g\in G$, ∃ **逆元**(inverse element) $g^{-1}\in G$ 使 $g^{-1}g=gg^{-1}=e$.

注 1　恒等元是唯一的, 任一群元的逆元也是唯一的.

定义 2　乘法满足交换律的群(即 $gh=hg\ \ \forall g,h\in G$)称为**阿贝尔群**(Abelian group). 只含有限个元素的群叫**有限群**(finite group), 否则叫**无限群**(infinite group). 群 G 的子集 H 称为 G 的**子群**(subgroup), 若 H 用 G 的乘法为乘法也构成群.

定义 3　设 G 和 G' 是群. 映射 $\mu: G\to G'$ 叫**同态**(homomorphism), 若

$$\mu(g_1g_2)=\mu(g_1)\mu(g_2),\qquad \forall g_1,g_2\in G.$$

定理 G-1-1　同态映射 $\mu: G\to G'$ 有以下性质:

(a)若 e,e' 各为 G,G' 的恒等元, 则 $\mu(e)=e'$.

(b) $\mu(g^{-1})=\mu(g)^{-1},\qquad \forall g\in G$.

(c) $\mu[G]$ 是 G' 的子群, 当 G 是阿贝尔群时 $\mu[G]$ 是 G' 的阿贝尔子群.

证明　练习.

定义 4　一一到上的同态映射称为**同构**(isomorphism). 当有可能与矢量空间之间的同构混淆时又明确地把群之间的同构称为群同构. 同构 $\mu: G\to G$ 称为群 G 上的**自同构**(automorphism).

例 1　$\forall g\in G$, 可构造一个称为**伴随同构**(adjoint isomorphism)的自同构映射, 又称**内自同构**(inner automorphism), 记作 $I_g: G\to G$, 定义为

$$I_g(h):=ghg^{-1},\ \ \forall h\in G. \tag{G-1-1}$$

注 2　今后常把两个同构的群视作一样, 并用等号表示.

定义 5　群 G 和 G' (看作两个集合)的卡氏积 $G\times G'$ (见 § 1.1 定义 3)按下列乘法

$$(g_1,g_1')(g_2,g_2'):=(g_1g_2\ ,g_1'g_2'\ ),\quad \forall g_1,g_2\in G,\ g_1',g_2'\in G' \tag{G-1-2}$$

构成的群称为 G 和 G' 的**直积群**(direct product group).

例 2 以加法为群乘法, 则 $\mathbb{R}$ 是群. $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 配以由式(G-1-2)定义的乘法就构成直积群, 而且此乘法正好是 $\mathbb{R}^2$ 上(自然定义)的加法.

定义 6 设 H 是群 G 的 子群, $g\in G$,则 $gH\equiv\{gh\,|\,h\in H\}$ 称为 H 的含 g 的**左陪集**(left coset). 类似地可定义**右陪集**.

注 3 若子群 H 的两个左陪集有交, 则两者必相等(证明留作练习).

定义 7 群 G 的子群 H 称为**正规**(normal)**子群**或**不变**(invariant)**子群**, 若

$$ghg^{-1}\in H, \quad \forall g\in G,\ h\in H.$$

定义 8 设 G 是群, 则 $A(G)\equiv\{\mu : G\to G\,|\,\mu$ 为自同构映射$\}$ 以映射的复合为群乘法构成群, 称为群 G 的**自同构群**. “以映射的复合为乘法”是指 $\forall\mu,\nu\in A(G)$, 群乘积 $\mu\nu\in A(G)$ 定义为 $(\mu\nu)(g)\equiv\mu(\nu(g))\ \ \forall g\in G$.

定理 G-1-2 以 $A_I(G)$ 代表 G 上全体内自同构映射的集合, 即

$$A_I(G)\equiv\{I_g : G\to G\,|\,g\in G\}\subset A(G),$$

则 $A_I(G)$ 是群 $A(G)$ 的一个正规子群.

证明 习题. □

定义 9 设 H 和 K 是群, 且存在同态映射 $\mu : K\to A(H)$. $\forall k\in K$, 把 $\mu(k)\in A(H)$ 简记作 μ_k, 则 $G\equiv H\times K$ 配以由下式定义的群乘法

$$(h,k)\,(h',k') := (h\mu_k(h'), kk'), \quad \forall h, h'\in H,\ k, k'\in K$$

所构成的群称为 H 和 K 的**半直积群**, 记作 $G\equiv H\otimes_S K$.

§ G.2 李　群

定义 1 若 G 既是 n 维(实)流形又是群, 其群乘映射 $G\times G\to G$ (请注意 $G\times G$ 也是流形)和求逆元映射 $G\to G$ 都是 C^∞ 的, 则 G 叫 ***n* 维**(实)**李群**(Lie group). ①

例 1 以加法为群乘法, 则 $\mathbb{R}$ 是 1 维李群.

例 2 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}$ 的直积群 $\mathbb{R}^2$ 是 2 维李群. 推而广之, $\mathbb{R}^n$ 是 n 维李群.

例 3 设 $\phi : \mathbb{R}\times M\to M$ 是流形 M 上的任一单参微分同胚群(见§2.2 定义 13), 则 $\{\phi_t\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 是 1 维李群, ② 同构于 $\mathbb{R}$.

---

① 约定把有离散拓扑的可数群称为**零维李群**. 因为有限群的默认拓扑是离散拓扑, 所以有限群都可看作零维李群.

② $\phi(t,p)=p\ \ \forall p\in M, t\in\mathbb{R}$ 的情况可视为例外. 这是与 M 上的 0 矢量场对应的那个特殊的单参微分同胚群, 是只含恒等元的独点群, 可看作零维李群.

例4 由第4章习题5(c)易证广义黎曼空间(M,g_{ab})上的两个等度规映射的复合也是等度规映射,因此(M,g_{ab})上全体等度规映射的集合以复合映射为乘法构成群,称为(M,g_{ab})的**等度规群**. 还可验证等度规群是李群. 闵氏时空的等度规群是10维李群,施瓦西时空的等度规群是4维李群. 一般地,n维广义黎曼空间(M,g_{ab})的等度规群的维数$m\leqslant n(n+1)/2$(见定理4-3-4). 但(M,g_{ab})上全体微分同胚的集合则"大"到不能构成有限维群. 事实上,它是一个无限维群.

注1 本附录只限于讨论有限维李群,虽然许多结论对无限维李群也适用.

以下如无特别声明,G一律代表李群. 李群的双重身份(既是群又是流形)使得用几何语言研究李群成为可能. 群乘映射和求逆元映射的光滑性则使李群具有一系列好性质.

定义2 李群G和G'之间的C^∞同态映射$\mu: G\to G'$称为**李群同态**(Lie-group homomorphism). 李群同态μ称为**李群同构**(Lie-group isomorphism),若μ为微分同胚.

定义3 李群G的子集H称为G的**李子群**(Lie subgroup),若H既是G的子流形又是G的子群.

定义4 $\forall g\in G$,映射$L_g: h\mapsto gh$ $\forall h\in G$叫做由g生成的**左平移**(left translation).

注2 ①由李群定义中关于群乘映射和求逆元映射的C^∞性可知左平移$L_g: G\to G$是微分同胚映射. ②易见$L_{gh}=L_g\circ L_h$.

以下的讨论经常涉及G的一点的矢量和G的一个子集上的矢量场,并要对两者作明确区分. 我们将用$A, B,\cdots$代表一点的矢量,用$\overline{A}, \overline{B},\cdots$代表矢量场,用$\overline{A}_g$代表矢量场$\overline{A}$在点$g\in G$的值. 为简化表达式,本附录中所有矢量(除少数情况外)都不加抽象指标.

定义5 G上矢量场$\overline{A}$叫**左不变的**(left invariant),若

$$L_{g*}\overline{A}=\overline{A},\quad \forall g\in G, \tag{G-2-1}$$

其中L_{g*}是由左平移映射$L_g: G\to G$诱导的推前映射(见§4.1).

注3 ①左不变矢量场必为C^∞矢量场[证明见Spivak(1970)vol.I];②不难看出左不变矢量场的定义式(G-2-1)等价于

$$(L_{g*}\overline{A})_{gh}=\overline{A}_{gh},\quad \forall g,h\in G. \tag{G-2-1'}$$

根据§4.1,当$\phi: M\to N$是微分同胚时,ϕ_*把M上矢量场v映为N上矢量场ϕ_*v,满足$(\phi_*v)|_{\phi(p)}=\phi_*(v|_p)$ $\forall p\in M$. 用于现在的情况,令$M=N=G$,$\phi=L_g$, $p=h$, $v=\overline{A}$,便得$(L_{g*}\overline{A})_{gh}=L_{g*}(\overline{A}_h)$. 于是式(G-2-1')又等价于

$$\overline{A}_{gh} = L_{g*}\overline{A}_h , \quad \forall g, h \in G . \tag{G-2-1''}$$

上式可作为左不变矢量场 $\overline{A}$ 的等价定义.

不难看出左不变矢量场之和以及左不变矢量场乘以常数仍为左不变矢量场, 故 $\mathscr{L} \equiv \{\overline{A} \mid \overline{A}$为 G 上的左不变矢量场$\}$ 是矢量空间.

定理 G-2-1 G 上全体左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 与 G 的恒等元 e 的切空间 V_e (作为两个矢量空间)同构.

证明 $\forall A \in V_e$, 用下式定义 G 上的矢量场 $\overline{A}$:

$$\overline{A}_g := L_{g*}A, \quad \forall g \in G. \ (\text{注: 由此得} \ \overline{A}_e = A) \tag{G-2-2}$$

把上式的 g 改为 gh 得

$$\overline{A}_{gh} = L_{gh*}A = (L_g \circ L_h)_* A = (L_{g*} \circ L_{h*})A = L_{g*}(L_{h*}A) = L_{g*}\overline{A}_h ,$$

说明 $\overline{A}$ 满足式(G-2-1″), 因而是左不变矢量场. 可见式(G-2-2)定义了一个映射 η : $V_e \to \mathscr{L}$ (把 A 映为 $\overline{A}$). L_{g*} 的线性性保证 η 的线性性, 由 $\overline{A}_e = A$ 易见 η 是一一映射. 于是欲证 η 为同构只须证 η 为到上映射. $\forall \overline{A} \in \mathscr{L}$, 有 $\overline{A}_e \in V_e$. 把 $\overline{A}_e$ 按式(G-2-2)决定的左不变矢量场记作 $\overline{B} \in \mathscr{L}$. 欲证 η 的到上性只须证 $\overline{B} = \overline{A}$ (亦即证明 $\overline{A} \in \mathscr{L}$ 由它在 e 点的值 $\overline{A}_e$ 唯一决定), 而这可由下式看出: $\overline{B}_g = L_{g*}\overline{A}_e = \overline{A}_{ge} = \overline{A}_g \quad \forall g \in G$, 其中第一步是 $\overline{B}$ 的定义, 第二步用到式(G-2-1″). □

§G.3 李 代 数

在矢量空间 $\mathscr{V}$ 上定义某种称为“乘法”的映射就得到一个**代数**. 一种重要乘法叫**李括号**(Lie bracket), 记作$[\,,]$: $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, 它是满足以下两条件的双线性映射:

(a) $[A,B] = -[B,A], \quad \forall A, B \in \mathscr{V}$, (G-3-1)

(b) $[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0, \quad \forall A, B, C \in \mathscr{V}$. (G-3-2)

条件(b)称为**雅可比恒等式**.

定义 1 定义了李括号的矢量空间称为**李代数**(Lie algebra). 任意两个元素的李括号都为零的李代数称为**阿贝尔李代数**.

本附录只讨论有限维实矢量空间上的李代数(**实李代数**), 虽然许多结论对无限维(实或复)李代数也适用.

例 1 把$\mathbb{R}^3$看作 3 维矢量空间, 用下式定义李括号:

$$[\vec{v},\vec{u}] := \vec{v} \times \vec{u}, \quad \forall \vec{v},\vec{u} \in \mathbb{R}^3 ,$$

则$\mathbb{R}^3$成为李代数. 作为习题, 请读者验证上述定义满足李括号的条件.

例 2　$\mathscr{M} \equiv \{m\times m$矩阵$\}$显然为$m^2$维矢量空间. 用矩阵对易子定义李括号, 即

$$[A,B]:=AB-BA,\quad \forall A,B\in\mathscr{M}, \text{(其中 } AB \text{ 是 } A, B \text{ 的矩阵积)} \qquad \text{(G-3-3)}$$

则$\mathscr{M}$是李代数. 作为习题, 请读者验证上述定义满足李括号的条件.

定理 G-3-1　G上全体左不变矢量场的集合$\mathscr{L}$是李代数.

证明　以矢量场对易子为李括号.因为$\forall \bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$有

$$L_{g*}[\bar{A},\bar{B}]=[L_{g*}\bar{A},L_{g*}\bar{B}]=[\bar{A},\bar{B}],$$

(第一步用到第 4 章习题 6, 第二步用到$\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$), 所以$[\bar{A},\bar{B}]\in\mathscr{L}$ $\forall\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$, 可见对易子的确是从$\mathscr{L}\times\mathscr{L}$到$\mathscr{L}$的映射. 对易子当然是双线性的. 对易子的反称性表明它满足李括号的条件(a). 第 2 章习题 8(b)保证对易子也满足李括号的条件(b). □

定义 2　设$\mathscr{V}$和$\mathscr{W}$是李代数. 线性映射$\beta:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$称为**李代数同态**, 若它保李括号, 即$\beta([A,B])=[\beta(A),\beta(B)]$ $\forall A,B\in\mathscr{V}$. 李代数同态$\beta:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$称为**李代数同构**, 若$\beta$是一一到上映射.

注 1　今后常把两个同构的李代数视作相同, 并用等号表示.

对李群G的恒等元e的切空间V_e用下式定义李括号:

$$[A,B]:=[\bar{A},\bar{B}]_e,\quad \forall A,B\in V_e, \qquad \text{(G-3-4)}$$

(其中$\bar{A},\bar{B}$分别是A,B对应的左不变矢量场.) 则V_e成为李代数, 称为**李群 G 的李代数**, 记作$\mathscr{G}$. 由定理 G-2-1 易证$\mathscr{G}$与$\mathscr{L}$有李代数同构关系, η可充当同构映射. 反之, 给定一个李代数, 是否也可找到一个李群, 它的李代数是所给的李代数? 答案是: 这样的李群一定存在, 并且唯一到只差整体拓扑结构的程度.[例如, 以流形S^1上的角坐标之和作为群乘法, 则S^1是 1 维李群, 它与 1 维李群$\mathbb{R}$不同(有不同的整体拓扑), 但却有相同的李代数. §G.6 末还将给出有相同李代数的不同李群的另外两个重要例子.] 准确地说,给定一个李代数, 总可找到唯一的单连通李群(其流形为单连通流形①的李群), 它以所给李代数为李代数. 这是李群理论中的一个重要定理(证略). 李群和李代数的这一密切联系使李群的讨论大为简化, 因为李代数比李群简单得多(选读 12-5-1 和 12-5-2 就是两个例子).

定理 G-3-2　设$\mathscr{G}$和$\hat{\mathscr{G}}$分别是李群G和$\hat{G}$的李代数, $\rho: G\to\hat{G}$是同态映射, 则ρ在点$e\in G$诱导的推前映射$\rho_*:\mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$是李代数同态.

证明　见 Warner(1983)的 3.14. □

① 任一闭曲线可通过连续变形缩为一点的连通流形称为**单连通**(simply connected)**流形**.

定义 3　李代数$\mathscr{G}$的子空间$\mathscr{H}$称为$\mathscr{G}$的**李子代数**(Lie subalgebra)，若

$$[A,B]\in\mathscr{H},\quad \forall A,B\in\mathscr{H},$$

其中$[A,B]$是把A,B看作$\mathscr{G}$的元素时的李括号，现在也称为子代数$\mathscr{H}$的李括号.

定理 G-3-3　设H是李群G的李子群，则H的李代数$\mathscr{H}$是$\mathscr{G}$的李子代数.

证明　见，例如，Bleecker(1981)P.20；Marsden et al.(1994)P.253.　□

[选读 G-3-1]

定义 4　李代数$\mathscr{G}$的子代数$\mathscr{H}$称为$\mathscr{G}$的**理想**(ideal)，若

$$[A,\mu]\in\mathscr{H},\quad \forall A\in\mathscr{G},\ \mu\in\mathscr{H}.$$

注 2　理想在李代数理论中的角色相当于正规子群在群论中的角色.

定理 G-3-4　设$\mathscr{H}\subset\mathscr{G}$是理想，$\mathscr{G}/\mathscr{H}$代表以等价类为元素的集合($A,B\in\mathscr{G}$叫等价的，若$A-B\in\mathscr{H}$)，则$\mathscr{G}/\mathscr{H}$是李代数，称为**商李代数**(quotient Lie algebra).

证明　以$\pi:\mathscr{G}\to\mathscr{G}/\mathscr{H}$代表投影映射，即把$A\in\mathscr{G}$映为$A$所在等价类(看作$\mathscr{G}/\mathscr{H}$的元素)的映射. $\mathscr{G}/\mathscr{H}$在如下加法和数乘定义下构成矢量空间:

加法：$\forall\hat{A},\hat{B}\in\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 定义 $\hat{A}+\hat{B}:=\pi(A+B)$，其中$A,B\in\mathscr{G}$满足$\pi(A)=\hat{A}$, $\pi(B)=\hat{B}$.

数乘: $\forall\hat{A}\in\mathscr{G}/\mathscr{H}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ 定义$\alpha\hat{A}:=\pi(\alpha A)$，其中$A\in\mathscr{G}$满足$\pi(A)=\hat{A}$.

先说明这样定义的合法性. 以加法为例，虽然满足$\pi(A)=\hat{A}$, $\pi(B)=\hat{B}$的A,B很多，但取其中任一皆可. 设若改取$A',B'\in\mathscr{G}$，则$\pi(A')=\hat{A}$, $\pi(B')=\hat{B}$保证$\exists\mu,\nu\in\mathscr{H}$使$A'=A+\mu$，$B'=B+\nu$，从而$\pi(A'+B')=\pi(A+B+\mu+\nu)=\pi(A+B)$. 可见加法(同理可证数乘)定义合法. 再用下式定义李括号使$\mathscr{G}/\mathscr{H}$成为李代数:

$$[\hat{A},\hat{B}]:=\pi([A,B]),\ \forall\hat{A},\hat{B}\in\mathscr{G}/\mathscr{H}\ [\text{其中}\ A,B\in\mathscr{G}\ \text{满足}\ \pi(A)=\hat{A},\pi(B)=\hat{B}]. \tag{G-3-5}$$

若改取$A',B'\in\mathscr{G}$ [满足$\pi(A')=\hat{A}$, $\pi(B')=\hat{B}$]，则$\exists\mu,\nu\in\mathscr{H}$使

$$[A',B']=[A+\mu,B+\nu]=[A,B]+[A,\nu]+[\mu,B]+[\mu,\nu]=[A,B]+\sigma,$$

其中$\sigma\in\mathscr{H}$，故$\pi([A',B'])=\pi([A,B])$，因而式(G-3-5)的定义合法.　□

定义 5　李代数$\mathscr{G}$称为**单**(simple)**李代数**，若它不是阿贝尔代数而且除$\mathscr{G}$及$\{0\}$外不含理想. $\mathscr{G}$称为**半单**(semi-simple)**李代数**，若它不含非零的阿贝尔理想. 相应地，李群G称为**单李群**，若它不是阿贝尔群而且除G外不含正规子群. G称为半单李群，若它不含阿贝尔正规子群.　[选读 G-3-1 完]

§G.4　单参子群和指数映射

定义1　C^∞ 曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 叫李群 G 的**单参子群**(one-parameter subgroup), 若

$$\gamma(s+t)=\gamma(s)\,\gamma(t), \quad \forall s,t\in\mathbb{R}, \tag{G-4-1}$$

其中 $\gamma(s)\gamma(t)$ 代表群元 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(t)$ 的群乘积.

注1　式(G-4-1)表明单参子群 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是从李群 $\mathbb{R}$ 到 G 的李群同态映射.

注2　按定义1, 单参子群是满足式(G-4-1)的一条 C^∞ 曲线, 但不妨把映射的像集 $\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\subset G$ 看作单参子群. 式(G-4-1)保证: ①子集的任意两个元素按 G 的乘法的积仍在子集内; ②子集含 G 的恒等元 e; [由式(G-4-1)得 $\gamma(t)=\gamma(0)\gamma(t)$, 以 $\gamma(t)$ (看作 G 的元素)的逆元右乘得 $e=\gamma(0)$.] ③子集的任一元素 $\gamma(t)$ (作为 G 的元素)的逆元[就是 $\gamma(-t)$]在子集内. 所以子集 $\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 构成子群①(而且是阿贝尔子群).

本节的一个重点是证明如下结论: "单参子群是左不变矢量场过 e 的不可延积分曲线, 反之亦然." 单参子群按定义是从 $\mathbb{R}$ 到 G 的映射, 定义域为全 $\mathbb{R}$. 因此, 要接受上述结论, 至少要证明左不变矢量场过 e 的积分曲线的参数可取遍全 $\mathbb{R}$. 下面的定理对此给出保证(而且更强).

定理 G-4-1　任一左不变矢量场 $\bar{A}$ 都是完备矢量场, 就是说, 它的每一不可延积分曲线的参数都可取遍全 $\mathbb{R}$.

证明　本书正文惯用 $\partial/\partial t$ 代表曲线 $\gamma(t)$ 的切矢, 由于本附录涉及多条曲线的切矢, 为避免混淆, 我们改用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ 代表 $\gamma(t)$ 的切矢. 设 $\mu(t)$ 是 $\bar{A}$ 的、满足 $\mu(0)=e$ 的积分曲线, 不失一般性, 设其定义域为开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$, 即 $\mu:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$. 在线上取点 $h\equiv\mu(\varepsilon/2)$, 令 $\nu(t)\equiv h\mu(t-\varepsilon/2)$, 则有曲线映射 $\nu:(-\varepsilon/2,3\varepsilon/2)\to G$, 且其切矢

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \nu(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t L_h\mu(t-\varepsilon/2)=L_{h*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \mu(t-\varepsilon/2), \tag{G-4-2}$$

---

① 在 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是多一映射的情况下[例如后面注3的独点线及小节G.5.2的SO(2)群], $\exists t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 使 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)\in\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$. 子群首先是子集, 所以 $\gamma(t_1)$ 和 $\gamma(t_2)$ 理应看作子群 $\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 的同一群元. 但若称 $\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 为单参子群, 则不同参数值 t_1 和 t_2 又应给出不同群元, 就是说, 一旦在"子群"前冠以"单参"就应有 $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$. 可见"单参子群"一词有不妥之处, 至少不应把子群 $\{\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 称为单参子群. 所以笔者私下更偏爱于用"同态线"一词代替"单参子群"[参见Bleecker(1981)]. Brocker and Dieck(1985)则称之为"单参群"(one-parameter group), 并强调这是"指同态映射而不只是它的像!"可谓用心良苦.

其中第二步用到“曲线像的切矢等于曲线切矢的像”. 令 $t'(t) \equiv t - \varepsilon/2$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \mu(t-\varepsilon/2) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \mu(t'(t)) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'(t)} \mu(t')\right]\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'(t)} \mu(t') = \bar{A}_{\mu(t-\varepsilon/2)}, \quad \text{(G-4-3)}$$

其中第二步用到式(2-2-8), 即 $\partial/\partial t = (\partial/\partial t')\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$, 最末一步是因为 $\mu(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线. 代入式(G-4-2)便得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \nu(t) = L_{h*}\bar{A}_{\mu(t-\varepsilon/2)} = \bar{A}_{h\mu(t-\varepsilon/2)} = \bar{A}_{\nu(t)}, \quad \text{(G-4-4)}$$

其中第二步用到左不变矢量场的定义式(G-2-1″). 式(G-4-4)表明 ν 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 而 $\nu(\varepsilon/2) = h\mu(0) = h = \mu(\varepsilon/2)$ 则说明 ν 与 μ 有交, 因此由积分曲线的(局域)唯一性可知在两积分曲线 ν 和 μ 的定义域的交集 $(-\varepsilon/2, \varepsilon)$ 上有 $\nu = \mu$. 可见 μ 的定义域已被延拓至 $(-\varepsilon, 3\varepsilon/2)$. 重复以上操作便得 $\bar{A}$ 的一条定义域为全 $\mathbb{R}$ 的积分曲线 $\gamma: \mathbb{R} \to G$. 作为证明的第二步, $\forall g \in G$, 令

$$\beta(t) \equiv g\gamma(t), \quad \text{(G-4-5)}$$

则仿照式(G-4-2)的推导有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \beta(t) = \bar{A}_{g\gamma(t)} = \bar{A}_{\beta(t)}, \quad \text{(G-4-6)}$$

表明 $\beta: \mathbb{R} \to G$ 是 $\bar{A}$ 过 g 的积分曲线[满足 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t|_{t=0} = \bar{A}_g$]. 可见 $\bar{A}$ 的任一不可延积分曲线的参数都可取遍全 $\mathbb{R}$. □

定理 G-4-2　设 $\gamma: \mathbb{R} \to G$ 是左不变矢量场 $\bar{A}$ 的、满足 $\gamma(0) = e$ 的积分曲线, 则 γ 是 G 的一个单参子群.

证明　欲证 γ 是单参子群只须证明它满足式(G-4-1). 定理 G-4-1 已证明 $\beta(t) \equiv g\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 的、满足 $\beta(0) = g$ 的积分曲线. 取 γ 线上一点 $\gamma(s)$ 作为 g, 便知

$$\beta(t) \equiv \gamma(s)\gamma(t) \quad \text{(G-4-7)}$$

是满足 $\beta(0) = \gamma(s)$ 的积分曲线. 另一方面, 由 $\gamma_1(t) \equiv \gamma(s+t)$ 定义的曲线 $\gamma_1: \mathbb{R} \to G$ 在 $\gamma_1(t)$ 点的切矢为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \gamma_1(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \gamma(s+t) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(s+t)}\right|_{s+t} \gamma(s+t)\right]\frac{\mathrm{d}(s+t)}{\mathrm{d}t} = \bar{A}_{\gamma(s+t)} = \bar{A}_{\gamma_1(t)}.$$

[倒数第二步是因为 $\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线.] 上式表明 γ_1 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 而且也满足 $\gamma_1(0) = \gamma(s)$. 由积分曲线的唯一性可知 $\gamma_1(t) = \beta(t)$, 对比式(G-4-7)便得

$\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$. □

定理 G-4-3 设单参子群$\gamma:\mathbb{R}\to G$在恒等元e的切矢为A，则$\gamma(t)$是A对应的左不变矢量场$\bar{A}$的积分曲线.

证明 只须证明对γ的任一点$\gamma(s)$有$\bar{A}_{\gamma(s)}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=s}\gamma(t)$，而这由下式显见：

$$\bar{A}_{\gamma(s)}=L_{\gamma(s)*}A=L_{\gamma(s)*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}L_{\gamma(s)}\gamma(t)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(s)\gamma(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(s+t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=s}\gamma(t')=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s}\gamma(t).$$ □

由定理G-4-2和G-4-3可知左不变矢量场与单参子群之间有一一对应关系. 注意到V_e与左不变矢量场的集合$\mathscr{L}$一一对应，便知李群G的李代数$\mathscr{G}(=V_e)$的每一元素A生成G的一个单参子群$\gamma(t)$，所以$\mathscr{G}$的每一元素称为一个(无限小)**生成元**(generator). 物理文献常又只把$\mathscr{G}$的一个基底的元素称为生成元.

注 3 与V_e的零元($A=0$)对应的单参子群就是只含e的子群，即满足$\gamma[\mathbb{R}]=e$的独点线$\gamma:\mathbb{R}\to G$.

定义 2 李群G上的**指数映射**(exponential map) $\exp: V_e\to G$定义为

$$\exp(A):=\gamma(1),\quad \forall A\in\mathscr{G}, \tag{G-4-8}$$

其中$\gamma:\mathbb{R}\to G$是与A对应的那个单参子群.

注 4 读过选读3-3-1的读者可把该处的指数映射与现在的指数映射作一比较. 两处都以流形为背景，但附加结构不同. 选读3-3-1的流形M有度规结构，因而有测地线概念，利用"一点及其一个矢量决定唯一测地线"的定理就可定义指数映射；现在的流形G有群结构，因而有单参子群概念，利用"e点的一个矢量A决定唯一单参子群"的定理就可用式(G-4-8)定义指数映射.

定理 G-4-4
$$\exp(sA)=\gamma(s),\quad \forall s\in\mathbb{R}, A\in V_e, \tag{G-4-9}$$
其中$\gamma(s)$是由A决定的单参子群.

证明 令$A'\equiv sA\in V_e$. 以$\bar{A},\bar{A}'$分别代表A和A'对应的左不变矢量场. $\eta: V_e\to\mathscr{L}$是同构映射导致$\bar{A}'=s\bar{A}$. 以$\gamma(t)$代表$\bar{A}$对应的单参子群，用$\gamma'(t)\equiv\gamma(st)$定义曲线$\gamma':\mathbb{R}\to G$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t}\gamma'(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t}\gamma(st)=\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(st)}\right|_{st}\gamma(st)\right]\frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}t}=s\bar{A}_{\gamma(st)}=\bar{A}'_{\gamma'(t)},$$

说明$\gamma'(t)$是$\bar{A}'$的积分曲线. 注意到$\gamma'(0)=\gamma(0)=e$，可知$\gamma'(t)$是$\bar{A}'$对应的单参子群. 于是$\exp(sA)=\exp(A')=\gamma'(1)=\gamma(s)$. □

注 5 设$\gamma(t)$是由$A\in V_e$决定的单参子群, 则定理 G-4-4 表明

$$\gamma(t)=\exp(tA). \tag{G-4-10}$$

今后也常用$\exp(tA)$代表由A决定的单参子群.

定理 G-4-5 设$\phi: \mathbb{R}\times G\to G$是由$A\in V_e$对应的左不变矢量场$\bar{A}$产生的单参微分同胚群, 则

$$\phi_t(g)=g\exp(tA), \quad \forall g\in G,\ t\in\mathbb{R}. \tag{G-4-11}$$

证明 设$\gamma(t)$是由A决定的单参子群, 则定理 G-4-4 表明$\gamma(t)=\exp(tA)$ [见式(G-4-10)]. 由式(G-4-5)和(G-4-6)又知$\beta(t)\equiv g\gamma(t)$是$\bar{A}$过$g$点的积分曲线, 且$\beta(0)\equiv g$. 由单参微分同胚群的构造(见小节 2.2.2 末段)便知

$$\phi_t(g)=\beta(t)=g\gamma(t)=g\exp(tA). \qquad \square$$

[选读 G-4-1]

由群乘映射和求逆映射的光滑性出发, 注意到微分方程的解对其初值的光滑依赖性, 可知$\exp: V_e\to G$为C^∞映射. 再用反函数定理就可证明如下命题: V_e中存在含0元的开子集$\hat{V}_e$, G中存在含e点的开子集N, 使$\exp: \hat{V}_e\to N$为微分同胚(试与定理3-3-7对比). 利用指数映射的这一性质可给G定义局部坐标系, 其坐标称为群G的**正则坐标**(canonical coordinates). **[选读 G-4-1 完]**

§G.5 常用李群及其李代数

G.5.1 GL(m)群 (一般线性群, general linear group)

设V是$m\ (<\infty)$维实矢量空间, 以$\mathrm{GL}(m)$代表由V到V的全体可逆线性映射的集合, 以映射的复合为乘法, 则不难证明$\mathrm{GL}(m)$是群,[①] 称为 ***m* 阶(实)一般线性群**(general linear group). 因为由V到V的线性映射就是V上的(1,1)型张量(见§2.4 定义2前一段), 所以$\mathrm{GL}(m)$的任一群元$T\in\mathscr{T}_V(1,1)$ [$\mathscr{T}_V(1,1)$代表V上(1,1)型张量的集合]. 取定V的任一基底(及其对偶基底)后, T就有m^2个分量, 自然对应于一个$m\times m$实矩阵. 映射T的可逆性保证其矩阵(仍记作T)是可逆矩阵, 即$\det T\neq 0$. 不难看出全体$m\times m$可逆矩阵在矩阵乘法下构成群(以单位矩阵I为恒等元), 而且与$\mathrm{GL}(m)$同构, 于是

$$\mathrm{GL}(m)=\{m\times m \text{ 实矩阵 } T \mid \det T\neq 0\}. \tag{G-5-1}$$

① 对映射提出可逆要求旨在保证每一群元确有逆元.

因此也常把GL(m)看作实矩阵群(但上式等号代表的同构关系依赖于 V 的基底的选取). 另一方面, 集合 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的每点因为由 m^2 个实数构成而可排成一个 $m\times m$ 实矩阵, 故 GL(m) 可看作 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的子集. 对矩阵求行列式的操作可看作连续映射 $\det:\mathbb{R}^{m^2}\to\mathbb{R}$, 满足

$$\mathrm{GL}(m)=\det^{-1}(-\infty,0)\cup\det^{-1}(0,\infty)\subset\mathbb{R}^{m^2}.$$

$(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 显然是 $\mathbb{R}$ 的开子集,故映射 det 的连续性保证 $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集, 这又导致① GL(m) 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集; ② $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 是 GL(m) 的开子集(用诱导拓扑衡量). 而 $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 又因互为补集而都是 GL(m) 的闭子集, 可见 GL(m) 含有除自身和 $\varnothing$ 外的既开又闭的子集, 因而是非连通流形. 还可证明[见 Marsden and Ratiu(1994)] GL(m) 是有两个连通分支(connected component)的非连通流形.最简单的例子是

$$\mathrm{GL}(1)=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

当说到GL(m)的群元是从 V 到 V 的可逆线性映射时, 我们是在用纯几何语言. 当说到GL(m)的群元是 $m\times m$ 可逆矩阵时, 我们是在用坐标语言——给 V 选定基底(及其对偶基底)后, 从 V 到 V 的任一可逆线性映射 T 就有了 m^2 个分量, 选作坐标, 便得流形 GL(m) 上的一个坐标系. 以 $\mathscr{GL}(m)$ 代表 GL(m) 的李代数, 设 $A\in\mathscr{GL}(m)$, 则它是恒等元 $I\in\mathrm{GL}(m)$ 的矢量, 在上述坐标系的基底中自然有 m^2 个分量, 因而也对应于一个 $m\times m$ 实矩阵. 反之, 任一 $m\times m$ 实矩阵的 m^2 个矩阵元配以 I 点的坐标基矢便给出 I 点的一个矢量. 可见, 虽然只有可逆实 $m\times m$ 矩阵才是 GL(m) 的元素, 任意 $m\times m$ 实矩阵都是 $\mathscr{GL}(m)$ 的元素. 事实上, 全体 $m\times m$ 实矩阵构成的矢量空间与 I 点的切空间 V_I 有同构关系, 于是有如下定理:

定理 G-5-1 $\mathscr{GL}(m)=\{m\times m$ 实矩阵$\}$ (等号代表两个矢量空间同构, 同构关系依赖于 V 的基底的选取).

[选读 G-5-1]

对定理 G-5-1 的结论也可这样理解: 设 A 是任一 $m\times m$ 实矩阵, 对 $t\in\mathbb{R}$, 考虑矩阵 $\psi(t)\equiv I+tA$. 矩阵 I 有逆保证矩阵 $\psi(t)$ 在 t 足够小时有逆, 因此 $\psi(t)\in\mathrm{GL}(m)$. 当 t 活动(且足够小)时, $\psi(t)$ 是 GL(m) 中过 I 点的曲线, 它在 I 点的切矢为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\psi(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I+tA)=A, \qquad \text{(G-5-2)}$$

所以任一 $m\times m$ 实矩阵 A 都对应于 $\mathscr{GL}(m)$ 的一个元素, 再由

$$\dim\{m\times m\text{实矩阵}\}=\dim\mathrm{GL}(m)=\dim\mathscr{GL}(m)$$

便知$\mathscr{GL}(m)$与集合$\{m\times m$实矩阵$\}$有一一对应关系.

注 1 式(G-5-2)中的d/dt本来代表曲线的切矢,但第二个等号却把它看成普通求导记号. 现在说明这种"偷换概念"的合法性(后面出现类似情况不再一一说明). GL(m)是$\mathbb{R}^{m^2}$的开子集,故有自然坐标系. 以$\psi^i(t)\ (i=1,\cdots,m^2)$代表曲线$\psi(t)$在此系的参数式,则$\psi^i(t)=I^i+tA^i$,其中$A^i$是常数矩阵$A$的第$i$个矩阵元($I^i$的含义类似). 于是

$$\psi(t)\text{在}\psi(0)\text{点的切矢的}i\text{分量}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\psi^i(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I^i+tA^i)=A^i,$$

(此处的d/dt是真求导.) 这就是式(G-5-2)的分量表达式. **[选读 G-5-1 完]**

对任一$m\times m$矩阵A引入符号

$$\mathrm{Exp}(A)\equiv I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots,\tag{G-5-3}$$

其中$A^2\equiv AA$(矩阵相乘), $A^3\equiv AAA$. 可以证明[见 Spivak(1979)Vol.I]:①上式右边收敛,所以左边有意义,是一个$m\times m$矩阵;②若矩阵A, B对易,即$AB=BA$,则

$$\mathrm{Exp}(A+B)=(\mathrm{Exp}A)(\mathrm{Exp}B).\tag{G-5-4}$$

下面的定理表明,对$\mathscr{GL}(m)$的元素A(看作矩阵), Exp就是指数映射的exp.

定理 G-5-2 $\mathrm{Exp}(A)=\exp(A),\quad \forall A\in\mathscr{GL}(m)$.

证明 $\forall s,t\in\mathbb{R}$,由式(G-5-4)得

$$\mathrm{Exp}[(s+t)A]=\mathrm{Exp}(sA)\mathrm{Exp}(tA),\qquad \forall A\in\mathscr{GL}(m).\tag{G-5-5}$$

取$s=1,\ t=-1$,则上式给出$\mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(-A)=\mathrm{Exp}(0)=I$. 上式表明矩阵$\mathrm{Exp}(A)$有逆[就是$\mathrm{Exp}(-A)$],故$\mathrm{Exp}(A)\in\mathrm{GL}(m)$. 式中的$A$可为$\mathscr{GL}(m)$的任一元素,所以

$$\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{GL}(m),\qquad \forall A\in\mathscr{GL}(m), t\in\mathbb{R}.$$

令$\gamma(t)\equiv\mathrm{Exp}(tA)$,则式(G-5-5)表明$\gamma(s+t)=\gamma(s)\,\gamma(t)$,且式(G-5-3)给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)=A,\tag{G-5-6}$$

可见$\gamma(t)\equiv\mathrm{Exp}(tA)$是由$A$唯一决定的单参子群$\exp(tA)$,从而$\mathrm{Exp}(A)=\exp(A)$. □

定理 G-5-1 表明$\mathscr{GL}(m)$和$\{m\times m$实矩阵$\}$作为矢量空间是同构的. 自然要问它们作为李代数是否也同构. 答案是肯定的. 以V_e作为$\mathscr{GL}(m)$,其任意二元素$A, B\in V_e$的李括号定义为$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e$,见式(G-3-4). 另一方面,$A, B\in V_e$所对应的$m\times m$矩阵(仍记作$A,B$)的李括号定义为矩阵对易子$AB-BA$,见式(G-3-3). 因

此，欲证$\mathscr{GL}(m)$和$\{m\times m$ 实矩阵$\}$是同构李代数只须证明$[\bar{A},\bar{B}]_e = AB-BA$. 而这正是如下定理的结论.

定理 G-5-3 设G是$\mathrm{GL}(m)$的李子群，则其李代数元$A,B\in\mathscr{G}\subset\mathscr{GL}(m)$的李括号$[A,B]$对应于$A,B$所对应的矩阵(仍记作$A,B$)的对易子$AB-BA$，即

$$[A,B]=AB-BA. \tag{G-5-7}$$

证明[选读] 注意到定理 G-3-3，只须对$G=\mathrm{GL}(m)$的情况给出证明.

设e(即I)为G的恒等元，$\bar{A},\bar{B}$代表$A,B\in V_e$所对应的左不变矢量场，$\phi:\mathbb{R}\times G\to G$是由$\bar{A}$产生的单参微分同胚群，则

$$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e=(\mathscr{L}_{\bar{A}}\bar{B})_e=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\phi_{-t*}\bar{B})_e-\bar{B}_e\right].$$

注意到$e=\phi_{-t}(\phi_t(e))$，可知$(\phi_{-t*}\bar{B})_e=\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}$. 而$\bar{B}_e$又可表为$\bar{B}_e=\phi_{-0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}$，所以

$$[\bar{A},\bar{B}]_e=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}-\phi_{-0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}\right]\equiv\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}). \tag{G-5-8}$$

由式(G-4-5)、(G-4-6)和(G-4-10)可得$\bar{B}_{\phi_t(e)}=\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}[\phi_t(e)\exp(sB)]$，故

$$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left\{\phi_{-t*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[\phi_t(e)\exp(sB)]\right\}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\phi_{-t}[\phi_t(e)\exp(sB)]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\phi_{-t}[e\exp(tA)\exp(sB)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)]$$

$$=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}[\mathrm{Exp}(tA)\mathrm{Exp}(sB)\mathrm{Exp}(-tA)]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\mathrm{Exp}(sB)\right]\mathrm{Exp}(-tA)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\mathrm{Exp}(tA)\,B\,\mathrm{Exp}(-tA)]=\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)\right]BI+IB\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(-tA)\right]$$

$$=ABI+IB(-A)=AB-BA\ , \tag{G-5-9}$$

其中第三步用到“曲线切矢的像等于曲线像的切矢”，第四、五步都用到式(G-4-11). 第二个等号右边的$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$就是式(G-5-8)右边的$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$，代表对$e$点的$t$依赖矢量

$\phi_{-t*}\overline{B}_{\phi_t(e)}$ 求导，直至第六个等号前都是这一含义. 式中的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s\,|_{s=0}$ 在第六个等号前全部代表对曲线求切矢. 从第六个等号右边开始的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$ 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s\,|_{s=0}$ 则可理解为对 s,t 依赖的矩阵 $\mathrm{Exp}(tA)\mathrm{Exp}(sB)\mathrm{Exp}(-tA)$ 求偏导数. □

G.5.2 O(m)群 (正交群, orthogonal group)

如前所说, GL(m) 群是 m 维矢量空间 V 上所有可逆 (1,1) 型张量 T 的集合, 除可逆性外没有其他要求, 所以称为一般线性群. 对 T 再提出某些适当要求则可得到 GL(m) 群的某些子群. O(m) 群就是重要一例, 其要求是 T 保度规. 以下把 O(m) 群的元素专记作 Z. 设 (V,g_{ab}) 是带正定度规的 m 维矢量空间. 线性映射 $Z\colon V\to V$ 称为**保度规的**, 若

$$g_{ab}(Z^a{}_c v^c)(Z^b{}_d u^d)=g_{cd}v^c u^d,\quad \forall v^c,u^d\in V. \tag{G-5-10}$$

取 $u=v$, 则上式给出

$$g_{ab}(Z^a{}_c v^c)(Z^b{}_d v^d)=g_{cd}v^c v^d,\quad \forall v^c\in V. \tag{G-5-10'}$$

可见保度规的 Z 对矢量的作用必保长度. 反之, 利用 $g_{ab}=g_{(ab)}$ 可证(习题, 有提示)任何满足式(G-5-10′)的 Z 必满足式(G-5-10). 所以保长性等价于保度性. 式(G-5-10)又等价于

$$Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab}=g_{cd}. \tag{G-5-10''}$$

令
$$\mathrm{O}(m)\equiv\{Z^a{}_b\in\mathscr{T}_V(1,1)\,|\,Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab}=g_{cd}\}, \tag{G-5-11}$$

把 $Z^a{}_b$ 看作从 V 到 V 的映射, 以复合映射为群乘法, 则 O(m) 是群, 而且是 GL(m) 的李子群. 用 V 的任一正交归一基底可把式(G-5-10″)改写为分量形式:

$$\delta_{\sigma\rho}=Z^\mu{}_\sigma Z^\nu{}_\rho\delta_{\mu\nu}=(Z^{\mathrm{T}})_\sigma{}^\mu\delta_{\mu\nu}Z^\nu{}_\rho,$$

其中 Z^{T} 代表矩阵 Z 的转置矩阵. 把上式写成矩阵等式即为

$$I=Z^{\mathrm{T}}IZ=Z^{\mathrm{T}}Z, \tag{G-5-12}$$

表明 $Z^{\mathrm{T}}=Z^{-1}$, 即 Z 是正交矩阵. 可见 O(m) 同构于 $m\times m$ 正交矩阵群(由全体 $m\times m$ 正交矩阵以矩阵乘法为群乘法构成的群). 因为对任一矩阵 T 有 $\det T^{\mathrm{T}}=\det T$, 由式(G-5-12)得

$$1=(\det Z^{\mathrm{T}})(\det Z)=(\det Z)^2,$$

故
$$\det Z=\pm 1. \tag{G-5-13}$$

上式表明群元的行列式不是 1 就是 −1, 这就注定了 O(m) 群的流形是非连通的.

以上抽象定义的 O(m) 群可用具体对象来体现. 先考虑 O(1) 群. 1 维欧氏空间 $(\mathbb{R},\delta_{ab})$ 可看作带正定度规的 1 维矢量空间, 因而可充当用以定义 O(1) 群的那个 (V,g_{ab}). O(1) 群的每个群元 Z 就是把空间的任一点(即起自原点的任一矢量) $\vec{v}$ 变为长度相等的矢量 $\vec{v}'\equiv Z(\vec{v})$ 的线性映射. 由于长度相等, 只有 $\vec{v}'=\vec{v}$ 和 $\vec{v}'=-\vec{v}$ 两种可能. 可见 O(1) 只有两个群元, 其中一个是恒等元, 另一个称为**反射**(reflection), 记作 r, 于是 $O(1)=\{e,r\}$. 再讨论 O(2) 群. 2 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$ 可看作带正定度规的 2 维矢量空间. O(2) 的每个群元 Z 就是把空间中起自原点的任一矢量 $\vec{v}$ 变为长度相等的矢量 $\vec{v}'\equiv Z(\vec{v})$ 的线性映射. 首先想到的自然是令 $\vec{v}$ 转某一角度 α 的转动, 这种映射记作 $Z(\alpha)$, 可用矩阵表为

$$Z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}. \tag{G-5-14}$$

这是行列式为 +1 的正交矩阵. 上式的特例是 $Z(0)=\mathrm{diag}(1,1)$, 即恒等元 I. 然而, 不难验证下面的 $Z'(\alpha)$ 也保长度:

$$Z'(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}, \tag{G-5-15}$$

这是行列式为 −1 的正交矩阵, 其特例是 $Z'(0)=\mathrm{diag}(1,-1)$, 它作用于 $\vec{v}$ 的结果 $\vec{v}'$ 与 $\vec{v}$ 关于 x 轴对称, 故 $Z'(0)$ 代表以 x 轴为对称轴的反射, 记作 r_y (只改变 y 分量), 即 $\vec{v}'=r_y(\vec{v})$. 不要误以为 r_y 也可看作转动, 因为它作用于另一矢量 $\vec{u}$ 得 $r_y(\vec{u})$(图 G-1), 其与 $\vec{u}$ 的夹角不同于 $r_y(\vec{v})$ 与 $\vec{v}$ 的夹角. 同理, $Z'(\pi)=\mathrm{diag}(-1,1)$ 代表以 y 轴为对称轴的反射 r_x. 此外, $Z(\pi)=\mathrm{diag}(-1,-1)$ 则代表以原点为对称点的**反演**(inversion), 记作 i_{xy}, 易证 $i_{xy}=r_xr_y$.

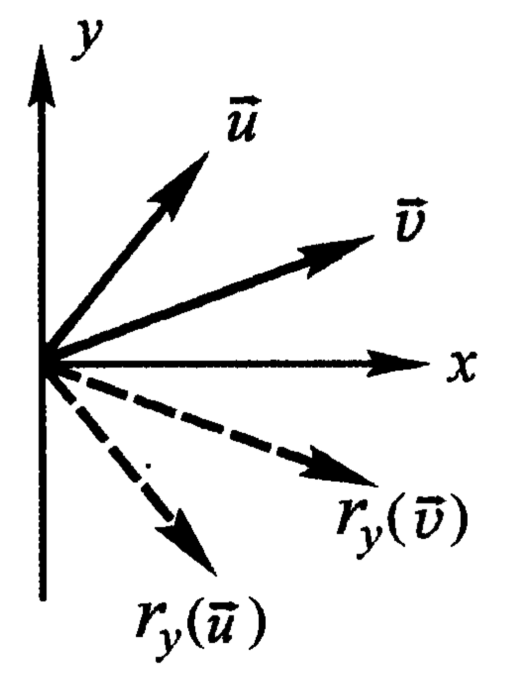


图 G-1 关于 x 轴的反射

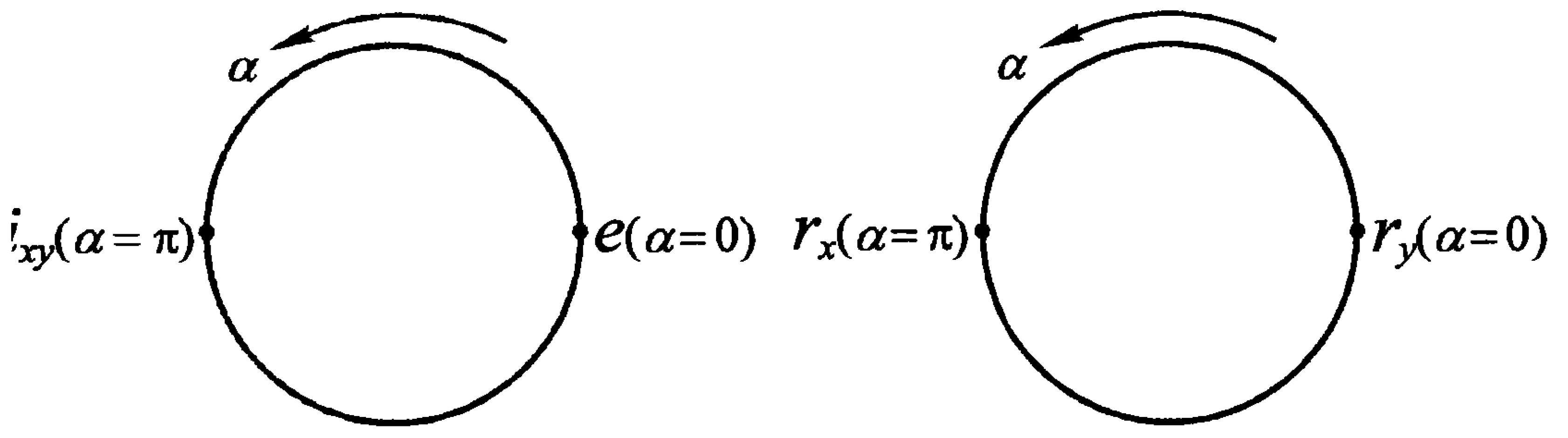


图 G-2 李群 O(2) 的流形, 左边圆周代表李子群 SO(2)

Z 的 4 个矩阵元由于条件 $Z^{\mathrm{T}}Z=I$ 而受到 3 个方程的限制，只有 1 个独立，所以 O(2) 是 1 维李群. 由 $Z^{\mathrm{T}}Z=I$ 还可证明 O(2) 的群元被式(G-5-14)和(G-5-15)所穷尽，其中式(G-5-14)代表的子集构成 O(2) 的李子群，称为 **2 维空间的转动群**，记作 SO(2)，字母 S 代表“特殊”(special)，是指每个群元 $Z\in \mathrm{SO}(2)$ 满足 $\det Z=+1$. 这也适用于其他常见李群，例如 GL(m) 中满足 $\det T=+1$ 的子集也构成子群，称为 SL(m) 群(**特殊线性群**). O(2) 群中由式(G-5-15)表示的子集不含恒等元 e，因此不是子群. 两个子集的 α 都可解释为转角[$Z'(\alpha)$ 中的 α 代表(对 x 轴)反射后再转的角度]，取值范围是 $0\leqslant\alpha<2\pi$. 所以 O(2) 群的流形可看作两个互不连通的 S^1 (圆周)之并(图 G-2)，是一个非连通流形，每个圆周是一个连通分支.

推而广之，因为 O(m) 的群元 Z 满足 $\det Z=\pm1$，其流形总是由两个连通分支组成的非连通流形，其中含 e 的分支记作 SO(m)，即

$$\mathrm{SO}(m)\equiv\{Z\in \mathrm{O}(m)\,|\,\det Z=+1\}. \tag{G-5-16}$$

这是 O(m) 的李子群，称为**特殊正交群**(special orthogonal group)，最常用的是 **3 维空间的转动群** SO(3)，它的每一群元可看作把 3 维欧氏空间中起自原点的任一矢量 $\vec{v}$ 绕过原点的某轴转某角的映射(而且除恒等元外的每个群元的转轴是唯一的). [这一结论称为**欧拉定理**，证明见 Marsden et al.(1994).] 这使我们可用起自原点的一个箭头代表 SO(3) 的一个群元：箭头所在直线代表转轴，箭头长度(规定从 0 到 π)代表转角，方向相反的箭头代表沿相反方向的转动. 由于沿某方向转 π 角相当于沿反方向转 π 角，同一直线段的两端代表同一群元，应当认同. 于是，李群 SO(3) 的流形是 3 维实心球体，球面上位于每一直径两端的一对点要认同(简称**对径认同**). 这一流形记作 $\mathbb{RP}^3$. [$\mathbb{RP}^3$ 本有其他定义方式，但可以证明 SO(3) 与 $\mathbb{RP}^3$ 微分同胚.]

下面讨论李群 O(m) 和 SO(m) 的李代数 $\mathscr{O}(m)$ 和 $\mathscr{SO}(m)$. 这两个李代数必定一样，因为设 $A\in\mathscr{O}(m)$，则 A 决定 O(m) 中的一个单参子群 $\gamma(t)$，注意到① $\det I=1$；② O(m) 中任一群元的行列式只能为 ±1，则由单参子群的连续性可知 $\gamma(t)$ 上任一点 Z 都有 $\det Z=1$，可见对任一 t 有 $\gamma(t)\in \mathrm{SO}(m)$，从而 A，作为 $\gamma(t)$ 在 I 点的切矢，必属于 $\mathscr{SO}(m)$.

定理 G-5-4　$\mathscr{O}(m)=\{\,m\times m$ 实矩阵 $A\,|\,A^{\mathrm{T}}=-A$ (即 A 为反称阵)$\}$.　(G-5-17)

证明

(A) $\forall A\in\mathscr{O}(m)$，设 $Z(t)$ 是李群 O(m) 中的曲线，且 $Z(0)=I$，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}\,Z(t)=A$，则 $Z(t)$ (对每一 t 值)是一个满足

$$Z^{\mathrm{T}}(t)Z(t)=I \tag{G-5-18}$$

的矩阵. 对上式求导并在 $t=0$ 取值得

$$0=\left[Z^{\mathrm{T}}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)\right]_{t=0}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z^{\mathrm{T}}(t)\right)Z(t)\right]_{t=0}=Z^{\mathrm{T}}(0)A+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z^{\mathrm{T}}(t)\right]_{t=0}Z(0).$$

(G-5-19)

$Z(0)=I$ 等价于 $Z^{\mathrm{T}}(0)=I$，$A=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,Z(t)$ 等价于 $A^{\mathrm{T}}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,Z^{\mathrm{T}}(t)$ ，因而式(G-5-19)给出 $0=A+A^{\mathrm{T}}$,可见 A 为反称矩阵.

(B) 设 A 为任一 $m\times m$ 反称实矩阵, 注意到 $(A^2)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^2$, $(A^3)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^3,\cdots$, 由式(G-5-3)得 $(\mathrm{Exp}A)^{\mathrm{T}}=\mathrm{Exp}(A^{\mathrm{T}})$. ① 所以

$$(\mathrm{Exp}A)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Exp}A)=(\mathrm{Exp}A^{\mathrm{T}})(\mathrm{Exp}A)=\mathrm{Exp}(-A)(\mathrm{Exp}A)=I\,.$$

[其中最末一步用到式(G-5-4).] 上式表明 $\mathrm{Exp}A$ 是正交矩阵, 因而 $\mathrm{Exp}A\in\mathrm{O}(m)$. 由此又知 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{O}(m)$ (对每一 t 值). 而式(G-5-3)又导致 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\mathrm{Exp}(tA)=A$, 可见 A 是李群 $\mathrm{O}(m)$ 中过 I 的曲线 $\mathrm{Exp}(tA)$ 在 I 点的切矢, 所以 $A\in\mathscr{O}(m)$. □

利用定理 G-5-4 可方便地决定李群 $\mathrm{O}(m)$ 及 $\mathrm{SO}(m)$ 的维数. 因为 $m\times m$ 反称矩阵的 m 个对角元全为零, 其余 m^2-m 个元素中只有半数独立, 所以决定一个 $m\times m$ 反称实矩阵需要 $(m^2-m)/2=m(m-1)/2$ 个实数. 于是定理 G-5-4 导致

$$\dim\mathrm{O}(m)=\dim\mathscr{O}(m)=\frac{1}{2}m(m-1)\,. \qquad \text{(G-5-20)}$$

具体说,

$$\dim\mathrm{O}(1)=0(\text{零维李群}),\ \dim\mathrm{O}(2)=1,\ \dim\mathrm{O}(3)=3,\ \dim\mathrm{O}(4)=6,\cdots. \qquad \text{(G-5-21)}$$

G.5.3 O(1, 3)群 (洛伦兹群)

定义 $\mathrm{O}(m)$ 群时曾约定 (V,g_{ab}) 中的 g_{ab} 为正定度规, 现在放宽为任意度规. 设 g_{ab} 在正交归一基底下的矩阵有 m' 个对角元为 -1 , m'' 个对角元为 $+1$, 则 V 上所有保度规的线性映射的集合在以复合映射为群乘法下构成群, 记作 $\mathrm{O}(m',m'')$, 即

$$\mathrm{O}(m',m''):=\{A^a{}_b\in\mathscr{T}_V(1,1)\,|\,A^a{}_cA^b{}_dg_{ab}=g_{cd}\}\,. \qquad \text{(G-5-22)}$$

同 $\mathrm{O}(m)$ 类似, $\mathrm{O}(m',m'')$ 也是 $\mathrm{GL}(m)$(其中 $m=m'+m''$) 的李子群, $\mathrm{O}(m)$ 可看作 $\mathrm{O}(m',m'')$ 在 $m'=0,m''=m$ 时的特例.

抽象定义的 $\mathrm{O}(m',m'')$ 群也可与 $\mathrm{O}(m)$ 类似地用具体对象体现. 我们只讨论 $m'=1$ 的情况, 并且最关心 $\mathrm{O}(1,3)$ 群(4 维闵氏时空的洛伦兹群), 但先从最简单的

① 直观想来这很显然, 但因涉及无限级数, 求转置与求极限操作的可交换问题并不简单. 以下遇到类似问题时不再指出.

O(1,1) 群讲起. 2 维闵氏时空 $(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 可看作用来定义 O(1,1) 群的那个带洛伦兹度规的 (V,g_{ab}). 用 $(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 的任一正交归一基可把保度规条件 $\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d g_{ab}=g_{cd}$ 改写为分量形式:

$$\eta_{\sigma\rho}=\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho\eta_{\mu\nu}=(\Lambda^{\mathrm{T}})_\sigma{}^\mu\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho\,, \tag{G-5-23}$$

写成矩阵等式即为

$$\eta=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda\,,\quad 其中\ \eta\equiv\mathrm{diag}(-1,1)\,. \tag{G-5-24}$$

上式表明 $\det\Lambda=\pm1$, 因此, 与 O(m) 群类似, O(1,1) 群也是非连通的. 注意到洛伦兹变换 $t'=\gamma(t-vx)$, $x'=\gamma(x-vt)$ 保闵氏线元, 自然猜想它是 O(1,1) 的群元. 把变换的参数 v 改写为 $\mathrm{th}\lambda$, 其中 $\lambda\in(-\infty,\infty)$, 则 $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}=\mathrm{ch}\lambda$, 故洛伦兹变换可改写为

$$t'=t\,\mathrm{ch}\lambda-x\,\mathrm{sh}\lambda,\qquad x'=-t\,\mathrm{sh}\lambda+x\,\mathrm{ch}\lambda\,.$$

不难验证这一变换的矩阵

$$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\lambda & -\mathrm{sh}\lambda\\ -\mathrm{sh}\lambda & \mathrm{ch}\lambda\end{bmatrix} \tag{G-5-25}$$

满足式(G-5-24), 可见 $\forall\lambda\in(-\infty,\infty)$, $\Lambda(\lambda)$ 是 O(1,1) 的群元. 对上式的 Λ 有 $\det\Lambda=+1$, 然而式(G-5-24)表明 $\det\Lambda=\pm1$, 看来还应有其他连通分支. 其实, O(1,1) 的非连通性除了来自 Λ 所受的限制 $\det\Lambda=\pm1$ 之外还来自 $\Lambda^0{}_0$ 所受到的限制. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 V 的正交归一基底, 用 $\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d g_{ab}=g_{cd}$ 作用于 $(e_0)^c(e_0)^d$ 得 $-(\Lambda^0{}_0)^2+(\Lambda^1{}_0)^2=-1$, 所以 $(\Lambda^0{}_0)^2\geqslant1$. $\det\Lambda$ 与 $\Lambda^0{}_0$ 的允许值的配合使李群 O(1,1) 由如下 4 个互不连通的连通分支组成:

(I)子集 $\mathrm{O}_+^\uparrow(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\lambda & -\mathrm{sh}\lambda\\ -\mathrm{sh}\lambda & \mathrm{ch}\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=+1,\ \Lambda^0{}_0\geqslant+1$;

(II)子集 $\mathrm{O}_-^\uparrow(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\lambda & -\mathrm{sh}\lambda\\ \mathrm{sh}\lambda & -\mathrm{ch}\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=-1,\ \Lambda^0{}_0\geqslant+1$;

(III)子集 $\mathrm{O}_-^\downarrow(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\mathrm{ch}\lambda & \mathrm{sh}\lambda\\ -\mathrm{sh}\lambda & \mathrm{ch}\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=-1,\ \Lambda^0{}_0\leqslant-1$;

(IV)子集 $\mathrm{O}_+^\downarrow(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\mathrm{ch}\lambda & \mathrm{sh}\lambda\\ \mathrm{sh}\lambda & -\mathrm{ch}\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=+1,\ \Lambda^0{}_0\leqslant-1$.

$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 可看作带洛伦兹度规的 2 维矢量空间, $\Lambda^a{}_b\in\mathrm{O}(1,1)$ 就是把空间中起自原点的任一矢量 v^a 变为 $\Lambda^a{}_b v^b$ 的保度规线性映射. 略去抽象指标, 用正交归一基底把 v 表为列矢量 $v=\begin{bmatrix}v^0\\ v^1\end{bmatrix}$, 我们来看 4 个连通分支中 $\lambda=0$ 的元素 $\Lambda(0)$ 对它的

作用. 对 $O_+^\uparrow(1,1)$ 而言, $\Lambda(0)$ 就是恒等元, 它把 v 映为 v. 对 $O_-^\uparrow(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(1,-1)$, 作用于 v 所得矩阵为 $v'=\begin{bmatrix} v^0 \\ -v^1 \end{bmatrix}$, 如图 G-3(a), 称为**空间反射**, 记作 r_x. 对 $O_-^\downarrow(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(-1,1)$, 作用于 v 所得矩阵为 $v'=\begin{bmatrix} -v^0 \\ v^1 \end{bmatrix}$, 如图 G-3(b), 称为**时间反射**, 记作 r_t. 对 $O_+^\downarrow(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(-1,-1)$, 作用于 v 所得矩阵为 $v'=\begin{bmatrix} -v^0 \\ -v^1 \end{bmatrix}$, 如图 G-3(c), 称为**时空反演**, 记作 i_{tx}.

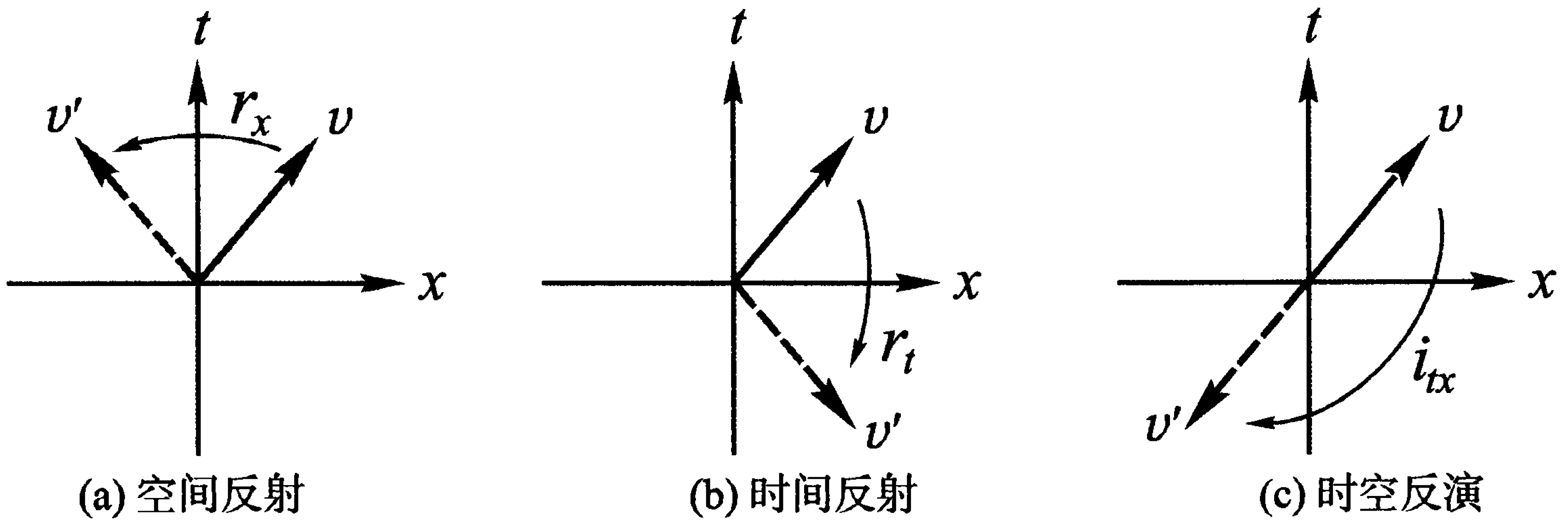


图 G-3 2 维闵氏时空的空间反射、时间反射和时空反演

因为每个连通分支的元素由一个参数 λ 决定, 而且 $\lambda\in(-\infty,\infty)$, 所以每一连通分支都可看作流形 $\mathbb{R}$, 整个李群 O(1,1) 是 1 维非连通流形(图 G-4). 4 个连通分支中只有 $O_+^\uparrow(1,1)$ 是 O(1,1) 的子群(只有它包含恒等元), 因而是李子群. (因为有这样的一般结论: 李群的含恒等元的连通分支是它的李子群.) 图 G-4 与 G-2 有一重要区别: 图 G-2 的流形紧致而图 G-4 非紧致. 我们称 O(2) 为紧致李群而 O(1,1) 为非紧致李群.

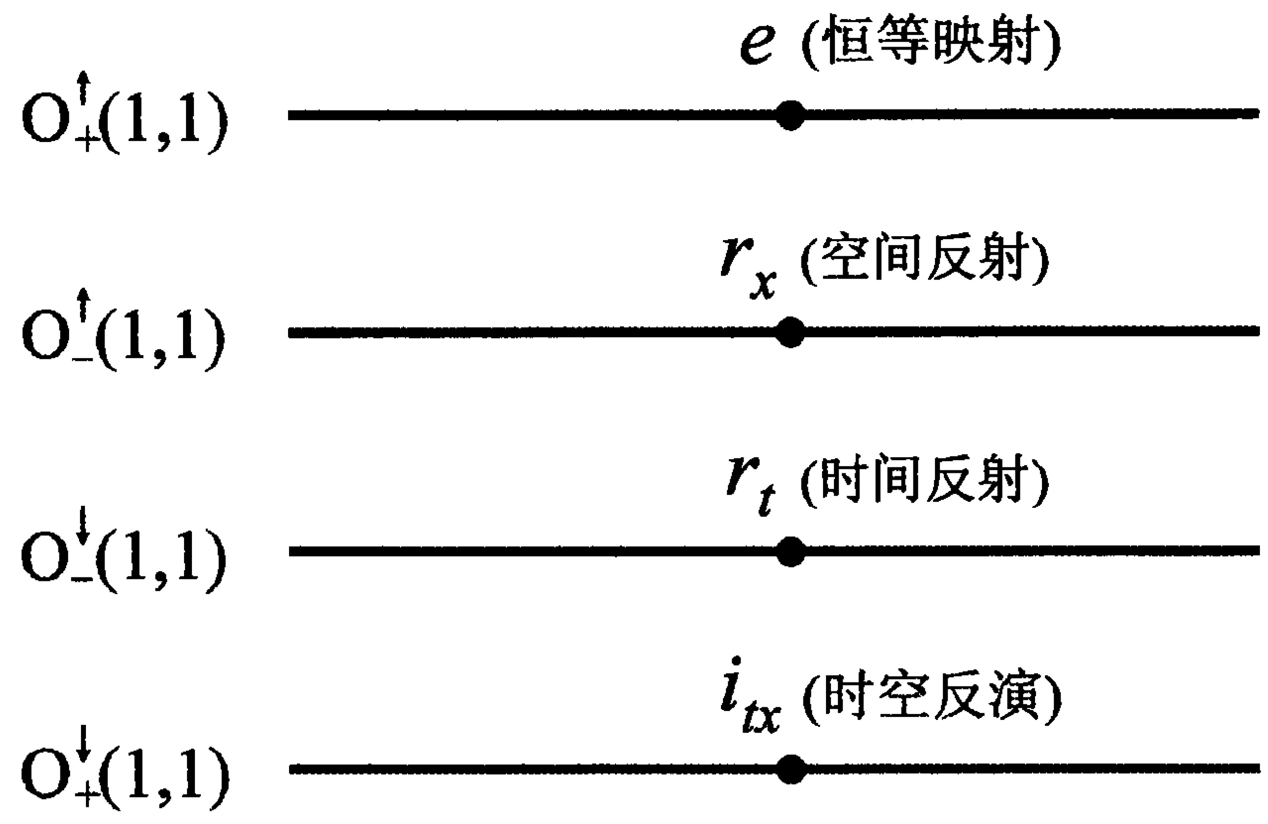


图 G-4 李群 O(1,1) 的流形. 4 个连通分支中只有 $O_+^\uparrow(1,1)$ 是李子群

在以上基础上就不难介绍 $O(m',m'')$ 中对物理最有用的特例, 即**洛伦兹群** O(1,3), 简记为 L, 其群元 $\Lambda\in L$ (作为 4×4 矩阵)的充要条件与式(G-5-24)形式一样, 只是改为 4×4 矩阵等式, 即

$$\eta = \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda, \quad 其中\eta \equiv \mathrm{diag}(-1,1,1,1). \tag{G-5-24'}$$

L是由4个连通分支组成的6维非连通流形[证明见Bleecker(1981)], 这4个连通分支是

$$L_+^{\uparrow} = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \geqslant +1\}, \quad L_-^{\uparrow} = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \geqslant +1\},$$

$$L_-^{\downarrow} = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \leqslant -1\}, \quad L_+^{\downarrow} = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \leqslant -1\}.$$

每个连通分支含一个最简单的元素, 依次记作I, r_s, r_t, i_{st}, 其中

$I \equiv \mathrm{diag}\,(1,1,1,1) \in L_+^{\uparrow}$ 是L的恒等元,

$r_s \equiv \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \in L_-^{\uparrow}$ 是L的空间反射元,

$r_t \equiv \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1) \in L_-^{\downarrow}$ 是L的时间反射元,

$i_{ts} \equiv r_t r_s = -I \in L_+^{\downarrow}$ 是L的时空反演元.

上述4个连通分支中只有$L_+^{\uparrow}$是子群(只有它包含恒等元), 而且是李子群, 称为**固有洛伦兹群**(proper Lorentz group), ① 是6维连通流形, 流形结构为$\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. 其他3个连通分支都是子群$L_+^{\uparrow}$的左陪集[证明见Bleecker(1981)]:

$$L_-^{\uparrow} = r_s L_+^{\uparrow}, \quad L_-^{\downarrow} = r_t L_+^{\uparrow}, \quad L_+^{\downarrow} = i_{ts} L_+^{\uparrow}.$$

同O(3)群类似, 洛伦兹群O(1,3)和它的子群$L_+^{\uparrow}$有相同的李代数, 记作$\mathscr{O}(1,3)$.

定理 G-5-5 $\mathscr{O}(1,3) = \{\,4\times 4实矩阵A \mid A^{\mathrm{T}} = -\eta A\eta\,\}$. (G-5-26)

证明

(A) $\forall A \in \mathscr{O}(1,3)$, 考虑O(1,3)中满足以下两条件的曲线$\Lambda(t)$:

$$(1)\ \Lambda(0) = I, \qquad (2)\ \mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}\,\Lambda(t) = A,$$

则$\Lambda^{\mathrm{T}}(t)\eta\Lambda(t) = \eta\ \ \forall t \in \mathbb{R}$. 对$t$求导并在$t=0$取值得

$$0 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda^{\mathrm{T}}(t)\right]_{t=0}\eta\Lambda(0) + \Lambda^{\mathrm{T}}(0)\eta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)\right]_{t=0} = A^{\mathrm{T}}\eta I + I\eta A = A^{\mathrm{T}}\eta + \eta A,$$

以η^{-1}右乘上式, 注意到$\eta^{-1} = \eta$, 得$A^{\mathrm{T}} = -\eta A\eta$. [$\eta$与$\eta^{-1}$作为矩阵相等, 但写矩阵

① $\Lambda^0{}_0 \geqslant +1$的洛伦兹变换不改变被作用矢量$v^a$的时间分量$v^0$的正负性, 故称**保时向的**(orthochronous), 反之, $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$的洛伦兹变换称为**反时向的**(antichronous). 另一方面, "固有" (proper)一词则常用以形容$\det\Lambda = +1$. 因此$L_+^{\uparrow}$的全称应是**固有、保时向洛伦兹群**, 而固有洛伦兹群一词则应留给L的非连通子群$L_+ \equiv \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = +1\}$. 也有文献称$L_+^{\uparrow}$为**限制(restricted)洛伦兹群或正常洛伦兹群**. 考虑到简单和习惯性, 本书仍仿照多数文献称$L_+^{\uparrow}$为**固有洛伦兹群**.

元时最好分清上下标，即η的矩阵元为$\eta_{\mu\nu}$而η^{-1}的矩阵元为$\eta^{\mu\nu}$.]

(B) 设A是满足$A^{\mathrm{T}}=-\eta A\eta$的$4\times 4$实矩阵. 仿照定理 G-5-4 证明的(B)，只须证明$\mathrm{Exp}(A)\in \mathrm{O}(1,3)$. 因为对任意矩阵$M,N$有

$$N^{-1}(\mathrm{Exp}M)N=N^{-1}(I+M+\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{3!}M^3+\cdots)N$$

$$=I+N^{-1}MN+\frac{1}{2!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)+\frac{1}{3!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)+\cdots$$

$$=\mathrm{Exp}(N^{-1}MN), \tag{G-5-27}$$

取$N=\eta,\ M=A$便得$\eta(\mathrm{Exp}A)\eta=\mathrm{Exp}(\eta A\eta)$，因而$\eta(\mathrm{Exp}A)=[\mathrm{Exp}(\eta A\eta)]\eta$. 于是

$(\mathrm{Exp}A)^{\mathrm{T}}\eta(\mathrm{Exp}A)=(\mathrm{Exp}A^{\mathrm{T}})\eta(\mathrm{Exp}A)=(\mathrm{Exp}A^{\mathrm{T}})[\mathrm{Exp}(\eta A\eta)]\eta=[\mathrm{Exp}(A^{\mathrm{T}}+\eta A\eta)]\eta=\eta$,

[其中第三步用到式(G-5-4)，$A^{\mathrm{T}}=-\eta A\eta$保证该式成立.] 可见$\mathrm{Exp}(A)\in\mathrm{O}(1,3)$. □

要利用定理 G-5-5 计算$\mathrm{O}(1,3)$群的维数，可以借用如下事实：$\forall A\in\mathscr{O}(1,3)$，令$B\equiv\eta A$，则由$A^{\mathrm{T}}=-\eta A\eta$易见$B^{\mathrm{T}}=-B$，即$B\in\mathscr{O}(4)$. 这表明存在从$\mathscr{O}(1,3)$到$\mathscr{O}(4)$的映射，而且是(矢量空间之间的)同构映射，因而$\dim\mathscr{O}(1,3)=\dim\mathscr{O}(4)$. 这一结论只依赖于$\eta$的对称性和非退化性. 对$\mathrm{O}(m',m'')$群，令$\eta$代表这样的对角矩阵，其前$m'$个对角元为$-1$，后$m''$个对角元为$+1$，便知也有类似结论，即

$$\dim\mathrm{O}(m',m'')=\dim\mathrm{O}(m'+m'').$$

$\Lambda\in L$满足式(G-5-24′)，即$\eta=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda$，其中$\eta\equiv\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. 而

$$\eta=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda\Leftrightarrow\eta\Lambda^{-1}=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Leftrightarrow\Lambda^{-1}=\eta^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}\eta,$$

再用$\eta^{-1}=\eta$便得$\Lambda^{-1}=\eta\Lambda^{\mathrm{T}}\eta$.. 借此可方便地求得$\Lambda\in L$的逆矩阵$\Lambda^{-1}$：先写出$\Lambda$的转置矩阵$\Lambda^{\mathrm{T}}$，再对$\Lambda^{\mathrm{T}}$的各元素依下列法则改变符号：$\begin{bmatrix}+&-&-&-\\-&+&+&+\\-&+&+&+\\-&+&+&+\end{bmatrix}$，结果即为$\Lambda^{-1}$.

鉴于固有洛伦兹群和洛伦兹代数对物理学的非常重要性，我们将单辟一节(§G.9)对此做更详尽的讨论.

G.5.4 U(m)群 (酉群)

GL(m)群是用m维实矢量空间V定义的. 把V改为m维复矢量空间所得的一般线性群则记作$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，是$2m^2$维(实)李群. 与$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$[即GL($m$)]不同，$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$是连通李群. 我们只介绍这个群的一个重要子群——酉群U(m). 正如

GL(m) 群的子群 O(m) 要求保度规那样，酉群 U(m) 是对 GL(m,ℂ) 要求保内积的结果. 复矢量空间的内积与实矢量空间的内积类似而又不同，最重要的区别在于，实矢量空间的内积对两个矢量的作用都为线性，而复矢量空间的内积只对第二个矢量为线性，对第一个矢量则为反线性. 定义了内积的复矢量空间称为内积空间，准确定义见§B.1 定义 1. 设 V 是有限维内积空间，线性映射 $A: V\to V$ 称为 V 上的**线性算符**，简称**算符**，它自然诱导出 V 上的另一线性算符 $A^\dagger$，称为 A 的**伴随算符**，满足

$$(A^\dagger f, g) = (f, Ag)\,, \qquad \forall f, g\in V\,, \tag{G-5-28}$$

其中 Ag 代表 A 作用于 g 所得矢量，即 $A(g)$ 的简写. 可以证明(见§B.1)每一 A 按上式决定唯一的 $A^\dagger$，上式可作为 $A^\dagger$ 的定义.

定义 1　内积空间 V 上的算符 U 称为**酉算符(或幺正算符)**(unitary operator)，若其作用保内积，即

$$(Uf, Ug) = (f, g), \quad \forall f, g\in V\,. \tag{G-5-29}$$

定理 G-5-6　算符 U 为酉算符的充要条件为

$$U^\dagger U = \delta\,, \tag{G-5-30}$$

其中 δ 代表恒等算符，即从 V 到 V 的恒等映射.

证明　若 $U^\dagger U=\delta$，则 $(Uf, Ug) = (U^\dagger Uf, g) = (f, g)\ \ \forall f, g\in V$，故 U 为酉算符. 反之，若 U 为酉算符，则 $\forall f, g\in V$ 有

$$0 = (Uf, Ug) - (f, g) = (U^\dagger Uf, g) - (f, g) = ((U^\dagger U-\delta)f, g)\,.$$

取 $g=(U^\dagger U-\delta)f$，则 $0=(g,g)$，故 $g=0$，即 $(U^\dagger U-\delta)f = 0\ \ \forall f\in V$，从而 $U^\dagger U=\delta$.

□

选定 V 的一个正交归一基底 $\{e_i\}$ 后，V 上任一算符 A 可用矩阵表示，其矩阵元定义为

$$A_{ij} := (e_i, Ae_j)\,. \tag{G-5-31}$$

由上式得

$$A_{ij} = (A^\dagger e_i, e_j) = \overline{(e_j, A^\dagger e_i)} = \overline{A^\dagger{}_{ji}}\,, \tag{G-5-32}$$

所以，若以 A 和 $A^\dagger$ 分别代表算符 A 和 $A^\dagger$ 在同一基底的矩阵，以 $\overline{A^{\mathrm T}}$ 代表 A 的转置矩阵的矩阵元都取复数共轭所得的矩阵，则

$$A^\dagger = \overline{A^{\mathrm T}}\,. \tag{G-5-33}$$

定理 G-5-7 算符U为酉算符的充要条件是其在正交归一基底下的矩阵U满足矩阵等式

$$U^{-1}=U^{\dagger}, \quad 即 U^{-1}=\overline{U^{\mathrm{T}}}. \tag{G-5-34}$$

证明 酉算符满足的算符等式(G-5-30)在正交归一基底下对应于矩阵等式

$$U^{\dagger}U=I, \tag{G-5-30$'$}$$

故$U^{-1}=U^{\dagger}$. □

定义 2 满足式(G-5-34)的复矩阵U称为**酉矩阵(或幺正矩阵)**(unitary matrix).

注 2 如果V为实矢量空间, 则$U^{-1}=U^{\dagger}$成为$U^{-1}=U^{\mathrm{T}}$, 即U为正交矩阵. 所以酉矩阵可看作正交矩阵在复矩阵的推广.

定理 G-5-8 设U为酉矩阵, 则

$$\det U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\ (其中\phi\in\mathbb{R}), \quad 即\ |\det U|=1. \tag{G-5-35}$$

证明 对矩阵等式(G-5-30′)取行列式得$1=(\det\overline{U^{\mathrm{T}}})(\det U)=\overline{(\det U)}(\det U)$, 得证. □

定义 3 令 $\mathrm{U}(m)\equiv\{m$维内积空间V上的酉算符$\}=\{m\times m$酉矩阵$\}$,
以复合映射(或矩阵乘法)为群乘法, 则不难验证$\mathrm{U}(m)$是李群, 称为**酉群(或幺正群)**(unitary group).

例 1[酉群U(1)] 选 1 维复矢量空间$\mathbb{C}$作为V并按下式定义内积使成内积空间:

$$(f,g)\ :=\bar{f}g, \quad \forall f,g\in\mathbb{C}\ (容易验证满足内积定义各条件).$$

复数$U\in\mathbb{C}$可看作$\mathbb{C}$上的线性算符, 它作用于任一$f\in\mathbb{C}$的结果定义为复数乘积Uf. 易证U为酉算符当且仅当$|U|=1$, 所以$\mathbb{C}$上全体酉算符的集合是复平面上的单位圆. 可见李群U(1)的流形是一个圆周, 是个紧致的连通流形. 后一结论还可推广至任意正整数m的情况, 即$\mathrm{U}(m)$是紧致的连通流形(连通性的证明见定理G-5-11).

定义 4 复方阵A称为**厄米的**(hermitian), 若$A^{\dagger}=A$; A称为**反厄米的**(anti-hermitian), 若$A^{\dagger}=-A$.

注 3 ①对实方阵, 厄米就是对称; 反厄米就是反称. ②易证: A为厄米$\Leftrightarrow \mathrm{i}A$为反厄米.

与$\mathrm{GL}(m)$群的李代数$\mathscr{GL}(m)$同构于全体$m\times m$实矩阵构成的李代数类似, $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$群的李代数$\mathscr{GL}(m,\mathbb{C})$同构于全体$m\times m$复矩阵构成的李代数, 即

$$\mathscr{GL}(m,\mathbb{C})=\{m\times m\text{复矩阵}\}.\quad(\text{等号代表李代数同构})\tag{G-5-36}$$

定理 G-5-9 酉群 $\mathrm{U}(m)$ 的李代数

$$\mathscr{U}(m)=\{A\in\mathscr{GL}(m,\mathbb{C})\mid A^\dagger=-A\}=\{m\times m\text{反厄米复矩阵}\}.\tag{G-5-37}$$

证明 与定理 G-5-4 的证明类似，只须把 $Z^{\mathrm{T}}(t)$ 和 A^{T} 分别改为 $U^\dagger(t)$ 和 $A^\dagger$.

□

定理 G-5-10 $$\dim\mathrm{U}(m)=\dim\mathscr{U}(m)=m^2.\tag{G-5-38}$$

证明 $A\in\mathscr{U}(m)$ 是有 m^2 个复元素的矩阵，由 $2m^2$ 个实数决定. 但 A 的反厄米性 $A_{ij}=-\overline{A}_{ji}$ 导致 m^2 个实方程，理由是：①反厄米性要求对角元为虚数，故每个对角元的反厄米条件相当于一个实方程(实部 = 0)，因而所有对角元提供 m 个实方程；②反厄米性使每对非对角元提供 2 个实方程，而非对角元共有 $(m^2-m)/2$ 对，故全部非对角元共提供 $2\times(m^2-m)/2=m^2-m$ 个方程. 可见 $2m^2$ 个实数要受 m^2 个实方程的限制，只有 m^2 个独立. □

例 2[李代数 $\mathscr{U}(1)$] 由例 1 得知李群 U(1) 可表为 $U(1)=\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mid\theta\in\mathbb{R}\}$，其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\mathrm{Exp}(-\mathrm{i}\theta)$ 可看作以 θ 为参数的单参子群[等于 $U(1)$ 自身]，相应的李代数元为

$$A=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=-\mathrm{i}\in\mathscr{U}(1)\quad(\text{不难验证 }A\text{ 的确满足 }A^\dagger=-A),$$

以 A 为基矢生成的 1 维(实)矢量空间就是 $\mathscr{U}(1)$，故 $\mathscr{U}(1)=\{-\mathrm{i}\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$.

酉矩阵满足的 $\det U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 和正交矩阵满足的 $\det Z=\pm1$ 很不一样. 这同如下事实密切相关：

定理 G-5-11 与 $\mathrm{O}(m)$ 群相反，酉群 $\mathrm{U}(m)$ 是连通流形.

证明 只须证明 $\forall U\in\mathrm{U}(m)$，$\exists$ 连续曲线 $\gamma(t)\subset\mathrm{U}(m)$ 使 $\gamma(0)=I,\gamma(1)=U$. 由线性代数可知任意酉矩阵可用酉变换化为对角形，且对角元的模皆为 1. [可参阅，例如，斯米尔诺夫(1960).] 就是说，$\forall U\in\mathrm{U}(m),\exists W\in\mathrm{U}(m)$ 使

$$WUW^{-1}=D,\tag{G-5-39}$$

式中 D 为对角矩阵，对角元为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_m}$(其中 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m\in\mathbb{R}$). 设 $\varPhi$ 是以 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 为对角元的实对角矩阵，则(习题) $D=\mathrm{Exp}(\mathrm{i}\varPhi)$. 由式(G-5-39)得

$$U=W^{-1}DW=W^{-1}(\mathrm{Exp}\,\mathrm{i}\varPhi)\,W=\mathrm{Exp}(\,\mathrm{i}W^{-1}\varPhi\,W),\tag{G-5-40}$$

其中最末一步用到式(G-5-27). 令 $A\equiv\mathrm{i}W^{-1}\varPhi W$，则

$$A^\dagger=\overline{A^{\mathrm{T}}}=\overline{\mathrm{i}\,W^{\mathrm{T}}\varPhi^{\mathrm{T}}(W^{-1})^{\mathrm{T}}}=-\mathrm{i}\,W^{-1}\varPhi W=-A$$

表明 A 为反厄米矩阵, 故 $A\in\mathscr{U}(m)$. 于是式(G-5-40)相当于 $U=\text{Exp}A$, 可见 U(m) 中存在连续曲线 $\gamma(t)\equiv\text{Exp}(tA)$ 使 $\gamma(0)=I,\ \gamma(1)=U$. □

注 4 以上证明中的连续曲线 $\gamma(t)$ 其实是单参子群, 因此我们证明了比定理的结论更强的结论: 酉群的任一群元都属于某一单参子群. 这一结论也适用于 SO(m) 群. 然而并非任一李群的含 e 的连通分支的任一群元都属于某一单参子群. 例如 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\in\text{GL}(2)$ 就不是(证明提示见习题 14). 存在这样的定理[见 Brocker et al.(1985)第165页]: 紧致的连通李群的指数映射是到上映射, 这等价于任一群元都属于某一单参子群.

U(m) 的子集 $\text{SU}(m)\equiv\{U\in\text{U}(m)\,|\,\det U=1\}$ 是 U(m) 的李子群, 称为**特殊酉群** (special unitary group). 同 U(m) 一样, SU(m) 也是紧致的连通李群.

引理 G-5-12 设 A 为任意 $m\times m$ 矩阵, 则

$$\det(\text{Exp}A)=\text{e}^{\text{tr}A}. \tag{G-5-41}$$

证明 设 $f(t)\equiv\det(\text{Exp}tA)$, 则

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}f(t)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}f(t+s)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}[\det(\text{Exp}(t+s)A)]=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}[\det(\text{Exp}tA)\det(\text{Exp}sA)]$$

$$=[\det(\text{Exp}tA)]\left.\frac{\text{d}}{\text{d}s}\right|_{s=0}[\det(\text{Exp}sA)]=[\det(\text{Exp}tA)]\,\text{tr}A=f(t)\text{tr}A,$$

其中第五步将在下行之后补证. 由上式得 $\text{d}\ln f(t)/\text{d}t=\text{tr}A$, 加之 $f(0)=\det I=1$, 有 $f(t)=\text{e}^{(\text{tr}A)t}$. 令 $t=1$ 便得式(G-5-41).

最后补证上式的第五步, 即 $\text{d}/\text{d}s|_{s=0}[\det(\text{Exp}sA)]=\text{tr}A$. 设 X 为任意 $m\times m$ 矩阵, $X^i{}_j$ 是其矩阵元, $\varepsilon_{i_1\cdots i_m}$ 代表 m 维 Levi-Civita 记号, 则

$$\det X=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}X^{i_1}{}_1\cdots X^{i_m}{}_m. \tag{G-5-42}$$

取 $X=\text{Exp}(sA)=I+sA+s^2A^2/2!+\cdots$, 有 $X^i{}_j=\delta^i{}_j+sA^i{}_j+s^2A^i{}_kA^k{}_j/2!+\cdots$, 故

$$X^i{}_j\,|_{s=0}=\delta^i{}_j,\quad \left.\frac{\text{d}}{\text{d}s}\right|_{s=0}X^i{}_j=A^i{}_j, \tag{G-5-43}$$

对式(G-5-42)求导并利用式(G-5-43)便可证得 $\text{d}/\text{d}s|_{s=0}[\det(\text{Exp}sA)]=\text{tr}A$:

$$\left.\frac{\text{d}}{\text{d}s}\right|_{s=0}\det X=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}\left.\left(\frac{\text{d}X^{i_1}{}_1}{\text{d}s}X^{i_2}{}_2\cdots X^{i_m}{}_m+\cdots+X^{i_1}{}_1X^{i_2}{}_2\cdots\frac{\text{d}X^{i_m}{}_m}{\text{d}s}\right)\right|_{s=0}$$

$$=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}(A^{i_1}{}_1\delta^{i_2}{}_2\cdots\delta^{i_m}{}_m+\cdots+\delta^{i_1}{}_1\delta^{i_2}{}_2\cdots A^{i_m}{}_m)=(A^1{}_1+\cdots+A^m{}_m)=\mathrm{tr}A\,.\qquad\square$$

定理 G-5-13 特殊酉群SU(m)的李代数

$$\mathscr{SU}(m)=\{A\in\mathscr{U}(m)\,|\,\mathrm{tr}A=0\}=\{\,m\times m\text{ 无迹反厄米复矩阵}\}\,.$$

证明 (A)设 $A\in\mathscr{SU}(m)$，则 $\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SU}(m)$，故 $\det(\mathrm{Exp}tA)=1$，与式(G-5-41)对比得 $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tA)}=1$. 因而 $\mathrm{tr}(tA)=\mathrm{i}2k\pi$ (其中 $k=0$ 或整数). 但 $\mathrm{tr}(tA)=t(\mathrm{tr}A)$，逼出 $k=0$，$\mathrm{tr}A=0$，即 A 为无迹矩阵. 另一方面，由 $A\in\mathscr{SU}(m)$ 易见 $A\in\mathscr{U}(m)$，故 A 为反厄米矩阵. (B)设 A 是无迹反厄米矩阵，则 $\forall t\in\mathbb{R}$, tA 也是无迹反厄米矩阵. 反厄米性导致 $tA\in\mathscr{U}(m)$，从而 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{U}(m)$. tA 的无迹性配以式(G-5-41)导致 $\det(\mathrm{Exp}tA)=1$，由 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{U}(m)$ 便知 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SU}(m)$. 按式(G-5-3)把 $\mathrm{Exp}(tA)$ 写成级数式，求导便得曲线 $\mathrm{Exp}(tA)\subset\mathrm{SU}(m)$ 在 I 点的切矢 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\mathrm{Exp}(tA)=A$. 可见 $A\in\mathscr{SU}(m)$. □

定理 G-5-13 表明酉群 U(m) 与其子群 SU(m) 有不同的李代数.

定理 G-5-14 $$\dim\mathrm{SU}(m)=\dim\mathscr{SU}(m)=m^2-1\,.\tag{G-5-44}$$

证明 $\mathscr{SU}(m)$ 是 $\mathscr{U}(m)$ 的子代数：$\mathscr{U}(m)$ 的元素 A 只当满足 $\mathrm{tr}A=0$ 才是 $\mathscr{SU}(m)$ 的元素. A 的反厄米性使对角元为虚数，所以 $\mathrm{tr}A=0$ 只提供一个实方程，由定理 G-5-10 便知 $\dim\mathscr{SU}(m)=m^2-1$. □

G.5.5 E(m)群 (欧氏群)

m 维欧氏空间的等度规群称为**欧氏群**(Euclidean group)，记作 E(m). 欧氏空间有最高对称性，所以 $\dim\mathrm{E}(m)=m(m+1)/2$. 以 E(2) 为例. 2 维欧氏空间有 3 个独立的 Killing 矢量场，这使我们想到其上的等度规映射既有平移又有转动. 先看平移. 以 $\vec{v}$, $\vec{a}$ 代表欧氏空间的任二点，则映射 $\vec{v}\mapsto\vec{v}+\vec{a}$ 称为**平移**(translation)，记作 $T_{\vec{a}}$，即

$$T_{\vec{a}}\vec{v}:=\vec{v}+\vec{a}\,.\tag{G-5-45}$$

取笛卡儿系使 x 轴沿 $\vec{a}$ 向. 因为 Killing 场 $\partial/\partial x$ 对应的单参等度规群过任一点的轨道都是平行于 x 轴的直线，而 $T_{\vec{a}}$ 对 $\vec{v}$ 的作用是让点 $\vec{v}$ 沿平行于 x 轴的直线移过距离 a，所以 $T_{\vec{a}}$ 是该群的一元，因而是等度规映射. 因为平移的复合还是平移 ($T_{\vec{a}}\circ T_{\vec{b}}=T_{\vec{a}+\vec{b}}=T_{\vec{b}}\circ T_{\vec{a}}$)，所以 $\mathrm{T}(2)\equiv\{T_{\vec{a}}\,|\,\vec{a}\in\mathbb{R}^2\}$ 以复合映射为乘法构成群(而且是阿贝尔群). 又因 $\vec{a}$ 相当于 2 个实数，所以 $\dim\mathrm{T}(2)=2$. 再看转动. 因为 Killing 场 $\partial/\partial\varphi\equiv-y\,\partial/\partial x+x\,\partial/\partial y$ 对应的单参等度规群过任一点的轨道是以原点为心的圆周，不难看出绕原点转 α 角的映射 $Z(\alpha)$ 是该群的一元，所以 $Z(\alpha)$ 也是等度规映射. 集合 $\{Z(\alpha)\,|\,0\leqslant\alpha<2\pi\}$ 正是李群 SO(2). 设 E 是 E(2) 的任一元素，它把欧氏空间的

原点 $\vec{o} \equiv (0,0)$ 映为点 $\vec{a}$，即 $E\vec{o}=\vec{a}$，则 $T_{-\vec{a}}E\,\vec{o}=\vec{o}$，故 $T_{-\vec{a}}E \in \mathrm{E}(2)$ 是保持原点不动的等度规映射. 可以证明，保原点的等度规映射要么是转动，要么是反演，故 $T_{-\vec{a}}E \in \mathrm{O}(2)$. 记 $Z \equiv T_{-\vec{a}}E$，则 $E=T_{\vec{a}}Z$. 可见 $\forall E \in \mathrm{E}(2)$ $\exists$ 唯一的(唯一性由读者验证) $T_{\vec{a}} \in \mathrm{T}(2)$，$Z \in \mathrm{O}(2)$ 使 $E=T_{\vec{a}}Z$，说明 E 可表为有序对 $(T_{\vec{a}},Z)$，因而作为集合或拓扑空间有 $\mathrm{E}(2)=\mathrm{T}(2)\times\mathrm{O}(2)$. 因为 E(2) 的群乘法定义为映射的复合，所以 $(T_{\vec{a}},Z)$ 对 $\vec{v}$ 的作用表现为

$$(T_{\vec{a}},Z)\,\vec{v}=T_{\vec{a}}Z\vec{v}=Z\vec{v}+\vec{a}\,.$$

设 $T_{\vec{a}_1}, T_{\vec{a}_2} \in \mathrm{T}(2)$，$Z_1, Z_2 \in \mathrm{O}(2)$，注意到

$$(T_{\vec{a}_1},Z_1)(T_{\vec{a}_2},Z_2)\,\vec{v}=(T_{\vec{a}_1},Z_1)\,(Z_2\vec{v}+\vec{a}_2)=Z_1(Z_2\vec{v}+\vec{a}_2)+\vec{a}_1=(T_{\vec{a}_1+Z_1\vec{a}_2},Z_1Z_2)\,\vec{v}\,,$$

并把有序对 $(T_{\vec{a}},Z)$ 简记作 $(\vec{a},Z)$，则上式表明 E(2) 的群元 $(\vec{a}_1,Z_1)$ 与 $(\vec{a}_2,Z_2)$ 间的乘法为

$$(\vec{a}_1,Z_1)(\vec{a}_2,Z_2)=(\vec{a}_1+Z_1\vec{a}_2,\ Z_1Z_2)\,. \tag{G-5-46}$$

与§G.1 定义 9 对比可知 E(2) 是 T(2) 和 O(2) 的半直积群，其中 Z_1 同态对应于 T(2) 的自同构群 $\mathscr{A}(\mathrm{T}(2))$ 的元素 ψ_{Z_1}，它对 T(2) 的作用为 $\psi_{Z_1}\vec{a}_2=Z_1\vec{a}_2\ \forall\vec{a}_2 \in \mathrm{T}(2)$ (请注意 $Z_1\vec{a}_2$ 是 $T_{Z_1\vec{a}_2}$ 的简写). 于是

$$\mathrm{E}(2)=\mathrm{T}(2)\otimes_{\mathrm{S}}\mathrm{O}(2)\,. \tag{G-5-47}$$

以上讨论的思路也适用于 E(3)，因而也有

$$\mathrm{E}(3)=\mathrm{T}(3)\otimes_{\mathrm{S}}\mathrm{O}(3)\,. \tag{G-5-48}$$

G.5.6 Poincaré 群(庞加莱群)

4 维闵氏时空的等度规群称为 **Poincaré 群**，记作 P. 闵氏时空的最高对称性导致 Poincaré 群是 10 维李群. 沿着对 E(2) 群的讨论思路，可知 Poincaré 群是 4 维平移群 T(4) 与 6 维洛伦兹群 $L \equiv \mathrm{SO}(1,3)$ 的半直积群. 即

$$P=\mathrm{T}(4)\otimes_{\mathrm{S}}L\,. \tag{G-5-49}$$

具体说，以 a 代表闵氏时空起自原点的矢量，则 $T_a \in \mathrm{T}(4)$. 设 $T_{a_1}, T_{a_2} \in \mathrm{T}(4)$，$\Lambda_1, \Lambda_2 \in L$，则有序对 $(T_{a_1},\Lambda_1), (T_{a_2},\Lambda_2) \in \mathrm{T}(4)\times L$. 把有序对简记作 $(a_1,\Lambda_1), (a_2,\Lambda_2)$，按复合映射得

$$(a_1,\Lambda_1)\,(a_2,\Lambda_2)=(a_1+\Lambda_1a_2,\ \Lambda_1\Lambda_2)\,,$$

故 P 是 T(4) 与 L 的半直积群. 把式(G-5-50)的 L 改为 $L_+^\uparrow$ 得到的 P 的子群称为**固有 Poincaré 群**，记作 P_{P}.

表 G-1　某些李群的子群关系($H<G$ 代表 H 是 G 的子群)

$$\begin{matrix} SO(2) & < & SO(3) & < & L_+^\uparrow \\ \wedge & & \wedge & & \wedge \\ E(2) & < & E(3) & < & P_P \end{matrix}$$

表 G-2　常用矩阵李群一览表

符号	李群名称	连通性	矩阵	维数	其李代数的矩阵
$GL(m)$	一般线性群(实)	不连通	$m\times m$ 可逆实矩阵	m^2	$m\times m$ 任意实矩阵
$GL(m,\mathbb{C})$	一般线性群(复)	连通	$m\times m$ 可逆复矩阵	$2m^2$	$m\times m$ 任意复矩阵
$SL(m)$	特殊线性群(实)	连通	行列式为 1 的 $m\times m$ 可逆实矩阵	m^2-1	$m\times m$ 无迹实矩阵
$SL(m,\mathbb{C})$	特殊线性群(复)	连通	行列式为 1 的 $m\times m$ 可逆复矩阵	$2m^2-2$	$m\times m$ 无迹复矩阵
$O(m)$	正交群	不连通	正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	$m\times m$ 反称实矩阵
$SO(m)$	转动群 (特殊正交群)	连通	行列式为 1 的正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	$m\times m$ 反称实矩阵
$O(1,3)$	洛伦兹群	不连通	4×4 实矩阵 Λ，满足 $\eta=\Lambda^T\eta\Lambda$.	6	4×4 实矩阵 A，满足 $A^T=-\eta A\eta$.
$L_+^\uparrow$	固有洛伦兹群	连通	4×4 实矩阵 Λ，满足 $\eta=\Lambda^T\eta\Lambda$，$\det\Lambda=1$，$\Lambda^0{}_0\geqslant 1$.	6	4×4 实矩阵 A，满足 $A^T=-\eta A\eta$.
$U(m)$	酉群	连通	$m\times m$ 酉矩阵	m^2	$m\times m$ 反厄米复矩阵
$SU(m)$	特殊酉群	连通	行列式为 1 的 $m\times m$ 酉矩阵	m^2-1	$m\times m$ 反厄米无迹复矩阵

§ G.6　李代数的结构常数

设 $\mathscr{V}$ 是李代数，则李括号 $[\,,\,]:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ 是双线性映射. 由§2.4 的“张量面面观”可知它可看作 $\mathscr{V}$ 上的一个 (1,2) 型张量. 把这一张量记作 $C^c{}_{ab}$ (a,b,c 代表矢量空间 $\mathscr{V}$ 的抽象指标)，便有

$$[v,u]^c=C^c{}_{ab}v^a u^b,\quad \forall v^a,u^b\in\mathscr{V}. \tag{G-6-1}$$

由上式定义的张量 $C^c{}_{ab}$ 称为李代数 $\mathscr{V}$ 的**结构(常)张量**(structure constant tensor). 阿贝尔李代数的结构张量显然为零. 可以证明[见 Warner(1983)的 3.50 推论(b)]，连通李群为阿贝尔群当且仅当其李代数为阿贝尔代数.

定理 G-6-1　李代数的结构张量 $C^c{}_{ab}$ 有以下性质:

$$\text{(a)}\ C^c{}_{ab}=-C^c{}_{ba};\qquad \text{(b)}\ C^c{}_{a[b}C^a{}_{de]}=0.$$

证明　由$[v,u]^a=-[u,v]^a$易见性质(a)成立. 作为习题, 请读者用李括号所满足的雅可比恒等式证明性质(b). □

设$\{(e_\mu)^a\}$是$\mathscr{V}$的任一基底, 则

$$[e_\mu,e_\nu]^c=C^c{}_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b=C^\sigma{}_{\mu\nu}(e_\sigma)^c\,. \qquad \text{(G-6-2)}$$

上式的$C^\sigma{}_{\mu\nu}$称为李代数$\mathscr{V}$的**结构常数**(structure constants). 与结构张量$C^c{}_{ab}$不同, 结构常数$C^\sigma{}_{\mu\nu}$除依赖于李代数本身外还依赖于对基底的人为选择. 基底变换时结构常数按张量分量变换律变换. 李氏的一个基本定理断言:给定一组满足以下两条件的常数$C^\sigma{}_{\mu\nu}$: ①$C^\sigma{}_{\mu\nu}=-C^\sigma{}_{\nu\mu}$; ②$C^\sigma{}_{\mu[\nu}C^\mu{}_{\rho\tau]}=0$, 必存在李群, 其李代数以$C^\sigma{}_{\mu\nu}$为结构常数.

例1　李群$\mathbb{R}^2$的李代数的结构张量.

把$\mathbb{R}^2$的每点看作从(0,0)点出发的一个矢量, 以矢量加法为群乘法, 则$\mathbb{R}^2$是以(0,0)点为恒等元e的2维李群. 易见这是阿贝尔群. 请读者证明:①过e的每一直线是一个单参子群; ②$\mathbb{R}^2$上任一左不变矢量场$\bar{A}$满足$\partial_a\bar{A}^b=0$(其中∂_a是自然坐标系的普通导数算符). 等价地, $\bar{A}$的积分曲线族是平行直线族. 由②可知任意两个左不变矢量场$\bar{A},\bar{B}$的对易子为零: $[\bar{A},\bar{B}]=0$, 故结构张量$C^c{}_{ab}=0$. 这是当然的, 因为$\mathbb{R}^2$是连通的阿贝尔李群, 其李代数自然是阿贝尔代数. 类似地可定义李群$\mathbb{R}^n$, 它当然也是阿贝尔群, 其李代数也是阿贝尔李代数.

例2　李代数$\mathscr{SO}(3)$的结构张量.

前已证明$\dim\mathscr{SO}(3)=3$. 为求得$\mathscr{SO}(3)$的3个基矢, 可借用SO(3)群的3个典型的单参子群, 它们分别由绕x轴、y轴和z轴的转动组成, 以转角α为参数, 则三个单参子群的矩阵依次为

$$Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix},\ Z_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix},\ Z_z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

(G-6-3)

[容易验证它们满足单参子群的条件, 如$Z_z(\alpha)Z_z(\beta)=Z_z(\alpha+\beta)$.] 每一子群在恒等元$I$的切矢给出$\mathscr{SO}(3)$的一个元素(该单参子群的生成元), 分别是

$$A_1=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}, \qquad \text{(G-6-4a)}$$

$$A_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\bigg|_{\alpha=0} Z_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(G-6-4b)}$$

和
$$A_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\bigg|_{\alpha=0} Z_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(G-6-4c)}$$

A_1, A_2, A_3 显然线性独立, 因而构成 $\mathscr{SO}(3)$ 的一个基底. 注意到矩阵李群的李代数的李括号等于矩阵对易子[见式(G-5-7)], 就不难验证这 3 个基矢中任意两个的李括号为

$$[A_1, A_2] = A_3, \qquad [A_2, A_3] = A_1, \qquad [A_3, A_1] = A_2, \qquad \text{(G-6-5)}$$

即 $[A_i, A_j] = \varepsilon^k{}_{ij} A_k,\ i, j, k = 1, 2, 3,$ 其中 $\varepsilon^k{}_{ij}$ 是 Levi-Civita 记号. (G-6-6)

可见 $\mathscr{SO}(3)$ 在基底 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 下的结构常数是 $\varepsilon^k{}_{ij}$.

例 3 洛伦兹李代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 的结构张量.

仿照例 2 的做法, 先写出固有洛伦兹群 $L_+^\uparrow$ 的 6 个典型的单参子群的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\lambda & -\mathrm{sh}\lambda & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\lambda & \mathrm{ch}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\lambda & 0 & -\mathrm{sh}\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\lambda & 0 & \mathrm{ch}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\lambda & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sh}\lambda & 0 & 0 & \mathrm{ch}\lambda \end{bmatrix},$$

其中前 3 个代表 4 维闵氏时空中的空间转动, 后 3 个代表伪转动. 把它们的生成元分别记作 r_1, r_2, r_3 和 b_1, b_2, b_3, 则由求导可得

$$r_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad r_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad r_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\tag{G-6-7}$$

$$b_1=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad b_2=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad b_3=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}.\tag{G-6-8}$$

易见$\mathscr{O}(1,3)$的这6个元素线性独立,因而构成一个基底.不难验证它们的李括号满足下式(它的某些重要后果将在§G.9讨论):

$$[r_i,r_j]=\varepsilon^k{}_{ij}r_k,\quad [b_i,r_j]=\varepsilon^k{}_{ij}b_k,\quad [b_i,b_j]=-\varepsilon^k{}_{ij}r_k,\quad i,j,k=1,2,3.\tag{G-6-9}$$

李代数$\mathscr{O}(1,3)$在基底$\{r_1,r_2,r_3,b_1,b_2,b_3\}$下的结构常数可从上式读出.引入符号$l_{\mu\nu}(\mu,\nu=0,1,2,3$且$l_{\mu\nu}$反称),其含义为

$$l_{01}\equiv b_1,\ l_{02}\equiv b_2,\ l_{03}\equiv b_3,\ l_{12}\equiv r_3,\ l_{23}\equiv r_1,\ l_{31}\equiv r_2,\tag{G-6-10}$$

则不难验证式(G-6-9)可统一表为下式:

$$[l_{\mu\nu},l_{\rho\sigma}]=\eta_{\mu\rho}l_{\nu\sigma}+\eta_{\nu\sigma}l_{\mu\rho}-\eta_{\mu\sigma}l_{\nu\rho}-\eta_{\nu\rho}l_{\mu\sigma}.\tag{G-6-11}$$

每个$l_{\mu\nu}$可看作一个反称实矩阵,矩阵元可表为

$$(l_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta=-\delta^\alpha{}_\mu\eta_{\beta\nu}+\delta^\alpha{}_\nu\eta_{\beta\mu}.\tag{G-6-12}$$

例4 特殊酉群SU(2)的李代数$\mathscr{SU}(2)$的结构张量.

由式(G-5-44)可知$\dim\mathscr{SU}(2)=3$.由定理G-5-13可知$\mathscr{SU}(2)$的元素是2×2无迹反厄米矩阵.大家熟知的3个泡利矩阵$\tau_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\tau_2=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}$, $\tau_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$是无迹厄米矩阵,乘以i就成为无迹反厄米矩阵,而且互相线性独立,可充当$\mathscr{SU}(2)$的基底.为了得到简单的结构常数,我们不用i而用$-\mathrm{i}/2$乘泡利矩阵,从而得到$\mathscr{SU}(2)$的如下3个基矢:

$$E_i=-\mathrm{i}\tau_i/2,\qquad i=1,2,3.\tag{G-6-13}$$

不难验证

$$[E_1,E_2]=E_3,\quad [E_2,E_3]=E_1,\quad [E_3,E_1]=E_2,\tag{G-6-14}$$

即
$$[E_i,E_j]=\varepsilon^k{}_{ij}E_k,\qquad i,j,k=1,2,3. \tag{G-6-15}$$
这表明 $\mathscr{SU}(2)$ 在基底 $\{E_1,E_2,E_3\}$ 下的结构常数与 $\mathscr{SO}(3)$ 在基底 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 下的结构常数相同. [如果以 i 而不是 $-\mathrm{i}/2$ 乘泡利矩阵, 则结构常数将不满足式(G-6-15).] 令线性映射 $\psi:\mathscr{SU}(2)\to\mathscr{SO}(3)$ 满足 $\psi(E_i)=A_i\ (i=1,2,3)$, 就可看出 ψ 保李括号, 所以是 $\mathscr{SU}(2)$ 与 $\mathscr{SO}(3)$ 之间的李代数同构. 应该注意, 虽然 $\mathscr{SU}(2)$ 的元素是复矩阵, 但 $\mathscr{SU}(2)$ 仍是实的 3 维矢量空间: 只有以实数为组合系数才能确保所构成的线性组合仍在 $\mathscr{SU}(2)$ 之内.

$\mathscr{SU}(2)$ 与 $\mathscr{SO}(3)$ 同构并不意味着 SU(2) 与 SO(3) 同构. 事实上, 不存在 SU(2) 与 SO(3) 之间的同构映射, 但存在 2 对 1 的李群同态映射 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$, 即 SU(2) 的两个不同群元对应于 SO(3) 的一个群元(见选读 G-6-1). 前面说过, 一个李群决定唯一的李代数, 但一个李代数并不决定唯一的李群(除非待定的是单连通李群). SU(2) 与 SO(3) 的关系是这一重要结论的一个很好的例子:
$$\mathscr{SU}(2)=\mathscr{SO}(3)\ \not\Rightarrow\ \mathrm{SU}(2)=\mathrm{SO}(3).$$
SU(2) 与 SO(3) 都是连通流形, 但可以证明 SU(2) 是单连通流形而 SO(3) 不是(见选读 G-6-1). 正是这一非单连通性使 $\mathrm{SU}(2)\neq\mathrm{SO}(3)$. 与此类似, 群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与固有洛伦兹群 $L_+^\uparrow$ 有相同李代数, 但两群只同态不同构. 存在 2 对 1 的李群同态映射 $\pi:\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to L_+^\uparrow$.

[选读 G-6-1]

把 $U\in\mathrm{U}(2)$ 表为 $U=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则 $U^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$, 其中 $\Delta\equiv\det U=ad-bc$, 故酉条件 $\overline{U^{\mathrm{T}}}=U^{-1}$ 等价于
$$\bar a=\frac{d}{\Delta},\quad \bar c=-\frac{b}{\Delta},\quad \bar b=-\frac{c}{\Delta},\quad \bar d=\frac{a}{\Delta}. \tag{G-6-16}$$
注意到 $\Delta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\ (\phi\in\mathbb{R})$, 可知(G-6-16)中只有前二式独立. 此二式相当于 4 个独立实数方程, 可见与 4 个复数 a,b,c,d 相应的 8 个实数中只有 4 个独立. 这就验证了 $\dim\mathrm{U}(2)=2^2$. 进一步, 若 $U\in\mathrm{SU}(2)$, 则 $\Delta=1$ 又给出一个实数方程, 故 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 只由3个实数决定. 条件 $\Delta=1$ 与式(G-6-16)结合得 $d=\bar a,\ c=-\bar b$, 故 $U=\begin{bmatrix}a&b\\-\bar b&\bar a\end{bmatrix}$, 于是有 $a\bar a+b\bar b=1$. 设
$$a=a_1+\mathrm{i}a_2,\quad b=b_1+\mathrm{i}b_2,\quad (a_1,a_2,b_1\,b_2\in\mathbb{R})$$
则 $a\bar a+b\bar b=1$ 等价于 $a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2=1$. 可见 SU(2) 的流形是 $\mathbb{R}^4$ 中的 3 维球面

(超曲面)S^3，它既是连通的，又是单连通的. 把 $e \in S^3$ 看作“北极点”，则 S^3 可被分为南、北半“球面”(图 G-5). 把“赤道” $\mathscr{S}$(2 维球面)上每对位于同一直径两端的点(如 U_1 和 U_1')认同，认同后的 $\mathscr{S}$ 与北半球面之并就同胚于李群 SO(3) 的流形 [见式 (G-5-16) 后关于 SO(3) 群流形的讨论]. 正文提到的同态映射 $\pi: SU(2) \to SO(3)$ 是这样的 2 对 1 映射，设 $U \in SU(2)$ 是北半球面的一点，$U' \in SU(2)$ 是南半球面与 U 对径的点($U' = -U$)，则 $\pi(U) = \pi(U') = U$ [看作 SO(3) 的群元 Z]. (以上只是直观描述，本选读未有严格证明.) $\mathscr{S}$ 上点的认同使 SO(3) 变得非单连通. 为看出这点，仍用原来对 SO(3) 流形的描述(即对径认同后的 3 维球体)来讨论. 先考虑连续闭合曲线 $\mu: [0,1] \to SO(3)$，其像是 SO(3) 球体的一条半径的一部分，两个关键点是 $e = \mu(0) = \mu(1)$ 和 $g = \mu(1/2)$ (见图 G-6(a))，它显然可通过连续变形缩为一点 e [指独点线 e，即满足 $\mu(t) = e\ \forall t \in [0,1]$ 的映射 $\mu: [0,1] \to SO(3)$]. 再考虑连续闭曲线 $\nu: [0,1] \to SO(3)$，其像是球体的一条直径，两个关键点是球心 e 和球面上点 h，满足 $e = \nu(0) = \nu(1)$，$h = \nu(1/2)$ (见图 G-6(b))，这闭合曲线不能通过连续变形缩为一点. 可见 SO(3) 为非单连通流形.

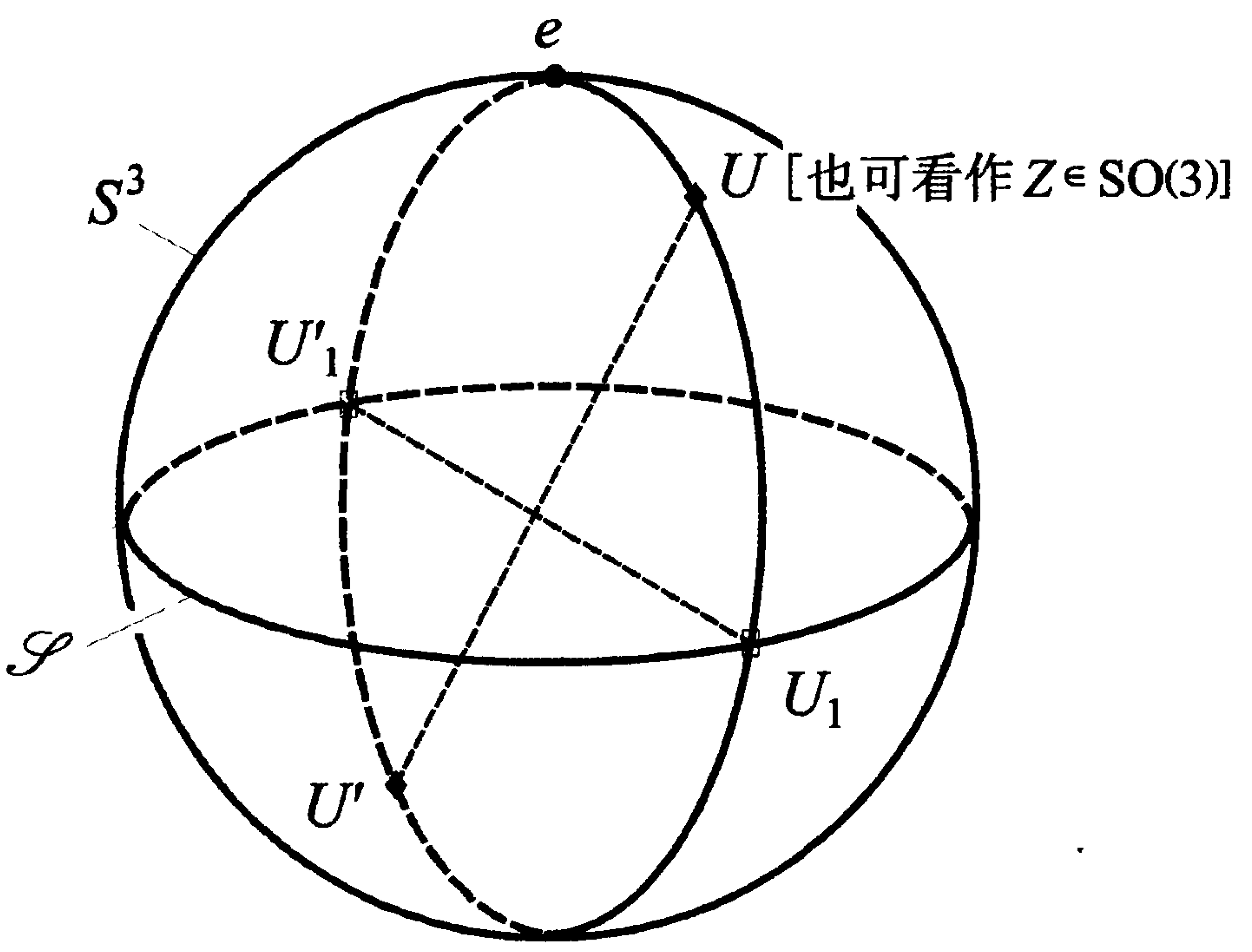
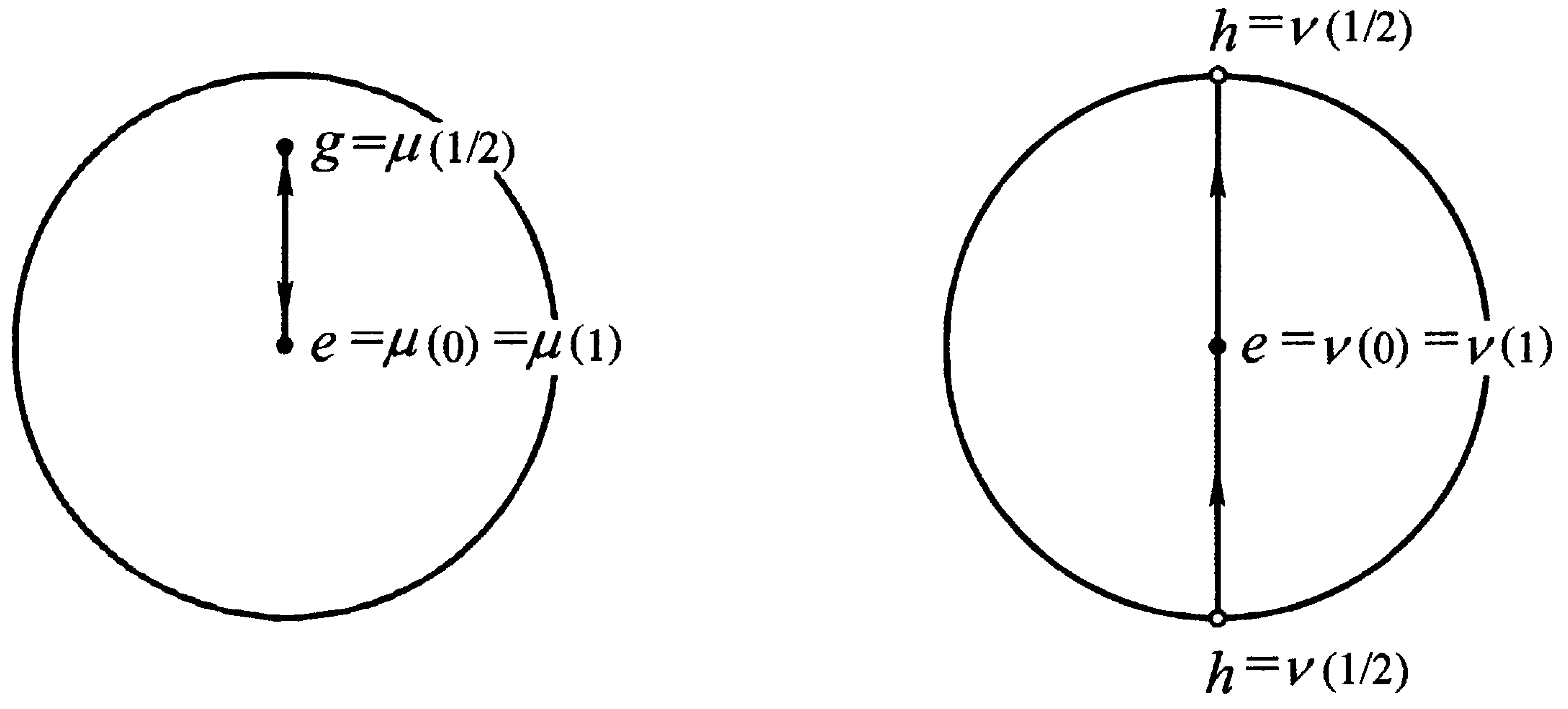


图 G-5 SU(2) 群的流形是 $\mathbb{R}^4$ 中的 S^3 (图中压缩掉一维). 把赤道 $\mathscr{S}$ (2 维球面)上每对位于同一直径两端的点(如 U_1 和 U_1')认同后与北半球面之并就是 SO(3) 群的流形

设 M 为连通流形. M 中两条连续闭合曲线 C_1, C_2 称为彼此**同伦的**(homotopic)，若 C_1 可连续变形为 C_2. M 中所有连续闭曲线可被分为若干同伦类. 任何单连通流形中的连续闭曲线都只有一个同伦类，而流形 SO(3) 中的连续闭曲线却有两个同伦类，分别以独点线 e 和图 G-6(b)的闭曲线为代表. 有趣的是，考虑连续闭曲线 $\xi: [0,1] \to SO(3)$，其像仍是一条直径，但满足 $e = \xi(0) = \xi(1/2) = \xi(1)$ [$\xi(t)$ 在该直径上沿同一方向扫描两次]，则它竟然与独点线 e 同伦，即它(指曲线映射的像)能连续变形为点 e. 有兴趣的读者请自证.



(a) 闭曲线 ege 可连续缩为一点　　(b) 闭曲线 ehe 不可连续缩为一点

图 G-6　流形(李群)SO(3)的两条不同类型(不同伦)的闭曲线

最后，我们给出映射 $\pi: \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 的定量建立过程并证明其 2 对 1 同态性.利用 $\mathscr{SU}(2)$ 的基底 $\{E_i = -\mathrm{i}\tau_i/2\}$ (见例 4)可对每一 $\vec{v} \equiv (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ 构造一个

$$\vec{v} \cdot \vec{E} \equiv v^i E_i \in \mathscr{SU}(2).$$

给定 $U \in \mathrm{SU}(2)$ 后，令 $A \equiv U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}$(矩阵连乘)，则由 SU(2) 及 $\mathscr{SU}(2)$ 元素的条件易证 $A^\dagger = -A$，故 $A \in \mathscr{SU}(2)$，可用 $\{E_i\}$ 展开，即存在唯一的 $\vec{v}' \equiv (v'^1, v'^2, v'^3) \in \mathbb{R}^3$ 使

$$U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1} = \vec{v}' \cdot \vec{E}. \tag{G-6-17}$$

这表明每一 $U \in \mathrm{SU}(2)$ 诱导出一个映射 $Z: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, Z(\vec{v}) \equiv \vec{v}'$. 现在证明 $Z \in \mathrm{SO}(3)$.由 $E_i = -\mathrm{i}\tau_i/2$(其中 τ_i 见例 4)易得 $\det(\vec{v} \cdot \vec{E}) = |\vec{v}|^2/4$,故

$$|Z\vec{v}|^2 = 4\det[(Z\vec{v}) \cdot \vec{E}] = 4(\det U)(\det \vec{v} \cdot \vec{E})(\det U^{-1}) = |\vec{v}|^2,$$

[第二步用到式(G-6-17).] 说明 $Z: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 保长度，因而 $Z \in \mathrm{O}(3)$. 为证 $Z \in \mathrm{SO}(3)$ 只须再证 $\det Z > 0$. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ 有

$$[\vec{u} \cdot \vec{E},\ \vec{v} \cdot \vec{E}] = u^i v^j [E_i, E_j] = u^i v^j \varepsilon^k{}_{ij} E_k = (\vec{u} \times \vec{v})^k E_k = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{E}, \tag{G-6-18}$$

故

$$Z(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{E} = U[(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{E}]U^{-1} = U[\vec{u} \cdot \vec{E},\ \vec{v} \cdot \vec{E}]U^{-1} = [U(\vec{u} \cdot \vec{E})U^{-1}, U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}]$$

$$= [(Z\vec{u}) \cdot \vec{E}, (Z\vec{v}) \cdot \vec{E}] = [(Z\vec{u}) \times (Z\vec{v})] \cdot \vec{E},$$

[第一、四步用到式(G-6-17), 第二、五步用到式(G-6-18), 第三步用到矩阵对易子运算.] 于是 $Z(\vec{u} \times \vec{v}) = (Z\vec{u}) \times (Z\vec{v})$，说明 Z 把右手系变为右手系，故 $\det Z > 0$，从而 $Z \in \mathrm{SO}(3)$. 可见存在映射 $\pi: \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3), \pi(U) \equiv Z$.下面证明 π 是 2 对 1 映射,

事实上，我们要证明比此略强的结论，即 $\forall U, U' \in \mathrm{SU}(2)$ 有

$$\pi(U') = \pi(U) \Leftrightarrow U' = \pm U .$$

令 $Z \equiv \pi(U), Z' \equiv \pi(U')$，则由式(G-6-17)得

$$(Z\vec{v}) \cdot \vec{E} = U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}, \quad (Z'\vec{v}) \cdot \vec{E} = U'(\vec{v} \cdot \vec{E})U'^{-1}, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 . \qquad \text{(G-6-19)}$$

若 $U' = \pm U$，则上式导致

$$(Z'\vec{v}) \cdot \vec{E} = (\pm U)(\vec{v} \cdot \vec{E})(\pm U^{-1}) = U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1} = (Z\vec{v}) \cdot \vec{E} ,$$

故 $Z'\vec{v} = Z\vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$，因而 $Z' = Z$，即 $\pi(U') = \pi(U)$。反之，若 $\pi(U') = \pi(U)$，则式(G-6-19)导致 $U'(\vec{v} \cdot \vec{E})U'^{-1} = U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}$，所以

$$U^{-1}U'(\vec{v} \cdot \vec{E}) = (\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}U', \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 . \qquad \text{(G-6-20)}$$

作为 2×2 复矩阵，$U^{-1}U'$ 总可表为 I, E_1, E_2, E_3 的(实的)线性组合，即 $\exists \alpha^0, \alpha^i \in \mathbb{R}$ 使 $U^{-1}U' = \alpha^0 I + \alpha^i E_i$。取 $\vec{v}$ 使 $\vec{v} \cdot \vec{E} = E_1$，代入式(G-6-20)后不难得到 $\alpha^2 = \alpha^3 = 0$，同法可证 $\alpha^3 = \alpha^1 = 0$，故 $U^{-1}U' = \alpha^0 I$，因而 $\alpha^0 = \det(U^{-1}U'), |\alpha^0| = 1, \alpha^0 = \pm 1$。于是 $U^{-1}U' = \pm I, U' = \pm U$。最后证明 π 为同态映射。把式(G-6-17)改写为

$$[\pi(U)\vec{v}] \cdot \vec{E} = U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1} ,$$

则 $\forall U' \in \mathrm{SU}(2)$ 有

$$[\pi(U')\pi(U)\vec{v}] \cdot \vec{E} = U'[(\pi(U)\vec{v}) \cdot \vec{E}]U'^{-1} = U'[U(\vec{v} \cdot \vec{E})U^{-1}]U'^{-1}$$

$$= (U'U)(\vec{v} \cdot \vec{E})(U'U)^{-1} = [\pi(U'U)\vec{v}] \cdot \vec{E} ,$$

故 $\pi(U')\pi(U) = \pi(U'U) \ \forall U', U \in \mathrm{SU}(2)$，所以 $\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是同态(而且是李群同态)。 **[选读 G-6-1 完]**

§G.7 李变换群和 Killing 矢量场

把流形 M 上的单参微分同胚群 $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ 中的 1 维阿贝尔李群 $\mathbb{R}$ 推广为任意李群 G 便有如下定义.

定义 1 设 G 是李群，M 是流形. C^∞ 映射 $\sigma : G \times M \to M$ 称为 M 上的一个**李变换群**(Lie group of transformations)，若

(a) $\forall g \in G, \ \sigma_g : M \to M$ 是微分同胚；

(b) $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h, \ \forall g, h \in G$.

容易验证 $\{\sigma_g \mid g\in G\}$ 以映射的复合为群乘法构成群, 恒等元就是从 M 到 M 的恒等映射(等于 σ_e, 其中 e 为 G 的恒等元), 且 $(\sigma_g)^{-1}=\sigma_{g^{-1}}\ \forall g\in G$. 有些文献把 $\{\sigma_g \mid g\in G\}$ 称为李变换群(我们有时也用这一称谓), 有些则把 G 称为李变换群. $\forall p\in M$, 有 $\sigma_p: G\to M$. σ_p 和 σ_g 都是由 σ 诱导出的映射, 三者关系为

$$\sigma_p(g)=\sigma(g,p)=\sigma_g(p),\quad \forall g\in G, p\in M. \tag{G-7-1}$$

李群按定义是一个高度抽象的概念, 而李变换群却比较具体: 它的群元 σ_g 是流形 M 上的点变换(微分同胚). 例如, 抽象定义的李群 SO(3) 若借用一个 2 维球面 S^2 来想象就变得具体: 每一 $g\in SO(3)$ 对应于 S^2 上这样一个点变换, 它让 S^2 的每点绕过球心的同一轴转同一角. 事实上, 定义 1 条件(b)保证存在从李群 $G=\{g\}$ 到李变换群 $\{\sigma_g\}$ 的同态映射, 所以后者的确可看作前者的具体化. 于是有以下定义:

定义 2 从李群 $G=\{g\}$ 到李变换群 $\{\sigma_g: M\to M \mid g\in G\}$ 的上述同态映射 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个**实现**(realization), M 称为**实现空间**. 若此同态为同构, 则称为**忠实**(faithful)**实现**.

注 1 因为每一 $g\in G$ 对应于一个左平移映射 $L_g: G\to G$ (看作 $\sigma_g: M\to M$, 其中 $M=G$), 所以映射 $G\to\{L_g \mid g\in G\}$ 是 G 的一个实现(实现空间就是 G 本身), 而且是忠实实现.

定义 3 李群 G 在流形 M 上的一个实现 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个**表示**(representation), 若 M 是矢量空间且 $\sigma_g: M\to M\ (\forall g\in G)$ 是线性变换. 这时称 M 为**表示空间**. 往往也把映射 $G\to\{\sigma_g\}$ 的像 $\{\sigma_g\}$ 称为 G 的表示(但应注意不同映射有相同像的情况). 若忠实实现是表示, 则称为**忠实表示**.

注 2 ①可见 G 的每一表示 $\{\sigma_g\}$ 可看作一个矩阵群. ②因为 S^2 不是矢量空间, 把 SO(3) 的群元看作 S^2 上的转动这种对应关系只是实现而非表示. 但若选 $M=\mathbb{R}^3$, 则 SO(3) 的每一群元对应于 $\mathbb{R}^3$ 上的这样一个微分同胚, 它让每点绕过原点的同一轴转同一角. 这种对应关系就是一个表示, 而且是忠实表示.

设 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是 G 的、与 $A\in V_e$ 对应的单参子群, 则 $\{\gamma(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 是 G 中的曲线. 把群 $\{\sigma_g \mid g\in G\}$ 中 g 的取值范围限制在曲线 $\gamma(t)$ 上便得子集 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$, 其中每个 $\sigma_{\gamma(t)}:\ M\to M$ 都是微分同胚, 而且 $\sigma_{\gamma(t)}\circ\sigma_{\gamma(s)}=\sigma_{\gamma(t)\gamma(s)}=\sigma_{\gamma(t+s)}$, 可见 G 的每一单参子群决定 M 上的一个单参微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$. 我们想找出与之对应的 C^∞ 矢量场(记作 $\bar{\xi}$). 因为 $\bar{\xi}$ 的积分曲线与单参微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$ 的轨道重合, 所以 $\forall p\in M$, $\bar{\xi}_p$ 等于过 p 点的轨道在 p 点的切矢. 群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$ 过

p 的轨道是点集 $\{\sigma_{\gamma(t)}(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$，而 $\sigma_{\gamma(t)}(p) = \sigma(\gamma(t), p) = \sigma_p(\gamma(t))$ [式(G-7-1)]，于是(见图 G-7)

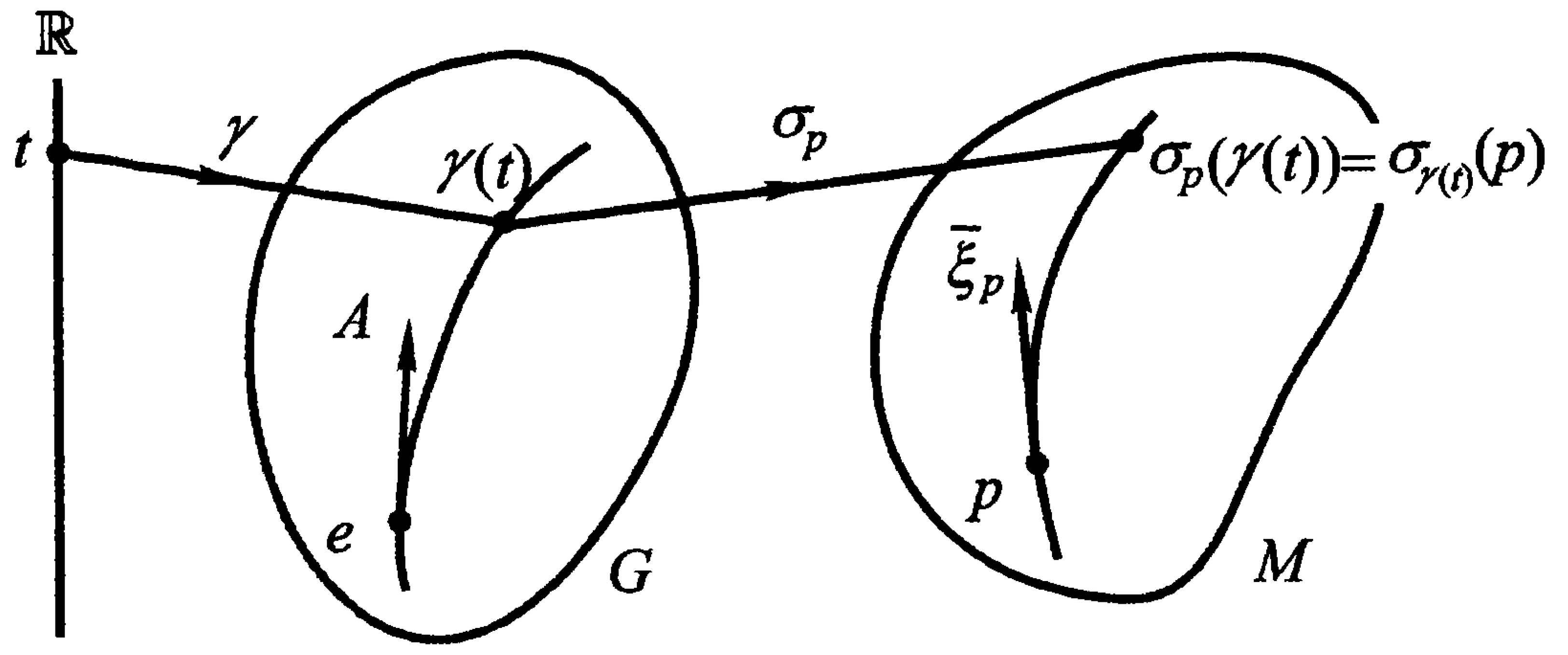


图 G-7 每一 $A \in V_e$ 给出 M 上一个矢量场 $\bar{\xi}$，其在 $p \in M$ 的值 $\bar{\xi}_p$ 由式(G-7-2)决定.

$$\bar{\xi}_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sigma_p(\gamma(t)) = \sigma_{p*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = \sigma_{p*} A . \tag{G-7-2}$$

可见，给定李变换群 $\sigma: G \times M \to M$ 后，G 的李代数 V_e 的每一元素 A 对应于 M 上的一个 C^∞ 矢量场 $\bar{\xi}$，故有映射 $\chi: V_e \to \{\bar{\xi}\}$. 为理解 $\{\bar{\xi}\}$ 的意义，先看一类特殊情况：M 是带度规 g_{ab} 的流形，G 是 (M, g_{ab}) 的等度规群，李变换群 $\sigma: G \times M \to M$ 的每一 $\sigma_g: M \to M$ 是等度规映射. 这时 G 的每一单参子群 $\gamma(t)$ 产生的单参微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 升格为单参等度规群，其轨道的切矢 $\bar{\xi}$ 就是 (M, g_{ab}) 上的 Killing 矢量场，即 $\{\bar{\xi}\} \subset \mathscr{K}$ [$\mathscr{K}$ 代表 (M, g_{ab}) 上全体 Killing 场构成的矢量空间]，故 χ 可看作映射 $V_e \to \mathscr{K}$ (可证其为线性映射). 以矢量场对易子为 $\mathscr{K}$ 的李括号(此处用到第 4 章习题 13 的结论，即 Killing 场的对易子也是 Killing 场)，则 $\mathscr{K}$ 成为李代数，且可证明[见 Marsden et al.(1994)命题 9.3.6] $\chi: V_e \to \mathscr{K}$ 对李括号保到只差一个负号的程度：

$$\chi([A,B]) = -[\chi(A), \chi(B)], \qquad \forall A, B \in V_e . \tag{G-7-3}$$

用下式定义新映射 $\psi: V_e \to \mathscr{K}$：

$$\psi(A) := -\chi(A), \qquad \forall A \in V_e , \tag{G-7-4}$$

则易见 ψ 保李括号，即

$$\psi([A,B]) = [\psi(A), \psi(B)], \qquad \forall A, B \in V_e , \tag{G-7-5}$$

故 ψ 是李代数同态. 如果每个 Killing 场都是完备矢量场，则每个都产生单参等度规群，故等度规群 G (因而 V_e)与 $\mathscr{K}$ 维数相同，$\psi: V_e \to \mathscr{K}$ 是李代数同构. 反之，不完备 Killing 场的单参等度规群 $\{\phi_t: M \to M\}$ 是只含恒等元的 0 维(而不是 1 维)李群，因为无论参数 t 取何值(只要非零)，总有 $p \in M$ 使 p 在 ϕ_t 下无像. 于是 $\dim G$ 减少而 $\dim \mathscr{K}$ 不变，导致 $\dim G = \dim V_e < \dim \mathscr{K}$，意味着 V_e 与 $\mathscr{K}$ 只同态不同构. 下面是简单特例：把 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 的一半(连边)挖去，则除了平行于切痕的那些平移 Killing 场之外的 Killing 场(含旋转 Killing 场)都不再完备，故 $\dim G = \dim V_e = 1$

(而 $\dim\mathscr{K}$ 仍为 3). 于是有

定理 G-7-1　(M,g_{ab}) 的等度规群的李代数 V_e 同构于其上全体 Killing 场的集合 $\mathscr{K}$ 的李子代数；当每一 Killing 场都完备时 $V_e=\mathscr{K}$ (李代数同构).

利用 Killing 场的对易子可方便地求得等度规群的李代数的结构常数, 我们只举例说明 V_e 同构于 $\mathscr{K}$ 时的计算过程(略去抽象指标).

例 1　3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 中的 2 维球面 (S^2,h_{ab}) (其中 h_{ab} 是 δ_{ab} 的诱导度规)的等度规群是 SO(3). (S^2,h_{ab}) 上的全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$ 是 3 维李代数, 不难验证

$$\xi_1\equiv\sin\varphi\,(\partial/\partial\theta)+\cot\theta\cos\varphi\,(\partial/\partial\varphi),$$

$$\xi_2\equiv-\cos\varphi\,(\partial/\partial\theta)+\cot\theta\sin\varphi\,(\partial/\partial\varphi),$$

$$\xi_3\equiv-\partial/\partial\varphi$$

满足 Killing 方程, 可选作 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 对易子的计算表明

$$[\xi_1,\xi_2]=\xi_3,\quad[\xi_2,\xi_3]=\xi_1,\quad[\xi_3,\xi_1]=\xi_2,\tag{G-7-6}$$

这可看作李代数 $\mathscr{SO}(3)$ 的结构常数表达式. 以 A_1,A_2,A_3 代表 $\mathscr{SO}(3)$ 的一组基矢[式(G-6-4)], 则由 $\psi(A_i)\equiv\xi_i\,(i=1,2,3)$ 定义的映射 $\psi:\mathscr{SO}(3)\to\mathscr{K}$ 正是式(G-7-4)中的那个 ψ, 与式(G-6-5)对比可知它是李代数同构.

例 2　作为 2 维欧氏空间的等度规群, 欧氏群 E(2) 的李代数 $\mathscr{E}(2)$ 同构于 $(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$ 上全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$. 设 $\{x,y\}$ 是笛卡儿系, 则

$$\xi_{t_1}\equiv-\frac{\partial}{\partial x},\quad\xi_{t_2}\equiv-\frac{\partial}{\partial y},\quad\xi_r\equiv y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\tag{G-7-7}$$

是独立的 Killing 矢量场, 可充当 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 简单的对易子计算表明

$$[\xi_{t_1},\xi_{t_2}]=0,\quad[\xi_r,\xi_{t_1}]=\xi_{t_2},\quad[\xi_r,\xi_{t_2}]=-\xi_{t_1},\tag{G-7-8}$$

这可看作李代数 $\mathscr{E}(2)$ 的结构常数表达式.

例 3　作为 4 维闵氏时空的等度规群, Poincaré群 P 的李代数 $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上全体 Killing 场的集合 $\mathscr{K}$. 设 $\{t,x,y,z\}$ 是任一洛伦兹系, 则

$$\xi_{t_0}\equiv-\frac{\partial}{\partial t},\quad\xi_{t_1}\equiv-\frac{\partial}{\partial x},\quad\xi_{t_2}\equiv-\frac{\partial}{\partial y},\quad\xi_{t_3}\equiv-\frac{\partial}{\partial z},\tag{G-7-9a}$$

$$\xi_{r_1}\equiv z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\quad\xi_{r_2}\equiv x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x},\quad\xi_{r_3}\equiv y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\tag{G-7-9b}$$

$$\xi_{b_1} \equiv t\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial t},\quad \xi_{b_2} \equiv t\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial t},\quad \xi_{b_3} \equiv t\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial t} \tag{G-7-9c}$$

是独立的 Killing 场, 可充当 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 简单的计算表明全部非零对易子为

$$[\xi_{r_i},\xi_{r_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{r_k},\ [\xi_{r_i},\xi_{b_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{b_k},\ [\xi_{b_i},\xi_{b_j}]=-\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{r_k},\ [\xi_{b_i},\xi_{t_0}]=-\xi_{t_i},$$

$$[\xi_{r_i},\xi_{t_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{t_k},\ [\xi_{b_i},\xi_{t_i}]=-\xi_{t_0}\ (\text{不对 } i \text{ 求和}),\ i,j,k=1,2,3. \tag{G-7-10}$$

上式也可浓缩地表为[其中 $l_{\mu\nu}$ 的含义同式(G-6-10)]

$$[\xi_{l_{\mu\nu}},\xi_{l_{\rho\sigma}}]=\eta_{\mu\rho}\xi_{l_{\nu\sigma}}+\eta_{\nu\sigma}\xi_{l_{\mu\rho}}-\eta_{\mu\sigma}\xi_{l_{\nu\rho}}-\eta_{\nu\rho}\xi_{l_{\mu\sigma}},$$

$$[\xi_{l_{\mu\nu}},\xi_{t_\sigma}]=\eta_{\mu\sigma}\xi_{t_\nu}-\eta_{\nu\sigma}\xi_{t_\mu},\quad \mu,\nu,\sigma=0,1,2,3. \tag{G-7-11}$$

[选读 G-7-1]

现在回到 M 上没有度规的一般情况. 正如前述, 只要 G 是李群, 仍然可以定义李变换群 $\sigma: G\times M\to M$. 参照 M 有度规且 G 是其等度规群的情况, 自然把由式(G-7-2)定义的矢量场 $\bar{\xi}$ 称为 **M 上关于李群 G 的 Killing 矢量场**(Killing vector field on M relative to Lie group G). 这时有如下结论: ① $\mathscr{K}\equiv\{\bar{\xi}\}$ 仍是矢量空间; ②仍可用矢量场对易子定义李括号使 $\mathscr{K}$ 成为李代数($\mathscr{K}$ 的任意两元素的李括号仍在 $\mathscr{K}$ 内); ③映射 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 仍在差一个负号的意义下"保李括号" [②, ③的证明见 Marsden et al.(1994)命题 9.3.6]. 然而, 如果对 $\sigma: G\times M\to M$ 不作要求, 则 $\dim\mathscr{K}$ 有可能小于 $\dim V_e$, 从而使 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 不是矢量空间之间的同构映射. 映射 $\sigma: G\times M\to M$ 称为**有效的**(effective), 若

$$\sigma_g(p)=p,\forall p\in M\ \Rightarrow\ g=e.$$

(等价于 $g\mapsto\sigma_g$ 是一一映射, 还等价于 G 在 M 上的实现是忠实的.) 可以证明, 只要 $\sigma: G\times M\to M$ 是有效的, 则 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 是矢量空间的同构映射, 于是 $\psi: V_e\to\mathscr{K}$ [按式(G-7-4)定义]就是李代数同构.

例 4 设 G 是李群, $R: G\times G\to G$ 是右平移(与左平移类似, 定义见习题 7), 用下式定义 G (看作流形 M)上的李变换群 $\sigma: G\times G\to G$ (看作 $\sigma: G\times M\to M$):

$$\sigma_g(h):=R_{g^{-1}}(h)=hg^{-1},\quad \forall g\in G, h\in M(=G),$$

设 $\bar{A}$ 是任一 $A\in\mathscr{G}$ 对应的左不变矢量场, 则可以证明(习题 18) A 在流形 $M(=G)$ 上导致的关于 G 的 Killing 矢量场 $\bar{\xi}=-\bar{A}$, 而且 $\psi: V_e\to\mathscr{K}$ (把 A 变为 $\bar{A}$)是李代数同构.

例 5 选读 12-5-1 和 12-5-2 为"M 上关于李群 G 的 Killing 矢量场"的概念

提供了两个例子.以选读 12-5-1 为例.把 BMS 群 B 看作群 G,即

$$G \equiv \{\phi : \mathscr{I}^+ \to \mathscr{I}^+ \mid \phi_* \Gamma^{ab}{}_{cd} = \Gamma^{ab}{}_{cd}\},$$

定义李变换群 $\sigma : G \times \mathscr{I}^+ \to \mathscr{I}^+$ 使 $\sigma_\phi = \phi \ \forall \phi \in G$, 则 $\mathscr{I}^+$ 上由式(G-7-2)定义的矢量场 $\bar{\xi}$ 就等于 $\mathscr{I}^+$ 上的无限小对称性 $\hat{\xi}$ (满足 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$), 于是 $\hat{\xi}$ 可称为 $\mathscr{I}^+$ 上的关于 BMS 群的 Killing 矢量场, 而 $\mathscr{K} \equiv \{\hat{\xi} \mid \mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0\}$ 以 $\mathscr{I}^+$ 上的矢量场对易子为李括号则构成李代数. 以 V_e 代表 BMS 群的李代数, 注意到映射 $\sigma : G \times \mathscr{I}^+ \to \mathscr{I}^+$ 是有效的, 便知前面定义的映射 $\psi : V_e \to \mathscr{K}$ 是李代数同构. 这就证明了选读 12-5-1 中用 $\mathscr{I}^+$ 上矢量场对易子定义李括号所得的李代数(当时称为 BMS 李代数)的确是 BMS 群的李代数.[①]　**[选读 G-7-1 完]**

§ G.8　伴随表示和 Killing 型[选读]

设 V 是 $m\,(<\infty)$ 维实矢量空间, 令

$$\mathscr{L}(V) \equiv \{\text{线性变换}\,\psi : V \to V\} \equiv \{V\,\text{上}\,(1,1)\,\text{型张量}\,\psi^a{}_b\}, \qquad \text{(G-8-1)}$$

则 $\mathscr{L}(V)$ 是 m^2 维矢量空间[就是第 2 章的 $\mathscr{T}_V(1,1)$], 任选 V 的基底后又对应于 $\mathscr{GL}(m, \mathbb{R})$, 见小节 G.5.1. 在 $\mathscr{L}(V)$ 上可自然定义乘法: $\forall \psi, \varphi \in \mathscr{L}(V)$, 其积 $\psi\varphi$ 定义为复合映射 $\psi \circ \varphi \in \mathscr{L}(V)$. 由此又可自然定义李括号映射

$$[\,,] : \mathscr{L}(V) \times \mathscr{L}(V) \to \mathscr{L}(V)$$

为

$$[\psi, \varphi] := \psi\varphi - \varphi\psi, \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{L}(V), \qquad \text{(G-8-2)}$$

从而使 $\mathscr{L}(V)$ 成为 m^2 维李代数.

定义 1　李代数同态映射 $\beta : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(V)$ 称为**李代数 $\mathscr{G}$ 的表示**.

同一李群(或李代数)可有无数表示, 本节的重点是介绍李群和李代数的伴随表示. 根据§ G.1 例 1, 用群 G 的每一元素 $g \in G$ 可构造一个称为伴随同构的自同构映射 $I_g : G \to G$. 对李群 G, 这还是个微分同胚, 因此是从 G 到 G 的李群同构. 按定义, $I_g(h) \equiv ghg^{-1} \ \forall h \in G$, 所以 $I_g(e) = e$, 它在 e 点所诱导的推前映射(切映射) I_{g*} (是 I_{g*e} 的简写)是从 V_e 到 V_e 的映射, 简记为 $\mathscr{Ad}_g$, 即 $\mathscr{Ad}_g \equiv I_{g*e}$. 因 V_e 就是 G 的李代数 $\mathscr{G}$, 故 $\mathscr{Ad}_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是 $\mathscr{G}$ 上的线性变换. 虽然 I_g 作用于 e 得 e, 但作用

① BMS 群是无限维李群, 但此处涉及的结论[包括所引的 Marsden et al.(1994)命题 9.3.6]仍适用.

于过e的曲线一般得另一曲线(两者在e点有不同切矢)，故$\mathscr{Ad}_g$作用于$A\in\mathscr{G}$未必得A.

定理 G-8-1 设$\mathscr{G}$是李群G的李代数,则$\forall g\in G, A\in\mathscr{G}$有

$$\exp(t\mathscr{Ad}_g A)=g(\exp tA)g^{-1}. \tag{G-8-3}$$

证明 令$\gamma(t)\equiv\exp(tA)$, $\gamma'(t)\equiv g(\exp tA)g^{-1}$，则由单参子群的定义式$\gamma(t+s)=\gamma(t)\gamma(s)$易证$\gamma'(t+s)=\gamma'(t)\gamma'(s)$，故$\gamma'(t)$也是单参子群. 注意到式(G-8-3)左边是由$\mathscr{Ad}_g A$生成的单参子群, 为证式(G-8-3)只须证明两边在e点的切矢相同, 证明如下:

$$右边的切矢=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[g(\exp tA)g^{-1}]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[I_g(\exp tA)]$$

$$=I_{g*}[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA)]=\mathscr{Ad}_g A=左边的切矢.$$ □

推论 G-8-2 设H是李群G的正规子群, $\mathscr{H}$是H的李代数, 则

$$\mathscr{Ad}_g B\in\mathscr{H},\quad \forall B\in\mathscr{H}, g\in G. \tag{G-8-4}$$

证明 由$B\in\mathscr{H}$可知$\exp(tB)$是H的单参子群, 由正规子群的定义(§G.1 定义7)又知$g\exp(tB)g^{-1}\subset H$，于是式(G-8-3)表明$\exp(t\mathscr{Ad}_g B)$是H的单参子群, 因而

$$\mathscr{Ad}_g B\in\mathscr{H}.$$ □

定理 G-8-3 设$\mathscr{G}$是李群G的李代数, 则$\forall A, B\in\mathscr{G}$有

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B). \tag{G-8-5}$$

注1 $\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B$在t固定时是e点的矢量, 在t变动时是t的、矢量取值的函数, 等式右边代表此函数的导函数在$t=0$的值(仍是e点的矢量), 即

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B)\equiv\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B-\mathscr{Ad}_{\exp(0)}B)]. \tag{G-8-5′}$$

证明 以$\bar{A},\bar{B}$分别代表$A,B\in\mathscr{G}$对应的左不变矢量场, $\phi:\mathbb{R}\times G\to G$代表$\bar{A}$产生的单参微分同胚群, 则由式(G-4-11)得$\phi_t(e)=\exp(tA)$，再由式(G-2-2)得$\bar{B}_{\phi_t(e)}=L_{\exp(tA)*}B$，与式(G-5-8)结合得

$$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\phi_{-t*}L_{\exp(tA)*}B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[(\phi_{-t}\circ L_{\exp(tA)})_*B]. \tag{G-8-6}$$

另一方面, 由 $I_h(g)\equiv hgh^{-1}$ 又知 $\forall g\in G$ 有

$$I_{\exp(tA)}(g)=\exp(tA)g\exp(-tA)=\phi_{-t}[\exp(tA)g]=\phi_{-t}[L_{\exp(tA)}(g)]=(\phi_{-t}\circ L_{\exp(tA)})(g),$$

[第二步用到式(G-4-11).] 所以 $I_{\exp(tA)}=\phi_{-t}\circ L_{\exp(tA)}$, 代入式(G-8-6)便得

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I_{\exp(tA)*}B)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B).$$ □

定理 G-8-4 设 H 是连通李群 G 的连通李子群, $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 H 和 G 的李代数, 则 H 是 G 的正规子群 $\Leftrightarrow\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想.

证明 (A)($\Rightarrow$的证明) 由推论G-8-2知 $\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B\in\mathscr{H}$ $\forall A\in\mathscr{G}, B\in\mathscr{H}, t\in\mathbb{R}$, 所以式(G-8-5′)右边是 $\mathscr{H}$ 的元素, 因而该式给出 $[A,B]\in\mathscr{H}$, 可见 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想.

(B)($\Leftarrow$的证明)只须由 $\mathscr{H}$ 是理想证明 $ghg^{-1}\in H\ \ \forall h\in H, g\in G$. 若 h 可表为 $h=\exp(B), B\in\mathscr{H}$, 则 $ghg^{-1}=g(\exp B)g^{-1}=\exp(\mathscr{Ad}_g B)\in H$ [其中第二步用到式(G-8-3)]. 然而 h 未必能表为 $\exp(B)$, 这使证明变得复杂. 幸好有这样的命题[用选读G-4-1的结论配以Warner(1983)的3.18可证]: 只要 H 是连通李群的连通李子群, 则 $\forall h\in H, \exists B_1, B_2,\cdots\in\mathscr{H}$ 使 $h=(\exp B_1)(\exp B_2)\cdots$ (有限个指数之积). 所以

$$ghg^{-1}=g(\exp B_1)g^{-1}g(\exp B_2)g^{-1}\cdots=h_1h_2\cdots\in H,$$

其中 $h_n\equiv g(\exp B_n)g^{-1}\in H, n\in\mathbb{N}$. □

注2 可见理想在李代数理论中的角色相当于正规子群在群论中的角色.

由推前映射的线性性可知 $I_{g*}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{G}$ 上的线性映射, 故 $\mathscr{Ad}_g\in\mathscr{L}(\mathscr{G})$ [$\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的含义见式(G-8-1)]. $I_g: G\to G$ 是微分同胚还保证 $I_{g*}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是同构映射(见第4章习题4),① 当然有逆, 所以

$$\mathscr{Ad}_g\in\{\mathscr{G}\text{上可逆线性变换}\}\subset\mathscr{L}(\mathscr{G}).\tag{G-8-7}$$

既然每一 $g\in G$ 对应于一个 $\mathscr{Ad}_g$, 便有从 G 到 $\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$的映射, 记作 $\mathscr{Ad}$, 即

$$\mathscr{Ad}: G\to\{\mathscr{G}\text{上可逆线性变换}\}.\tag{G-8-8}$$

选定基底后 $\mathscr{G}$ 上的每个可逆线性变换对应于一个可逆矩阵, 故$\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$对应于一个矩阵群[就是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, 其中 $m\equiv\dim(G)$]. 下面证明 $\mathscr{Ad}$ 是同态映射, 因而是李群 G 的表示.

定理 G-8-5 $\mathscr{Ad}: G\to\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$是同态映射.

---

① 其实 $I_{g*}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 不止是矢量空间同构而且是李代数同构, 证明见习题23, 有提示.

证明 不难证明$\forall g,h\in G$有$I_{gh}=I_g\circ I_h$，故

$$\mathscr{Ad}_{gh}=I_{gh*}=(I_g\circ I_h)_*=I_{g*}\circ I_{h*}=\mathscr{Ad}_g\circ\mathscr{Ad}_h, \tag{G-8-9}$$

[其中第三步用到第4章习题5(b).] 同态性于是得证. □

定义2 同态映射$\mathscr{Ad}:G\to\{\mathscr{G}$上可逆线性变换$\}$称为**李群$G$的伴随表示**(adjoint representation).

至今已讲过三个与“伴随”有关的映射，即$I_g:G\to G$；$\mathscr{Ad}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$；$\mathscr{Ad}:G\to\{\mathscr{G}$上可逆线性变换$\}$. 现在介绍第四个，即$\mathrm{ad}_A:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$(其中$A$不是群元而是代数元：$A\in\mathscr{G}$)，定义为

$$\mathrm{ad}_A(B):=[A,B],\quad \forall B\in\mathscr{G}\ (\text{右边方括号代表}\mathscr{G}\text{的李括号}). \tag{G-8-10}$$

由李括号的线性性可知$\mathrm{ad}_A:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$有如下两个性质：

(a) $\forall B_1,B_2\in\mathscr{G}$，$\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$有$\mathrm{ad}_A(\beta_1B_1+\beta_2B_2)=\beta_1\mathrm{ad}_A(B_1)+\beta_2\mathrm{ad}_A(B_2)$，

(b) $\forall A_1,A_2\in\mathscr{G}$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$有$\mathrm{ad}_{\alpha_1A_1+\alpha_2A_2}=\alpha_1\mathrm{ad}_{A_1}+\alpha_2\mathrm{ad}_{A_2}$.

性质(a)表明ad_A是$\mathscr{G}$上的线性变换，即$\mathrm{ad}_A\in\mathscr{L}(\mathscr{G})$，也可看作$\mathscr{G}$上的(1,1)型张量，所以式(G-8-10)在补上抽象指标后又可用$\mathscr{G}$的结构张量$C^c{}_{ab}$改写为

$$(\mathrm{ad}_A)^c{}_bB^b\equiv[A,B]^c=C^c{}_{ab}A^aB^b,\quad \forall B^b\in\mathscr{G},$$

从而给出张量$(\mathrm{ad}_A)^c{}_b$在甩掉作用对象B^b后的表达式

$$(\mathrm{ad}_A)^c{}_b=A^aC^c{}_{ab}. \tag{G-8-11}$$

映射ad_A(其中$A\in\mathscr{G}$)虽不同于$\mathscr{Ad}_g$(其中$g\in G$)，但两者有如下密切关系[证明见Sagle and Walde(1973)]:

$$\mathscr{Ad}_{\exp(A)}=\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A), \tag{G-8-12}$$

其中$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A)$的含义是

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A)\equiv\delta+\mathrm{ad}_A+\frac{1}{2!}(\mathrm{ad}_A)^2+\frac{1}{3!}(\mathrm{ad}_A)^3+\cdots, \tag{G-8-13}$$

这可看作$\mathscr{G}$上的(1,1)型张量等式，δ代表恒等映射(即$\delta^a{}_b$)，$(\mathrm{ad}_A)^2$代表$(\mathrm{ad}_A)^a{}_c(\mathrm{ad}_A)^c{}_b$，等等. 因$\mathrm{ad}_A$可看作抽象李代数$\mathscr{L}(\mathscr{G})$的元素，$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A)$也可理解为$\exp(\mathrm{ad}_A)$，即李代数$\mathscr{L}(\mathscr{G})$相应的(单连通)李群上的指数映射. 这一理解与用幂级数[式(G-8-13)]的理解等价.

既然每一$A\in\mathscr{G}$对应于一个$\mathrm{ad}_A\in\mathscr{L}(\mathscr{G})$，便有从$\mathscr{G}$到$\mathscr{L}(\mathscr{G})$的映射(与“伴随”有关的第五个映射)，记作$\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$，$\mathrm{ad}_A$的性质(b)表明ad为线性映射. 由李括号所满足的雅可比恒等式易证(习题)ad_A满足

$$\mathrm{ad}_{[A,B]}=\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B-\mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A,\quad \forall A,B\in\mathscr{G}, \tag{G-8-14}$$

即 $\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 保李括号, 因而是同态映射.

定义 3 　同态映射 $\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 称为**李代数** $\mathscr{G}$ **的伴随表示**.

注意到 {$\mathscr{G}$ 上可逆线性变换} $\subset\mathscr{L}(\mathscr{G})$, 也可写 $\mathscr{Ad}:G\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$. 由 $\mathscr{Ad}_e:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是恒等映射可知 $\mathscr{Ad}(e)$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 中的单位矩阵 I , 故 $\mathscr{Ad}:G\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 在点 $e\in G$ 诱导出推前映射 $\mathscr{Ad}_*:V_e\to V_I$. 注意到 $V_e=\mathscr{G}$ 以及矢量空间 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 可与其中任一点的切空间(现在取 V_I)认同, 便有 $\mathscr{Ad}_*:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$, 即映射 $\mathscr{Ad}_*$ 与 ad 有相同的定义域和值域. 下面证明它们是相等的映射.

定理 G-8-6 　映射 $\mathscr{Ad}_*:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 与 $\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 相等.

证明 　只须证 $\mathscr{Ad}_*A=\mathrm{ad}_A\ \forall A\in\mathscr{G}$, 为此只须证 $(\mathscr{Ad}_*A)(B)=\mathrm{ad}_A(B)\ \forall A,B\in\mathscr{G}$. 因

$$\mathscr{Ad}_*A=\mathscr{Ad}_*[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathscr{Ad}(\exp tA)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathscr{Ad}_{\exp(tA)},$$

故

$$(\mathscr{Ad}_*A)(B)=[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}](B)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{Ad}_{\exp(tA)}B)=[A,B]=\mathrm{ad}_A(B),$$

其中第三步用到定理 G-8-3. □

利用 $\mathscr{G}$ 的伴随表示可定义映射 $K:\mathscr{G}\times\mathscr{G}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$K(A,B):=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B),\qquad \forall A,B\in\mathscr{G}. \tag{G-8-15}$$

其中 $\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B$ 代表两个线性变换的相继作用, 也可用抽象指标表为

$$(\mathrm{ad}_A)^a{}_c(\mathrm{ad}_B)^c{}_b=(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)^a{}_b,$$

而 $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)$ 则代表 $(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)^a{}_a$, 即 (1,1) 型张量 $(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)^a{}_b$ 的迹. 由式(G-8-15)可知 K 是把 $\mathscr{G}$ 上两个矢量 A,B 变为一个实数的对称双线性映射, 因而是 $\mathscr{G}$ 上的 (0,2) 型对称张量, 在李代数理论中被称为 $\mathscr{G}$ 上的 **Killing 型**(Killing form). 由式(G-8-14)不难证明(习题)

$$K([A,B],C)=K(A,[B,C]),\quad \forall A,B,C\in\mathscr{G}. \tag{G-8-16}$$

提示: 利用 tr 号内方阵顺序 的可轮换性, 例如 $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CAB)=\mathrm{tr}(BCA)$.

式(G-8-15)也可借助于式(G-8-11)表为

$$K(A,B)=(\mathrm{ad}_A)^a{}_b(\mathrm{ad}_B)^b{}_a=C^a{}_{cb}C^b{}_{da}A^cB^d, \tag{G-8-17}$$

另一方面，$K(A,B)$ 又可用抽象指标表为 $K_{cd}A^cB^d$，与上式结合便得

$$K_{cd}=C^a{}_{cb}C^b{}_{da}. \tag{G-8-18}$$

K_{ab} 的对称性使它有可能充当矢量空间 $\mathscr{G}$ 上的度规，但为此还须 K_{ab} 非退化. 可以证明(参见专讲李代数的教材)，K_{ab} 非退化的充要条件是 $\mathscr{G}$ 为半单李代数(见§G.3 定义 5). 所以半单李代数 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型 K_{ab} 可充当 $\mathscr{G}$ 的度规，称为**嘉当度规**. K_{ab} 的号差原则上因 $\mathscr{G}$ 而异，不过物理中遇到的李代数的 K_{ab} 多数是负定的，因而存在正交归一基底 $\{(E_\mu)^a\}$ 使 $K_{\mu\nu}=K_{ab}(E_\mu)^a(E_\nu)^b=-\delta_{\mu\nu}$.

嘉当度规 K_{ab} 的一大用处是给结构常数 $C^\sigma{}_{\mu\nu}$ 降指标，即可定义

$$C_{\rho\mu\nu}\equiv K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}. \tag{G-8-19}$$

定理 G-8-7　$C_{\rho\mu\nu}=C_{[\rho\mu\nu]}$.

证明　下标本来就反称，故只须证 $C_{\rho\mu\nu}=-C_{\mu\rho\nu}$，即 $K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}=-K_{\mu\sigma}C^\sigma{}_{\rho\nu}$. 注意到 $K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}=K(E_\rho,E_\sigma)C^\sigma{}_{\mu\nu}=K(E_\rho,C^\sigma{}_{\mu\nu}E_\sigma)=K(E_\rho,[E_\mu,E_\nu])$，只须证

$$K(E_\rho,[E_\mu,E_\nu])=-K(E_\mu,[E_\rho,E_\nu]),$$

利用式(G-8-16)及 $[E_\rho,E_\mu]=-[E_\mu,E_\rho]$ 立即得证. □

李代数 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型是用伴随表示 ad 定义的，但可自然推广到任何表示 $\beta:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(V)$. 在 $\mathscr{G}$ 上定义对称双线性映射 $\tilde{K}:\mathscr{G}\times\mathscr{G}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\tilde{K}(A,B):=\mathrm{tr}\,[\beta(A)\beta(B)],\qquad \forall A,B\in\mathscr{G}. \tag{G-8-20}$$

当 β 为伴随表示 ad 时 $\tilde{K}$ 回到 K. 与 K 类似，$\tilde{K}$ 也可看作 $\mathscr{G}$ 上的 (0,2) 型对称张量，故也可记作 $\tilde{K}_{ab}$. 当李代数 $\mathscr{G}$ 及其表示 β 满足适当条件时 $\tilde{K}_{ab}$ 非退化，这时就可充当 $\mathscr{G}$ 上的度规，不妨称为**广义嘉当度规**. 不难证明式(G-8-16)也适用于 $\tilde{K}$，即

$$\tilde{K}([A,B],C)=\tilde{K}(A,[B,C]),\quad \forall A,B,C\in\mathscr{G}. \tag{G-8-21}$$

§G.9　固有洛伦兹群和洛伦兹代数

G.9.1　固有洛伦兹变换和固有洛伦兹群

洛伦兹群是由洛伦兹变换引出的. 洛伦兹变换是 4 维闵氏时空中从一个惯性坐标系(洛伦兹系)到另一惯性坐标系的坐标变换. 读者熟悉的洛伦兹变换

$$\begin{gathered}t'=\gamma(t-vx),\quad x'=\gamma(x-vt),\quad y'=y,\quad z'=z,\\ -1<v<1,\quad \gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}\end{gathered} \tag{G-9-1}$$

所涉及的两个惯性坐标系满足如下条件(见图 G-8):①空间坐标原点在$t'=t=0$时重合; ②$\{x',y',z'\}$系相对于$\{x,y,z\}$系以 3 速率$|v|$沿x轴的正或负向匀速平动; ③空间坐标轴对应同向. 以 X 和X'分别代表由t,x,y,z和t',x',y',z'排成的列矩阵, 则式(G-9-1)可用矩阵表为

$$X'=B_x(v)X,\quad 其中\ B_x(v)=\begin{bmatrix}\gamma & -\gamma v & 0 & 0\\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\tag{G-9-1$'$}$$

令$v=\text{th}\lambda$, 则$-1<v<1$相当于$-\infty<\lambda<\infty$, $B_x(v)$可改写为

$$B_x(\lambda)=\begin{bmatrix}\text{ch}\lambda & -\text{sh}\lambda & 0 & 0\\ -\text{sh}\lambda & \text{ch}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\tag{G-9-1$''$}$$

今后也常把X作为$\{t,x,y,z\}$系的简称. 为了把条件②放宽为"X'系相对于X系的速度$\vec{V}$可取任意方向", 可先把式(G-9-1)的第二、三、四式改写为一个 3 维矢量等式. 设事件$p\in\mathbb{R}^4$在 X 和X'系的时空坐标分别为t,x,y,z和t',x',y',z', 以$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$和$\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$分别代表两系的空间坐标基矢, 则

$$\vec{R}\equiv x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,\qquad \vec{R}'\equiv x'\vec{e}'_1+y'\vec{e}'_2+z'\vec{e}'_3\tag{G-9-2}$$

分别代表事件p在两系中的位矢(图 G-9). 请注意$\vec{R}$和$\vec{R}'$是p点的切于不同 3 维子流形(Σ_t和$\Sigma_{t'}$)的矢量, 不能直接比较. 为便于描述两者的关系, 可借用一个人为引入的抽象的 3 维矢量空间$\mathscr{V}$(实的内积空间). 以$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3$代表$\mathscr{V}$的事先选定的一组正交归一基矢, 则

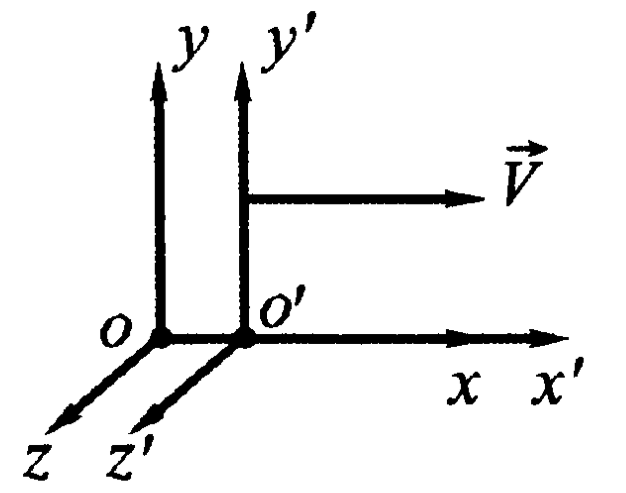


图 G-8 式(G-9-1)涉及的两个惯性坐标系的简单关系

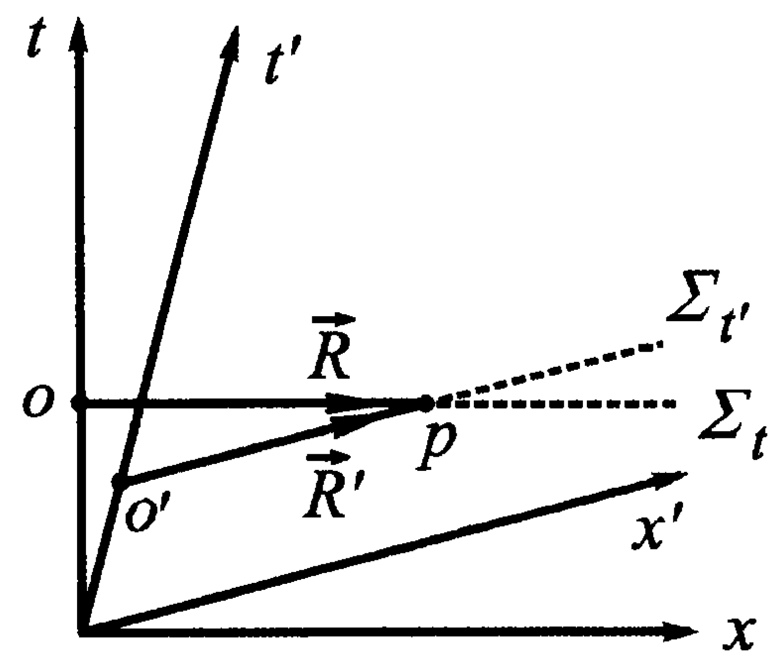


图 G-9 p在两系的位矢$\vec{R}$和$\vec{R}'$是不同 3 维流形(Σ_t和$\Sigma_{t'}$)上的切矢量. 此图只是 4 维图在$t\sim x$面的投影

$$\vec{r} \equiv x\vec{\varepsilon}_1 + y\vec{\varepsilon}_2 + z\vec{\varepsilon}_3 , \qquad \vec{r}' \equiv x'\vec{\varepsilon}_1 + y'\vec{\varepsilon}_2 + z'\vec{\varepsilon}_3 \tag{G-9-3}$$

都是$\mathscr{V}$的元素,分别称为$\vec{R}$和$\vec{R}'$在$\mathscr{V}$的像矢量. 一般而言,设$\vec{W}$是任一惯性坐标系的空间矢量, w^i是$\vec{W}$在该系的分量,则$w^i\vec{\varepsilon}_i \in \mathscr{V}$定义为$\vec{W}$的像矢量. X系测得的X'系的速度$\vec{V}$是切于Σ_t的矢量,在图 G-8 的情况下有$\vec{V} \equiv v\vec{e}_1$,故其像矢量为$\vec{v} = v\vec{\varepsilon}_1$. 利用$\vec{r}, \vec{r}'$和$\vec{v}$可把式(G-9-1)的第一至四式改写为

$$t' = \gamma(t - \vec{v}\cdot\vec{r}), \qquad \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}\left[\frac{(\gamma-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})}{v^2} - \gamma t\right], \tag{G-9-4}$$

式中所有矢量都是抽象空间$\mathscr{V}$的元素. 上式第二式是$\mathscr{V}$中的矢量等式,有明确意义. 为把式(G-9-1′)推广到$\vec{V}$取任意方向的情况,只须对X和X'系的空间坐标轴施行相同的空间转动(转后所得新系的 x 轴便不再与$\vec{V}$平行). 作为后果,位矢$\vec{R} \equiv x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, $\vec{R}' \equiv x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3$和相对速度$\vec{V} \equiv v\vec{e}_1$的分量$(x,y,z)$, (x',y',z')和$(v,0,0)$都受到一个相同的正交变换,从而像矢量$\vec{r}$, $\vec{r}'$和$\vec{v}$也都受到一个相同的逆转动(因为已约定$\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$不变). 由于坐标 t 不受空间转动影响,转动的保内积性又保证$\vec{v}\cdot\vec{r}$, $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$及$\gamma \equiv (1-v^2)^{-1/2}$在转动下不变,所以式(G-9-4)第二式右边的方括号为不变量. 加上转动映射的线性性,便知式(G-9-4)对逆转动所得的像矢量$\tilde{\vec{r}}, \tilde{\vec{r}}'$和$\tilde{\vec{v}}$同样成立,

即
$$t' = \gamma(t - \tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\vec{r}}), \qquad \tilde{\vec{r}}' = \tilde{\vec{r}} + \tilde{\vec{v}}\left[\frac{(\gamma-1)(\tilde{\vec{r}}\cdot\tilde{\vec{v}})}{v^2} - \gamma t\right]. \tag{G-9-4′}$$

上式反映两个惯性坐标系$\tilde{X}$和$\tilde{X}'$(分别由X和X'系经相同转动而得)之间的坐标变换关系,但这关系已不再满足图 G-8, 因为两者的相对速度$\vec{V}$与$\tilde{x}$轴并不平行. ($\vec{V}$与$\tilde{x}$轴可以谈及平行是因为它们都躺在欧氏空间Σ_t上,这是空间转动不改变惯性参考系的结果.) 不过,为了得到$\tilde{X}$和$\tilde{X}'$系只须对图 G-8 的X和X'系施行相同的空间转动,[这"相同"是指刻画两个转动($X \mapsto \tilde{X}$和$X' \mapsto \tilde{X}'$)的三个欧拉角(分别由X和X'系测得)对应相等]. 在这个意义上可以说$\tilde{X}$和$\tilde{X}'$系的对应空间轴"同向". 式(G-9-4′)所代表的坐标变换叫做**无转动的洛伦兹变换**(Lorentz transformation without rotation)或**伪转动**(boost). 为简单起见去掉 ~ 号,并以v_1, v_2, v_3代表像矢量的分量(即$\vec{v} \equiv v_1\vec{\varepsilon}_1 + v_2\vec{\varepsilon}_2 + v_3\vec{\varepsilon}_3$), 则式(G-9-4′)亦可表为矩阵等式$X' = B(\vec{v})X$,其中

$$B(\vec{v})=\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & 1+\dfrac{(\gamma-1)v_1^2}{v^2} & \dfrac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2} & \dfrac{(\gamma-1)v_1v_3}{v^2} \\ -\gamma v_2 & \dfrac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)v_2^2}{v^2} & \dfrac{(\gamma-1)v_2v_3}{v^2} \\ -\gamma v_3 & \dfrac{(\gamma-1)v_1v_3}{v^2} & \dfrac{(\gamma-1)v_2v_3}{v^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)v_3^2}{v^2} \end{bmatrix}. \qquad \text{(G-9-5)}$$

上式的 $B(\vec{v})$ 称为**伪转动矩阵**(由上式可见伪转动矩阵必对称)，它穷尽了惯性坐标系 X 和 X' 之间满足如下条件的坐标变换：①两系空间坐标原点在 $t'=t=0$ 时重合；② $\{x',y',z'\}$ 系相对于 $\{x,y,z\}$ 系以任意 3 速度 $\vec{V}\equiv v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$ 作匀速平动；③两系空间坐标轴对应“同向”．为便于计算，式(G-9-5)的 $B(\vec{v})$ 也可用下式表出：

$$B^0{}_0(\vec{v})=\gamma,\ B^0{}_i(\vec{v})=B^i{}_0(\vec{v})=-\gamma v^i,\ B^i{}_j(\vec{v})=B^j{}_i(\vec{v})=\delta^i{}_j+\frac{\gamma^2 v^i v_j}{1+\gamma}, \qquad \text{(G-9-5}')$$

其中 $v^i\equiv\delta^{ij}v_j=v_i$．此外，由矩阵求逆运算或物理思辨可知 $B^{-1}(\vec{v})=B(-\vec{v})$．

式(G-9-5)只给出洛伦兹变换的第一种类型(伪转动)．第二种类型的简单特例是

$$X'=R_z(\alpha)X,\ \ 其中\ R_z(\alpha)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(G-9-6)}$$

它所涉及的两个惯性坐标系之间没有相对运动(因而属于同一惯性参考系)，其作用是把 X 系的空间坐标轴绕 z 轴转角度 α．这种类型的最一般情形是把 X 系的空间坐标轴绕(过原点的)任意轴转任意角(因而所得新坐标系 X' 与 X 仍属同一惯性参考系)，其矩阵 R 为

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 \\ 0 & R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ 0 & R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{bmatrix},\ \ 其中\ \begin{bmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{bmatrix}\in SO(3). \qquad \text{(G-9-7)}$$

式(G-9-7)的洛伦兹变换叫做**转动**(rotation), 是同一惯性参考系内的坐标变换.① 最一般的洛伦兹变换可以定义如下:惯性坐标系X与X'之间的坐标变换称为**洛伦兹变换**, 若两系的空间坐标原点在$t'=t=0$时重合(亦即洛伦兹变换保持 4 维坐标原点不变). 不难看出闵氏线元在洛伦兹变换下不变, 因此所有洛伦兹变换构成群, 而且同构于小节 G.5.3 定义的洛伦兹群$L\equiv O(1,3)$. 闵氏时空的平移变换也保线元, 但 4 维坐标系原点在平移下要变, 称为**非齐次洛伦兹变换**. 上面定义的洛伦兹变换也可称为**齐次洛伦兹变换**, 齐次与非齐次洛伦兹变换构成 **Poincaré群**. 本节只讨论齐次洛伦兹变换, 即只讨论洛伦兹群L, 而且只关心L的不含反射及反演的子群, 即固有洛伦兹群$L_+^\uparrow$, 其群元可以是转动、伪转动以及两者的混合(即转动和伪转动矩阵之积), 见定理 G-9-4. 不难看出, 由全体转动组成的子集 $\text{ZD}\subset L_+^\uparrow$ 是子群, 而且同构于$SO(3)$. 还可证明 ZD 是李子群. 然而, 应该特别强调, 两个伪转动矩阵$B(\vec{v})$和$B(\vec{u})$之积$B(\vec{v})B(\vec{u})$不是对称矩阵[除非$\vec{v}$和$\vec{u}$(作为$\mathscr{V}$的矢量)平行, 见定理 G-9-5], 因而不是伪转动. 可见由全体伪转动组成的子集 $\text{WZ}\subset L_+^\uparrow$ 不是子群[这与式(G-6-9)给出的李括号表达式密切相关]. 在原子物理的早期研究中提出的托马斯进动正是 WZ 不是子群的结果(见小节 G.9.4). 不过, 由式(G-9-1″)容易验证

$$B_x(\lambda_1+\lambda_2)=B_x(\lambda_1)B_x(\lambda_2),$$

所以 WZ 的子集

$$\text{WZ}_x\equiv\{\text{形如式(G-9-1″)的矩阵}\,B_x(\lambda)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$$

是$L_+^\uparrow$的单参子群.

用转动矩阵R可对式(G-9-5)的推导过程给出一个简洁描述. 设X和X'系由简单伪转动$B_x(v)$联系, 即$X'=B_x(v)X$. 对两系施行任意转动R便得新系$\tilde{X}=RX$和$\tilde{X}'=RX'$. 由此三式易得$\tilde{X}'=RB_x(v)R^{-1}\tilde{X}=B(\vec{v})\tilde{X}$, 其中$B(\vec{v})\equiv RB_x(v)R^{-1}$就是式(G-9-5)的$B(\vec{v})$, 而且由式(G-9-4′)的推导过程可知$B(\vec{v})$中的矢量$\vec{v}$与$B_x(v)$中的实数$v$的关系为$|\vec{v}|=|v|$. 这一推导也可逆过来做, 即$\forall B(\vec{v})\in \text{WZ}$, 总可对$X$和$X'$系施行相同转动使$x$轴与$\vec{V}$同向, 从而把$B(\vec{v})$变为$B_x(v)$. 于是如下定理成立:

定理 G-9-1

(a) $B_x(v)\in \text{WZ}_x, R\in \text{ZD}\Rightarrow R^{-1}B_x(v)R\in \text{WZ}$;

(b) $B(\vec{v})\in \text{WZ}\Rightarrow \exists\, R\in \text{ZD}$ 使 $B(\vec{v})=R^{-1}B_x(v)R$, 其中$|v|=|\vec{v}|$.

---

①“转动”一词有些误导. 转动本是运动的特例, 而运动必然涉及随时间的变化. 然而此处的“转动”描述的只是两个坐标系之间的关系, 根本不涉及时间演化问题. 之所以也称之为转动, 是因为若令 X 系在某段时间内作某种转动运动便可得到 X' 系. “伪转动”也有类似问题. §7.3 的转动和伪转动才是真正的运动, 因为它们反映矢量随时间 τ 的变化(真的作转动或伪转动).

定理 G-9-2　若惯性坐标系 X 与 X' 由伪转动联系，$R\in \mathrm{ZD}$，则 $\tilde{X}\equiv RX$ 与 $\tilde{X}'\equiv RX'$ 也由伪转动联系.

证明　设 $X'=B(\vec{v})X,\ B(\vec{v})\in \mathrm{WZ}$，则定理 G-9-1(b)保证 $\exists R_0\in \mathrm{ZD}$ 使 $B(\vec{v})=R_0^{-1}B_x(v)R_0$，故 $X'=R_0^{-1}B_x(v)R_0X$，从而 $R_0X'=B_x(v)R_0X$，与 $\tilde{X}\equiv RX$，$\tilde{X}'\equiv RX'$ 结合给出 $R_0R^{-1}\tilde{X}'=B_x(v)R_0R^{-1}\tilde{X}$. 令 $R_1\equiv R_0R^{-1}$，则 $\tilde{X}'=R_1^{-1}B_x(v)R_1\tilde{X}$. 定理 G-9-1(a)保证 $R_1^{-1}B_x(v)R_1\in \mathrm{WZ}$，故 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{X}'$ 也由伪转动联系.　□

注 1　给定两个惯性参考系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 就有唯一的($\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 的)相对速度 $\vec{V}$ (是切于 $\mathscr{R}$ 系的同时面的矢量)，但却可有许多不同的伪转动矩阵 $B(\vec{v})$，这是因为 $B(\vec{v})$ 中的 $\vec{v}$ 是抽象空间 $\mathscr{V}$ 的元素，由 $\vec{V}\equiv v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$ 和 $\vec{v}\equiv v_1\vec{\varepsilon}_1+v_2\vec{\varepsilon}_2+v_3\vec{\varepsilon}_3$ 可知 $\vec{v}$ 除取决于 $\vec{V}$ 外还依赖于坐标基矢 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 的选取. 设 X 和 $\tilde{X}$ 是参考系 $\mathscr{R}$ 内的两个不同惯性坐标系，则 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 不同于 $\{\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,\tilde{\vec{e}}_3\}$，故 $\vec{v}\neq\tilde{\vec{v}}$. 由此不难理解下一定理的证明.

定理 G-9-3　$\forall B(\vec{v})\in \mathrm{WZ},\ R\in \mathrm{ZD}$ 有

$$B(R\vec{v})=RB(\vec{v})R^{-1},\tag{G-9-8}$$

左边的 $R\vec{v}\in\mathscr{V}$，其第 i 分量为 $(R\vec{v})^i=R^i{}_jv^j$.

注 2　$R\in \mathrm{ZD}$ 本是 4×4 矩阵，但 $R\vec{v}$ 中的 R 却是式(G-9-7)右边的 3×3 矩阵，不过这种“符号滥用”不影响实质，因为式(G-9-7)左边的 4×4 阵与右边的 3×3 阵一一对应.

证明　设 X 是惯性坐标系，则 $X'\equiv B(\vec{v})X$ 也是. 以 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 分别代表 X 和 X' 所属的惯性参考系，以 $\vec{V}$ 代表 $\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 的速度，则 $B(\vec{v})$ 中的 $\vec{v}$ 是 $\vec{V}$ 在 $\mathscr{V}$ 中的像矢量，即 $\vec{v}=v^i\vec{\varepsilon}_i$，其中 v^i 是 $\vec{V}$ 在 X 系的坐标基底 $\{\vec{e}_i\}$ 的分量，即 $\vec{V}=v^i\vec{e}_i$. 再令 $\tilde{X}\equiv RX$，$\tilde{X}'\equiv RX'$，则 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}'$ 分别是 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 系内的惯性坐标系，定理 G-9-2 保证 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{X}'$ 由伪转动联系. 对 $\tilde{X}$ 系而言，$\vec{V}$ 的像矢量变为 $\tilde{\vec{v}}=\tilde{v}^i\vec{\varepsilon}_i$，其中 $\tilde{v}^i$ 是 $\vec{V}$ 在 $\tilde{X}$ 系的坐标基底 $\{\tilde{\vec{e}}_i\}$ 的分量，即 $\vec{V}=\tilde{v}^i\tilde{\vec{e}}_i$. 由于坐标变换 $\tilde{X}\equiv RX$ 是线性变换，矢量 $\vec{V}$ 的坐标分量的变换方式与坐标的变换方式一样，故 $\tilde{\vec{v}}=R\vec{v}$，因而 $\tilde{X}'=B(\tilde{\vec{v}})\tilde{X}=B(R\vec{v})\tilde{X}$，再与 $\tilde{X}'=RX'=RB(\vec{v})X=RB(\vec{v})R^{-1}\tilde{X}$ 对比乃得式(G-9-8).

□

注 3[选读]　①前面讲过，设 $X'=BX,\ B\in \mathrm{WZ}$，则 X' 与 X 系的对应空间坐标轴“同向”. 现在说明对“同向”一词加引号的原因. 在 4 维语言中，x' 轴的世界面(记作 $\varDelta$)是一个 2 维面. 从 X 系看来，t 时刻的全空间由 Σ_t 代表(见图 G-9)，Σ_t 与 $\varDelta$ 的交线就是 t 时刻的 x' 轴. 我们来看 x' 轴与 x 轴平行的条件. 为简单起见可只讨论 3 维闵氏时空，并仅关心 $t=0$ 的时刻. 这时 Σ_0 是 2 维面，不难写出 $\varDelta$(由 $y'=0$ 定

义)与Σ_0(由$t=0$定义)的交线在坐标系$\{x, y\}$的方程:

$$\alpha x+\beta y=0,\ 其中\ \alpha\equiv\frac{(\gamma-1)v_2v_1}{v^2},\ \beta\equiv 1+\frac{(\gamma-1)v_2{}^2}{v^2}. \tag{G-9-9}$$

此交线与 x 轴平行当且仅当$\alpha=0$. 可见在这个意义上x'轴与x轴当$\alpha\neq 0$时不同向. 事实上, 由于不同方向有不同尺缩, X 系在$\alpha\neq 0$时认为x'轴与y'轴互不正交, 如果x', y'轴分别与x, y轴同向, 岂非x与y轴也互不正交?可见"同向"与同向在$\alpha\neq 0$时并不一致, 差别正在于前者略去了后者认为应存在的、由不同方向有不同尺缩所带来的不同向效应. 然而"同向"提法也很有用(例如, 见 G.9.4 小节), 它反映的是两个由伪转动相联系的惯性坐标系X和X'之间的这样一个重要关系(性质): 为了通过转动把两系关系变得如图 G-8, 刻画这两个转动的欧拉角必须完全相同.

② "同向"关系没有传递性: 设 $X'=B(\vec{v}_1)X$, $X''=B(\vec{v}_2)X'$, 则 $X''=B(\vec{v}_2)B(\vec{v}_1)X$. 只要$\vec{v}_1$与$\vec{v}_2$互不平行, 则$B(\vec{v}_2)B(\vec{v}_1)$不是伪转动(见定理 G-9-5), 从而$X''$与$X$系的对应空间轴不再"同向". 这正是小节 G.9.4 要讲的托马斯进动的根源.

定理 G-9-4(分解定理) $\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$, $\exists$唯一的$B(\vec{v})\in$ WZ 和$R\in$ ZD 使

$$\Lambda=B(\vec{v})R, \tag{G-9-10}$$

证明 $\Lambda\in L_+^\uparrow$保证Λ满足式(G-5-23). 依次令式中的$\sigma=\rho=0$; $\sigma=0$, $\rho=i$以及$\sigma=i$, $\rho=k$, 便得以下三式(可用作证明本定理的工具):

$$(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2=1, \tag{G-9-11a}$$

$$\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_i-\sum_j\Lambda^j{}_0\Lambda^j{}_i=0, \tag{G-9-11b}$$

$$-\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_k+\sum_j\Lambda^j{}_i\Lambda^j{}_k=\delta_{ik}. \tag{G-9-11c}$$

我们的第一个任务是对所给的$\Lambda\in L_+^\uparrow$找出$B(\vec{v})\in$ WZ 和$R\in$ ZD 使$\Lambda=B(\vec{v})R$. 若$\Lambda\in$ WZ, 则只须令$B(\vec{v})=\Lambda$, $R=I$. 式(G-9-5′)此时给出$\Lambda^0{}_0=\gamma$, $\Lambda^i{}_0=-\gamma v^i$, 即

$$\gamma=\Lambda^0{}_0,\qquad v^i=-\frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-12}$$

用式(G-9-11a)不难验证上式中的$\vec{v}$即使在$\Lambda\in L_+^\uparrow$, $\Lambda\notin$ WZ 的一般情况下仍满足亚光速条件$|\vec{v}|<1$. 因此, 对给定的任一$\Lambda\in L_+^\uparrow$, 不妨先试探性地用式(G-9-12)按式

(G-9-5)造一个 $B(\vec{v})\in \mathrm{WZ}$，再设法找适当的 $R\in \mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\vec{v})R$．此式等价于 $R=B^{-1}(\vec{v})\Lambda$，注意到 $B^{-1}(\vec{v})=B(-\vec{v})$，又等价于 $R=B(-\vec{v})\Lambda$．由式(G-9-5′)和(G-9-12)可求得 $B(-\vec{v})$ 的矩阵元用 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 的表达式：

$$B^0{}_0(-\vec{v})=\Lambda^0{}_0,\ B^i{}_0(-\vec{v})=-\Lambda^i{}_0,\ B^i{}_j(-\vec{v})=\delta^i{}_j+\frac{\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0}{1+\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-13}$$

从 $R=B(-\vec{v})\Lambda$ 出发借用式(G-9-13)和(G-9-11)做矩阵乘法便得 R 的所有矩阵元(习题)：

$$R^0{}_0=1,\quad R^0{}_i=R^i{}_0=0,\quad R^i{}_j=\Lambda^i{}_j-\frac{\Lambda^i{}_0\Lambda^0{}_j}{1+\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-14}$$

不难验证 $(R^i{}_j)$ 为正交矩阵，即 $\sum_j R^j{}_iR^j{}_k=\delta_{ik}$，可见 $R\in \mathrm{ZD}$．至此已完成第一个任务，即对 $\Lambda\in L_+^{\uparrow}$ 找到 $B(\vec{v})\in \mathrm{WZ}$ 和 $R\in \mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\vec{v})R$，其中 $\vec{v}$ 和 R 分别由式(G-9-12)和(G-9-14)给出．下面着手第二个任务，即证明分解的唯一性．设 $\exists B(\vec{v}')\in \mathrm{WZ}$，$R'\in \mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\vec{v}')R'$，则由 $B(\vec{v})R=B(\vec{v}')R'$ 得 $B(\vec{v}')=B(\vec{v})\hat{R}$ (其中 $\hat{R}\equiv RR'^{-1}\in \mathrm{ZD}$)，配以式(G-9-5′)和(G-9-7)得

$$B^i{}_0(\vec{v}')=B^i{}_0(\vec{v})\hat{R}^0{}_0+B^i{}_j(\vec{v})\hat{R}^j{}_0=B^i{}_0(\vec{v})+0=-\gamma v_i.$$

另一方面，把式(G-9-5′)直接用于 $B(\vec{v}')$ 又可得 $B^i{}_0(\vec{v}')=-\gamma' v_i'$，与上式对比给出 $\gamma' v_i'=\gamma v_i\ (i=1,2,3)$，由此可证(练习) $\vec{v}'=\vec{v}$，从而 $B(\vec{v}')=B(\vec{v})$，于是 $\hat{R}=1$，即 $R'=R$．这就证明了分解的唯一性．分解唯一性的另一证明见习题 25．　□

定理 G-9-4*(分解定理另一形式)　$\forall\Lambda\in L_+^{\uparrow}$，$\exists$ 唯一的 $\bar{R}\in \mathrm{ZD}$ 和 $B(\vec{w})\in \mathrm{WZ}$ 使

$$\Lambda=\bar{R}B(\vec{w}), \tag{G-9-15}$$

其中 $\bar{R}$ 与 $\Lambda=B(\vec{v})R$ 中的 R 相等，$\vec{w}$ 与 $\Lambda=B(\vec{v})R$ 中的 $\vec{v}$ 的关系为

$$\vec{v}=R\vec{w},\ (\text{含义是 } v^i=R^i{}_jw^j) \tag{G-9-16}$$

等价于

$$w^i=-\frac{\Lambda^0{}_i}{\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-17}$$

证明　与上一定理的证明类似，但要先把式(G-5-23)改写为上标形式．设 $\Lambda\in L_+^{\uparrow}$，则 $\Lambda^{-1}\in L_+^{\uparrow}$，把 Λ^{-1} 用作式(G-5-25)的 Λ 得 $\eta=(\Lambda^{\mathrm{T}})^{-1}\eta\Lambda^{-1}$，故 $\eta^{-1}=\Lambda\eta^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}$．注意到 $\eta^{-1}=\eta$，便有 $\eta=\Lambda\eta\Lambda^{\mathrm{T}}$，其矩阵元等式为

$$\eta^{\sigma\tau}=\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\eta^{\mu\nu}\Lambda^{\tau}{}_{\nu}.$$

由此可导出与式(G-9-11a)、(G-9-11b)对应的公式，即

$$(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^0{}_i)^2=1, \tag{G-9-11'a}$$

$$\Lambda^0{}_0\Lambda^i{}_0-\sum_j\Lambda^i{}_j\Lambda^0{}_j=0. \tag{G-9-11'b}$$

令 $\hat\Lambda\equiv RB(\vec w)$，其中 R 和 $\vec w$ 分别由式(G-9-14)和(G-9-17)给出，则由式(G-9-11')不难证明① $\hat\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$；②式(G-9-17)给出的 $\vec w$ 为亚光速. 再用式(G-9-12)还可证明 $w^i=-\Lambda^0{}_i/\Lambda^0{}_0$ 等价于 $v^i=R^i{}_jw^j$. 分解唯一性的证明也与上一定理类似. □

定理 G-9-4*的另一证明　$\Lambda\in L_+^{\uparrow}$ 导致 $\Lambda^{-1}\in L_+^{\uparrow}$，定理 G-9-4 保证存在唯一的 $\bar R\in\text{ZD}$, $B(-\vec w)\in\text{WZ}$ 使 $\Lambda^{-1}=B(-\vec w)\bar R^{-1}$，故 $\Lambda=[B(-\vec w)\bar R^{-1}]^{-1}=\bar RB(\vec w)$. 现在证明 $\bar R=R$ 和 $\vec v=R\vec w$. 由 $\Lambda=B(\vec v)R$ 和 $\Lambda=\bar RB(\vec w)$ 得 $B(\vec v)R=\bar RB(\vec w)$，所以

$$B(\vec v)=\bar RB(\vec w)R^{-1}=\bar RB(\vec w)\bar R^{-1}\bar RR^{-1}=\bar RB(\vec w)\bar R^{-1}\bar R'=B(\bar R\vec w)\bar R',$$

其中 $\bar R'\equiv\bar RR^{-1}\in\text{ZD}$，最末一步用到式(G-9-8). 上式首末两端可看作同一 $B(\vec v)\in L_+^{\uparrow}$ 按定理 G-9-4 所做的两种分解，即 $B(\vec v)I=B(\bar R\vec w)\bar R'$，故由该定理的分解唯一性可知 $\bar R'=I$（再由 $\bar R'=\bar RR^{-1}$ 得 $\bar R=R$）以及 $\vec v=R\vec w$. 最后，设若 $\Lambda\in L_+^{\uparrow}$ 有两种不同的分解，即 $\Lambda=RB(\vec w)=R'B(\vec w')$，则必导致 $\Lambda^{-1}\in L_+^{\uparrow}$ 有不同的分解：

$$\Lambda^{-1}=B(-\vec w)R^{-1}=B(-\vec w')R'^{-1},$$

与定理 G-9-4 矛盾. 可见把 Λ 表为 $RB(\vec w)$ 的分解是唯一的. □

定理 G-9-5　设 $B(\vec v), B(\vec u)\in\text{WZ}$ 且 $\vec v\neq 0, \vec u\neq 0$，则

$$B(\vec v)B(\vec u)\in\text{WZ}\Leftrightarrow\vec v\parallel\vec u,\ \text{即}\vec v\text{与}\vec u\text{平行}. \tag{G-9-18}$$

证明　(A)[已知 $\vec v\parallel\vec u$，欲证 $B(\vec v)B(\vec u)\in\text{WZ}$]　由 $B(\vec v), B(\vec u)\in\text{WZ}$ 及定理 G-9-1(b)可知 $\exists R_1,R_2\in\text{ZD}$ 使 $B(\vec v)=R_1{}^{-1}B_x(v)R_1$, $B(\vec u)=R_2{}^{-1}B_x(u)R_2$. 把前者与式(G-9-8)对比得 $B(\vec v)=B(vR_1{}^{-1}\vec\varepsilon_1)$，从而 $\vec v=vR_1{}^{-1}\vec\varepsilon_1$. 同理有 $\vec u=uR_2{}^{-1}\vec\varepsilon_1$. 而 $\vec v\parallel\vec u$ 保证 $\exists\alpha\in\mathbb R$ 使 $\vec u=\alpha\vec v$（见§2.2 定义 7），故 $\vec u=\alpha vR_1{}^{-1}\vec\varepsilon_1$. 于是 $\alpha vR_1{}^{-1}\vec\varepsilon_1=uR_2{}^{-1}\vec\varepsilon_1$. 又因 $\vec v,\vec u,\alpha$ 皆非零，这等价于

$$R\vec\varepsilon_1=(\alpha v/u)\vec\varepsilon_1,\quad\text{其中}R\equiv R_1R_2{}^{-1}\in\text{ZD}. \tag{G-9-19}$$

如注 2 所述, 现在的 R 已看成式(G-9-7)右边的 3×3 矩阵, 故可看作转动映射 $R:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$. 而式(G-9-19)表明 R 作用于 $\vec{\varepsilon}_1\in\mathscr{V}$ 得 $(\alpha v/u)\vec{\varepsilon}_1$, 所以只能是

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \text{ 或 } R=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}, \quad \theta\in[0,\pi), \tag{G-9-20}$$

分别对应于 $\alpha v/u=\pm1$, 由矩阵乘法便得 $RB_x(u)R^{-1}=B_x(\pm u)$. 于是

$$\begin{aligned}B(\vec{v})B(\vec{u})&=R_1^{-1}B_x(v)R_1R_2^{-1}B_x(u)R_2=R_1^{-1}B_x(v)RB_x(u)R^{-1}R_1\\&=R_1^{-1}B_x(v)B_x(\pm u)R_1=R_1^{-1}B_x(w)R_1\in\text{WZ},\end{aligned}$$

其中 $w\in\mathbb{R}$ 满足 $-1<w<1$ [具体说, $w=(v\pm u)/(1\pm uv)$], 上式的最末一步用到定理 G-9-1(a).

(B)[已知 $B(\vec{v})B(\vec{u})\in\text{WZ}$, 欲证 $\vec{v}\parallel\vec{u}$] 为此只须证明逆否命题: $\vec{v}\nparallel\vec{u}\Rightarrow B(\vec{v})B(\vec{u})\notin\text{WZ}$. 用反证法. 设 $B(\vec{v})B(\vec{u})\in\text{WZ}$, 则 $[B(\vec{v})B(\vec{u})]^0{}_i=[B(\vec{v})B(\vec{u})]^i{}_0$, 用式(G-9-5′)通过矩阵乘法求矩阵元, 则上式给出

$$\gamma_v\gamma_u\vec{u}+\gamma_v\vec{v}+\frac{\gamma_u{}^2\gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}}{1+\gamma_u}=\gamma_v\gamma_u\vec{v}+\gamma_u\vec{u}+\frac{\gamma_v{}^2\gamma_u(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}}{1+\gamma_v}, \tag{G-9-21}$$

其中 $\gamma_v\equiv(1-|\vec{v}|^2)^{-1/2}$, $\gamma_u\equiv(1-|\vec{u}|^2)^{-1/2}$. 用 $\vec{v}$ 叉乘上式两边得

$$\gamma_u\left[1-\gamma_v-\frac{\gamma_u\gamma_v\vec{u}\cdot\vec{v}}{1+\gamma_u}\right]\vec{u}\times\vec{v}=0.$$

因 $\gamma_u\geqslant1$, 又已假设 $\vec{v}\nparallel\vec{u}$ (即 $\vec{u}\times\vec{v}\neq0$), 故上式中的方括号为零, 亦即

$$1-\gamma_v+\gamma_u-\gamma_u\gamma_v(1+\vec{u}\cdot\vec{v})=0. \tag{G-9-22}$$

式(G-9-21)左侧刚好是把右侧的 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 互换的结果, 故用 $\vec{u}$ 叉乘该式两边必定是式(G-9-22)中的 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 互换的结果:

$$1-\gamma_u+\gamma_v-\gamma_u\gamma_v(1+\vec{u}\cdot\vec{v})=0. \tag{G-9-22′}$$

以上两式联立给出 $\gamma_u=\gamma_v$ 和 $1-\gamma_u\gamma_v(1+\vec{u}\cdot\vec{v})=0$, 前者导致 $|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$, 代入后者又得 $|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 和 $|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. 两式相加给出 $|\vec{u}+\vec{v}|^2=0$, 从而 $\vec{u}+\vec{v}=0$, 与 $\vec{v}\nparallel\vec{u}$ 的假设矛盾. □

G.9.2 洛伦兹代数

下面再从李代数的角度讨论. 洛伦兹代数元 $A\in\mathscr{O}(1,3)$ 的充要条件 $A^{\mathrm{T}}=-\eta A\eta$ 等价于 ηA 是反称矩阵(见G.5.3小节末), 因此 A 的最一般形式为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & A^0{}_1 & A^0{}_2 & A^0{}_3 \\ A^0{}_1 & 0 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^0{}_2 & -A^1{}_2 & 0 & A^2{}_3 \\ A^0{}_3 & -A^1{}_3 & -A^2{}_3 & 0 \end{bmatrix}\in\mathscr{O}(1,3)\ , \tag{G-9-23}$$

把 $A^0{}_i$ 和 $A^i{}_j$ 分别改记为 $b^0{}_i$ 和 $r^i{}_j$, 则

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b^0{}_1 & b^0{}_2 & b^0{}_3 \\ b^0{}_1 & 0 & r^1{}_2 & r^1{}_3 \\ b^0{}_2 & -r^1{}_2 & 0 & r^2{}_3 \\ b^0{}_3 & -r^1{}_3 & -r^2{}_3 & 0 \end{bmatrix}\in\mathscr{O}(1,3), \tag{G-9-24}$$

其中的 $\begin{bmatrix} 0 & r^1{}_2 & r^1{}_3 \\ -r^1{}_2 & 0 & r^2{}_3 \\ -r^1{}_3 & -r^2{}_3 & 0 \end{bmatrix}$, 作为 3×3 反称矩阵, 是 $\mathscr{O}(3)$ 的元素. 以 $\mathscr{R}$ 代表形如 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^1{}_2 & r^1{}_3 \\ 0 & -r^1{}_2 & 0 & r^2{}_3 \\ 0 & -r^1{}_3 & -r^2{}_3 & 0 \end{bmatrix}$ 的 4×4 矩阵的集合, $\mathscr{B}$ 代表形如 $\begin{bmatrix} 0 & b^0{}_1 & b^0{}_2 & b^0{}_3 \\ b^0{}_1 & 0 & 0 & 0 \\ b^0{}_2 & 0 & 0 & 0 \\ b^0{}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 4×4 矩阵的集合, 则 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{O}(1,3)$ 的3维子空间, $\mathscr{R}$ 的任一元素都是反称矩阵, $\mathscr{B}$ 的任一元素都是对称矩阵. 式(G-6-7)和(G-6-8)的矩阵 r_1, r_2, r_3 和 b_1, b_2, b_3 分别构成 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一组基矢. 由(G-6-9)第一式可知 $\mathscr{R}$ 还是 $\mathscr{O}(1,3)$ 的李子代数, 而且与 $\mathscr{O}(3)$ 同构. 反之, (G-6-9)第三式则表明子空间 $\mathscr{B}\subset\mathscr{O}(1,3)$ 不是子代数(这与 WZ 不是子群密切相关).

定理 G-9-6 $\mathscr{R}$ 是李群 ZD 的李代数.

证明 只须证明 $\forall r\in\mathscr{R}$, $\exists$ ZD 中过 e 的曲线, 其在 e 的切矢为 r. $r\in\mathscr{R}$ 保证 r 可写成分块矩阵 $r=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{r} \end{bmatrix}$, 其中 3×3 矩阵 $\hat{r}\in\mathscr{O}(3)$ [见式(G-9-24)下一行]. $\forall t\in\mathbb{R}$,

容易验证 $\mathrm{Exp}(tr)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{Exp}(t\hat{r})\end{bmatrix}$，而 $\hat{r}\in\mathscr{O}(3)$ 则保证 $\mathrm{Exp}(t\hat{r})\in SO(3)$，故 $\mathrm{Exp}(tr)$ 可充当式(G-9-7)中的 R，因而 $\mathrm{Exp}(tr)\in ZD$．这 $\mathrm{Exp}(tr)$ 就是要找的曲线. □

定理 G-9-7 $R\in ZD \Leftrightarrow \exists\, r\in\mathscr{R}$ 使 $R=\mathrm{Exp}(r)$.

证明 (A)($\Leftarrow$ 的证明)既然 $\mathscr{R}$ 是李群 ZD 的李代数且 $r\in\mathscr{R}$，由指数映射定义自然有 $\mathrm{Exp}(r)\in ZD$．(B)($\Rightarrow$ 的证明)李群 ZD 同构于 SO(3) 保证 ZD 是紧致的连通李群, 其上的指数映射是到上映射(见§G.5 注 4 末), 故每一 $R\in ZD$ 都属于某一单参子群[此结论也可用式(G-5-16)后的欧拉定理证明], 因而 $\exists\, r\in\mathscr{R}$ 使 $R=\mathrm{Exp}(r)$. □

另一方面, 虽然 $WZ\subset L_+^\uparrow$ 不是子群, 它也满足与上述定理类似的定理:

定理 G-9-7′ $B\in WZ \Leftrightarrow \exists\, b\in\mathscr{B}$ 使 $B=\mathrm{Exp}(b)$.

证明 定理 G-9-1 表明 $B\in WZ$ 等价于 $\exists R\in ZD$, $B_x\in WZ_x$ 使 $B=R^{-1}B_xR$．而 B_x 是由 b_1 产生的单参子群的元素, 所以 $\exists\, v\in\mathbb{R}$ 使 $B_x=\mathrm{Exp}(vb_1)$，从而 $B\in WZ$ 又等价于

$$\exists\, R\in ZD,\ v\in\mathbb{R}\ 使\ B=R^{-1}(\mathrm{Exp}\, vb_1)R=\mathrm{Exp}(vR^{-1}b_1R),$$

其中第二步用到式(G-5-27). 令 $b\equiv vR^{-1}b_1R$，只须证明 $b\in\mathscr{B}$．注意到 $R\in ZD$ 的一般形式为式(G-9-7), 由矩阵运算容易验证

$$b=vR^{-1}b_1R=-v\begin{bmatrix}0 & R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3\\ R^1{}_1 & 0 & 0 & 0\\ R^1{}_2 & 0 & 0 & 0\\ R^1{}_3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathscr{B}.$$ □

注 4 因 $b\in\mathscr{B}$ 为对称矩阵, 由定理 G-9-7′可知任一 $B\in WZ$ 都是对称矩阵. 然而, Λ 为对称矩阵加上 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 不保证 $\Lambda\in WZ$，例如 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)\in L_+^\uparrow$，但不是伪转动.

定理 G-9-8 $r\in\mathscr{R} \Leftrightarrow \exists\, R\in ZD, v\in\mathbb{R}$ 使 $r=vR^{-1}r_3R$，其中 r_3 由式(G-6-7)定义.

注 5 ① r_3 是李代数元, R 和 R^{-1} 是群元, 它们的乘积有意义只是因为它们都是矩阵. ②把 r_3 改为 r_1 或 r_2，定理仍成立.

证明 (A)($\Leftarrow$ 的证明) $R\in ZD$ 的一般形式为式(G-9-7), 由矩阵运算容易验证

$$r = vR^{-1}r_3R = v\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & \sigma \\ 0 & -\beta & -\sigma & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{R},$$

其中$\alpha \equiv R^1{}_2R^2{}_1 - R^1{}_1R^2{}_2$，$\beta \equiv R^1{}_3R^2{}_1 - R^1{}_1R^2{}_3$，$\sigma \equiv R^1{}_3R^2{}_2 - R^1{}_2R^2{}_3$.

(B)($\Rightarrow$的证明) $r \in \mathscr{R} \Rightarrow \exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ 使

$$r = v_1r_1 + v_2r_2 + v_3r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 & v_2 \\ 0 & v_3 & 0 & -v_1 \\ 0 & -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(G-9-25)}$$

若 $v_1 = v_2 = 0$，则$r = v_3I^{-1}r_3I$，命题自然成立，故以下设v_1, v_2不全为零．令$v \equiv (v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)^{1/2}$，则有确定的$\theta \in (0,\pi)$和$\varphi \in [0,2\pi)$使

$$v_1 = v\sin\theta\cos\varphi, \quad v_2 = v\sin\theta\sin\varphi, \quad v_3 = v\cos\theta. \qquad \text{(G-9-26)}$$

令
$$R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}, \qquad \text{(G-9-27)}$$

则容易验证$R \in ZD$．再由矩阵乘法(硬算)便可验证$r = vR^{-1}r_3R$． □

注 6[选读] 用矩阵硬乘以验证$r = vR^{-1}r_3R$的做法不存在理解上的任何困难，但运算颇为烦琐．下面介绍的验证方法不但形式优雅，而且提供了一个活用§G.8的知识的好例子．由式(G-9-27)得

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

而由§G.6例3可知上式右边的两矩阵依次为$\mathrm{Exp}(\varphi r_3)$和$\mathrm{Exp}(\theta r_2)$，故

$$R^{-1} = \mathrm{Exp}(\varphi r_3)\mathrm{Exp}(\theta r_2), \qquad \text{(G-9-28)}$$

于是

$$\begin{aligned}R^{-1}r_3R &= \mathscr{Ad}_{R^{-1}}r_3 = \mathscr{Ad}_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)\mathrm{Exp}(\theta r_2)}r_3 = \mathscr{Ad}_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}(\mathscr{Ad}_{\mathrm{Exp}(\theta r_2)}r_3)\\ &= \mathscr{Ad}_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}[\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\theta r_2})\,r_3] = \mathscr{Ad}_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}(r_3\cos\theta + r_1\sin\theta)\\ &= \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})(r_3\cos\theta + r_1\sin\theta) = (\cos\theta)\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})\,r_3 + (\sin\theta)\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})\,r_1\\ &= r_3\cos\theta + (r_1\cos\varphi + r_2\sin\varphi)\sin\theta = v^{-1}(r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3) = v^{-1}r\,,\end{aligned}$$

其中第一步用到习题 19；第三步用到式(G-8-9)；第四、六步用到式(G-8-12)；第五、八步用到式(G-8-10)、(G-8-13)以及 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的级数展开式.

由定理 G-9-8 可知 $\mathscr{R}$ 的任一元素 r 可被化为最简元素 r_3. 下面的定理表明对 $\mathscr{B}$ 也有类似结论.

定理 G-9-8′ $b\in\mathscr{B} \Leftrightarrow \exists R\in \mathrm{ZD}, v\in\mathbb{R}$ 使 $b = vR^{-1}b_1R$, 其中 b_1 由式(G-6-8)定义.

注 7 把 b_1 改为 b_2 或 b_3, 定理仍成立.

证明 (A)($\Leftarrow$ 的证明) 已含于定理 G-9-7′的证明中. (B)($\Rightarrow$ 的证明) $b\in\mathscr{B} \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in\mathbb{R}$ 使

$$b = \beta_1b_1 + \beta_2b_2 + \beta_3b_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3\\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0\\ -\beta_2 & 0 & 0 & 0\\ -\beta_3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{G-9-29}$$

当 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ 时显然, 故以下 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不全为零, 不妨设 $\beta_1 \neq 0$.

令 $\mu \equiv (\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)^{1/2}$, $v \equiv (\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2)^{1/2}$, 则 $\mu v \neq 0$. 容易验证

$$\frac{1}{\mu v}\begin{bmatrix} \mu\beta_1 & \mu\beta_2 & \mu\beta_3\\ v\beta_2 & -v\beta_1 & 0\\ \beta_1\beta_3 & \beta_2\beta_3 & -\mu^2\end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3)\,,$$

故

$$R \equiv \frac{1}{\mu v}\begin{bmatrix} \mu v & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu\beta_1 & \mu\beta_2 & \mu\beta_3\\ 0 & v\beta_2 & -v\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_1\beta_3 & \beta_2\beta_3 & -\mu^2\end{bmatrix} \in \mathrm{ZD}. \tag{G-9-30}$$

由矩阵运算容易验证 $b = vR^{-1}b_1R$. □

定理 G-9-9 $\Lambda \in L_+^\uparrow \Rightarrow \exists R_1, R_2 \in \mathrm{ZD}, v\in\mathbb{R}$ 使 $\Lambda = R_1(\mathrm{Exp}\,vb_1)R_2$.

证明 由分解定理和定理 G-9-1 可知 $\exists R, \hat{R} \in ZD$ 使 $\Lambda = \hat{R}^{-1} B_x \hat{R} R$. 因 B_x 是由 b_1 产生的单参子群的元素, 故 $\exists \nu \in \mathbb{R}$ 使 $B_x = \text{Exp}(\nu b_1)$. 令 $R_1 \equiv \hat{R}^{-1}, R_2 \equiv \hat{R} R$, 便得待证式. □

G.9.3 用 Killing 矢量场讨论洛伦兹代数

§G.7 例 3 已指出 Poincaré 群 P 的李代数 $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$. 借用 Killing 矢量场可以获得对李代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 的更为直观的理解. 式(G-7-9)给出 $\mathscr{K}$ 的一组(10 个)基矢. 以 $\mathscr{K}_l$ 代表 $\mathscr{K}$ 的、由 6 个基矢 ξ_{b_i}, ξ_{r_i} $(i=1,2,3)$ 生成的子空间,① 则式(G-7-10)的前 3 式表明 $\mathscr{K}_l$ 在李括号下封闭, 因此 $\mathscr{K}_l$ 还是 $\mathscr{K}$ 的李子代数. 用 $b_i \mapsto \xi_{b_i}$, $r_i \mapsto \xi_{r_i}$ 定义线性映射 $\psi: \mathscr{O}(1,3) \to \mathscr{K}_l$, 则 ψ 是李代数同构. 可见, 正如 $\mathscr{O}(1,3)$ 是 Poincaré 李代数 $\mathscr{P}$ 的李子代数(洛伦兹代数)那样, $\mathscr{K}_l$ 也是 Poincaré 李代数 $\mathscr{K}(=\mathscr{P})$ 的李子代数. 下面的定理给出映射 ψ 的一个非常有用的表达式.

定理 G-9-10 以 X 和 $\partial/\partial X$ 分别代表由惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 的 4 个坐标和 4 个坐标基矢分别排成的列矩阵, 则

$$\xi_{r_i} = -X^{\mathrm{T}} r_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \xi_{b_i} = -X^{\mathrm{T}} b_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial X}, \quad i = 1,2,3, \tag{G-9-31}$$

其中 $X^{\mathrm{T}}, r_i^{\mathrm{T}}, b_i^{\mathrm{T}}$ 依次是 X, r_i, b_i 的转置矩阵.

证明 只给出第一式的证明(其余五式证明仿此):

$$-X^{\mathrm{T}} r_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial X} = -[t,x,y,z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} = -y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y} = \xi_{r_1}. \quad □$$

选定惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 相当于选定 $\mathscr{K}$ 的一组基矢, 如式(G-7-9)所示. 以 $\mathscr{K}_r$ 和 $\mathscr{K}_b$ 分别代表 $\mathscr{K}_l$ 中由 $\{\xi_{r_i}\}$ 和 $\{\xi_{b_i}\}$ 生成的子空间. $\mathscr{K}_r$ (或 $\mathscr{K}_b$)的元素在 $\{t,x,y,z\}$ 系中一般不能表为式(G-7-9b)或(G-7-9c)的简单形式. 但下面的定理表明总可通过对空间坐标轴做适当转动使之变为那种简单形式(乘以某一常数).

定理 G-9-11 设 $\mathscr{K}_r$ 由惯性坐标系 $X \equiv \{t,x,y,z\}$ 定义, 则 $\forall \xi \in \mathscr{K}_r$, $\exists \nu \in \mathbb{R}$ 以及与 X 同属一个惯性参考系的惯性坐标系 $\tilde{X} \equiv \{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ 使

① 如果两系 X, X' 原点不同, 则由 X 和 X' 在 $\mathscr{P}$ 中挑出的 $\mathscr{K}_l$ 和 $\mathscr{K}_l'$ 不同(但同构). 以下限定所有坐标系的原点都相同.

$$\xi = \nu\left(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} - \tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\right). \tag{G-9-32}$$

证明 $\xi \in \mathscr{K}_r \Rightarrow \exists\, \rho^1, \rho^2, \rho^3 \in \mathbb{R}$ 使 $\xi = \rho^i \xi_{r_i}$，故

$$\xi = \rho^i X^{\mathrm{T}} r_i \frac{\partial}{\partial X} = X^{\mathrm{T}}(\rho^i r_i)\frac{\partial}{\partial X} = X^{\mathrm{T}}(\nu R^{-1} r_3 R)\frac{\partial}{\partial X}, \quad R \in \mathrm{ZD},\ \nu \in \mathbb{R},$$

其中第一步用到式(G-9-31), 第三步用到定理 G-9-8. 引入新惯性坐标系 $\tilde{X} \equiv RX$，则 $\tilde{X}^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} R^{-1}$. 注意到两系坐标之间的变换矩阵等于坐标基矢之间的变换矩阵的转置之逆, 又有 $\partial/\partial\tilde{X} = R\,\partial/\partial X$,于是

$$\xi = \nu(X^{\mathrm{T}} R^{-1}) r_3 \left(R\frac{\partial}{\partial X}\right) = \nu \tilde{X}^{\mathrm{T}} r_3 \frac{\partial}{\partial\tilde{X}} = \nu\tilde{\xi}_{r_3} = \nu\left(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} - \tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\right),$$

其中第三步用到式(G-9-31), 第四步用到式(G-7-9b). $\tilde{X} \equiv RX$ 表明惯性坐标系 X 和 $\tilde{X}$ 同属一个惯性参考系. □

对 $\xi \in \mathscr{K}_b$ 也有类似定理:

定理 G-9-11′ 设 $\mathscr{K}_b$ 由惯性坐标系 $X \equiv \{t, x, y, z\}$ 定义, 则 $\forall\, \xi \in \mathscr{K}_b$，$\exists\, \nu \in \mathbb{R}$ 以及与 X 同属一个惯性参考系的惯性坐标系 $\tilde{X} \equiv \{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ 使

$$\xi = \nu\left(\tilde{t}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\right). \tag{G-9-32′}$$

证明 仿照定理 G-9-11 的证明, 留作练习. □

[选读 G-9-1]

本节至此仍感言犹未尽. 以下内容是笔者与部分同仁的讨论结果, 并未找到文献依据, 权作引玉之砖.

既然 $\mathscr{K}_b$ 和 $\mathscr{K}_r$ 都是借用惯性坐标系 X 定义的, 自然要问它们是否依赖于所用的坐标系, 即, 设 X' 是与 X 不同的惯性坐标系, 用 X' 定义的 $\mathscr{K}_b'$ (和 $\mathscr{K}_r'$)是否等于 $\mathscr{K}_b$ (和 $\mathscr{K}_r$)?

定理 G-9-12 设惯性坐标系 X 与 X' 的关系为 $X' = \Lambda X$, $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$,则

$$\mathscr{K}_r' = \mathscr{K}_r \iff \Lambda = R \in \mathrm{ZD}.$$

证明 (A)($\Leftarrow$ 的证明) 已知 $X' = RX$,欲证 $\mathscr{K}_r' = \mathscr{K}_r$. 由于 X' 系与 X 系平权, 只须证明 $\mathscr{K}_r'$ 的 3 个基矢 $\xi_{r_i}' \in \mathscr{K}_r'\ (i = 1, 2, 3)$ 都属于 $\mathscr{K}_r$. 由 $X' = RX$ 得 $X'^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} R^{-1}$, $\partial/\partial X' = R\,\partial/\partial X$,故由式(G-9-31)得

$$\xi_{r_i}' = X'^{\mathrm{T}} r_i \frac{\partial}{\partial X'} = X^{\mathrm{T}} R^{-1} r_i R \frac{\partial}{\partial X} = X^{\mathrm{T}}(\rho^j{}_i r_j)\frac{\partial}{\partial X} = \rho^j{}_i \xi_{r_j} \in \mathscr{K}_r,$$

其中$\rho^j{}_i(j=1,2,3)$为常数，第三步是因为定理G-9-8保证$R^{-1}r_iR\in\mathscr{R}$.[①]

下面既涉及李代数$\mathscr{R}$又涉及惯性参考系$\mathscr{R}$，为避免由相同记号可能带来的混淆，我们暂时改用$\mathscr{R}_{\rm I}$代表惯性参考系，下标I可看作Inertial的缩写.

(B)($\Rightarrow$的证明)　设$\Lambda\notin$ ZD，则坐标系X与X'属于两个不同的惯性参考系$\mathscr{R}_{\rm I}$和$\mathscr{R}'_{\rm I}$. 每一$\xi\in\mathscr{K}_r$(作为矢量场)的积分曲线都躺在$\mathscr{R}_{\rm I}$系的同时面上，而$\mathscr{R}'_{\rm I}$系与$\mathscr{R}_{\rm I}$系有不同的同时面，故有$\xi\in\mathscr{K}_r$使$\xi\notin\mathscr{K}'_r$. □

定理G-9-12′　设惯性坐标系X与X'的关系为$X'=\Lambda X$, $\Lambda\in L_+^\uparrow$，则

$$\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b \Leftrightarrow \Lambda=R\in \text{ZD}.$$

证明　(A)($\Leftarrow$的证明)与定理G-9-12的证明(A)类似. (B)($\Rightarrow$的证明)注意到定理G-9-12，只须证明$\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b\Rightarrow\mathscr{K}_r'=\mathscr{K}_r$. $\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b$保证$\xi'_{b_i}=S^j{}_i\xi_{b_j}$，其中常数$S^j{}_i$排成的矩阵有逆，故其行列式$S\neq 0$. 利用行列式公式

$$\varepsilon_{ijk}S^i{}_{i'}S^j{}_{j'}S^k{}_{k'}=S\varepsilon_{i'j'k'}\tag{G-9-33}$$

不难导出

$$\varepsilon_{ljk}S^j{}_{j'}S^k{}_{k'}=S\varepsilon_{i'j'k'}(S^{-1})^{i'}{}_l.\tag{G-9-34}$$

另一方面，由式(G-7-10)第三式可得$\xi_{r_i}=-\varepsilon_i{}^{jk}[\xi_{b_j},\xi_{b_k}]/2$，故

$$\xi'_{r_i}=-\frac{1}{2}\varepsilon_i{}^{jk}[\xi'_{b_j},\xi'_{b_k}]=-\frac{1}{2}\varepsilon_i{}^{jk}S^l{}_jS^m{}_k[\xi_{b_l},\xi_{b_m}]=\frac{1}{2}\varepsilon_i{}^{jk}S^l{}_jS^m{}_k\varepsilon^n{}_{lm}\xi_{r_n}$$

$$=\frac{1}{2}\eta_{ii'}\varepsilon^{i'jk}S^l{}_jS^m{}_k\varepsilon_{n'lm}\eta^{n'n}\xi_{r_n}=\frac{1}{2}\eta_{ii'}\varepsilon^{i'jk}S\varepsilon_{pjk}(S^{-1})^p{}_{n'}\eta^{n'n}\xi_{r_n}=S(S^{-1})_i{}^n\xi_{r_n},$$

[其中第二步用到$\xi'_{b_i}=S^j{}_i\xi_{b_j}$，第三步用到式(G-7-10)，第五步用到式(G-9-34)，最右端的$(S^{-1})_i{}^n$是$\eta_{ip}(S^{-1})^p{}_n\eta^{n'n}$的简写.] 可见$\xi'_{r_i}\in\mathscr{K}_r$，因而$\mathscr{K}_r'=\mathscr{K}_r$. □

以上两个定理表明$\mathscr{K}_b$(和$\mathscr{K}_r$)是惯性参考系依赖的. 虽然对不同惯性参考系$\mathscr{R}_{\rm I}$和$\mathscr{R}'_{\rm I}$有$\mathscr{K}_b'\neq\mathscr{K}_b$(及$\mathscr{K}_r'\neq\mathscr{K}_r$)，但不难证明$\mathscr{K}_b'\cap\mathscr{K}_b\neq\varnothing$. 设$\vec{V}$是$\mathscr{R}'_{\rm I}$相对于$\mathscr{R}_{\rm I}$的3速度，则$\mathscr{R}_{\rm I}$和$\mathscr{R}'_{\rm I}$系内各有惯性坐标系$X$和$X'$，它们的$x$轴都与$\vec{V}$平行(因而$X'=B_xX$). 于是

$$\xi'_{b_1}=-X'^{\rm T}b_1\frac{\partial}{\partial X'}=-(X^{\rm T}B_x)b_1\left(B_x{}^{-1}\frac{\partial}{\partial X}\right)=-X^{\rm T}b_1\frac{\partial}{\partial X}=\xi_{b_1},$$

---

① 还可证明$R^{-1}r_iR=\rho^j{}_ir_j$取如下具体形式：$R^{-1}r_iR=(R^{-1})^j{}_ir_j$. 这同如下结论有密切联系：SO(3)的矩阵在伴随表示下的矩阵正是它自身.

[其中第一、四步用到式(G-9-31), 第二步用到 $X'^{\mathrm{T}}=X^{\mathrm{T}}B_x{}^{\mathrm{T}}=X^{\mathrm{T}}B_x$ 及 $\partial/\partial X'=B_x{}^{-1}\partial/\partial X$, 第三步用到 $B_x b_1 B_x{}^{-1}=b_1$ (用矩阵乘法易证).] 上式表明 $\mathscr{K}_b'\cap\mathscr{K}_b$ 至少含有由 ξ_{b_1} 生成的 1 维子空间. 还可证明 $\mathscr{K}_b'\cap\mathscr{K}_b$ 等于这个子空间(参见本选读末的注 8). 类似地, $\mathscr{K}_r'\cap\mathscr{K}_r$ 等于由 ξ_{r_1} 生成的 1 维子空间. 事实上, 这一结论比关于 $\mathscr{K}_b'\cap\mathscr{K}_b$ 的上述结论更易证明[只须仿照定理 G-9-12 证明(B)的思路].

$\mathscr{K}_b$(和 $\mathscr{K}_r$)的惯性参考系依赖性使得"伪转动(转动)Killing 矢量场"一词存在含糊性. 原则上至少存在如下两种定义:

定义 1　给定惯性坐标系 X 后, $\xi\in\mathscr{K}$ 叫**伪转动(或转动)Killing 矢量场**, 若 $\xi\in\mathscr{K}_b$ (或 $\xi\in\mathscr{K}_r$).

定义 2　$\xi\in\mathscr{K}$ 叫**伪转动(或转动)Killing 矢量场**, 若存在惯性坐标系 X 和 $\nu\in\mathbb{R}$ 使

$$\xi=\nu\,[t(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial t)]\ (\text{或}\ \xi=\nu\,[-y(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial y)]).$$

以 $\bigcup\mathscr{K}_b$(或 $\bigcup\mathscr{K}_r$)代表所有惯性参考系的 $\mathscr{K}_b$(或 $\mathscr{K}_r$)之并, 则也可说 $\xi\in\mathscr{K}$ 叫伪转动(或转动)Killing 矢量场当且仅当 $\xi\in\bigcup\mathscr{K}_b$(或 $\xi\in\bigcup\mathscr{K}_r$).

根据定义 1, 伪转动(转动)Killing 矢量场是惯性参考系依赖的, 只能谈及"某惯性参考系的伪转动(转动)Killing 矢量场", 这可看作一个缺点. 定义 2 的缺点则在于 $\bigcup\mathscr{K}_b$ 和 $\bigcup\mathscr{K}_r$ 不是 $\mathscr{K}_l$ 的子空间(因而有些不伦不类). 当然, 重要的不在于选用哪个定义, 而在于知道存在不同定义的可能性, 从而在使用该词时做到前后统一.

为帮助读者了解 $\bigcup\mathscr{K}_b$ 和 $\bigcup\mathscr{K}_r$ 的关系, 我们证明两个最基本的结论:

定理 G-9-13　$(\bigcup\mathscr{K}_b)\cap(\bigcup\mathscr{K}_r)=\{0\}\subset\mathscr{K}_l$.

证明　设 $\xi_b\in\bigcup\mathscr{K}_b$, 则存在惯性坐标系 X 和 $\nu\in\mathbb{R}$ 使

$$\xi_b=\nu[t(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial t)]\ (\text{用到}\ \bigcup\mathscr{K}_b\ \text{的定义和定理 G-9-11}'),$$

可见当 $\nu\neq 0$ 时 ξ_b 是这样的矢量场, 它在 $\mathbb{R}^4$ 的某些点类时, 某些点类空, 某些点类光. 设 $\xi_r\in\bigcup\mathscr{K}_r$, 则存在惯性坐标系 X 和 $\nu\in\mathbb{R}$ 使

$$\xi_r=\nu[-y(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial y)],$$

可见当 $\nu\neq 0$ 时 ξ_b 在全 $\mathbb{R}^4$ 上类空(在个别点上为零). 这表明任何坐标变换不能把 $\xi_b\in\bigcup\mathscr{K}_b$ 变为 $\xi_r\in\bigcup\mathscr{K}_r$, 除非 $\xi_b=0$.　□

定理 G-9-14　$(\bigcup\mathscr{K}_b)\cup(\bigcup\mathscr{K}_r)\neq\mathscr{K}_l$.

证明　只须找到一个 $\xi\in\mathscr{K}_l$ 满足 $\xi\notin\bigcup\mathscr{K}_b$, $\xi\notin\bigcup\mathscr{K}_r$. 设 X 是惯性坐标系, 我们证明

$$\xi \equiv t\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial t}-y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y} \tag{G-9-35}$$

满足这些要求. 不难看出 ξ 在 $\mathbb{R}^4$ 的某些点类光, 这些点的坐标 t, x, y, z 满足方程

$$t^2-x^2-y^2-z^2=0. \tag{G-9-36}$$

这已说明 $\xi \notin \bigcup \mathscr{K}_r$. 另一方面, $\forall \xi_b \in \bigcup \mathscr{K}_b$ 有惯性坐标系 $\tilde{X}$ 使 $\xi_b = \nu[\tilde{t}(\partial/\partial\tilde{x})+\tilde{x}(\partial/\partial\tilde{t})]$, 所以使 ξ_b 类光的点的坐标 $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ 满足方程

$$\tilde{t}^2-\tilde{x}^2=0. \tag{G-9-37}$$

以 N 和 $\hat{N}$ 分别代表 $\mathbb{R}^4$ 中满足式(G-9-36)和(G-9-37)的两个子集, 则从拓扑角度可知任何洛伦兹坐标变换都不能把 N 变为 $\hat{N}$, 所以 $\xi \notin \bigcup \mathscr{K}_b$. □

注 8 周彬在一篇尚待发表的论文中还证明了如下更强的结论:

设 $\xi \in \mathscr{K}_l$ (借任意惯性坐标系 X 定义)在基底 $\{\xi_{r_i}, \xi_{b_i}\}$ 的展开系数为 ρ^i, β^i, 即

$$\xi = \rho^i \xi_{r_i} + \beta^i \xi_{b_i},$$

则

$$\xi \in \bigcup \mathscr{K}_r \Leftrightarrow \text{(a)} \sum_i (\rho^i)^2 > \sum_i (\beta^i)^2 \text{ 或 } \rho^i = \beta^i = 0;\ \text{(b)} \sum_i \rho^i \beta^i = 0, \tag{G-9-38a}$$

$$\xi \in \bigcup \mathscr{K}_b \Leftrightarrow \text{(a)} \sum_i (\rho^i)^2 < \sum_i (\beta^i)^2 \text{ 或 } \rho^i = \beta^i = 0;\ \text{(b)} \sum_i \rho^i \beta^i = 0. \tag{G-9-38b}$$

不难看出定理 G-9-13 和 G-9-12 其实不过是上式的简单应用. 利用该论文的方法还可从“ $\mathscr{K}_r' \cap \mathscr{K}_r$ 等于由 ξ_{r_1} 生成的 1 维子空间”出发证明“ $\mathscr{K}_b' \cap \mathscr{K}_b$ 等于由 ξ_{b_1} 生成的 1 维子空间”的结论. **[选读 G-9-1 完]**

G.9.4 洛伦兹群的应用——托马斯进动[选读]

电子自旋的引入曾对原子物理学的早期研究起过重要作用, 也曾遇到过一个困难. 托马斯于 1927 年指出, 困难起因于没有考虑自旋角动量的一个相对论运动学效应, 考虑后困难就可克服(见原子物理学教材). 这一效应后来被称为托马斯进动(Thomas precession), 有若干有趣的物理应用. 本选读从费移和群论两个角度讨论托马斯进动的数学机制.

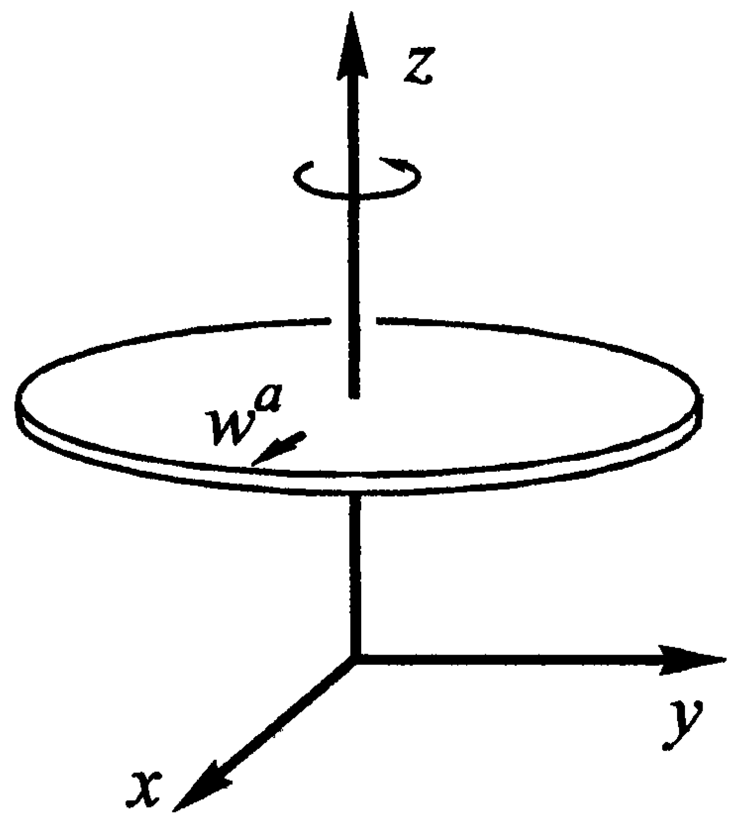


图 G-10 转盘边上的回转仪轴 w^a

设 $X \equiv \{t,x,y,z\}$ 是闵氏时空的一个惯性坐标系(实验室系), 在绕 z 轴匀角速转动的圆盘边上放置一个回转仪, 其轴(看作单位矢量 w^a)自然代表无(空间)转动的方向(详见§7.3). 以 $G(\tau)$ 代表回转仪(看作质点)的世界线, 则 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移. 设 w^a 在 $\tau=0$ 时与 x 轴

同向，回转仪在 $\tau=\hat{\tau}$ 时又回到 $\tau=0$ 的空间位置(指实验室系的空间，见图 G-10)，问：w^a 在 $\tau=\hat{\tau}$ 时还与 x 轴同向吗?因为费移代表无空间转动，答案似乎是肯定的．然而托马斯的答案却是不同向，这就是托马斯进动．

图 G-11 是与图 G-10 相应的时空图，其中竖直线代表 X 系的 t 坐标线，螺旋线代表回转仪的世界线 $G(\tau)$．令 $p_0\equiv G(0)$，$\hat{p}\equiv G(\hat{\tau})$．既然 $\{t,x,y,z\}$ 是惯性坐标系，其坐标基矢自然是平移矢量场(闵氏时空有绝对平移概念)，因而 $(\partial/\partial x)^a|_{\hat{p}}$ 平行于 $(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$，也可认为 $(\partial/\partial x)^a|_{\hat{p}}$ 是 $(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$ 沿 $G(\tau)$ 平移至 $\hat{p}$ 点的结果．又因 $w^a|_{p_0}=(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$，若 w^a 也沿 $G(\tau)$ 平移，则 $w^a|_{\hat{p}}=(\partial/\partial x)^a|_{\hat{p}}$．然而事实上 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移，而对非测地线而言 $\mathrm{D_F}/\mathrm{d}\tau\neq\mathrm{D}/\mathrm{d}\tau$，所以我们猜想 $w^a|_{\hat{p}}\neq(\partial/\partial x)^a|_{\hat{p}}$[两者都是 $G(\tau)$ 在 $\hat{p}$ 点的空间单位矢量，但空间方向不同]．不过仔细想来也并非如此简单，因为能肯定的只是 w^a 和 $(\partial/\partial x)^a$ 是 $G(\tau)$ 上两个不等的矢量场，由它们在 p_0 点相等尚难断定它们在 $\hat{p}$ 点一定不等．如果把 $G(\tau)$ 分成许多小段并逐段讨论，则又因为 w^a 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场而 $(\partial/\partial x)^a$ 不是，要在一点上判断它们是否同向也有待仔细讨论．为了获取明确结论并求得托马斯进动的定量结果，我们借助于计算．

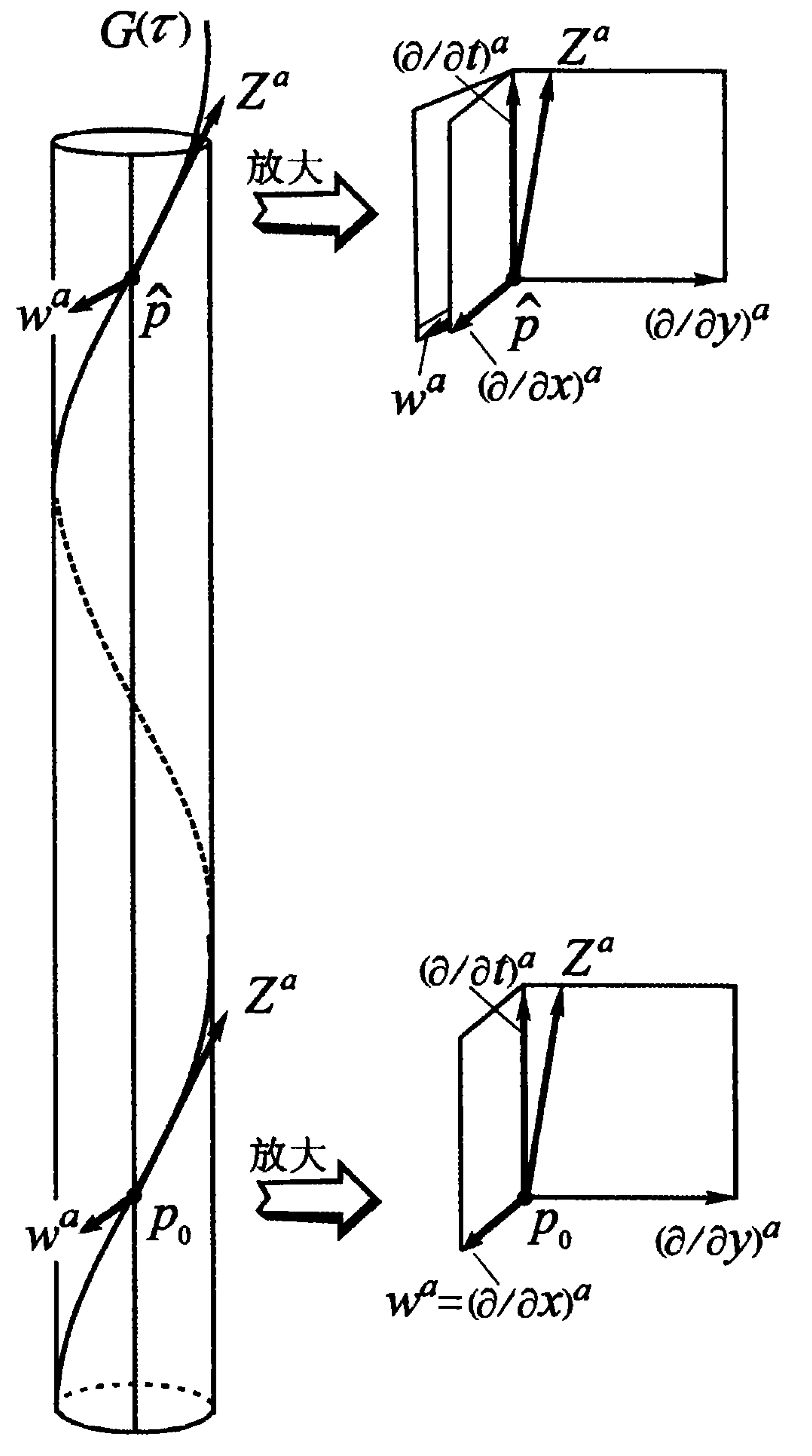


图 G-11　与图 G-10 相应的时空图

回转仪世界线在实验室系 $\{t,x,y,z\}$ 的参数式为

$$t=\gamma\tau,\quad x=R\cos\omega\gamma\tau,\quad y=R\sin\omega\gamma\tau,\quad z=0, \tag{G-9-39}$$

其中 R 与 ω 分别为转盘半径和角速率，$\gamma\equiv(1-\omega^2R^2)^{-1/2}$．回转仪 4 速 $Z^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 的坐标分量为

$$Z^\mu(\tau)=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=(\gamma,\ -R\omega\gamma\sin\gamma\omega\tau,\ R\omega\gamma\cos\gamma\omega\tau,\ 0), \tag{G-9-40}$$

其 4 加速 $A^a\equiv Z^b\partial_b Z^a$ 的坐标分量为

$$A^\mu(\tau)=\frac{\mathrm{d}Z^\mu}{\mathrm{d}\tau}=(0,\ -R\omega^2\gamma^2\cos\gamma\omega\tau,\ -R\omega^2\gamma^2\sin\gamma\omega\tau,\ 0), \tag{G-9-41}$$

于是由 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移得

$$0=\frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau}+(A^aZ^b-A^bZ^a)w_b=\frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau}+Z^aR\omega^2\gamma^2(w_1\cos\gamma\omega\tau+w_2\sin\gamma\omega\tau),$$

其中 w_1 和 w_2 是 w_b 的坐标分量. 由此可得微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}\tau}=-R\omega^2\gamma^3(w_1\cos\gamma\omega\tau+w_2\sin\gamma\omega\tau), \tag{G-9-42a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^1}{\mathrm{d}\tau}=R^2\omega^3\gamma^3\sin\gamma\omega\tau(w_1\cos\gamma\omega\tau+w_2\sin\gamma\omega\tau), \tag{G-9-42b}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^2}{\mathrm{d}\tau}=-R^2\omega^3\gamma^3\cos\gamma\omega\tau(w_1\cos\gamma\omega\tau+w_2\sin\gamma\omega\tau), \tag{G-9-42c}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{G-9-42d}$$

上列常微分方程组在初始条件 $w^1(0)=1,\ w^0(0)=w^2(0)=w^3(0)=0$ 下的定解为(改用实验室系的时间坐标 t 为自变量)①

$$w^0(t)=-R\omega\gamma\sin\gamma\omega t, \tag{G-9-43a}$$

$$w^1(t)=\cos\omega t\cos\gamma\omega t+\gamma\sin\omega t\sin\gamma\omega t, \tag{G-9-43b}$$

$$w^2(t)=\sin\omega t\cos\gamma\omega t+\gamma\cos\omega t\sin\gamma\omega t, \tag{G-9-43c}$$

$$w^2(t)=0. \tag{G-9-43d}$$

$w^0(t)$ 的存在是为保证 $w^a(t)$ 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量，它使讨论变得复杂. 为消除

---

① 用于原子物理时，$G(\tau)$ 是绕核转动的电子的世界线，w^a 是与其自旋角动量同向的单位矢量，因库仑力无力矩而沿世界线费移.

$w^0(t)$ 并清晰地看出 $w^a(t)$ 的转动情况，可改用特定的瞬时静止惯性坐标系 $\overline{X}$ 代替实验室系 X 看问题. 设 p' 是 $G(\tau)$ 上任一点，回转仪在 p' 时相对于 X 系的3速为 $\vec{v}$，则定义 p' 点的 $\overline{X}$ 系为 $\overline{X} \equiv B(\vec{v})X$. 我们关心的是 X 系观测到的 w^a 的空间方向的变化，而伪转动"保持"空间坐标轴的方向，所以 $\overline{X}$ 系可看作 X 系"派驻在 p' 点的代表". $w^a(t)$ 在 $\overline{X}$, X 系的分量 $\overline{w}^\mu(t)$, $w^\mu(t)$ 的关系为

$$\overline{w}^\mu(t) = B^\mu{}_\nu(\vec{v})\,w^\nu(t), \tag{G-9-44}$$

利用矩阵 $B(\vec{v})$ 的式(G-9-5′)便可从 $w^\nu(t)$ 的表达式(G-9-43)求得(习题) $\overline{w}^\mu(t)$ 的如下表达式：

$$\overline{w}^0(t) = \overline{w}^3(t) = 0,\ \overline{w}^1(t) = \cos[(\gamma-1)\omega t],\ \overline{w}^2(t) = -\sin[(\gamma-1)\omega t], \tag{G-9-45}$$

因此

$$w^a(t) = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\right)^a \cos[(\gamma-1)\omega t] - \left(\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\right)^a \sin[(\gamma-1)\omega t]. \tag{G-9-46}$$

上式有非常简明的物理意义：由实验室系(派驻在 p' 的代表 $\overline{X}$)看来，$w^a(t)$ 是一个转动着的空间矢量，这种转动就是著名的**托马斯进动**(Thomas precession). 上式还表明实验室系 X 测得的托马斯进动角速度为

$$\vec{\omega}_{\mathrm{T}} = -\omega_{\mathrm{T}}\vec{\overline{e}},\quad 其中\ \vec{\overline{e}} \equiv (\partial/\partial\overline{z})^a,\ \omega_{\mathrm{T}} \equiv (\gamma-1)\omega. \tag{G-9-47}$$

问题至此已经解决，但再从群论角度深入探讨将很有裨益. 从群论看来，托马斯进动实质上是速度方向不同的伪转动之积不是伪转动(WZ 不是子群)的表现. 先说明 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移可看作无限多个无限小的、速度方向不同的伪转动之积. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 $G(\tau)$ 上的正交归一费移 4 标架场，满足

$$(e_0)^a|_{p_0} = Z^a|_{p_0},\ (e_1)^a|_{p_0} = w^a|_{p_0}.$$

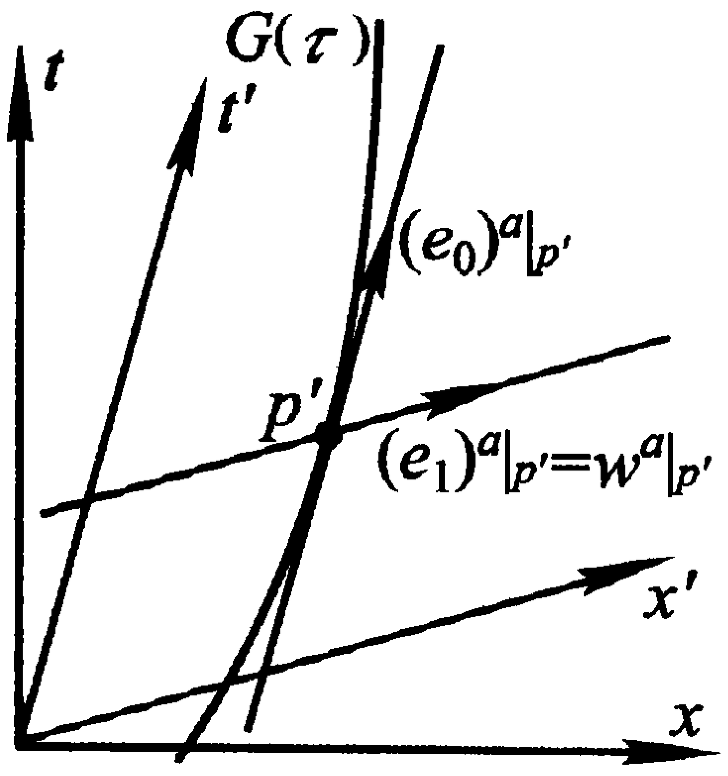


图 G-12　$G(\tau)$ 线上任一点 q 由费移决定的瞬时静止惯性坐标系

这一标架场使 $G(\tau)$ 的每点 p' 都伴有这样一个瞬时静止惯性坐标系 $X' \equiv \{t', x', y', z'\}$，其原点与实验室系 X 的原点重合，其在每点 p' 的坐标基矢 $(\partial/\partial x'^\mu)^a|_{p'} = (e^\mu)^a|_{p'}$，特别地有(见图 G-12)

$$(\partial/\partial x'^1)^a|_{p'} = (e_1)^a|_{p'} = w^a|_{p'}.$$

下面证明 $G(\tau)$ 线上任意两个(无限邻近的)邻点 p' 和

p'' 的上述瞬时静止惯性坐标系 X' 和 X'' 之间的关系是一个伪转动. $(e_\mu)^a$ 沿 $G(\tau)$ 费移等价于

$$0=\frac{\mathrm{D_F}(e_\mu)^a}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{D}(e_\mu)^a}{\mathrm{d}\tau}+(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b,$$

即

$$\frac{\mathrm{D}(e_\mu)^a}{\mathrm{d}\tau}=-(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b. \tag{G-9-48}$$

设 $p'\equiv G(\tau')$, $p''\equiv G(\tau'')$, 由式(3-2-14)可知在 $\Delta\tau\equiv\tau''-\tau'$ 很小时有

$$\frac{(\tilde{e}_\mu)^a|_{p'}-(e_\mu)^a|_{p'}}{\Delta\tau}\cong\left.\frac{\mathrm{D}(e_\mu)^a}{\mathrm{d}\tau}\right|_{p'}=-[(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b]|_{p'}, \tag{G-9-49}$$

[第二步用到式(G-9-48).] 其中 $(\tilde{e}_\mu)^a|_{p'}$ 是把 $(e_\mu)^a|_{p''}$ 平移至 p' 点的结果. 由上式又得

$$(\tilde{e}_\mu)^a|_{p'}\cong(e_\mu)^a|_{p'}+[(Z^aA^b-A^aZ^b)(e_\mu)_b]|_{p'}\Delta\tau. \tag{G-9-50}$$

因为 $(e_\mu)^a|_{p'}$ 是 p' 点的瞬时静止惯性坐标系 X' 的坐标基矢场 $(\partial/\partial x'^\mu)^a$ 在 p' 点的值, 即 $(e_\mu)^a|_{p'}=(\partial/\partial x'^\mu)^a|_{p'}$, 而 $(\tilde{e}_\mu)^a|_{p'}$ 则是 p'' 点的瞬时静止惯性坐标系 X'' 的坐标基矢场 $(\partial/\partial x''^\mu)^a$ 在 p' 点的值, 所以式(G-9-50)可表为

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial x''^\mu}\right)^a\right|_{p'}\cong\left.\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\right|_{p'}+\left[\left.(Z^aA^b-A^aZ^b)\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)_b\right|_{p'}\right]\Delta\tau. \tag{G-9-51}$$

于是

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial t''}\right)^a\right|_{p'}\cong\left.\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\right|_{p'}+A'^i\left.\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)^a\right|_{p'}\Delta\tau,\ [A'^i \text{ 是 } A^a \text{ 在 } (\partial/\partial x'^i)^a \text{ 的分量}]$$

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial x''^i}\right)^a\right|_{p'}\cong\left.\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\right|_{p'}A'^i\Delta\tau+\left.\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)^a\right|_{p'},\quad i=1,2,3,$$

可见 p' 和 p'' 的瞬时静止惯性坐标系 X' 和 X'' 的坐标基矢之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix}(\partial/\partial t'')^a\\(\partial/\partial x''^1)^a\\(\partial/\partial x''^2)^a\\(\partial/\partial x''^3)^a\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1 & A'^1\Delta\tau & A'^2\Delta\tau & A'^3\Delta\tau\\A'^1\Delta\tau & 1 & 0 & 0\\A'^2\Delta\tau & 0 & 1 & 0\\A'^3\Delta\tau & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\partial/\partial t')^a\\(\partial/\partial x'^1)^a\\(\partial/\partial x'^2)^a\\(\partial/\partial x'^3)^a\end{bmatrix}. \qquad \text{(G-9-52)}$$

上式只对无限小的$\Delta\tau$才准确成立. 以F代表上式右边的4×4矩阵. 因为两系坐标之间的变换矩阵等于坐标基矢之间的变换矩阵的转置之逆, 所以p'和p''的瞬时静止惯性坐标系$X'\equiv\{t',x',y',z'\}$和$X''\equiv\{t'',x'',y'',z''\}$之间的关系为

$$X''=F^{-1}X'. \qquad \text{(G-9-53)}$$

不难验证, 在略去$\Delta\tau^2$后有

$$F^{-1}\cong\begin{bmatrix}1 & -A'^1\Delta\tau & -A'^2\Delta\tau & -A'^3\Delta\tau\\-A'^1\Delta\tau & 1 & 0 & 0\\-A'^2\Delta\tau & 0 & 1 & 0\\-A'^3\Delta\tau & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad \text{(G-9-54)}$$

根据命题 6-3-6, 回转仪在p'时刻的 4 加速A^a等于它相对于X'系的 3 加速, 故$A'^i\Delta\tau$在一阶近似下等于X''系相对于X'系的 3 速(记作$\Delta\vec{v}$)的i分量$(\Delta\vec{v})^i$(当p''无限接近p'时$\Delta\tau\cong\Delta t'$). 由式(G-9-5)可知在只保留$|\Delta\vec{v}|$的一阶项时有

$$B(\Delta\vec{v})\cong\begin{bmatrix}1 & -(\Delta\vec{v})^1 & -(\Delta\vec{v})^2 & -(\Delta\vec{v})^3\\-(\Delta\vec{v})^1 & 1 & 0 & 0\\-(\Delta\vec{v})^2 & 0 & 1 & 0\\-(\Delta\vec{v})^3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cong F^{-1}. \qquad \text{(G-9-55)}$$

所以

$$X''\cong B(\Delta\vec{v})X'. \qquad \text{(G-9-53}')$$

可见$G(\tau)$在任意两个(无限邻近的)邻点的瞬时静止惯性坐标系由一个无限小伪转动相联系, 费移可看作无限多个无限小伪转动的相继作用.

为了从群论角度求得实验室系$X\equiv\{t,x,y,z\}$测得的托马斯进动角速度, 有必要在p'和p''的瞬时静止惯性参考系内分别再选定一个特别的惯性坐标系, 记作$\overline{X}$和$\overline{\overline{X}}$, 定义为

$$\overline{X} \equiv B(\vec{v})X, \quad B(\vec{v}) \in \mathrm{WZ}, \tag{G-9-56}$$

$$\overline{\overline{X}} \equiv B(\vec{v}+\delta\vec{v})X, \quad B(\vec{v}+\delta\vec{v}) \in \mathrm{WZ}, \tag{G-9-57}$$

其中$\vec{v}$和$\vec{v}+\delta\vec{v}$分别是回转仪在p'和p''时相对于X系的3速. 因为伪转动"保持"x轴的方向, 所以$\overline{X}$和$\overline{\overline{X}}$系可分别看作"X系在p'和p''点的代表". 如果$G(\tau)$的某空间矢量场在p'点与$\bar{x}$轴平行, 在p''点与$\bar{\bar{x}}$轴平行, 则X系认为它的空间方向在p'时刻不变, 即无空间转动(在本节注 3 带引号的意义下). 然而, 沿线费移的w^a的表现并非如此. 由式(G-9-56)和(G-9-57)得

$$\overline{\overline{X}} \equiv B(\vec{v}+\delta\vec{v})B^{-1}(\vec{v})\overline{X} = B(\vec{v}+\delta\vec{v})B(-\vec{v})\overline{X}. \tag{G-9-58}$$

令

$$\Lambda \equiv B(\vec{v}+\delta\vec{v})B(-\vec{v}), \tag{G-9-59}$$

则

$$\overline{\overline{X}} = \Lambda\overline{X}. \tag{G-9-58$'$}$$

矩阵计算表明[见 Jackson(1975)], 在只保留$\delta\vec{v}$的一阶项时有(这是"方向不同的伪转动之积不是伪转动"的实例)

$$\Lambda = R(\Delta\vec{\Omega})B(\Delta\vec{v}), \tag{G-9-60}$$

其中

$$\Delta\vec{v} = \overline{\overline{X}}\text{系相对于}\overline{X}\text{系的3速},\text{①} \tag{G-9-61}$$

$$\Delta\vec{\Omega} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{v}\times\delta\vec{v}, \tag{G-9-62}$$

而$R(\Delta\vec{\Omega}) \in \mathrm{ZD}$则代表把坐标轴以矢量$\Delta\vec{\Omega}$为轴转角度$|\Delta\vec{\Omega}|$所导致的坐标变换的矩阵. 为求得$p'$时的瞬时转动角速度, 不妨设$w^a$在$p'$点与$\bar{x}$轴同向, (为此只须调整$w^a$的初始方向, 不再要求$w^a|_{p_0}$与$x$轴同向.) 这导致$X'$系与$\overline{X}$系相同, 于是$\overline{\overline{X}} = R(\Delta\Omega)B(\Delta\vec{v})X' = R(\Delta\Omega)X''$[其中第二步用到式(G-9-53$'$)], 因而

$$X'' = R(-\Delta\vec{\Omega})\overline{\overline{X}}. \tag{G-9-63}$$

注意到$(\partial/\partial x'')^a|_{p''} = w^a|_{p''}$, 而实验室系$X$认为$(\partial/\partial\bar{\bar{x}})^a|_{p''}$代表"如果$w^a$不转"的

① 请注意$\Delta\vec{v} \neq (\vec{v}+\delta\vec{v})-\vec{v} = \delta\vec{v}$. 读者可用相对论速度合成公式证明$\Delta\vec{v} = \gamma^2\delta\vec{v}_\| + \gamma\delta\vec{v}_\perp$, 其中$\delta\vec{v}_\|$和$\delta\vec{v}_\perp$分别是$\delta\vec{v}$平行和垂直于$\vec{v}$的分量. 现在讨论的是圆周运动,有$\delta\vec{v}\perp\vec{v}$, 故$\Delta\vec{v} = \gamma\delta\vec{v}$.

$w^a|_{p''}$，可知 $X''=R(-\Delta\vec{\Omega})\overline{\overline{X}}$ 表明 X 系认为 w^a 在从 p' 到 p'' 的过程中做了(有向)角度为 $-\Delta\vec{\Omega}$ 的空间转动. 再以 δt 代表 X 系测得的此过程的时间，便得托马斯进动角速度

$$\vec{\omega}_{\mathrm{T}}=-\lim_{\delta t\to\infty}\frac{\Delta\vec{\Omega}}{\delta t}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{a}\times\vec{v}\,,\tag{G-9-64}$$

其中 $\vec{a}\equiv\lim\limits_{\delta t\to\infty}\delta\vec{v}/\delta t$ 是回转仪在 p' 时刻相对于实验室系的 3 加速. 不难验证这一 $\vec{\omega}_{\mathrm{T}}$ 与式(G-9-47)的 $\vec{\omega}_{\mathrm{T}}$ 一致.

以上是用 4 维语言及费移术语对托马斯进动的讨论. 托马斯当年借助于对相继伪转动的计算，首次指出电子的静止坐标系(本书的带撇系)在运动过程中(例如从 X' 系到 X'' 系)相对于 X 系出现附加转动(静止系空间坐标轴的空间转动)，使电子自旋角动量(本书的 w^a)有了一个牵连角速度 $\vec{\omega}_{\mathrm{T}}$，从而克服了在原子物理发展早期一度出现过的困难.

本小节主要参考文献：Misner et al.(1973)；Goldstein(1980)；Jackson(1975)；Eisberg and Resnick(1985).

最后谈一点笔者的看法. 本小节开头第二段曾问："从实验室系 X 看来，设 w^a 在 $\tau=0$ 时与 $(\partial/\partial x)^a$ 同向，在 $\tau=\hat{\tau}$ 时还同向吗?" 作为时空矢量，$w^a|_{\hat{p}}$ 不是 X 系的空间矢量[$w^0(\hat{t})\neq 0$]，它与空间矢量 $(\partial/\partial x)^a$ 同向与否的问题并无意义. 要使 $w^a|_{\hat{p}}$[更一般地，$w^a(t)$]的"空间方向"有意义，先要定义一个把 $w^a(t)$ 变为 X 系的空间矢量[记作 $\tilde{w}^a(t)$]的映射. 这一定义当然应当尽量自然，但"自然"一词本来就有一定的含糊性，所以映射很可以不止一种. 前面的"代表法"就是其一：设 $\bar{X}$ 是 X 系派驻在 p' 点的代表，$\bar{w}^i$ 是 $w^a|_{p'}$ 在 $\bar{X}$ 系的分量，则 $w^a|_{p'}$ 的像就定义为 $\bar{w}^i(\partial/\partial x^i)^a$. 这是实验室参考系 $\mathscr{R}$ 的空间矢量，而且可以证明它与实验室坐标系 X 的选择无关. 但也存在其他的"自然"定义，例如可把 $w^a(t)$ 在 X 系的同时面的投影定义为 $\tilde{w}^a(t)$，即认为 $G(\tau)$ 线上存在 X 系的空间矢量场 $\tilde{w}^a(t)=\tilde{w}^i(t)(\partial/\partial x^i)^a$，其分量 $\tilde{w}^i(t)$ 就是式(G-9-43)的 $w^i(t)$，其中非零的两个为

$$\tilde{w}^1(t)=\cos\omega t\cos\gamma\omega t+\gamma\sin\omega t\sin\gamma\omega t=\cos[(\gamma-1)\omega t]+(\gamma-1)\sin\omega t\sin\gamma\omega t,$$

$$\tilde{w}^2(t)=\sin\omega t\cos\gamma\omega t-\gamma\cos\omega t\sin\gamma\omega t=-\sin[(\gamma-1)\omega t]-(\gamma-1)\cos\omega t\sin\gamma\omega t,\tag{G-9-65}$$

于是
$$\tilde{w}^a(t)=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\cos[(\gamma-1)\omega t]-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\sin[(\gamma-1)\omega t]\right\}$$
$$+\left\{(\gamma-1)\sin\gamma\omega t\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\sin\omega t-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\cos\omega t\right]\right\}. \qquad \text{(G-9-66)}$$

上式与代表法的结果的区别在于多了第二大项，该项方括号内代表以 ω 为角速的转动，但方括号前的“振幅”也随 t 做周期性变化，导致时间段 $0<\gamma\omega t<\pi$ 内与 $\pi<\gamma\omega t<2\pi$ 内的转动方向相反，因而在一个周期 $\hat{t}=2\pi/\omega$ 内有很大程度的抵消。如果所关心的物理问题不是每一时刻或每一周期而是(例如)十倍甚至百倍周期方可显效，则由于振幅中因子 $\sin\gamma\omega t$ 的最大值为 1，第二大项的时间平均就可忽略。此外，振幅中的因子 $\gamma-1$ 在许多情况下远小于 1[例如处于最低能态的氢原子的电子的 $(\gamma-1)\sim10^{-5}$]，只此就能被第一大项忽略。不过，无论如何，至少从理论的角度看，这种做法(简称投影法)与代表法的结果毕竟不同。于是出现问题：哪种映射才符合物理实在？以下纯粹是笔者的认识，未见文献依据。要回答这一问题，先要弄清物理学的一个很基本的问题：在用实验检验理论时，如何保证仪器所给出的一堆数(或曲线)真的代表理论中的各该量？反过来说，在用理论解释实验(观测)结果时，如何保证理论上的各量真的代表实验中的各该量？例如，在解释水星近日点进动时，很自然地用施瓦西坐标 r,θ,φ 作为水星的径(角)向位置的标志。然而坐标是人为定义的，为什么施瓦西坐标的确代表用天文手段观测到的水星的径(角)向位置？只有对天文观测的细节以及对广义相对论都非常熟悉的人才可给出明确的回答(证明)。又如，人们熟悉的钟慢效应是动钟慢于静钟，读数之比为 γ^{-1}，与这一理论结果相应的实验安排涉及一个动钟两个静钟(图 6-15)。但若只用两钟(一静一动)并约定静钟观者在两钟相遇时左眼看静钟右眼看动钟(图 6-19)，则读数之比不再是 γ^{-1}。甚至还存在这样的实验安排(图 6-20)，静钟观者发现动钟较快！每种理论结果对应于一种实验安排，不可张冠李戴。再看一个与托马斯进动更为接近的例子——尺缩效应。从理论上说，设尺子相对于 X 系匀速平动，首先要给“动尺长”下个定义。最自然的定义是：在 X 系的某一时刻同时记下动尺头尾的位置(X 系的两个空间点)，它们的空间距离就定义为动尺长。翻译成 4 维语言，就是把 X 系的同时面与尺子世界面的交线作为动尺，其长度就定义为动尺长。结论是动尺长只有静尺长的 γ^{-1} 倍。粒子物理学中对大量高速粒子的实验都证实了这一结论，重要的是每个实验所测得的“动尺长”的确是理论所定义的那个动尺长。与尺长问题相较，托马斯进动问题由于关心动尺的空间方向以及回转仪作非惯性运动而复杂得多，存在不止一种的、都很“自然”的定义。为了回答“在同实验对比时该用哪个定义”的问题，必

须弄清实验的具体详尽的细节，从而确定仪器的读数所反映的是哪一个定义的空间方向. 定义并无对错之分，但存在哪个定义才是实验所测得的对象这一微妙问题(不可张冠李戴). 除了代表法和投影法外，笔者认为至少还有一种很自然的、未在文献上见过的映射定义，介绍如下.

把回转仪轴看作长为 l 的短尺，尺的每点看作一个观者，以线长参数 s 标志，其世界线记作 $\gamma_s(\tau)$ (τ 为固有时)，尺头尺尾依次为 $\gamma_0(\tau)=G(\tau)$ 和 $\gamma_l(\tau)$. 所有 $\gamma_s(\tau)$ 铺出短尺的世界面 $\mathscr{S}$. 选横向曲线 $\mu(s)$ 使 $\mu(0)=\gamma_0(0)$，且曲线在 $\mu(s)$ 点的切矢等于 $w^a(0)$. 约定每一 $\gamma_s(\tau)$ 与 $\mu(s)$ 的交点为 τ 的零点，则 $\mathscr{S}$ 上有2维坐标系 $\{s,\tau\}$. 把基矢场 $Z^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 和 $\eta^a\equiv(\partial/\partial s)^a$ 在点 $(s,\tau)\in\mathscr{S}$ 的值记作 $Z^a(s,\tau)$ 和 $\eta^a(s,\tau)$，则 $\eta^a(0,\tau)$ 可作正交分解:

$$\eta^a(0,\tau)=a(\tau)Z^a(0,\tau)+b(\tau)w^a(\tau)\,, \tag{G-9-67}$$

可见 $b(\tau)w^a(\tau)$ 是 $G(\tau)$ 的一个邻居. 上式可用 X 系的坐标基矢展开为

$$\eta^a(0,\tau)=[a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau)]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\Bigg|_{G(\tau)}\,, \tag{G-9-68}$$

其中 $Z^\mu(0,\tau)$ 就是式(G-9-40)的 $Z^\mu(\tau)$，而 $w^\mu(\tau)$ 则由式(G-9-43)给出[例如 $w^0(\tau)=-R\omega\gamma\sin\gamma^2\omega\tau$]. 因 $\mathscr{S}$ 的每点可用 s,τ 刻画，故该点在 X 系的坐标 x^μ 是 s,τ 的函数，记作 $x^\mu(s,\tau)$，称为 $\mathscr{S}$ 的参数式，于是可从式(G-9-68)读出

$$\left.\frac{\partial x^\mu(s,\tau)}{\partial s}\right|_{s=0}=a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau)\,, \tag{G-9-69}$$

借此可将 $x^\mu(s,\tau)$ 在 $s=0$ 附近展开为

$$x^\mu(s,\tau)=x^\mu(0,\tau)+s[a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau)]+\mathrm{O}(s^2)\,. \tag{G-9-70}$$

由式(G-9-39)及(G-9-40)可知上式在 $\mu=0$ 时给出

$$t(s,\tau)=\gamma\tau+s[a(\tau)\gamma+b(\tau)w^0(\tau)]+\mathrm{O}(s^2)\,. \tag{G-9-71}$$

Z^a 的类时性保证 $\partial t(s,\tau)/\partial\tau>0$，故可从上式反解出 $\tau=\tau(s,t)$，于是 $\mathscr{S}$ 的参数式又可写成 $x^i(s,\tau)=x^i(s,\tau(s,t))$，这其实就是2维面 $\mathscr{S}$ 与等 t 面的截线方程. 以 $x_0^i(t)$ 和 $x_l^i(t)$ 简记短尺头尾的空间坐标，则

$$x_l^i(t)-x_0^i(t)\equiv x^i(l,\tau(l,t))-x^i(0,\tau(0,t))=l\left.\frac{\partial x^i(s,\tau(s,t))}{\partial s\ (t\,\text{固定})}\right|_{s=0}+\mathrm{O}(l^2)$$

$$=l\left[\left.\frac{\partial x^i(s,\tau)}{\partial s}\right|_{s=0,\tau=\gamma^{-1}t}+\left.\frac{\partial x^i(0,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\gamma^{-1}t}\left.\frac{\partial \tau(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}\right]+O(l^2)$$

$$=l\left[a(\tau)Z^i(0,\gamma^{-1}t)+b(\gamma^{-1}t)w^i(\gamma^{-1}t)+Z^i(0,\gamma^{-1}t)\left.\frac{\partial \tau}{\partial s}\right|_{s=0}\right]+O(l^2)\ . \qquad \text{(G-9-72)}$$

其中最末一步用到式(G-9-70).① 把$\tau=\tau(s,t)$代入式(G-9-71), 则左边不是s的函数(就是t),两边对s求偏导并在$s=0$取值得

$$\partial\tau(s,t)/\partial s\,|_{s=0}=-a(\gamma^{-1}t)-\gamma^{-1}b(\gamma^{-1}t)w^0(\gamma^{-1}t),$$

代入式(G-9-72)得

$$x_l^i(t)-x_0^i(t)=lb(\gamma^{-1}t)[w^i(\gamma^{-1}t)-\gamma^{-1}Z^i(0,\gamma^{-1}t)w^0(\gamma^{-1}t)]+O(l^2)\,. \qquad \text{(G-9-73)}$$

$\tilde{w}^i(t)$本应定义为$[x_l^i(t)-x_0^i(t)]/l$的极限, 但因只关心方向, 可略去因子$b(\gamma^{-1}t)$, 即定义

$$\tilde{w}^i(t)\equiv b(\gamma^{-1}t)^{-1}\lim_{l\to 0}\frac{x_l^i(t)-x_0^i(t)}{l}.$$

以式(G-9-72)、(G-9-40)及(G-9-43)代入便得$\tilde{w}^3(t)=0$和

$$\tilde{w}^1(t)=\cos\omega t\cos\gamma\omega t+\gamma^{-1}\sin\omega t\sin\gamma\omega t=\cos[(\gamma-1)\omega t]+(\gamma^{-1}-1)\sin\omega t\sin\gamma\omega t,$$

$$\tilde{w}^2(t)=\sin\omega t\cos\gamma\omega t-\gamma^{-1}\cos\omega t\sin\gamma\omega t=-\sin[(\gamma-1)\omega t]-(\gamma^{-1}-1)\cos\omega t\sin\gamma\omega t, \qquad \text{(G-9-74)}$$

因而

$$\tilde{w}^a(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\cos[(\gamma-1)\omega t]-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\sin[(\gamma-1)\omega t]$$

$$+(\gamma^{-1}-1)\sin\gamma\omega t\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\sin\omega t-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\cos\omega t\right]. \qquad \text{(G-9-75)}$$

上式与投影法的结果[式(G-9-66)]的差别仅在于第二大项的振幅由$(\gamma-1)\sin\gamma\omega t$改为$(\gamma^{-1}-1)\sin\gamma\omega t$. 由于同样原因, 该项在多数情况下也会被第一大项(托马斯项)

---

① 作为$G(\tau)$上的场, $w^\mu(\tau)$天生是τ的函数. 在$G(\tau)$上有$t=\gamma\tau$, 故w^μ又可看作t的函数. 但w^μ作为τ的函数和作为t的函数有不同函数关系. 把$w^\mu(\tau)$中的w^μ当作函数关系, 则前面写$w^\mu(t)$ [如式(G-9-43)]是马虎的. 现在为清晰起见写成$w^\mu(\gamma^{-1}t)$.

所忽略.

习　题

1. 验证由式(G-1-1)定义的 $I_g: G \to G$ 确为自同构映射.

~2. 验证由式(G-1-2)定义的乘法满足群乘法的要求.

3. 验证由§G.1 定义 8 所定义的 $A(G)$ 是群.

~4. 试证定理 G-1-2, 即 $A_I(G)$ 是群 $A(G)$ 的正规子群.

5. 验证由§G.1 定义 9 所定义的 $H \otimes_S K$ 是群.

6. 设 $L_g: G \to G$ 是由 $g \in G$ 生成的左平移, $L_g{}^{-1}$ 是 L_g 的逆映射, 试证

$$L_{g^{-1}} = L_g{}^{-1}, \quad \forall g \in G .$$

~7. $\forall g \in G$ 定义右平移 $R_g: h \mapsto hg$, $\forall h \in G$, 试证 $R_{gh} = R_h \circ R_g$.

~8. 试证 $[\vec{v}, \vec{u}] := \vec{v} \times \vec{u}$, $\forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ 满足李括号的条件(见§G.3 例 1).

~9. 试证 $[A, B] := AB - BA$ 满足李括号的条件(见§G.3 例 2).

~10. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\hat{\mathscr{G}}$ 依次是李群 G 和 $\hat{G}$ 的李代数, $\rho_*: \mathscr{G} \to \hat{\mathscr{G}}$ 是同态映射 $\rho: G \to \hat{G}$ 在 $e \in G$ 诱导的推前映射, 试证 $\rho(\exp A) = \exp(\rho_* A)$ $\forall A \in \mathscr{G}$. 提示: 先用同态性证明 $\rho(\exp tA)$ 是单参子群.

~11. 试证式(G-5-10)可由式(G-5-10′)推出. 提示: 把式(G-5-10)的 v^a, u^a 之和作为式(G-5-10′)的 v^a .

~12. SO(2) 是阿贝尔群吗? O(2) 是阿贝尔群吗?

~13. 李群 SL(m) [GL(m) 满足 $\det T = +1$ 的子群]的李代数记作 $\mathscr{SL}(m)$. 试证

(a) $\mathscr{SL}(m) = \{m \times m$ 无迹实矩阵$\}$, 　　(b) $\dim \mathrm{SL}(m) = m^2 - 1$.

14. (1)试证存在连续曲线 $\mu: [0,1] \to \mathrm{GL}(2)$ 使 $\mu(0) = I$, $\mu(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

*(2)试证 $T \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2)$ 不属于李群 GL(2) 的任一单参子群. 提示: 假定存在矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 使 $T = \mathrm{Exp}(A)$, (a)证明 $c \neq 0$, (b)把 A^n (A 的 n 次方)记作 $A^n \equiv \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$, 证明 $\exists r_n \in \mathbb{R}$ 使 $b_n = br_n, c_n = cr_n$. (c)由(b)推出矛盾.

15. 补证定理 G-5-11 证明中的等式 $D = \mathrm{Exp}(\mathrm{i}\Phi)$.

16. 试用李括号所满足的雅可比恒等式证明定理 G-6-1 的(b).

17. 试证§G.6 例 1 中的①和②.

18. 试证§G.7 例 4 的结论, 即 $\bar{\xi} = -\bar{A}$.

19. 设 G 是矩阵李群, 试证 $\forall A \in \mathscr{G}, g \in G$ 有 $\mathscr{Ad}_g A = gAg^{-1}$. (右边是 3 个矩阵的连乘积. 当 G 不是矩阵群时 gAg^{-1} 无意义, 因为李群元 g 与李代数元 B 之积没有定义.)

20. 设$\mathscr{G}$和$\hat{\mathscr{G}}$依次是李群G和$\hat{G}$的李代数，$\rho_*:\mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$是同态映射$\rho:G\to\hat{G}$在$e\in G$诱导的推前映射，试证

(a) $\rho_*\mathscr{Ad}_g A=\mathscr{Ad}_{\rho(g)}\rho_* A,\quad \forall g\in G, A\in\mathscr{G}$.

(b) $\rho_*(L_{g^{-1}*}X)=L_{\rho(g)^{-1}*}\rho_* X,\quad \forall g\in G, X\in V_g$($g$点的切空间)，$L$代表左平移.

21. 试证式(G-8-14)和(G-8-16).

*22. 设e是李群G的恒等元，$g\in G$，则映射$\mathscr{Ad}_g : V_e\to V_e$可延拓为

$$\mathscr{Ad}_g : \mathscr{F}_G(1,0)\to\mathscr{F}_G(1,0)\quad [\mathscr{F}_G(1,0)\text{代表}G\text{上光滑矢量场的集合}],$$

定义为$(\mathscr{Ad}_g\bar{A})_h := I_{g*}(\bar{A}_{h'})\ \ \forall\bar{A}\in\mathscr{F}_G(1,0),\ h\in G$，其中$h'\equiv g^{-1}hg$. 试证：若$\bar{A}$是相应于$A\in V_e$的左不变矢量场，则$\mathscr{Ad}_g\bar{A}$是相应于$\mathscr{Ad}_g A\in V_e$的左不变矢量场. 提示：只须证明$(\mathscr{Ad}_g\bar{A})_h=L_{h*}(\mathscr{Ad}_g A),\ \forall h\in G$，为此可利用$I_g=L_g\circ R_{g^{-1}}$，其中$R$代表右平移(见习题7).

23. 设$\mathscr{G}$是李群G的李代数，$g\in G$，试证$\mathscr{Ad}_g : \mathscr{G}\to\mathscr{G}$是李代数同构.提示：$I_g : G\to G$是微分同胚保证$\mathscr{Ad}_g : \mathscr{G}\to\mathscr{G}$是矢量空间同构(见第4章习题4)，故只须补证$\mathscr{Ad}_g : \mathscr{G}\to\mathscr{G}$保李括号，即$\mathscr{Ad}_g[A,B]=[\mathscr{Ad}_g A,\mathscr{Ad} B]$.由第4章习题6可知$\mathscr{Ad}_g[\bar{A},\bar{B}]=[\mathscr{Ad}_g\bar{A},\mathscr{Ad}\bar{B}]$，再用习题22的结论以及$\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}\Rightarrow[\bar{A},\bar{B}]\in\mathscr{L}$便可.

24. 完成定理G-9-4证明中留作习题的一步，即从$R=B(-\vec{v})\Lambda$出发证明式(G-9-14).

25. 定理G-9-4中分解唯一性的另一证明的思路如下：由$B(\vec{v})R=B(\vec{v}')R'$得

$$I=B(-\vec{v})B(\vec{v}')R'R^{-1}=B(-\vec{v})B(\vec{v}')\tilde{R},\quad (\text{其中}\ \tilde{R}\equiv R'R^{-1}\in\mathrm{ZD})$$

故$\tilde{R}^{-1}=B(-\vec{v})B(\vec{v}')$. 此式的00分量给出$1=B^0{}_\mu(-\vec{v})B^\mu{}_0(\vec{v}')=\gamma\gamma'(1-\vec{v}\cdot\vec{v}')$. 试证(作为本题)上式当且仅当$\vec{v}=\vec{v}'$时成立，可见$B(\vec{v})=B(\vec{v}')$，从而又有$R'=R$.

中册符号一览表

关于惯例的说明以及上册符号的一览表见上册的**惯例与符号**. 下面是出现在中册(而不出现在上册)的符号的一览表.

$\mathrm{I}^+(p)$	p 点的编时未来. 首次出现于§11.1.
$\mathrm{I}^+(p,U)$	p 点相对于邻域 U 的编时未来. 首次出现于§11.1.
$\mathrm{I}^+(S)$	子集 S 的编时未来. 首次出现于§11.1.
$\mathrm{J}^+(p)$	p 点的因果未来. 首次出现于§11.1.
$\mathrm{J}^+(S)$	子集 S 的因果未来. 首次出现于§11.1.
$\mathrm{D}^+(S)$	子集 S 的未来依赖域. 首次出现于§11.4.
$\mathrm{H}^+(S)$	子集 S 的未来柯西视界. 首次出现于§11.5.
i^+	未来类时无限远. 首次出现于§12.2.
i^0	未来类空无限远. 首次出现于§12.2.
$\mathscr{I}^+$	未来类光无限远. 首次出现于§12.2.
	把以上符号中的 + 改为 − 相当于把未来改为过去.
$\tilde{\mathscr{L}}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$	$\mathscr{L}_t T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的空间投影. 出现于§14.4.
D_a	与空间诱导度规 h_{ab} 适配的导数算符, 首次出现于式(12-7-8), 详见§14.4.
$\mathrm{C}[a,b]$	定义见小节 B.1.1 例1 .
$\mathrm{L}^2[a,b]$	定义见式(B-1-2).
$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$	定义见式(B-1-3).
$(\cdot,\ \cdot)$	内积. 定义见小节 B.1.1 定义1 .
A^*	算符 A 的对偶算符. 定义见式(B-1-16).
$A^\dagger$	算符 A 的伴随算符. 定义见式(B-1-18). 无界算符 A 的 $A^\dagger$ 见§B.2.
$H \otimes_S K$	群 H 和 K 的半直积群. 定义见§G.1 定义 9.
$L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$	定义见小节 G.5.3.

参 考 文 献

盖尔芳特, 希洛夫. 广义函数 I. 林坚冰译. 1965. 北京:科学出版社

高思杰, 梁灿彬. 1997. 刚性参考系与转盘几何. 北京师范大学学报, **33:** 211-213

朗道, 栗弗席兹. 1959. 场论. 任朗, 袁炳南译. 北京:人民教育出版社

梁灿彬. 1995. 转盘周长的几何剖析. 北京：北京师范大学学报, **31**: 198-203

斯米尔诺夫. 1960. 高等数学教程, 第三卷, 第一分册. 北大数学力学系代数教研室译. 北京: 人民教育出版社

王永久, 唐智明. 1990. 引力理论和引力效应. 长沙: 湖南科学技术出版社

王永久. 2000. 黑洞物理学. 长沙: 湖南师范大学出版社

夏道行, 吴卓人, 严绍宗等. 1985. 实变函数论与泛函分析. 下册, 第二版. 北京: 高等教育出版社

赵峥. 1991. 热平衡的传递性等价于钟速同步的传递性. 中国科学 (A 辑). 285-289

Aharonov Y and Anandan J. 1987. Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution. *Phys. Rev. Lett.*, **58:** 1593-1596

Aharonov Y and Bohm D. 1959. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quabntum Theory. *Phys. Rev.*, **115**: 485-491

Arnowitt R Deser S, and Misner C W. 1962. The Dynamics of general Relativity, in *Gravitation: An Introduction to Current Research.* ed. L. Witten. New York: Wiley

Ashtekar A, and Hansen R O. 1978. A Unified Treatment of Null and Spatial Infinity in General Relativity. I. Universal Structure, Asymptotic Symmetries, and Conserved Quantities at Spatial Infinity. *J. Math. Phys.*, **19:** 1542-1566

Ashtekar A, and Magnon-Ashtekar A. 1979. Energy-Momentum in General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, **43:** 181-184

Ashtekar A. 1980. Asymptotic Structure of the Gravitational Field at Spatial Infinity, in: *General Relativity and Gravitation.* Vol. **2.** ed. A Held. New York: Plenum Press

Bardeen J, and Press W. 1972. Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron radiation. *Astrophys. J.*, **178**: 347-369

Berry M. 1984. Quantum Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**392:** 45-57

Bleecker D. 1981. Gauge Theory and Variational Principles. London: Addison-Wesley Publishing Company, INC

Bondi H, van der Burg M G J, and Metzner A W K. 1962. Gravitational Waves in General Relativity. VII. Waves from Axi-symmetric Isolated Systems. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**269:** 21-52

Bray H L, and Chrusciel P T. 2003. The Penrose Inequality. *gr-qc/*0312047

Brocker T, and Dieck T T. 1985. *Representations of Compact Lie Groups.* Beijing: Springer-Verlag, World Publishing Corporation

Brown J D, and York J W. 1992. Quasilocal energy in general relativity. Based on talk given at Joint Summer Research Conf. on Mathematical Aspects of Classical Field Theory, Jul 1991. e-Print: gr-qc/9209012

Brown J D, and York J W. 1993. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev.*, **D47:** 1407-1419

Brown J D, Lau S R, and York J W. 1997. Energy of isolated systems at retarded times as the null limit of quasilocal energy. *Phys. Rev.*, **D55**: 1977-1984. e-Print:gr-qc/ 9609057

Budic R, and Sachs R K. 1974. Causal Boundaries for General Relativistic space-times. *J. Math. Phys.*, **15**: 1302-1309

Carmeli M. 1982. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.* New York: John Wiley and Sons

Carter B. 1966. Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein's Equations. *Phys. Rev.*, **141:** 1242-1247

Carter B. 1968. Global Structure of the Kerr family for Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, **174:** 1559-1572

Chakrabarti S K, Geroch R P, and Liang Canbin. 1983. Timelike Curves of Limited Acceleration in General Relativity. *J. Math. Phys.*, **24:** 597-598

Chandrasekhar S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford: Clarendon

d'Inverno, R. 1992. *Introducing Einstein's Relativity.* Oxford: Clarendon Press

Dirac P. 1948. The Theory of Magnetic Poles. *Phys. Rev.*, **74:** 817-830

Dirac P. 1981. *The Principles of Quantum Mechanics.* Fourth Edition. London: Oxford University Press

Earman J. 1999. The Penrose-Hawking Singularity Theorems: History and Implications In *The Expanding Worlds of General Relativity.* ed. H Goenner, J Renn, J Ritter, and T Sauer. Boston: Braun-Brumfiekd, Inc.

Eisberg R, and Resnick R. 1985. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles.* New York: John Wiley and Sons

Eisenhart L P. 1997. *Riemannian Geometry.* Princeton: Princeton University Press

Frolov V P, and Novikov I D. 1998. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments.* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht

Fulton T, Rohrlich F, and Witten L.1962. Conformal Invariance in Physics. *Rev. Mod. Phys.*, **34**: 442-457

Gao Sijie, Kuang Zhiquan, and Liang Canbin. 1998. Clock Rate Synchronizable Reference Frames in Curved Space-times. *J. Math. Phys.*, **39**: 2862-2865

Geroch R P, and Horowitz G T. 1979. Global Structure of Spacetimes. in *Gerenal Relativity, An Einstein Centenary Survey.* ed. Hawking S W, and Israel W . Cambridge: Cambridge University Press

Geroch R P, and Winicour J. 1981. Linkages in General Relativity. *J. Math. Phys.*, **22**: 803-812

Geroch R P, Kronheimer E H, and Penrose R. 1972. Ideal Points in Space-time, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser.*, A**327**: 545-567

Geroch R P, Liang Canbin, and Wald R M. 1982. Singular Boundaries of Space-times, *J. Math. Phys.*, **23**: 432-435

Geroch R P. 1968a. What is a Singularity in General Relativity?. *Annals of Physics.*, **48:** 526-540

Geroch R P. 1968b. Local Characterization of Singularities in General Relativity. *J. Math. Phys.*, **9**: 450-465

Geroch R P. 1970. Domain of Dependence. *J. Math. Phys.*, **11**: 437-449

Geroch R P. 1971. A Method for Generating Solutions of Einstein's Equation. *J. Math. Phys.*, **11**: 437-449

Geroch R P. 1977. Asymptotic Structure of Space-time. in *Asymptotic Structure of Space-time*, ed. Esposito F P , and Witten L . New York: Plenum

Godel K. 1949. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Equations of Gravitation. *Rev. Modern Phys.*, **21**: 447-450

Goldstein H. 1980. *Classical Mechanics, Second Edition.* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company

Haantjes. 1937. *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.*, **40**: 700

Hawking S W, and Ellis G F R. 1965. Singularities in Homogeneous World Models. *Phys. Lett.*, **17**: 246-247

Hawking S W, and Ellis G F R. 1973. *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge: Cambridge University Press

Hawking S W, and Penrose R. 1970. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser.* , A**314**: 529-548

Hawking S W, and Penrose R. 1996. *The Nature of Space and Time.* Princeton: Princeton University Press. 中译本：杜欣欣，吴忠超译. (1996).时空本性. 长沙:湖南科学技术出版社

Hawking S W. 1965. Occurrence of Singularities in Open Universes. *Phys. Rev. Lett.*, **15**: 689-690

Hawking S W. 1967. The Occurrence of Singularities in Cosmology. III. Causality and Singularities. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**300**: 182-201

Hawking S W. 1988. *A Brief History of Time.* Toronto: Bantam Books

Hawking S W. 1992. Chronology Protection Conjecture. *Phys. Rev. D.*, **46**: 603-611

Hertog T, Horowitz G T, and Maeda K. 2003. Generic Cosmic Censorship Violation in anti de Sitter Space. *arXiv: gr-qc/0307102*

Hertog T, Horowitz G T, and Maeda K. 2004. Update on Cosmic Censorship Violation in AdS. *arXiv: gr-qc/0405050*

Hicks N J. 1965. Notes on Differential Geometry. Princeton: Van Nostrand

Isenberg J, and Nester J. 1980. Canonical Gravity in *General Relativity and Gravitation*, Vol. **1**: ed. A. Held. New York: Plenum Press

Jackson J D. 1962, 1975, 1998. *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Johnson R. 1977. The Bundle Boundary in Some Special Cases. *J. Math. Phys.*, **18**: 898-902

Komar A. 1959. Covariant Conservation Laws in General Relativity. *Phys. Rev.*, **113**: 934-936

Kreyszig E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley & Sons.中译本:张石生,张业才,张茂孝等译. 1986. 泛函分析引论及应用. 重庆:重庆出版社

Kuang Zhiquan, and Liang Canbin. 1988a. On the GKP and BS Constructions of the C-boundary. *J. Math. Phys.*, **29**: 433-435

Kuang Zhiquan, and Liang Canbin. 1988b. Birkhoff and Taub Theorems Generalized to Metrics with Conformal Symmetries. *J. Math. Phys.*, **29**:2475-2478

Kuang Zhiquan, and Liang Canbin. 1992. On the Racz and Szabados Constructions of the C-boundary. *Phys. Rev.*, D**46**: 4253-4256

Kuang Zhiquan, and Liang Canbin. 1993. All Space-times Admitting Strongly Synchronizable Reference Frames Are Static. *J. Math. Phys.*, **34**: 1016-1021

Kuang Zhiquan, Li Jianzeng, and Liang Canbin. 1986. C-boundary of Taub's Plane-Symmetric static Vacuum Spacetime. *Phys. Rev.*, D**33**: 1533-1537

Kuang Zhiquan, Liang Canbin, and Wu yuejiang. 1996. Conjugate points along null geodesics in a class of spacetimes. *Acta Physica Sinica. Overseas Edition*, **5**: (3), 161-169

Kuchar K. 1988. The Problem of Time in Canonical Quantization of Relativistic Systems. A talk Given at the Meeting on Conceptual Problems of Quantum Gravity. Osgood Hill, Massachusetts, May15-19

Lee J, and Wald R. 1990. Local Symmetries and Constraints. *J. Math. Phys.*, **31**: 725-743

Liu C C M, and Yau S T. 2003. Positivity of quasilocal mass. *Phys. Rev. Lett.*, **90**: 231102

Liu C C M, and Yau S T. Positivity of quasilocal mass II. math.DG/0412292

Marsden J E, and Ratiu T S. 1994. *Introduction to Mechanics and Symmetry.* 北京: 世界图书出版公司

McCarthy P J. 1972. Structure of the Bondi-Metzner-Sachs Group. *J. Math. Phys.*, **13**: 1837-1842

Menou K, Quataert E, and Narayan R. 1999. Astrophysical Evidence for Black Hole Event Horizons. in *Black Holes, Gravitational Radiation and The Universe.* ed. B R Iyer, and B Bhawal. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht

Miller W. 1972. *Symmetry Groups and Their Applications.* Academic Press.中译本:栾德怀, 冯承天, 张民生译. 1981. 对称性群及其应用. 北京:科学出版社

Misner C, Thorne K, and Wheeler J. 1973. *Gravitation.* San Francisco: W. H. Freeman and Company

Morris M S, and Thorne K S. 1988. Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity. *Am. J. Phys.*, **56**: 395-412

Morris M S, Thorne K S, and Yurtsever U. 1988. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Am.. Phys. Soc.*, **61**: 1446-1449

Mϕller. C. 1955. *The Theory of Relativity.* Copenhagen: University of Copenhagen Press

Nester J M. 2004. General pseudotensors and quasilocal quantities. *Class. Quantum Grav.*, **21**: S261-S280

Novikov I D. 1992. Time Machine and Self-consistent Evolution in Problems with Self-interaction. *Phys. Rev.*, **D45**: 1989-1994

Oppenheimer J R, and Snyder H. 1939. On Continued Gravitational Contraction. *Phys. Rev.*, **56**: 455-459

Oppenheimer J R, and Volkoff G M. 1939. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, **55**: 374-381

Penrose R. 1965a. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. *Phys. Rev. Lett.*, **14**: 57-59

Penrose R. 1965b. Zero Rest-Mass Fields Including Gravitation: Asymptotic Behavior. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A284**: 159-203

Penrose R. 1972. *Techniques of Differential Topology in Relativity.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics

Penrose R. 1978. Singularities of Space-Times. in *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity.* ed. N R Lebovitz, W H Reid, and P O Vandervoort. Chicago: University of Chicago Press

Penrose R. 1979. Singularities and Time-Asymmetry in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey.* ed. Hawking S W, and Israel W. Cambridge: Cambridge University Press

Poisson E, and Israel W. 1990. Internal Structure of Black Holes. *Phys. Rev.*, **D41**: 1796-1809

Racz I. 1987. Causal Boundary of Space-Times. *Phys. Rev.*, **D36**: 1673-1675

Reed M, and Simon B. 1980. *Methods of Modern Mathematical Physics* I. New York: Academic Press

Roman P. 1975. *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders: An Introduction to Algebra, Topology, and Functional Analysis*, Vol. **2**: New York: Pergamon. Press Inc.

Sachs R K, and Wu H. 1977. *General Relativity for Mathematicians.* Beijing:Springer-Verlag, World Publishing Corporation

Sachs R K. 1962. Gravitational Waves in General Relativity, VIII. Waves in Asymptotically Flat Space-Time. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A270**: 103-126

Sagle A, and Walde R. 1973. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.*London: Academic Press, INC

Samuel J, and Bhandari R. 1988. General Setting for Berry's Phase. *Phys. Rev. Lett.*, **60**: 2339-2342

Schutz B F. 1980. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge: Cambridge University Press. (有中译本)

Shi Y, and Tam L F. 2002. Some lower estimates of ADM mass and Brown-York mass. J. Differ. Geom. **62**: 79-125

Simon B. 1983. Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase. *Phys. Rev. Lett.*, **51**: 2167-2170

Spivak M. 1970, 1979. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. **1,2**: Springer-Verlag. Berkeley: Publish or Perish, INC.

Stachel J. 1980. Einstein and the Rigidly Rotating Disk in *General Relativity and Gravitation*, Vol. **1**: ed. A. Held. New York: Plenum Press

Synge J L. 1956. *Relativity: The Special Theory.*

Synge J L. 1960. *Relativity: The General Theory.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company

Synge J L. 1964. Introduction to General Relativity in *Relativity, Groups, and Topology.* ed. C Dewitt, and B Dewitt. London: Blackie and Son Limited

Szabados L B. 1988. Causal Boundary for Strongly Causal Spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, **5**: 121-134

Szabados L B. 1989. Causal Boundary for Strongly Causal Spacetimes: II. *Class. Quantum Grav.*, **6**: 77-91

Szabados L B. 2004. Quasilocal energy-momentum and angular momentum in GR: A review article. Living Rev. Relativity 7, (2004), **4**: [Online Article]: cited [1 April 2005]

Thorne K S, Price R H, and Macdonald D A. 1986. *Black Holes: The Membrane Paradigm.* New Haven: Yale University Press

Thorne K S. 1994. *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous legacy.* New York: W. W. Norton & Company.

中译本:李泳译. 2000.黑洞与时间弯曲:爱因斯坦的幽灵. 长沙:湖南科学技术出版社

Volkov M S, and Gal'tsov D V. 1999. Gravitating non-Abelian solitons and black holes with Yang–Mills fields. Phys. Rep., 319, 1

Wald R M. 1984. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press

Wald R M. 1999. Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, in *Black Holes, Gravitational Radiation and The Universe*. ed. B. R. Iyer, and B. Bhawal. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht

Warner F W. 1983. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (New York: Springer-Verlag)

Westenholz C V. 1981. *Differential Forms in Mathematical Physics*. Amsterdan: North-Holland Publishing Company. 中译本: 叶以同译. 1990. 数学物理中的微分形式. 北京:北京大学出版社

Winicour J. 1968. Some Total Invariants of Asymptotically Flat Space-Times. *J. Math. Phys.*, **9:** 861-867

索　引

A

阿贝尔李代数　G.3 定义 1.
阿贝尔群　G.1 定义 2.
爱因斯坦静态宇宙　图 12-3 等.
爱因斯坦转盘　14.2.
ADM 能量及 3 动量　12.7.2.
ADM 4 动量　12.7.2.

B

半单李代数　G.3 定义 5.
半单李群　G.3 定义 5.
半直积(半直积群)　G.1 定义 9.
伴随同构　G.1 例 1.
本征空间(值, 矢)　选读 B-2-1 初.
保度规映射　式(G-5-10).
保时向洛伦兹变换　G.5.3 脚注.
比转动能　13.6.
闭合单参观者族　图 14-11 及附近.
闭合类时曲线　图 11-4, **11.3**, 14.4.3.
闭合类光曲线　11.3 定义 2 前.
闭合因果线　11.3.
编时过去　11.1 注 2 及定义 7.
编时未来　11.1 定义 3 及 7.
编时条件　11.3 定义 1.
边缘　11.5 定义 2.
标准分解　图 14-18 及附近.
(李群的)表示　G.7 定义 3.
表示空间　G.7 定义 3.
不变子群　G.1 定义 7.
不可分过去集　E.3 定义 1.
不可延类时线　11.4, 5, **E.3**.
不可延因果(类光)线　11.2.
不可减质量　13.5.
BMS(李)代数　12.5, **选读 12.5.1**.
BMS 群　12.5.
BMS 平移子代数　12.5.
Bondi 规范　命题 12-4-3 及后.
Bondi 能量　12.7.3.
Bondi 3 动量　12.7.3.
Bondi 4 动量　12.7.3.
Boyer-Lindquist 坐标系　13.2 初.
b 边界　E.4.

C

参考系　14.1 定义 1, 14 章.
　测地～　14.1 初,
　超曲面正交～　14.1 定义 4,
　刚性～　14.1 定义 4,
　静(稳)态～　14.1 定义 5,
　无旋～　14.1 定义 4.
参数空间　**C.1**, C.2.
超平移子群　12.5.
虫洞　11.3.
初值问题　14.5.
虫洞　11.3.
稠定算符　式(B-2-7)后.
稠密子集　式(B-2-7)后.
“吹胀”　选读 12-5-2(定义 5).
磁单极子　选读 12-6-2.
磁荷　选读 12-6-2, 式(12-7-10′).
c 边界　E.4.

D

单参观者族　14.3.2-14.3.4.
单参子群　G.4 定义 1.
单李代数　G.3 定义 5.
单李群　G.3 定义 5.
单连通流形　G.3 脚注.
等度规群　**G.2 例 4**, G.5, G.7.

等度规映射 12.1 定义 3.
(总)电荷 12.6.1, 式(12-7-10), (13-2-13).
电荷守恒 12.6.1.
(时空)对称性 12.5.
  无限小 ~ 12.5,
  $\mathscr{I}^+$ (或 i^0)上的 ~ 12.5.
对偶空间 B.1.1 定义 3.
对偶变换(转动) 选读 12-6-2.
动力学相(因子) 式(C-1-4)后.
动量算符 式(B-2-2).
δ 函数 选读 B-1-2.

E

E(m) 群 G.5.5.
厄米(反厄米)方阵 G.5.4 定义 4.
厄米算符 B.1 定义 16, **B.2 定义 3.**

F

反线性 B.1 注 1.
反射 式(G-5-13)下段.
反时向洛伦兹变换 G.5.3 脚注.
反演 G.5.2, G.5.3, 图 G-1, G-4.
泛函 465, 467, 469, 493.
方向依赖极限 选读 12-4-1.
非编时边界面 11.1.
非编时集 11.1 定义 9.
(理想点的)非编时集 E.3 末.
非物理时空 12.4 注 1.
费移 G.9.4.
分解定理 定理 G-9-4, G-9-4*.
分布(广义函数) 选读 B-1-2.
分布(子空间场) 附录 F 定义 1.
负能轨道 13.5 初.
Frobenius 定理 附录 F 定理 F-1, F-5.

G

共轭点 选读 11-2-1.
共轭空间 B.1.1 定义 3.
共轭线性 B.1 注 1.
共形变换 12.1 定义 1.
共形不变 12.1, 12 章习题.
共形等度规映射 12.1 定义 3.
共形规范 12.4 注 6.
共形平直 12.1 定义 2.
共形权重 12 章习题.
共形图 12.2 末.
共形无限远 12.2.
共形因子 12.1 定义 1.
共形张量 12.1 注 2.
固有洛伦兹群 G.5.3, G.9.
固有彭加莱群 G.5.6.
光锥 11.1 定义 2.
广义函数 选读 B-1-2.
过去不可延因果线 11.2 定义 2.
过去端点 11.2 定义 1.
过去集 E.3 定义 1.
过去柯西视界 11.5 定义 3.
过去依赖域 11.4 定义 1.
黑洞唯一性定理 13.6 末.
“黑洞无毛” 13.6 末.
g 边界 E.4.
GL(m) 群 G.5.1.

H

环状奇性(奇环) 13.3.
缓变定理 C.1.
Hilbert 空间 B.1 定义 7.
  ~ 的基底 B.1 定义 11.
  ~ 的子空间 选读 B-2-1 初.

I

IF E.3 注 1 后.
IP E.3 定义 2.

J

积分子流形 附录 F 定义 2.
极端 Kerr 黑洞 13.6 末.

极限　B.1 定义 4.
几何动力学　14.5 末.
几何相　附录 C.
　AA～　C.1,　Berry～　C.1.
嘉当度规　式(G-8-18)后.
(*m* 重)简并　选读 B-2-1 初.
剪切　图 14-4 及附近.
渐近平直时空　12.4.
结构常数(张量)　G.6 初.
截面　12.4.
浸渐定理　C.1.
静界　13.4.
静态观者　13.4.
静止观者　13.4 注 1.
局部可积　选读 B-1-2 脚注.
局部裸奇性(点)　E.3 定义 4.
局部裸 TI F(TI P)　E.3 定义 4.
局域非转动观者　13.4.4.
绝热定理　C.1.
开球　B.1 定义 2.
柯西面　11.5 定义 1.
柯西视界　11.5 定义 3.
柯西序列　B.1 定义 5.
可同步参考系　14.3.3 定义 1-4.
　固有时～　定义 1,　坐标时～　定义 3,
　局域固有时～　定义 2,
　局域坐标时～　定义 4.

K

空间　14.4.1.
空间导数　14.4.4.
空间度规场　选读 14-4-3 后.
空间反射　图 G-3(a).
空间反演　图 G-4.
空间无限远点　**12.2**, 选读 12-4-1.
空间张量(场)　14.4.3 定义 1.
(算符的)扩张　B.2 定义 2.
Kerr 度规(KN 解)　13.2.
Kerr-Schild 坐标　式(13-3-5).
Kerr-Newman 度规(解)　13.2.
(*M* 上关于李群 *G* 的)Killing 矢量场
　选读 G-7-1 初.
Killing 型　式(G-8-15)后.
Komar 质(能)量　12.7.1.

L

雷达校钟(同步)法　14.3.1.
　大步～　14.3.2, 14.3.3,
　小步～　14.3.2, 14.3.3.
雷达三点组　14.3.1 末.
类空(光, 时)无限远　12.2.
类时(因果)线　11.2.
类光(测地)母线　11.2 定义 2 后, 式(12-4-7)
　后, 命题 12-4-5.
类光无(有)限　E.3 定义 3 脚注.
李变换群　G.7 定义 1.
李代数　G.3 定义 1, G.6.
李代数的表示　G.8 定义 1.
李代数的伴随表示　G.8 定义 3.
李代数同构　G.3 定义 2.
李代数同态　G.3 定义 2.
李括号　G.3 初.
李群　G.2 定义 1.
李群的伴随表示　G.8 定义 2.
李群的李代数　式(G-3-4)后.
李群同构　G.2 定义 2.
李群同态　G.2 定义 2.
李子群　G.2 定义 3.
李子代数　G.3 定义 3.
理想　G.3 定义 4.
理想点　12.3 末, **E.3** 定义 2.
连通分支　G.5.1, G.5.3.
连续线性泛函　B.1.1 定义 3 前.
邻居　14.1 定义 2.
　～的 3 速和 3 加速　14.1 定义 3.
零角动量观者　选读 13-4-1 前.
零维李群　G.2 脚注.
裸奇性(点)　选读 13-3-1 前, E.2.
　局部～　E.2, E.3.
洛伦兹变换 G.9,

最一般的～ 式(G-9-7)后,
齐次～ 式(G-9-7)后,
非齐次～ 式(G-9-7)后.
洛伦兹(李)代数 G.6 例 3, G.9.2, G.9.3.
洛伦兹群 G.5.3, G.9.
旅程 11.1 注 5.

M

m 维分布 附录 F 定义 1.
可积～ 附录 F 定义 2.

N

内积空间 B.1 定义 1.
完备～ B.1 定义 6.
内视界 选读 13-1-1 前.
内自同构 G.1 例 1.
能层 **13.4.1**, 13.5.
能量提取及其极限 13.5.
能量条件 附录 D, E.1.
扭转 图 14-4 及附近.

O

欧拉定理 式(G-5-16)后.
欧氏群 G.5.5.
O(*m*) 群 G.5.2.
O(1, 3) 群 G.5.3.

P

陪集 G.1 定义 6.
膨胀 图 14-4 及附近.
彭罗斯图(Penrose 图) 12.2 末.
平移 G.5.5.
平移(李)子代数 12.5.
普通能量条件 E.1.
谱分解定理 命题 B-2-6.
谱族 式(B-2-20)前.
PIF E.3 注 1 后.
PIP E.3 定义 2.
Penrose 猜想(不等式) 12.7.4 末段.
Penrose 过程 13.5.
Poincaré李代数 12.5 注 5, 式(12-6-38)下段, 式(12-7-13)后, 选读 12-7-2 末.
Poincare 群 12.5, 12.5 注 5, **G.5.6**, 式(G-9-7)后.

Q

奇点(奇性) 13.1, 13.3.1, 附录 E.
奇环 13.3.
奇异边界(g, b, c 边界) E.4.
奇异理想点 12.3 末, **E.3**.
奇异 TIP E.3 定义 3.
强能量条件 附录 D.
强因果时空(条件) 11.3 定义 3.
强宇宙监督假设 E.3.

R

“软体动物” 选读 14-4-2 脚注.
弱能量条件 12.7.4, 附录 **D**.
(邻居的) 3 速和 3 加速 14.1.1.
Raychaudhuri 方程 14.1.2.
Reissner-Nordstrom 最大延拓 13.1.
～的求得 选读 13-1-2.
RN 黑洞(时空) 13.1.
3+1分解 14.4.

S

商李代数 命题 12-5-7 前, **定理 G.3.4**.
射线(空间) B.1.5.
时间 14.4.1, 选读 14-4-1 前段.
时间导数 **14.4.5**, 14.5.
时间反射 图 G-3(b).
时间反演 图 G-4.
时间函数 14.3.3 定义 3.
时间机器 11.3.
时间可定向时空 11.1 初.
时空对称性 12.5 初.
时空反演 图 G-3(c), 图 G-4.
时空总电荷 式(13-2-13).

时空总角动量　式(13-2-17).
时空总质(能)量　式(13-2-16), **12.7**.
时序保护猜想　选读 11-3-1 前.
时移函数　式(14-4-1).
(群的)实现　G.7 定义 2.
实现空间　G.7 定义 2.
事件视界　E.1, E.2.
“弑母悖论”　11.3.
竖直矢量场　选读 12-5-2, 图 12-15 附近.
算符(算子)　B.1 定义 12.
　伴随～　B.1 定义 15, 稠定～式(B-2-7)后,
　动量～　式(B-2-2),
　对偶(共轭)～　B.1 定义 14,
　厄米(对称)～　B.1 定义 16, **B.2 定义 3**,
　哈氏～　选读 B.2.1 前三段,
　算符～　B.1 定义 12,
　投影～　选读 B.2.1 初,
　位置～　式(B-2-1),
　无(有)界～　B.2 定义 1,
　自伴～　B.1 定义 16, **B.2 定义 4**.
SL(*m*) 群(特殊线性群)　式(G-5-16)前.
SO(*m*) 群(特殊正交群)　式(G-5-16).
SO(1,3) 群(洛伦兹群)　G.5.3.
s.p.曲率奇性　13.1, 13.3 初.
SU(*m*) 群(特殊酉群)　式(G-5-41)前.
SPI　选读 12-5-2 定义 5.
SPI 超平移　选读 12-5-2 定义 7.
SPI 李代数　选读 12-5-2 定义 6.
SPI 平移子代数　命题 12-5-14.
SPI 群　选读 12-5-1 前.

T

态矢　B.1.5.
特殊线性群　式(G-5-16)前.
特殊酉群　式(G-5-41)前.
特殊正交群　式(G-5-16).
(群的)同构映射　G.1 定义 4.
同伦　选读 G-6-1(图 G-6 附近).
(群的)同态映射　G.1 定义 3.
同时线　14.3.
投影定理　选读 B-2-1 初.
投影算符　选读 B-2-1 初.
凸(法)邻域　11.1 定义 6.
退化度规　选读 12-4-2 初.
托马斯进动　G.9.4.
椭球坐标　图 13-9 及附近.
TIF　E.3 注 1 后.
TIP　E.3 定义 2.

U

U(*m*) 群(酉群)　G.5.4.

V

$\mathscr{V}$ 值 *l* 形式(场)　附录 C 定义 2.

W

外曲率　式(14-4-9).
完备内积空间　B.1 定义 6.
完备性关系　B.1.4 末.
完备正交归一序列　B.1 定义 10.
未来不可延因果线　11.2 定义 2.
未来端点　11.2 定义 1.
未来柯西视界　11.5 定义 3.
未来可区分　11 章习题 5.
未来依赖域　11.4 定义 1.
未来影响域　11.4 初.
位矢　选读 12-5-2 注 8 后.
伪转动矩阵　G.9 式(G-9-5).
位移矢量场　式(14-4-1).
位置算符　式(B-2-1).
稳定因果时空　11.3 定义 4.
稳态观者　13.4 注 1.
乌龟坐标　选读 13-1-2.
无界算符　B.2 定义 1.
(KN 时空的)无限红移面　13.4.2.
无限蓝移　选读 13-1-1.
无限群　G.1 定义 2.
无限小超平移
　BMS～　12.5 定义 2.

SPI～　12.5 定义 7.
无限小对称性　**12.5 初.**
$\mathscr{I}^+$ 上的～　12.5, 选读 12-5-1,
i^0 上的～　选读 12-5-2 定义 6.
无限小渐近对称性　12.5 初.
无限小平移
BMS～　选读 12-5-1,
SPI～　选读 12-5-2.
无限小生成元　12.5 初, **G.4 注 3 前.**
无限远　见共形(空间, 类空)无限远.
无限远理想点　12.3 末, **E.3.**
无限远 TIP　E.3 定义 3.
无旋参考系　14.1 定义 4.
无转动的洛伦兹变换(伪转动)　式(G-9-5).
物理时空　12.4 注 1.

X

希尔伯特空间　B.1 定义 7.
陷俘面　E.1(图 E-1 附近).
线性独立的　B.1.2 定义 8.
线性算符　B.1 定义 12.
像电荷　选读 12-4-1(图 12-11 附近).
相位 2 形式　式(C-1-21).
相因子　式(C-1-4)后, 附录 C.
消灭余矢场　附录 F 式(F-8).
消息函数　式(12-7-19)后.
循环演化　C.2 初.

Y

雅可比恒等式　G.3 初.
(算符的)延拓　B.2 定义 2.
赝张量　12.6.3.
依赖域　11.4.
一般线性群　G.5.1 初.
因果过去(未来)　11.1 定义 5 及 8.
因果结构　第 11 章.
因果时空　11.3 定义 2.
因果条件　11.3 定义 2, E.1.
因果线　11.2.
因果旅程　11.1 注 5.
有界算符　B.2 定义 1.
有限群　G.1 定义 2.
酉(幺正)矩阵　G.5.4 定义 2.
酉(幺正)群　G.5.4 定义 3.
酉(幺正)算符　G.5.4 定义 1.
诱导(空间)度规(场)　选读 14-4-3 后.
右矢　B.1.4.
宇宙监督假设　E.2.
约束(方程)　14.5.

Z

整体时间函数　命题 **11-3-2**, 14.4.2 初.
整体双曲时空　**11.5 定义 4**, E.3.
正规子群　G.1 定义 7.
正交补　选读 B-2-1 初.
(Hilbert 空间的)正交归一基　B.1.2.
正交归一序列　B.1 定义 9.
正交群　G.5.2.
正规线　选读 12-5-2 定义 3.
正能定理　12.7.4.
正则坐标　选读 G-4-1.
支集　选读 B-1-2 脚注.
直积群　G.1 定义 5.
指向未来(过去)类时(光)矢量　11.1 初.
指向未来(过去)类时曲线　11.1 定义 1.
指向未来(过去)因果线　11.1 定义 1.
指数映射　G.4 定义 2.
质量暴涨　选读 13-1-1.
忠实表示　G.7 定义 3.
忠实实现　G.7 定义 2.
钟同步　14.3.
主能量条件　附录 D.
转动群　G.5.2.
2 维空间的～　式(G-5-15)后,
3 维空间的～　式(G-5-16)后.
转盘观者　14.2.
子群　G.1 定义 2.
不变～　G.1 定义 7, 单参～　G.4 定义 1,
正规～　G.1 定义 7.

自伴算符　B.1 定义 16, **B.2 定义 4**.
自洽过程(自洽解)　选读 11-3-1.
自同构群　G.1 定义 8.
自同构映射　G.1 定义 4.
总电荷(星体, 时空)　式(13-2-13).
总 4 动量　**12.6.2 偏后**, 12.7.2 初.
总质量　12.7.1.
最大积分子流形　附录 F 定义 2.
左不变矢量场　G.2 定义 5.
左平移　G.2 定义 4.
左矢　B.1.4.
坐标时(钟)　14.3.3 定义 3 及后.
转动　图 14-4 及附近, **式(G-9-7)**, G.8.1-G.8.3.
准局域能(动)量　选读 12-6-3 前段.
Z 类参考系　14.3.4.

《现代物理基础丛书》编委会

主　编　杨国桢

副主编　阎守胜　聂玉昕

编　委　(按姓氏笔画排序)

王　牧　王鼎盛　朱邦芬　刘寄星

邹振隆　宋菲君　张元仲　张守著

张海澜　张焕乔　张维岩　侯建国

侯晓远　夏建白　黄　涛　解思深

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书 28

微分几何入门与广义相对论

(下册·第二版)

梁灿彬 周 彬

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书下册包含两章(第15及16章)和三个附录(附录H, I, J). 第15章讲授拉氏和哈氏理论, 第16章介绍黑洞(热)力学, 包括传统(稳态)黑洞热力学及其后续发展, 特别是比较详细地讲解了(弱)孤立视界和动力学视界等重要概念, 并对近代有关文献的许多公式给出了详细的推证. 附录H讲授Noether定理的证明(包括用几何语言和坐标语言的证明)以及有关问题(例如正则能动张量), 附录I讲授对理论物理工作者非常有用的主纤维丛和伴纤维丛, 并着意于这些数学知识与物理应用之间的“架桥”工作. 附录J介绍德西特时空和反德西特时空. 本册仍然贯彻上册深入浅出的写作风格, 为降低难度采取了多种措施.

本书适用于物理系高年级本科生、硕博士研究生和物理工作者, 特别是相对论研究者.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 下册/梁灿彬, 周彬. 2版. —北京: 科学出版社, 2009
(现代物理基础丛书; 28)
ISBN 978-7-03-025231-9

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何-研究生-教材 ②广义相对论-研究生-教材 IV. O186.1 O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第142810号

责任编辑: 胡 凯/责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年4月北京师范大学出版社第一版
2009年8月第 二 版 开本: B5 (720 × 1000)
2009年8月第一次印刷 印张: 25 1/4
印数: 1—2 500 字数: 490 000

定价: 68.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

下 册 前 言

本书(第二版)下册在上册和中册的基础上进一步介绍经典(非量子)广义相对论及其有关数学工具的更为深入的内容, 包含两章(第15章和16章)和3个附录(附录H, I, J).

第15章比较详尽地介绍了广义相对论的拉氏和哈氏形式. 基于教学法的考虑, 我们先简单复习有限自由度系统的拉氏和哈氏理论, 再介绍如何推广到场系统(无限自由度系统), 最后介绍广义相对论的拉氏和哈氏形式. 广义相对论的一个特点是引力场是约束系统(指非完整约束). 为了打好基础, 我们先介绍 Dirac-Bergmann 关于约束系统的哈氏理论, 再以闵氏时空的电磁场为例推广到无限自由度系统(电磁场是比引力场简单得多的无限自由度约束系统), 然后讨论广义相对论的哈氏形式. 几何语言是清晰、准确和深刻地阐明拉、哈氏理论的必不可少的犀利武器, 我们将首先用物理语言介绍拉、哈氏理论, 然后循序渐进地引入和使用几何语言, 并专辟三节对有关的几何内容做专题性的、比较详细的介绍, 具体地说, §5.3 介绍有限自由度系统的拉、哈氏理论的几何表述, §5.6 介绍张量密度, §5.7 介绍辛几何的理论及其在拉、哈氏理论中的应用.

黑洞(热)力学既是广义相对论的一个非常重要的近代内容, 又是众多相关交叉学科的交汇点, 而且还是一个极其活跃的近代前沿研究课题. 本书第二版增补了很长的一章(第16章), 以便对这一课题进行专题介绍. 本章第一节(§16.1)首先比较详细地讲授稳态黑洞的热力学(即传统的黑洞热力学), 后续各节则陆续介绍非稳态黑洞力学研究中的若干非常重要的进展(包括近期进展). 黑洞力学涉及一系列的视界概念, 例如事件视界、表观视界、弱孤立视界、孤立视界和动力学视界, 其中后三者在黑洞力学的近期进展中特别有用. 我们将在§16.4 中介绍表观视界, 然后用后续三节(§16.5–§16.7)比较详细地介绍(弱)孤立视界和动力学视界. 据不完全了解, 国内有一批研究生在导师指导下正准备或已开始在这些方面做研究工作, 他们感到原始近代文献并不好“啃”(包括概念的理解和公式的推导都有颇高的难度), 所以本章着力于尽量详尽仔细地讲解概念并尽量给出“步距”小得多的公式推导. 要深刻准确地理解这些概念和结论还必须对类光测地线汇的理论有很好的理解, 由于涉及类光, 这一理论相当抽象难懂, 而且参考文献寥寥无几, 我们专辟一节(§16.2)对这一重要基础知识做一个相当详细的讨论. (弱)孤立视界是满足某些条件的类光超曲面, 而类光面上的几何与只涉及正定度规的黎曼几何既有某些共性, 更有许多非常不同的性质(源于类光面上的诱导“度规”的退化性), 后者特别值得引起注意, §16.6 的前两个小节就是专为阐明这些特殊性质而写的.

下面简介三个附录.

Noether 定理是场论教材几乎必讲的重要基础性定理. 多数教材在讲授该定理的证明时都使用坐标语言, 证明手法五花八门. 据笔者所知, 许多有志于彻底弄懂这一证明的学生学习后都不同程度地感到并未真懂. 然而用几何语言可以给出清晰简洁的证明. 本书附录H首先讲解用几何语言的证明, 然后以此为基础介绍笔者对坐标语言证明的理解.

纤维丛理论对理论物理工作者的重要性与日俱增, 本书第一版的数学基础(特别是李群李代数知识)本来就足以保证读者学习这一理论, 仅仅因为当时写作时间不足而被迫割爱, 未能将纤维丛理论纳入书中. 这一遗憾终于在现在的第二版中得以祛除: 纤维丛理论及其物理应用已经比较详尽地单独写成一个附录(附录I). 我们以尽量好懂的方式讲解主纤维丛和伴纤维丛的概念和性质, 特别是主丛和伴丛上的联络. 为了帮助读者了解纤维丛理论在规范场论中的应用, 我们先专辟两节(§I.4, §I.5)对没有场论知识的读者介绍规范场论, 再用三节(§I.6, §I.7 和 §I.8)讲解规范场论的丛语言表述, 注重在两种理论之间的"架桥"工作, 特别强调几个对应:主丛的截面对应于规范选择, 伴丛的截面对应于粒子场; 主丛的联络和曲率分别代表规范势和规范场强; 伴丛的联络则对应于粒子场的协变导数. 鉴于本书上、中、下三册篇幅颇大, 笔者建议急于学习纤维丛理论的读者不妨"单刀直入", 即略去所有各章各附录, 在学习附录G (§G.9 除外)之后直接阅读附录I.

广义相对论(特别是宇宙论)以及量子场论(特别是超弦理论)的现代发展使德西特时空和反德西特时空再度变得十分重要,这是第二版中添加附录J (德西特时空和反德西特时空)的原因.

关于选读内容以及习题的说明见上册前言.

与上册类似, 作者在写作第一版下册时曾邀请为数众多的专家、同行和学生分别阅读初稿的部分章节, 他们是(以姓氏汉语拼音为序): 敖滨, 曹周键, 戴陆如, 高长军, 高思杰, 贺晗, 黄超光, 邝志全, 刘旭峰, 马永革, 强稳朝, 田贵花, 吴小宁, 杨学军, 张红宝, 张芃, 郑驻军, 周彬, 周美柯, 作者已在第一版下册前言中表示了谢意. 在第二版中册和下册的写作过程中, 作者又与许多同行(含前学生)做过多次讨论, 并吸收了他们许多宝贵的意见和建议, 他们主要有(以姓氏汉语拼音为序): 曹周键, 高思杰, 邝志全, 马永革, 吴小宁, 杨学军, 张昊, 张红宝, 在此再次鸣谢. 以上诸君中的吴小宁和张红宝对第16章的内容(特别是孤立视界和动力学视界)相当熟悉, 他们在作者写作本章时曾提供过非常重要的帮助, 作者在此要格外鸣谢.

作者梁灿彬还要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友, 第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生, 他不但是梁步入本领域的优秀启蒙导师, 而且对梁回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中

科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与梁的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使梁受益殊深.

作者还要感谢国家科学技术学术著作出版基金的资助，正是这一资助使本书的上、中、下册得以再版. 此外，本书(第二版)中、下册还受到国家自然科学基金资助项目10505004以及10675019的部分资助，在此一并鸣谢.

梁灿彬　周　彬

2009年4月于北京师范大学

目　　录

下册前言
第 15 章　广义相对论的拉氏和哈氏形式 …… 1
§15.1　拉氏理论 …… 1
15.1.1　有限自由度系统的拉氏理论 …… 1
15.1.2　经典场论的拉氏形式 …… 4
15.1.3　广义相对论的拉氏形式 …… 9
§15.2　有限自由度系统的哈氏理论 …… 14
15.2.1　有限自由度正规系统的哈氏理论 …… 14
15.2.2　有限自由度约束系统的哈氏方程 …… 16
15.2.3　初级约束和次级约束 …… 19
15.2.4　L 不含 $\dot{q}^1$ 的特别情况 …… 28
§15.3　有限自由度拉、哈氏理论的几何表述[选读] …… 30
15.3.1　Legendre 变换 …… 30
15.3.2　从拉氏角度看约束 …… 36
§15.4　经典场论的哈氏形式 …… 41
15.4.1　哈氏理论离不开 3+1 分解 …… 41
15.4.2　从拉氏场论到哈氏场论 …… 43
15.4.3　约束系统的例子——麦氏理论的哈氏形式 …… 46
§15.5　广义相对论的哈氏形式 …… 56
§15.6　张量密度 [选读] …… 66
§15.7　辛几何及其在哈氏理论的应用[选读] …… 74
15.7.1　辛几何简介 …… 74
15.7.2　第一类约束系统 …… 80
15.7.3　作为第一类约束系统的电磁场 …… 89
15.7.4　作为第一类约束系统的引力场 …… 91
15.7.5　约化位形空间 …… 97
§15.8　从几何动力学到联络动力学——Ashtekar 新变量理论简介[选读] …… 101
习题 …… 106
第16章　孤立视界、动力学视界和黑洞(热)力学 …… 109
§16.1　传统黑洞热力学及其不足 …… 109
16.1.1　传统黑洞热力学与 Killing 视界 …… 109
16.1.2　广义热力学第二定律 …… 121

16.1.3 事件视界的局限性及其带来的问题 123
§16.2 类光测地线汇及其 Raychaudhuri 方程 126
§16.3 类光超曲面上的 Raychaudhuri 方程 139
16.3.1 超曲面的某些数学知识 139
16.3.2 类光超曲面上的类光法矢场 142
16.3.3 类光超曲面上的 Raychaudhuri 方程 143
§16.4 陷俘面与表观视界 147
16.4.1 陷俘面 147
16.4.2 表观视界 151
§16.5 弱孤立视界及其第零、第一定律 154
16.5.1 非涨视界 154
16.5.2 弱孤立视界和孤立视界 162
16.5.3 弱孤立视界第零定律 164
16.5.4 弱孤立视界和孤立视界的对称性 166
16.5.5 弱孤立视界第一定律 168
§16.6 弱孤立视界的进一步讨论[选读] 175
16.6.1 类光超曲面上的适配“面元” 176
16.6.2 “度规”和适配“面元”的广义逆 182
16.6.3 弱孤立视界上的无限小对称性 184
16.6.4 角动量两个公式的证明 193
§16.7 动力学视界及其力学定律 199
16.7.1 动力学视界 199
16.7.2 被分层类空面的某些几何关系 204
16.7.3 动力学视界的面积平衡定律 208
16.7.4 角动量为零时的第一定律 219
16.7.5 角动量平衡方程 223
16.7.6 第一定律的积分形式 226
16.7.7 黑洞热力学定律还是黑洞力学定律? 231
习题 233
附录 H 时空对称性与守恒律(Noether 定理) 235
§H.1 用几何语言证明定理 235
§H.2 正则能动张量 239
§H.3 关于用坐标语言的证明 242
附录 I 纤维丛及其在规范场论的应用 253
§I.1 主纤维丛 253
I.1.1 主丛的定义和例子 253
I.1.2 主丛上的基本矢量场 261

§I.2　主丛上的联络 ······ 263
I.2.1　主丛联络的三个等价定义 ······ 264
I.2.2　水平提升矢量场和水平提升曲线 ······ 272
§I.3　与主丛相伴的纤维丛(伴丛) ······ 280
§I.4　物理场的整体规范不变性 ······ 287
I.4.1　阿贝尔情况下的整体规范不变性 ······ 287
I.4.2　非阿贝尔情况下的整体规范不变性 ······ 290
§I.5　物理场的局域规范不变性 ······ 292
I.5.1　阿贝尔情况下的局域规范不变性 ······ 293
I.5.2　非阿贝尔情况下的局域规范不变性(Yang-Mills 理论) ······ 297
§I.6　截面的物理意义 ······ 304
§I.7　规范势与联络 ······ 306
§I.8　规范场强与曲率 ······ 309
§I.9　矢丛上的联络和协变导数 ······ 319
习题 ······ 335
附录 J　德西特时空和反德西特时空 ······ 337
§J.1　常曲率空间 ······ 337
§J.2　德西特时空 ······ 355
§J.3　德西特时空的 Penrose 图 ······ 365
§J.4　再谈事件视界和粒子视界 ······ 370
§J.5　施瓦西-德西特时空 ······ 372
§J.6　反德西特时空 ······ 375
参考文献 ······ 382
下册索引 ······ 385

第15章　广义相对论的拉氏和哈氏形式

§15.1　拉 氏 理 论

15.1.1　有限自由度系统的拉氏理论

先对有限自由度系统(如多粒子系统)的拉氏理论作一复习. N维系统有N个独立的广义坐标, 每组广义坐标$(q^1, q^2, \cdots, q^N)$确定系统的一个**位形**(configuration), 因此广义坐标又称**位形变量**(configuration variables). 所有可能位形的集合$\mathscr{C}$称为系统的**位形空间**(configuration space), 是个N维流形.① 系统的演化(q^i随时间t的变化)对应于位形空间$\mathscr{C}$中一条以t为参数的曲线$\eta(t)$, 其参数式为$q^i = q^i(t)$. 曲线的切矢代表演化的速度, 其坐标分量$\dot{q}^i(t) \equiv q^i(t)/\mathrm{d}t$就是通常所称的**广义速度**. 设$Q_0 \equiv \eta(t_0)$, $Q_1 \equiv \eta(t_1)$且$t_1 > t_0$, 则$\eta(t)$介于Q_0和Q_1之间的一段反映系统从初始位形Q_0到终了位形Q_1的演化. 从Q_0到Q_1的每一曲线称为一条**路径**(path), 由N个排了序的一元函数$q^i(t)$决定, 满足

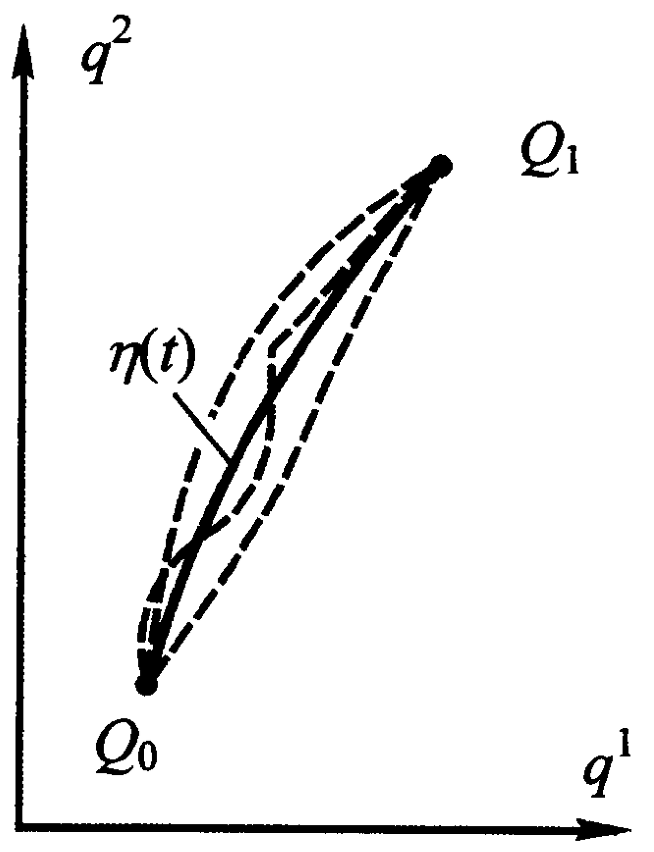


图15-1　系统的演化可用位形空间(图中只画成两维)的曲线$\eta(t)$(正路)代表. 虚曲线代表运动学(而不是动力学)上可能的从Q_0到Q_1的途径(旁路)

$$(q^1(t_0), \cdots, q^N(t_0)) = Q_0, \qquad (q^1(t_1), \cdots, q^N(t_1)) = Q_1.$$

所有路径中只有$\eta(t)$才是演化曲线, 才代表由动力学规律决定的演化过程. 为陈述方便, 把演化曲线$\eta(t)$称为**正路**, 其他路径称为**旁路**(图15-1). 一个最简单的例子是牛顿力学中由一个自由质点构成的系统, 其位形空间就是$\mathbb{R}^3$, 任给Q_0和Q_1(满足$t_0 < t_1$)后, 两点之间的直线[$q^i(t)$为线性函数]便是正路. 为了得到寻找正路的法则, 引入拉氏函数和作用量的概念. 系统的**拉氏函数**(Lagrangian function, 又称**拉氏量**)L是广义坐标q^i和广义速度$\dot{q}^i$的函数(共有$2N$个自变量), 即$L = L(q^i, \dot{q}^i)$. 对每一路径$\{q^1(t), \cdots, q^N(t)\}$, L又通过宗量q^i, $\dot{q}^i$成为t的一元函数, 其积分 S 称

① 在更一般的情况下, 位形空间未必能被一个坐标域覆盖. §15.3将简介用几何语言的讨论.

为该路径的**作用量**(action):

$$S := \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t),\ \dot{q}^i(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-1}$$

正路的与众不同之处由拉氏理论中的**哈氏原理**(Hamilton principle, 亦称**变分原理**)给出, 它要求正路的作用量取极值(亦称稳定值). 对“极值”一词应作解释. 决定作用量S的自变因素不是一个(或几个)量而是一条曲线, 因此S不是普通函数而是曲线的函数(“自变量”是曲线), 是**泛函**(functional). 对普通函数求极值只涉及微分运算, 而对泛函求极值则涉及变分运算. 考虑任一(从Q_0到Q_1的)单参路径族$q^i = q^i(t,\lambda)$, 参数$\lambda = 0$给出正路$\eta(t)$, $\lambda \neq 0$给出旁路. [应分清两种参数: 参数λ的一个值$\hat{\lambda}$决定族中的一条曲线$q^i = q^i(t,\hat{\lambda})$; 其中参数$t$的一个值$\hat{t}$则决定该曲线的一点$q^i = q^i(\hat{t},\hat{\lambda})$.] 族中曲线的作用量$S$由于$q^i$, $\dot{q}^i$依赖于λ而成为λ的函数:

$$S(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L\,(q^i(t,\lambda),\dot{q}^i(t,\lambda))\mathrm{d}t\,, \tag{15-1-2}$$

于是S在单参族内的求极值问题便归结为一元函数$S(\lambda)$的求导问题:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left.\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \lambda}\right)\right|_{\lambda=0} \mathrm{d}t\,.$$

令$\delta S \equiv \mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$, $\delta q^i \equiv \partial q^i(t,\lambda)/\partial\lambda\,|_{\lambda=0}$, $\delta\dot{q}^i \equiv \partial\dot{q}^i(t,\lambda)/\partial\lambda\,|_{\lambda=0}$, 并把$\delta S$, δq^i和$\delta\dot{q}^i$分别称为S, q^i和$\dot{q}^i$在所选单参族内的**变分**(variation),① 则上式对应于如下变分关系:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\right)\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-3}$$

其中$\partial L/\partial q^i$和$\partial L/\partial \dot{q}^i$是$\partial L/\partial q^i\,|_{\lambda=0}$和$\partial L/\partial \dot{q}^i\,|_{\lambda=0}$的简写. 因为正路$\eta(t)$有$\lambda = 0$, 哈氏原理的含义就是所有单参路径族的$\delta S \equiv \mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$都为零. 下面导出$\delta S = 0$(对所有单参族)的等价条件. 由于对$\lambda$求导与对$t$求导可交换顺序, 被积函数的第二项可改写为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^i)\,,$$

---

① 通常把泛函S的变分δS定义为S的增量的线性主部(对应于函数的微分), 我们[在选定单参路径族$q^i = q^i(t,\lambda)$的情况下]更偏爱于把δS定义为$\mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$ [见Wald(1984)], 并称之为“S在所选单参族内的变分”. 除了$\delta S, \delta q^i, \cdots$的含义有区别外, 两种处理给出相同结果.

由分部积分法得

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\delta q^i\right]\mathrm{d}t\,.$$

因为所有曲线的起、止点都是 Q_0 和 Q_1，所以有

$$\delta q^i\,|_{t_0}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[q^i(t_0,\lambda)-q^i(t_0,0)]=0\qquad \text{和}\quad \delta q^i\,|_{t_1}=0\,,$$

因而上式右边第一项积分为零. 代回式(15-1-3)得

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\delta q^i\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-4}$$

把上式右边括号内的量记作 $\varLambda_i$，则上式可简记为

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\varLambda_i\delta q^i\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-4$'$}$$

于是有如下命题:

命题 15-1-1　设 $\eta(t)$ 是一条路径, 则

$\eta(t)$ 为正路 $\Leftrightarrow$ $\delta S=0\ \forall$ 含 $\eta(t)$ 的单参路径族 $\Leftrightarrow$ $\eta(t)$ 的 $\varLambda_i=0\ (i=1,\cdots,N)$.

证明　第一个 $\Leftrightarrow$ 号其实就是哈氏原理, 真正待证的是第二个 $\Leftrightarrow$ 号. 由式(15-1-4′)显见第二个 $\Leftrightarrow$ 号的“$\Leftarrow$”部分成立, 故只须证明“$\Rightarrow$”部分. 用反证法.

设 $\exists\,\tilde{t}\in(t_0,t_1)$ 使 $\varLambda_1(\tilde{t})\neq 0$ [不妨设 $\varLambda_1(\tilde{t})>0$], 则 $\tilde{t}$ 有邻域 $\varDelta$ [作为区间 (t_0,t_1) 的真子集]使 $\varLambda_1|_\varDelta>0$. 取单参族 $q^i=q^i(t,\lambda)$ [$\lambda=0$ 给出 $\eta(t)$]使① δq^1 在 $\varDelta$ 内为正, 在 $(t_0,t_1)-\varDelta$ 内为零(且从正到零为可微过渡); ② $\delta q^2,\cdots,\delta q^N$ 在 (t_0,t_1) 内为零, 则 $\int_{t_0}^{t_1}\varLambda_i\delta q^i\mathrm{d}t>0$, 与 $\delta S=0$ (对任一单参族)矛盾. 这就证明了 $\varLambda_1=0$. 同理可证 $\varLambda_2,\cdots,\varLambda_N=0$. □

上述命题表明 $\eta(t)$ 为正路的充要条件是它的拉氏函数 $L=L(q^i,\dot{q}^i)$ 满足

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=0,\qquad i=1,\cdots,N\,. \tag{15-1-5}$$

在 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 的函数形式给定后, 上式是关于 N 个待求函数 $q^i(t)$ 的 N 个 2 阶常微分方程, 称为**欧拉-拉格朗日方程**, 简称**拉氏方程**, 是系统的演化(运动)方程. 在给定初始条件 $q^i(t_0)$ (初始位形)和 $\dot{q}^i(t_0)$ (初始速度)后有唯一解 $\{q^i(t)\}$, [①] 对应于 $\mathscr{C}$ 中

① 此结论只对正规情况成立.非正规情况的讨论见小节 15.3.2 .

的一条以t为参数的曲线(**演化曲线**, 即正路). 拉格朗日在1788年的著作中就曾写下这组方程, 但他不知道它等价于作用量取极值. 这一等价性是数十年后由哈密顿发现的, 哈氏原理故此得名.

拉氏函数L也可以显含时间, 即$L=L(q^i,\dot{q}^i,t)$, 这时L通过$2N+1$个宗量成为时间t的函数. 以上讨论和结论仍然适用, 只须把有关式子中的$L=L(q^i,\dot{q}^i)$改为$L=L(q^i,\dot{q}^i,t)$.

对牛顿引力理论的一个质点, 如果取动能减引力势能作为拉氏函数, 则不难验证拉氏方程与牛顿第二定律(其中的力等于势能的梯度的负值)等价. 一般地说, 所谓把某一物理理论(有限自由度)改铸为拉氏形式, 就是要找出适当的拉氏函数$L=L(q^i,\dot{q}^i)$使得由哈氏变分原理导出的拉氏方程与该理论的演化方程一致.

15.1.2　经典场论的拉氏形式

读者最熟悉的经典场是闵氏时空$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$的电磁场, 它可由对偶矢量场(电磁4势)A_a描述. 无源电磁场在洛伦兹规范下的演化方程为

$$\partial^a\partial_a A_b=0\,. \text{(其中}\partial_a\text{是与}\eta_{ab}\text{适配的导数算符)} \qquad (15\text{-}1\text{-}6)$$

还有两种重要的经典场, 其发现过程颇为特别. 在研究量子力学时, 人们早就注意到薛定谔方程$\mathrm{i}\hbar\partial\psi/\partial t=H\psi$不是洛伦兹协变的, 因为它含有波函数$\psi$对$t$的一阶导数和$\psi$对$x^i$的二阶导数($H\psi$中含$\nabla^2\psi$), 从而时、空坐标互不平权. 第一种修改方案是把ψ对t的导数也改为二阶, 结果是

$$\partial^a\partial_a\phi-m^2\phi=0\,,\quad \text{(其中}m\text{是常数)} \qquad (15\text{-}1\text{-}7)$$

称为**Klein-Gordon方程**(简称KG方程). 它虽然洛伦兹协变, 但却有两大问题: ①存在负能解; ②概率密度可以为负. 这两者都在物理上无法接受. 第二种修改方案是把ψ对x^i的导数也改为一阶, 结果得到Dirac方程. 这一方程不存在负概率密度问题, 但仍存在负能解. Dirac引入"负能海"和空穴的概念对此加以解释, 经发展后就导致从量子力学到量子场论的过渡. 量子力学研究粒子数不变的量子系统, 而在量子场论中粒子数是可变的. 人们发现用量子场论的观点可给KG方程及Dirac方程以清晰的解释, 而且原来的困难不复存在. 先看KG方程. 现在的ϕ不再被看作粒子的波函数而是看作与电磁场的A_a类似的场量(经典标量场), 量子化后所得的量子是自旋为零的粒子(标量粒子), 例如π介子, 而KG方程则被视为这个标量场ϕ的演化方程, 其中的常数m代表量子化后每一量子的(静)质量. 另一方面, 量子场论中的Dirac方程则是自旋为$1/2$的粒子(如电子)的演化方程. 以上只是非常粗略的简介, 本章无意涉及量子场论.

下面把拉氏理论推广到经典场(看作物理系统), 即讨论经典场论的拉氏形式.

最简单的例子是闵氏时空的实标量场(ϕ 为实数). 设 $\{x^0\equiv t, x^i\}$ 为(右手)惯性坐标系, 则同时面 $\Sigma_{\hat{t}}$ 代表 $\hat{t}$ 时刻的全空间. 光滑地指定标量场 ϕ 在 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上各点的值就相当于指定了系统在 $\hat{t}$ 时刻的位形, 因此 $\hat{t}$ 时刻的位形变量(广义坐标)可记作 $\phi(x,\hat{t})$, 其中 x 代表 $\Sigma_{\hat{t}}$ 的任一点. 可以认为 $\phi(x,\hat{t})$ 与前面的 $q^i(\hat{t})$ 对应, 其中 ϕ 对应于 q, 而 x 则对应于指标 i. 不同的是, i 只能从 1 取到 N (取有限个分立值), 而 x 则可取遍 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上各点, 即 x 是可连续取值的指标, 因此标量场(其实任何场都一样)是无限自由度系统. 所谓把标量场论改铸为拉氏形式, 就是要找到适当的拉氏量使得由哈氏变分原理可得出演化方程(15-1-7). 拉氏量以及哈氏原理在场论中的提法可仿照其在有限自由度系统的提法得到. 设 Σ_0 和 Σ_1 分别是惯性时刻 t_0 和 $t_1>t_0$ 的同时面, U 是介于两者之间的时空开域(称为"三明治"式开域). 适当给定初始位形 $\phi|_{\Sigma_0}$ 和终了位形 $\phi|_{\Sigma_1}$ (相当于有限自由度系统的 Q_0 和 Q_1 点)后, 欲求与演化方程(15-1-7)吻合的中间演化过程, 亦即欲求定义于 $\bar{U}$ (U 的闭包)上的满足如下条件的标量场 $\phi(x,t)$:(a)在 U 的任一点满足方程(15-1-7); (b) 在 Σ_0 和 Σ_1 上分别等于所指定的初始和终了位形. 这样的 $\phi(x,t)$ 称为正路, 而只满足条件(b)的 $\phi(x,t)$ 则称为旁路. 正路和旁路统称路径. 在有限自由度理论中, 路径 $\{q^i(t)\}$ 在时刻 t 的拉氏量为 $L(t)=L(q^i(t),\dot{q}^i(t))$, 与此类似, 标量场 ϕ 在时刻 t 的拉氏量可以表为

$$L(t)=L[\phi(x,t),\dot{\phi}(x,t)], \tag{15-1-8}$$

其中 $\dot{\phi}(x,t)\equiv\partial\phi(x,t)/\partial t$. 应该注意的是, L 在任一时刻 $\hat{t}$ 的值依赖于该时刻的全空间 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上的场 $\phi(x,\hat{t})$ 和 $\dot{\phi}(x,\hat{t})$ [而不再是有限个自变数 $q^i(\hat{t})$ 和 $\dot{q}^i(\hat{t})$], 所以 L 是空间场 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 的泛函. 在此基础上就不难接受路径的作用量的如下定义:

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L(t)\mathrm{d}t\ . \tag{15-1-9}$$

仿照力学中对连续弹性体的讨论, 把 Σ_t 分成许多小格 d^3x, 假定 ϕ 场对全空间 Σ_t 贡献的拉氏量 $L(t)$ 是其对每一小格的贡献之和, 即

$$L(t)=\int_{\Sigma_t}\mathscr{L}\mathrm{d}^3x, \tag{15-1-10}$$

其中 $\mathscr{L}$ 可解释为单位体积的拉氏量, 称为**拉氏密度**(Lagrangian density),① 是场量 $\phi(x,t)$ 及其时间导数 $\dot{\phi}(x,t)$ 和空间导数 $\partial_i\phi(x,t)$ 的局域函数:

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi(x,t),\dot{\phi}(x,t),\partial_i\phi(x,t))\ .^{②} \tag{15-1-11}$$

"局域函数"的含义是 $\mathbb{R}^4$ 中任一点 p 的 $\mathscr{L}$ 值按某种函数关系(也记作 $\mathscr{L}$)取决于

① 通常遇到的几乎所有场都满足这一假定, 即存在拉氏密度 $\mathscr{L}$ 使 $L(t)$ 可表为式(15-1-10).

② $\mathscr{L}$ 还可显含时空点, 即更一般地有 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\partial_i\phi,p)$.

$\phi, \dot{\phi}$ 和 $\partial_i\phi$ 在 p 点的值(与这些场在 p 点以外的值无关):

$$\mathscr{L}|_p = \mathscr{L}(\phi|_p, \dot{\phi}|_p, \partial_i\phi|_p).^{①} \tag{15-1-12}$$

把式(15-1-10)代入(15-1-9)得

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Sigma_t} \mathscr{L}\,\mathrm{d}^3x = \int_U \mathscr{L}\mathrm{d}^4x, \quad (\mathrm{d}^4x\text{ 可写可不写}) \tag{15-1-13}$$

哈氏原理推广到场论后的提法自然是:初始位形 $\phi|_{\Sigma_0}$ 与终了位形 $\phi|_{\Sigma_1}$ 之间的正路的充要条件是其作用量 S 取极值.

上面的讨论默认了时空的某种 3+1 分解[涉及某时刻 t 的场位形 $\phi(x,t)$ 以及某路径在某时刻的拉氏量 $L(t)$], 这只是便于初学者接受的讲法. 事实上, 拉氏场论可改用不依靠 3+1 分解的(时空协变的)语言表述. 哈氏原理的功用是寻求场量的演化方程, 这是时空流形 $\mathbb{R}^4$ 上的微分方程, 只涉及每一时空点 p 及其任意"小"邻域, 因此可把"三明治"式的 U 改为任意开域 $U \subset \mathbb{R}^4$ (还要求 U 的闭包 $\overline{U}$ 紧致), 把作用量直接定义为 $\mathscr{L}$ 在 U 上的 4 维积分:

$$S := \int_U \mathscr{L}, \tag{15-1-14}$$

把 $\mathscr{L}$ 看作场量 ϕ 及其时空导数 $\partial_a\phi$ (不再分为 $\dot{\phi}$ 和 $\partial_i\phi$)的局域函数:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_a\phi), \tag{15-1-15}$$

并把问题的提法相应改为:给定 ϕ 场在 U 的边界 $\dot{U}$ 上的适当值 $\phi|_{\dot{U}}$ 后, 欲求定义在 $\overline{U}$ 上的、满足如下两个条件的标量场 ϕ (正路): (a)在 U 内满足演化方程(15-1-7); (b)在 $\dot{U}$ 的值等于所给边界值 $\phi|_{\dot{U}}$. 哈氏变分原理仍可表述为"正路的充要条件是作用量取极值". 这样就摆脱了对 3+1 分解的依赖. 我们将逐渐看到拉氏理论本质上是直接与时空(而不是其 3+1 分解)打交道的理论(与此相反, 后面介绍的哈氏理论则是"天生"就依赖于 3+1 分解的.) 同拉氏密度 $\mathscr{L}$ 相较, 拉氏量 $L(t)$ 在拉氏场论中退居到可有可无的地位. $\mathbb{R}^4$ 上的一个标量场 ϕ 称为一个 **4 维场位形**. 给定一个 4 维场位形 ϕ 后, 每一时空点的 $\mathscr{L}$ 值便由式(15-1-15)确定, 代入式(15-1-14)便得一个 S 值, 所以 S 是 4 维场位形 ϕ 的泛函, 记作 $S[\phi]$.② 以 $\mathscr{F}$ 代表所有(满足适当条件的) 4 维场位形的集合, 便有 $S: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$. 为了考虑变分, 也要引入参数 λ, 不过现在 λ 的用处不是区分从 Q_0 到 Q_1 的不同曲线而是区分不同的 4 维场位形, 因此以

---

① 此处的"局域函数"与微分几何中的通常含义不同. 按照通常含义, 流形 M 上的局域函数 f 是定义在某个开子集 $U (\neq M)$ 上的函数, 即 $f: U \to \mathbb{R}$.

② $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_a\phi)$ 是 ϕ 和 $\partial_a\phi$ 的局域函数, 即 $\mathscr{L}$ 在任一点 p 的值取决于 $\phi|_p$ 和 $\partial_a\phi|_p$. 反之, S 则依赖于整个 ϕ 场, 只有给定 $\mathbb{R}^4$ (至少 U)上的 ϕ 场才可确定 S 的值. 因为自变的 ϕ 不是数而是场, 所以 S 是 ϕ 的泛函.

前的单参曲线族 $q^i(t,\lambda)$ 现在应为单参 4 维场位形族 $\phi(\lambda)$（也可看作 $\mathscr{F}$ 中的曲线[①]）. ϕ 在族中的变分 $\delta\phi$ 定义为

$$\delta\phi := \lim_{\lambda\to 0}\frac{\phi(\lambda)-\phi(0)}{\lambda} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{15-1-16}$$

请注意 $\delta\phi$ 也是 $\mathbb{R}^4$ 上的标量场. 给定单参族 $\phi(\lambda)$ 后, 把映射 $S:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 限制在族内便诱导出一元函数 $S[\phi(\lambda)]$ [简记为 $S(\lambda)$], $S(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的导数值就称为 S 在该族内的变分:

$$\delta S := \left.\frac{\mathrm{d}S(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{15-1-17}$$

哈氏原理可以表为: $\phi\in\mathscr{F}$ 在 U 内满足演化方程的充要条件是 $\mathscr{F}$ 中所有满足下面两个条件的单参族 $\phi(\lambda)$ 对应的 δS 为零. 这两个条件是

$$\text{(a)}\ \phi(0)=\phi;\qquad \text{(b)}\ \phi(\lambda)|_{\dot U}=\phi(0)|_{\dot U},\ \forall\lambda. \tag{15-1-18}$$

由此便可推出闵氏时空中标量场 ϕ 的演化方程[亦称**拉氏方程**, 试与式(15-1-5)对比]

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}=0, \tag{15-1-19}$$

推导如下. 作用量 $S(\lambda)=\int_U\mathscr{L}(\lambda)$ 的变分

$$\delta S\equiv\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}=\int_U\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

由 $\mathscr{L}(\lambda)=\mathscr{L}(\phi(\lambda),\partial_a\phi(\lambda))$ 得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}&=\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}+\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\frac{\mathrm{d}(\partial_a\phi(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta(\partial_a\phi)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\partial_a(\delta\phi),\end{aligned}$$

故

$$\delta S=\int_U(\partial\mathscr{L}/\partial\phi)\delta\phi+\int_U[\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)]\partial_a(\delta\phi).$$

$$\text{上式右边第二项}=\int_U\partial_a\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta\phi\right]-\int_U\left[\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\right]\delta\phi,$$

① 本书不讲无限维流形, 本章涉及的无限维流形的若干概念(如曲线及其切矢, 光滑性……)只好借有限维流形作直观想象.

取积分域U使其边界面$\dot{U}$处处非类光，则上式右边第一项可用高斯定理化为$\int_{\dot{U}} n_a[\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)]\delta\phi=0$（因$\delta\phi|_{\dot{U}}=0$）. 所以

$$\delta S=\int_U\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\right]\delta\phi=0\,.$$

于是有式(15-1-19). 由此可知闵氏时空中标量场ϕ的拉氏密度可取如下形式:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[\eta^{ab}(\partial_a\phi)\partial_b\phi+m^2\phi^2]\,, \tag{15-1-20}$$

因为它与式(15-1-19)结合给出标量场ϕ的演化方程(15-1-7).

下面介绍上述讨论的推广. 设系统由平直或弯曲时空(M,g_{ab})的一个或一组张量场组成(原则上还可讨论其他场，但我们只讨论张量场.）略去抽象指标，以ψ代表这组场. M上一组指定的ψ场叫做一个4维场位形. 我们只讨论所谓的“局域”理论(许多重要物理系统都可纳入这一范畴)，其中拉氏密度$\mathscr{L}$是场量ψ及其一、二阶直到k阶导数的局域函数:

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\psi,\nabla\psi,\cdots,\nabla^k\psi)\,.\quad(\nabla^k\psi\text{ 是 }\nabla_{a_1}\cdots\nabla_{a_k}\psi\text{ 的简写}) \tag{15-1-21}$$

以上关于标量场ϕ的讨论可以自然地推广到现在的张量场组ψ，只须以ψ代替ϕ，用上式代替$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\partial_a\phi)$以及用$M$代替$\mathbb{R}^4$.

例1 把闵氏时空的无源麦氏电磁场论改铸为拉氏形式.

令

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{ab}F_{ab}=-\frac{1}{4\pi}(\partial^{[a}A^{b]})\partial_a A_b\,. \tag{15-1-22}$$

把A_a看作场量(即$\psi=A_a$)，设$A_a(\lambda)$是满足式(15-1-18)(其中的ϕ改为A_a)的任一单参族，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}=-\frac{1}{2\pi}(\partial^{[a}A^{b]}(0))\partial_a\delta A_b\,.$$

略去“(0)”并代入$\delta S=\int \mathrm{d}\mathscr{L}/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$得

$$\begin{aligned}2\pi\,\delta S&=-\int_U(\partial^{[a}A^{b]})\partial_a\delta A_b=-\int_U\{\partial_a[(\partial^{[a}A^{b]})\delta A_b]-(\partial_a\partial^{[a}A^{b]})\delta A_b\}\\&=-\int_U\partial_a[(\partial^{[a}A^{b]})\delta A_b]+\frac{1}{2}\int_U(\partial_a\partial^a A^b-\partial^b\partial_a A^a)\delta A_b=\frac{1}{2}\int_U(\partial_a\partial^a A^b)\delta A_b\,.\end{aligned}$$

(最末一步用到高斯定理、$\delta A_b|_{\dot{U}}=0$及洛伦兹条件$\partial_a A^a=0$）于是由哈氏原理便知演化方程为$\partial_a\partial^a A^b=0$. 这正是无源麦氏方程用(满足洛伦兹条件的)4势的表达式

[式(6-6-32)], 所以式(15-1-22)的 $\mathscr{L}$ 可用作无源电磁场的拉氏密度.

15.1.3　广义相对论的拉氏形式

式(15-1-14)的积分 $\int\mathscr{L}$ 没有写出体元, 按照约定(见 §5.5), 它是 $\int\mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的简写, 其中 $\boldsymbol{\varepsilon}\equiv\varepsilon_{abcd}$ 是与度规适配的体元, 满足 $g^{ae}g^{bf}g^{cg}g^{dh}\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh}=-4!$. 这意味着体元 ε_{abcd} 依赖于度规. 这是度规作为时空背景的描述者的结果. 然而在广义相对论的拉氏形式中, 度规 g_{ab} 又扮演着引力场的场量(动力学量) ψ 的角色, 计算时要对它作变分. 既然 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 依赖于 g_{ab}, 对 g_{ab} 变分时就必须考虑 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的相应变分, 从而给计算带来麻烦. 处理这一问题的一个方法是在定义积分时改用与 g_{ab} 无关的 4 形式场 e_{abcd} (例如任一局部对偶右手基底场 $\{(e^\mu)_a\}$ 的体元 $\boldsymbol{e}\equiv\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3$)作体元. 适配体元 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与体元 $\boldsymbol{e}$ 的关系为[见式(5-4-4)]

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sqrt{-g}\,\boldsymbol{e}\,, \tag{15-1-23}$$

其中 g 是 g_{ab} 在该基底的分量的行列式. 在这种做法中, 真空引力场作用量定义为 $S=\int\mathscr{L}\boldsymbol{e}$. 因为 δS 为零对应于运动方程, 而运动方程不应依赖于基底, 所以作用量 S 不应依赖于基底. 由式(15-1-23)可知 $\boldsymbol{e}$ 对基底的依赖源于 $\sqrt{-g}$ 对基底的依赖, 为使 S 不依赖于基底可令 $\mathscr{L}$ 以如下方式依赖于基底:

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\,\tilde{\mathscr{L}}\,, \tag{15-1-24}$$

其中 $\tilde{\mathscr{L}}$ 是不依赖于基底的标量场. 请注意本小节第一行的 $\int\mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon}$ 与式(15-1-23)后第 2 行的 $S=\int\mathscr{L}\boldsymbol{e}$ 中的 $\mathscr{L}$ 有不同含义. 为与式(15-1-24)统一, 前者应改为 $\int\tilde{\mathscr{L}}\boldsymbol{\varepsilon}$, 即引力场作用量应为

$$S=\int\tilde{\mathscr{L}}\boldsymbol{\varepsilon}=\int\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon}=\int\mathscr{L}\boldsymbol{e}\,.$$

用 $S=\int\mathscr{L}\boldsymbol{e}$ 的好处在于把对度规的依赖全部转入 $\mathscr{L}$ 中, 变分度规时 $\boldsymbol{e}$ 不随之而变.

本章后面多处用到按式(15-1-24)的方式依赖于 $\sqrt{-g}$ 的标量场 $\mathscr{L}$ 和张量场, 因此有必要介绍如下定义: 在时空 (M,g_{ab}) 的某开域中体元 $\boldsymbol{e}$, 与 $\boldsymbol{e}$ 有关的张量 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 叫做**张量密度**(tensor density), 若存在与 $\boldsymbol{e}$ 无关的张量 $\tilde{T}^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 使

$$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}=\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\,, \tag{15-1-25}$$

其中 $\sqrt{-g}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的关系为式(15-1-23). 按照这一定义, 引力场的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 是标量密度; $\sqrt{-g}$ 也是标量密度[因它可表为 $\sqrt{-g}=\sqrt{-g}\cdot 1$, 而 1 是与 $\boldsymbol{e}$ 无关的标量.] 因

为$\sqrt{-g}$取决于基底，所以张量密度$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$是基底依赖的张量(是小节12.6.3所讲的赝张量的一种). 应该注意，与基底无关的张量的分量在基底变换时遵从张量分量变换律，而基底依赖的张量的分量在基底变换时遵从另一变换律，因为基底变换时张量自身也变. 为了对张量密度有较好理解并避免可能误解，需要更严格的定义和讨论，详见§15.6.

命题 15-1-2 设R为g_{ab}的标量曲率，则$\mathscr{L}\equiv\sqrt{-g}R=\sqrt{-g}\,g^{ab}R_{ab}$与真空引力场的拉氏密度只差一个边界项.

注 1 与$\mathscr{L}\equiv\sqrt{-g}\,g^{ab}R_{ab}$相应的作用量称为 **Hilbert 作用量**.

证明 为方便起见，以g^{ab}代替g_{ab}作为场量，即取$\psi\equiv g^{ab}$. 设$g^{ab}(\lambda)$是满足式(15-1-18) (其中ϕ改为g^{ab})的任一单参族，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}=\left[\sqrt{-g}\,g^{ab}\frac{\mathrm{d}R_{ab}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}+R\frac{\mathrm{d}\sqrt{-g(\lambda)}}{\mathrm{d}\lambda}+\sqrt{-g}R_{ab}\frac{\mathrm{d}g^{ab}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right]\Bigg|_{\lambda=0}$$

$$=\sqrt{-g(0)}\,g^{ab}(0)\delta R_{ab}+R(0)\,\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g(0)}\,R_{ab}(0)\delta g^{ab}$$

$$=\sqrt{-g}\,g^{ab}\delta R_{ab}+R\,\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\,R_{ab}\delta g^{ab}\equiv B_1+B_2+\sqrt{-g}\,R_{ab}\delta g^{ab}\,,\qquad(15\text{-}1\text{-}26)$$

其中第三步只是为了简写而略去(0)，最后一步无非是把≡号前的第一、二项依次记作B_1和B_2. 首先计算B_1. 设$\overset{\lambda}{\nabla}_a$和$\nabla_a$分别与$g_{bc}(\lambda)$和$g_{bc}\equiv g_{bc}(0)$适配，即$\overset{\lambda}{\nabla}_a g_{bc}(\lambda)=0$和$\nabla_a g_{bc}=0$. 令$C^c{}_{ab}(\lambda)$代表$\overset{\lambda}{\nabla}_a$和$\nabla_a$的“差别”，即

$$(\nabla_a-\overset{\lambda}{\nabla}_a)\omega_b=C^c{}_{ab}(\lambda)\omega_c\,.$$

分别以$R_{abc}{}^d(\lambda)$和$R_{abc}{}^d$代表$\overset{\lambda}{\nabla}_a$和$\nabla_a$的黎曼张量，即

$$R_{abc}{}^d(\lambda)\,\omega_d=2\overset{\lambda}{\nabla}_{[a}\overset{\lambda}{\nabla}_{b]}\,\omega_c\,,\quad R_{abc}{}^d\omega_d=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c\,,\quad\forall\omega_c\,,$$

则由式(12-1-8)得

$$R_{abc}{}^d(\lambda)=R_{abc}{}^d-2\nabla_{[a}C^d{}_{b]c}(\lambda)+2C^e{}_{c[a}(\lambda)C^d{}_{b]e}(\lambda)\,,$$

故

$$R_{ac}(\lambda)\equiv R_{abc}{}^b(\lambda)=R_{ac}-2\nabla_{[a}C^b{}_{b]c}(\lambda)+2C^e{}_{c[a}(\lambda)C^b{}_{b]e}(\lambda)\,.\qquad(15\text{-}1\text{-}27)$$

以$C^e{}_{ca}$简记$C^e{}_{ca}(0)$，则$C^e{}_{ca}\omega_e=(\nabla_c-\nabla_c)\omega_a=0\ \forall\omega_a$，故$C^e{}_{ca}=0$，由此易证式(15-1-27)右边第三项的变分为零，所以

$$\delta R_{ac} = -2\nabla_{[a}\delta C^b{}_{b]c} = \nabla_b \delta C^b{}_{ac} - \nabla_a \delta C^b{}_{bc}\,. \tag{15-1-28}$$

$C^a{}_{bc}(\lambda)$ 反映 ∇_a 与 $\overset{\lambda}{\nabla}_a$ 的差别，分别相应于上册定理3-2-3证明中的 $C^a{}_{bc}$，$\tilde{\nabla}_a$ 和 ∇_a 因此由式(3-2-10)得 $C^b{}_{ac}(\lambda) = g^{bd}(\lambda)\,[\nabla_a g_{cd}(\lambda) + \nabla_c g_{ad}(\lambda) - \nabla_d g_{ac}(\lambda)]/2$，故

$$\delta C^b{}_{ac} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{d}g^{bd}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}[\nabla_a g_{cd}(\lambda) + \nabla_c g_{ad}(\lambda) - \nabla_d g_{ac}(\lambda)]\right.$$

$$\left.\left. + g^{bd}(\lambda)\left[\nabla_a \frac{\mathrm{d}g_{cd}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} + \nabla_c \frac{\mathrm{d}g_{ad}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} - \nabla_d \frac{\mathrm{d}g_{ac}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right]\right\}\right|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2} g^{bd}(\nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ac})\,, \tag{15-1-29}$$

其中第二步用到 $\nabla_c g_{db}(0) = 0$. 由此又得

$$\delta C^b{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{bd}(\nabla_b \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{bc})$$

$$= \frac{1}{2} g^{bd}(\nabla_c \delta g_{bd} + 2\nabla_{[b}\delta g_{d]c}) = \frac{1}{2} g^{bd}\nabla_c \delta g_{bd}\,. \tag{15-1-30}$$

将式(15-1-29)及(15-1-30)代入式(15-1-28)得

$$\delta R_{ac} = \frac{1}{2} g^{bd}(\nabla_b\nabla_a\delta g_{cd} + \nabla_b\nabla_c\delta g_{ad} - \nabla_b\nabla_d\delta g_{ac} - \nabla_a\nabla_c\delta g_{bd})\,,$$

从而

$$g^{ac}\delta R_{ac} = \frac{1}{2}(\nabla^d\nabla^c\delta g_{cd} + \nabla^d\nabla^a\delta g_{ad} - g^{ac}\nabla^d\nabla_d\delta g_{ac} - g^{bd}\nabla^c\nabla_c\delta g_{bd})$$

$$= \nabla^a\nabla^b\delta g_{ab} - g^{bd}\nabla^a\nabla_a\delta g_{bd} = \nabla^a(\nabla^b\delta g_{ab} - g^{bc}\nabla_a\delta g_{bc})\,.$$

令

$$v_a \equiv \nabla^b\delta g_{ab} - g^{bc}\nabla_a\delta g_{bc} = g^{bc}(\nabla_c\delta g_{ab} - \nabla_a\delta g_{bc})\,, \tag{15-1-31}$$

则

$$B_1 \equiv \sqrt{-g}\; g^{ac}\delta R_{ac} = \sqrt{-g}\;\nabla^a v_a\,. \tag{15-1-32}$$

再计算 B_2.

$$B_2 \equiv R\,\delta\sqrt{-g} = R\left.\frac{\mathrm{d}\sqrt{-g(\lambda)}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}$$

$$=R\left\{\frac{1}{2\sqrt{-g(\lambda)}}\frac{\mathrm{d}[-g(\lambda)]}{\mathrm{d}\lambda}\right\}\Bigg|_{\lambda=0}=-\frac{R}{2\sqrt{-g}}\delta g\,, \tag{15-1-33}$$

最右端的$\sqrt{-g}$照例是$\sqrt{-g(0)}$的简写. 仿照式(3-4-24)的证明不难证得

$$\delta g=gg^{ab}\delta g_{ab}\,, \tag{15-1-34}$$

代入式(15-1-33)得

$$B_2=\frac{R}{2\sqrt{-g}}g^{ab}\delta g_{ab}\,. \tag{15-1-35}$$

因为场变量是g^{ab}而非g_{ab}, 我们想用δg^{ab}而非δg_{ab}表示B_2. 这似乎很容易: 只须把$g^{ab}\delta g_{ab}$换为$g_{ab}\delta g^{ab}$. 然而这不正确. 由$\delta^a{}_b=g^{ac}g_{cb}$得$0=g^{ac}\delta g_{cb}+g_{cb}\delta g^{ac}$, 与$g_{ad}$缩并得

$$\delta g_{db}=-g_{ad}g_{cb}\delta g^{ac}\,,\text{①} \tag{15-1-36}$$

再与g^{db}缩并便给出

$$g^{ab}\delta g_{ab}=-g_{ab}\delta g^{ab}\,. \tag{15-1-37}$$

代入式(15-1-35)得

$$B_2=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,Rg_{ab}\delta g^{ab}\,. \tag{15-1-38}$$

把式(15-1-38)和(15-1-32)代入式(15-1-26)得

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\sqrt{-g}\,\nabla^a v_a+\sqrt{-g}\,(R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab})\delta g^{ab}\,, \tag{15-1-39}$$

因而

$$\delta S\equiv\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\int_U e\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\int_U e[\sqrt{-g}\,\nabla^a v_a+\sqrt{-g}\,G_{ab}\delta g^{ab}]\,, \tag{15-1-40}$$

其中G_{ab}是爱氏张量. 如果上式右边第一项可化成为零的边界项, 则$\delta S=0$ [对任一满足式(15-1-18)的单参族]便等价于真空爱氏方程$G_{ab}=0$, 从而$\mathscr{L}\equiv\sqrt{-g}\,g^{ab}R_{ab}$和$S=\int\mathscr{L}e$便可分别用作真空引力场的拉氏密度和作用量. 然而情况与此略有歧离. 假定$\dot{U}$除在测度为零的点外为非类光, 其单位法矢为n^a, 则由高斯定理可知

---

① 这表明δg_{ab}并非用度规g_{ab}对δg^{ab}降指标的结果.事实上, δg_{ab}和δg^{ab}是独立定义的[分别定义为$\mathrm{d}g_{ab}(\lambda)/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$和$\mathrm{d}g^{ab}(\lambda)/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$], 经正文的推导发现$\delta g_{db}=-g_{ad}g_{cb}\delta g^{ac}$而非去掉负号的该式.

$$式(15\text{-}1\text{-}40)右边第一项 = \int_U \boldsymbol{\varepsilon}\,\nabla^a v_a = \int_{\dot U} n_a v^a\,, \tag{15-1-41}$$

由式(15-1-31)可知 v_a 含 δg_{ab} 的导数(如 $\nabla_a \delta g_{bc}$), 式(15-1-18b)[即 $g^{ab}(\lambda)|_{\dot U}$ 同 λ 无关]只导致 $\delta g_{ab}|_{\dot U}=0$ 而不保证 $\nabla_a \delta g_{bc}|_{\dot U}=0$, 所以式(15-1-40)右边第一项未必为零. 可见 $\mathscr{L}$ 与真空引力场的拉氏密度差一个边界项.① □

[选读 15-1-1]

只要给 $\mathscr{L}$ 添补一项以抵消 δS 中的多余边界项 $\int_{\dot U} v_a n^a$, 便可得到真空引力场的作用量. 该项可求之如下. 由式(15-1-31)可知在 $\dot U$ 上有

$$v_a n^a = n^a g^{bc}(\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}) = n^a h^{bc}(\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}) = -h^{bc} n^a \nabla_a \delta g_{bc}, \tag{15-1-42}$$

其中第二步用到 $n^a n^b n^c(\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}) = 2n^b n^{(a} n^{c)} \nabla_{[c} \delta g_{a]b} = 0$, 第三步是因 $\delta g_{ab}|_{\dot U}=0$ 导致 $h^{bc}\nabla_c \delta g_{ab}=0$ (请注意 $h^{bc}\nabla_c$ 代表沿 $\dot U$ 切向求导, 见中册14.4.4 小节). 式(15-1-42)右边可用 $\dot U$ (作为非类光超曲面)的外曲率简洁表出. 外曲率因为依赖于度规而依赖于 λ, 应记作 $K_{ab}(\lambda)$, 其迹

$$K(\lambda) \equiv h^{ab} K_{ab}(\lambda) = h^a{}_b \overset{\lambda}{\nabla}_a n^b = h^a{}_b[\nabla_a n^b + C^b{}_{ac}(\lambda) n^c]\,. \tag{15-1-43}$$

上式中的 $h^{ab}, h^a{}_b$ 及 n^b 与 λ 无关, 因为 $\dot U$ 上的 g_{ab} 不依赖于 λ. 对 $K(\lambda)$ 求变分, 注意到式(15-1-29), 得

$$\delta K = h^a{}_b(\delta C^b{}_{ac}) n^c = \frac{1}{2} n^c h^a{}_b g^{bd}(\nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ac})$$

$$= \frac{1}{2} n^c h^{ad} \nabla_c \delta g_{ad} = -\frac{1}{2} v_a n^a\,, \tag{15-1-44}$$

其中第三步用到 $h^{ad}=h^{(ad)}$, 最末一步用到式(15-1-42). 代回式(15-1-40)和(15-1-39)便得

$$\delta S = -2\int_{\dot U} \delta K + \int_U \boldsymbol{e}\sqrt{-g}\, G_{ab} \delta g^{ab}\,. \tag{15-1-45}$$

定义新的作用量

$$S' := S + 2\int_{\dot U} K\,, \tag{15-1-46}$$

则 $\delta S'=0$ 便等价于真空爱因斯坦方程. 于是得出结论: 由式(15-1-46)定义的 S' 可

① 有些文献[如 Hawking and Ellis(1973)P.65]把式(15-1-18b)改为"对 $M-U$ 中任一点有 $\psi(\lambda)=\psi_0$", 此新条件既保证 $\delta g_{ab}|_{\dot U}=0$ 又保证 $\nabla_a \delta g_{bd}|_{\dot U}=0$, 于是 $\mathscr{L}$ 和 S 可用作真空引力场的拉氏密度和作用量.

可作真空引力场的作用量. [选读 15-1-1 完]

§15.2 有限自由度系统的哈氏理论

15.2.1 有限自由度正规系统的哈氏理论

拉氏理论的基本变量是广义坐标 q^i 和广义速度 $\dot{q}^i$, 它们的一组值代表系统的一个状态. 哈氏理论的基本变量则是广义坐标(位形变量) q^i 和广义动量(动量变量) p_i. 给定拉氏函数 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 后, 动量变量由下式定义:

$$p_i := \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \qquad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-1}$$

位形变量和动量变量称为互相共轭的一对**正则变量**(canonical variables), 它们的一组值 (q^i, p_i) 代表系统的一个状态. 量 $p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q})$ 在哈氏理论中有重要地位, 其微分为

$$\mathrm{d}[p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q})] = \dot{q}^i\mathrm{d}p_i + p_i\mathrm{d}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}\dot{q}^i = \dot{q}^i\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i. \tag{15-2-2}$$

上式右边不含 $\mathrm{d}\dot{q}^i$, 这意味着 $p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q})$ 可用 q^i 和 p_i 表出. 量 $p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q})$ 表为 q^i, p_i 的函数后称为系统的**哈氏量**(Hamiltonian), 记作 $H(q,p)$, 即

$$H(q,p) := p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}). \tag{15-2-3}$$

以下的讨论取决于 N 个 $\dot{q}^i$ 可否从式(15-2-1)中被反解出, 而这又取决于 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 的函数形式. 原始的哈氏理论假设全部 $\dot{q}^i$ 都可反解出, 即每个 $\dot{q}^i$ 都可表为 q^j 和 p_j 的函数:

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q,p), \qquad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-4}$$

在现代理论中, 满足这一要求的拉氏函数 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 称为**正规**(regular)的, 相应的哈氏理论称为**有正规拉氏量的哈氏理论**. 这时式(15-2-3)可以表为

$$H(q,p) = p_i\dot{q}^i(q,p) - L(q,\dot{q}(q,p)), \tag{15-2-5}$$

故

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\dot{q}^j + p_j\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \delta^i{}_j\dot{q}^j = \dot{q}^i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i},$$

其中第一式的第二步用到式(15-2-1). 利用拉氏方程(15-1-5)可把上式的第二式改写为 $\partial H/\partial q^i = -\dot{p}_i$, 因此有

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1,\cdots,N. \tag{15-2-6}$$

请注意各式中偏导数的含义. 例如, $\partial H/\partial q^1$ 是指函数 $H(q^1,\cdots,q^N;\ p_1,\cdots,p_N)$ 对 q^1 的偏导数, 求导时保持 $q^2,\cdots,q^N$ 和 $p_1,\cdots,p_N$ 不变; 而 $\partial L/\partial q^1$ 则是指函数 $L(q^1,\cdots,q^N;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N)$ 对 q^1 的偏导数, 求导时保持 $q^2,\cdots,q^N$ 和 $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N$ 不变.

式(15-2-6)还有另一推导途径: 用拉氏方程把式(15-2-2)改写为

$$\mathrm{d}H = \dot{q}^i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q^i, \tag{15-2-2$'$}$$

注意到

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i, \tag{15-2-7}$$

便可从式(15-2-2′)直接读出式(15-2-6).

系统的拉氏函数 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 给定后, 其哈氏函数 $H(q,p)$ 便也确定, 式(15-2-6)就成为关于 $2N$ 个待求函数 $q^i(t), p_i(t)$ 的 $2N$ 个一阶常微分方程, 称为**哈氏正则方程**(Hamiltonian canonical equations), 是哈氏形式中描述系统演化规律的方程, 等价于拉氏形式中关于 N 个待求函数 $q^i(t)$ 的 N 个 2 阶常微分方程(15-1-5)(拉氏方程). (从拉氏方程到哈氏方程的推导已在上面给出, 反向推导请读者完成) q^i 和 p_i 的一组值 (q^i,p_i) 代表一个状态, 所有 (q^i,p_i) 的集合称为系统的**相空间**(phase space), 记作 Γ, 是个 $2N$ 维流形, 其中每点 (q^i,p_i) 的 N 个 q^i 和 N 个 p_i 可充当该点的 $2N$ 个坐标. 指定初态 $(q^i(0), p_i(0))$ 相当于指定 Γ 的一点, 以此为初值就可确定一阶常微分方程组(15-2-6)的唯一解 $(q^i(t), p_i(t))$, 相应于 Γ 中过点 $(q^i(0), p_i(0))$ 的一条以时间 t 为参数的曲线 $\gamma(t)$ (图 15-2), 它描写系统的演化.

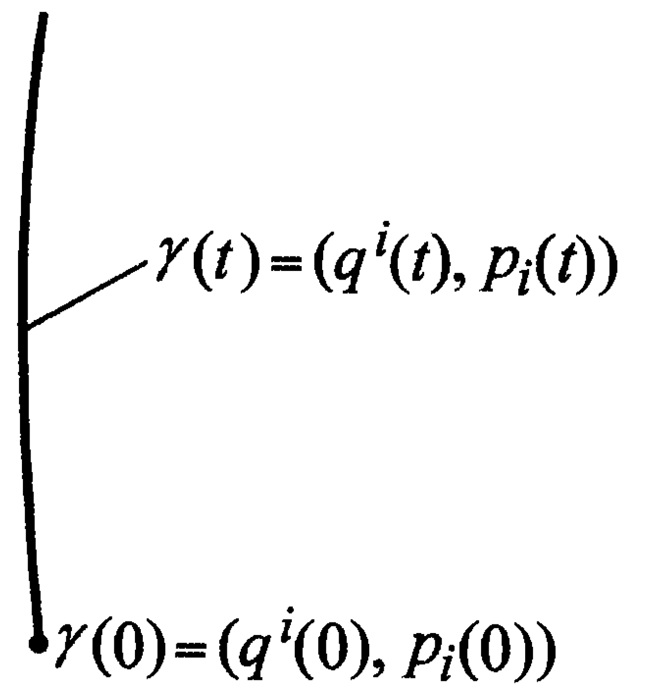


图 15-2　在正规情况下, 相空间中一点(初态)确定一条演化曲线 $\gamma(t)$

以上是有正规拉氏量的哈氏理论的简单复习. 引力场的拉氏密度属于非正规(奇异)形式, 因此本节的以下三个小节将讨论有非正规拉氏量(亦称有约束)的哈氏理论.

15.2.2 有限自由度约束系统的哈氏方程

式(15-2-1)右边是 q 和 $\dot{q}$ 的函数, 可改写为

$$p_i = p_i(q^1,\cdots,q^N, \dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N), \qquad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-1'}$$

把上式看作 N 个未知量 $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N$ 的方程组, 并试图由此反解出 $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N$. 反解的可能性取决于上式右边关于 $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^N$ 的雅可比行列式 $\det(\partial p_i/\partial \dot{q}^j)$ 是否为零, 也就是 $J_{ij} \equiv \partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j$ 所排成的 $N\times N$ 矩阵的秩 Z 是否等于 N. 先看一个特例: 设 $L = \Lambda_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, 其中 Λ_{ij} 与 $\dot{q}^i$ 无关, 则

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \Lambda_{jk}\left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^k + \dot{q}^j\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^i}\right) = 2\Lambda_{(ij)}\dot{q}^j, \tag{15-2-8}$$

故 $J_{ij} = 2\Lambda_{(ij)}$, 于是上式可表为

$$J_{ij}\dot{q}^j = p_i, \qquad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-9}$$

上式可看作 N 个未知量 $\dot{q}^j$ 的 N 个非齐次线性代数方程. 设 $N=3$, 矩阵 (J_{ij}) 的秩 $Z=2$, 则 (J_{ij}) 中有两行线性独立. 不失一般性, 设划掉矩阵 (J_{ij}) 的第1行和第1列后的 2×2 矩阵有逆, 便可用第二、三个方程把 $\dot{q}^2$ 和 $\dot{q}^3$ 表为 $q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, \dot{q}^1$ 的函数(即 $\dot{q}^2$ 和 $\dot{q}^3$ 可被“反解”出), 以此代入第一方程 $J_{1j}\dot{q}^j = p_1$, 则 $\dot{q}^1$ 消失, 该方程便可表为

$$\phi(q^1,q^2,q^3,p_1,p_2,p_3)=0. \quad (\phi\text{代表某种函数关系}) \tag{15-2-10}$$

这说明 q^i, p_i 并非互相独立, 它们要受上式的限制. 上例可推广至一般情形(利用隐函数存在定理), 结论是: N 个 $\dot{q}^i$ 中只有 Z 个 $\dot{q}^i$ 可(局部地)被反解出(可表为 q, p 以及其余 $N-Z$ 个 $\dot{q}^j$ 的函数), 式(15-2-1′)的其余信息将表现为只含 q 和 p 的 $N-Z$ 个独立方程:

$$\phi_m(q,p)=0, \qquad m=1,\cdots,M\ (\equiv N-Z), \tag{15-2-11}$$

其中 $\phi_m(q,p)$ 是 q 和 p 的某种函数. 这意味着 $2N$ 个 q 和 p 受到 M 个方程的限制, 因此说系统存在**约束**(constraint). $\phi_m(q,p)$ 称为**约束函数**, $\phi_m(q,p)=0$ 称为**约束方程**(简称约束). 读者熟悉的是用方程 $f(q^1,\cdots,q^N)=0$ 或 $f(q^1,\cdots,q^N,t)=0$ 对位形变量 $q^1,\cdots,q^N$ 加以限制的约束(不涉及速度 $\dot{q}^i$ 或动量 p_i), 称为**完整约束**(holonomic constraint), 例如, 牛顿力学中被限制于某曲面上的质点所受的约束以及能把质点结合为刚体的约束, 其特点是(各)质点的笛卡儿坐标要满足若干方程,

可通过选择适当的(数目较少的)非笛卡儿坐标(广义坐标)来消除约束. Dirac 等人从 20 世纪 40 年代开始为研究引力量子化而提出一套涉及动量 p_i 的非完整约束(动力学约束)理论[后称 Dirac-Bergmann 理论, 见 Dirac(1964)], 理论中出现约束的前提是拉氏函数的形式使 $\dot{q}^i$ 不能全部被“反解出”(奇异拉氏函数). ① 本书只讨论这种约束. 有约束时的哈氏量 H 仍由式(15-2-3)定义, 而且, 由于式(15-2-2)仍成立, H 仍只是 q 和 p 的函数(重要的是不含任一 $\dot{q}$). ②

约束的几何意义是系统在相空间 Γ 中的代表点必须位于由约束方程(15-2-11)决定的**约束面**(constraint surface) $\Gamma_1 \subset \Gamma$ 上. 如果只有一个独立约束 $\phi(q,p)=0$, 则约束面 Γ_1 是 Γ 中的 $2N-1$ 维子流形(超曲面③). 如果有 M 个独立约束, Γ_1 便是 M 个超曲面之交, 是 $2N-M$ 维子流形. 系统状态的代表点必须落在 Γ_1 上, 描述演化的曲线 $\gamma(t)$ 只能躺在 Γ_1 上, 它服从的演化方程不再像式(15-2-6)这么简单. 由于 H 表达式(15-2-3)中的 $\dot{q}^i$ 不再能表为 $\dot{q}^i(q,p)$, 式(15-2-6)的推导不再成立. 第二种推导, 即从式(15-2-2′)和(15-2-7)直接读出式(15-2-6)的做法也由于 $(\mathrm{d}q^i,\mathrm{d}p_i)$ 不完全独立而失效: 由式(15-2-2′)和(15-2-7)只能得到

$$\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i=0, \tag{15-2-12}$$

而不能进一步宣称两个括号内的表达式分别为零, 因为状态代表点必须落在 Γ_1 上, 而 Γ_1 的独立坐标[因而 $(\mathrm{d}q^i,\mathrm{d}p_i)$ 中的独立微分]只有 $2N-M$ 个. 为了克服这一困难, 可改而采用 Γ_1 的独立坐标. 先讨论只有一个约束 $\phi(q,p)=0$ 的情况, 这时约束面 Γ_1 是 $2N-1$ 维超曲面. 设 $\{r^\alpha(\alpha=1,\cdots,2N-1)\}$ 是 Γ_1 上的一个坐标系, 则 Γ_1 上的点的 q^i 和 p_i 都可看作 r^α 的函数, 由式(15-2-12)可知对 $\gamma(t)$ 上任一点有

$$\left[\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial r^\alpha}-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial r^\alpha}\right]\mathrm{d}r^\alpha=0\,. \tag{15-2-12′}$$

r^α 是 Γ_1 上的独立坐标保证 $2N-1$ 个 $\mathrm{d}r^\alpha$ 互相独立, 因而上式给出 $2N-1$ 个方程:

---

① 这种理论既可用拉氏形式也可用哈氏形式研究. Dirac-Bergmann 理论通常是指用哈氏形式对这种约束系统作研究的理论. 小节 15.3.2 将简要介绍笔者用拉氏形式研究这种约束系统的主要结果. 既用拉氏形式又用哈氏形式对这种系统的讨论还可在 Sudarshan and Mukunda(1974); 李子平(1993)中找到.

② 有约束时 H 并不唯一(见小节 15.3.1), 但总可选一 H 使之只是 N 个 q^i 和 $Z(<N)$ 个 p_i 的函数. Sudarshan and Mukunda(1974)的 H 就是一例[还可参见式(15-3-9)所在段].

③ 要使每个 $\phi_m(q,p)=0$ 给出一张超曲面还须 $\mathrm{d}\phi_m\neq 0$. 式(15-2-11)的函数 $\phi_m(q,p)$ 的确满足此条件. 仍以正文的特例为例. 式(15-2-9)的第一方程 $J_{1j}\dot{q}^j=p_1$ 左边是 q^1,q^2,q^3,p_2,p_3 的函数, 记作 $\varsigma(q^1,q^2,q^3,p_2,p_3)$, 令 $\phi(q^1,q^2,q^3,p_1,p_2,p_3)\equiv p_1-\varsigma(q^1,q^2,q^3,p_2,p_3)$, 则至少 $\partial\phi/\partial p_1=1\neq 0$.

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial r^\alpha} - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial r^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,2N-1. \qquad (15\text{-}2\text{-}12'')$$

用大写拉丁字母代表 Γ 上张量场的抽象指标. Γ_1 上任一点的坐标基矢 $(\partial/\partial r^\alpha)^A$ 可用坐标系 $\{q^i, p_i\}$ 的坐标基矢 $(\partial/\partial q^i)^A$ 和 $(\partial/\partial p_i)^A$ 表出:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\right)^A = \frac{\partial q^i}{\partial r^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A + \frac{\partial p_i}{\partial r^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^A. \qquad (15\text{-}2\text{-}13)$$

(对 i 从 1 至 N 求和; $\alpha = 1,\cdots,2N-1$.) 定义 $\gamma(t) \subset \Gamma_1$ 上的对偶矢量场

$$\xi_A := -\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(\mathrm{d}q^i)_A + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)(\mathrm{d}p_i)_A, \qquad (15\text{-}2\text{-}14)$$

则由式(15-2-12″)和(15-2-13)可知对 $\gamma(t)$ 的任一点有

$$\xi_A\left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\right)^A = 0, \qquad \alpha = 1,\cdots,2N-1. \qquad (15\text{-}2\text{-}15)$$

$\{(\partial/\partial r^\alpha)^A\}$ 是超曲面 Γ_1 上的坐标基底场, 所以 ξ_A 是定义在 $\gamma(t)$ 上的一个法于 Γ_1 的余矢场(对偶矢量场). 另一方面, Γ_1 由约束方程 $\phi(q,p)=0$ 定义又表明 $\nabla_A\phi$ 是 Γ_1 上的法余矢场, 因而 $\gamma(t)$ 上必有实函数 $\lambda(t)$ 使

$$\xi_A = \lambda\nabla_A\phi = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial q^i}(\mathrm{d}q^i)_A + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial p_i}(\mathrm{d}p_i)_A. \qquad (15\text{-}2\text{-}16)$$

与式(15-2-14)对比得

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial q^i}, \quad i = 1,\cdots,N. \qquad (15\text{-}2\text{-}17)$$

这就是有一个约束时的哈氏正则方程. 以上手法不难推广到有 M 个约束的情况, 不同之处只在于约束面 Γ_1 变为 Γ 的一个 $2N-M$ 维子流形. 这时 Γ_1 上每点有 M 个线性独立的法余矢 $\nabla_A\phi_1,\cdots,\nabla_A\phi_M$, 而 ξ_A 作为曲线 $\gamma(t)\subset\Gamma_1$ 上与 Γ_1 正交的余矢场, [见式(15-2-15), 只需把 $\alpha=1,\cdots,2N-1$ 改为 $\alpha=1,\cdots,2N-M$.] 在线上每点总可由 M 个 $\nabla_A\phi_m$ 线性表出:

$$\xi_A = \lambda^m\nabla_A\phi_m = \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i}(\mathrm{d}q^i)_A + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}(\mathrm{d}p_i)_A. \qquad (15\text{-}2\text{-}18)$$

[对 i 从 1 至 N 求和, 对 m 从 1 至 M 求和, 下同.] 于是哈氏正则方程(15-2-17)现在成为

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m(t)\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^m(t)\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i},\qquad i = 1,\cdots,N, \tag{15-2-19}$$

其中 $\lambda^m(t)$ 是 M 个待定函数, 称为**拉氏待定乘子**(Lagrange undetermined multiplier), 与 $2N$ 个 $q^i(t), p_i(t)$ 一起合共 $2N+M$ 个待定函数, 原则上可由 $2N$ 个演化方程(15-2-19)和 M 个约束方程(15-2-11)联立解出. 下一小节讨论与解有关的一系列问题.

15.2.3　初级约束和次级约束

Γ 上的标量场 $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ 可看作 q^i, p_i 的函数. 设 $\gamma(t)$ 是 Γ 中的一条演化曲线, 则 f 通过 $\gamma(t)$ 诱导出一元函数 $f(t) = f(q^i(t), p_i(t))$, 其时间导数为

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \lambda^m\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}\right), \tag{15-2-20}$$

其中第三步用到式(15-2-19). 为便于简洁地表达 $\dot{f}$, 可定义泊松括号. Γ 上两个函数 $f(q,p)$ 和 $g(q,p)$ 的**泊松括号**(Poisson bracket) $\{f,g\}$ 定义为

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{15-2-21}$$

请注意 Γ 上任意两个函数的泊松括号仍是 Γ 上的函数. 不难证明泊松括号有以下性质:

(a)反称性 $\{f,g\} = -\{g,f\}$;

(b)对每个槽都有线性性, 例如

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} ;$$

(c)服从莱布尼兹律, 例如

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\} ;$$

(d)满足雅可比恒等式, 即

$$\{f, \{g,h\}\} + \{h, \{f,g\}\} + \{g, \{h,f\}\} = 0. \tag{15-2-22}$$

利用泊松括号可把式(15-2-20)简洁地表为

$$\dot{f} = \{f,H\} + \{f,\phi_m\}\lambda^m. ^{①} \tag{15-2-23}$$

请注意 ϕ_m 在 Γ_1 上为零不导致 $\{f,\phi_m\}$ 在 Γ_1 上为零, 因为 $\{f,\phi_m\}$ 涉及导数 $\partial\phi_m/\partial p_i$

---

① 如果 f 只是演化曲线 $\gamma(t) \subset \Gamma_1$ 上的函数["态函数" $f(t)$]而非 Γ 或 Γ_1 上的函数, 则 $\{f,H\}$ 和 $\{f,\phi_m\}$ 均无定义, 但仍可用式(15-2-23)求 $\dot{f}$, 为此只须把 f 任意延拓为 Γ 上的函数, 记作 $\bar{f}$. (若演化线自相交, 则 f 只能分段延拓.) 式(15-2-23)当然可用于求 $\dot{\bar{f}}$, 而 $\bar{f}(t) = f(t)$ 保证 $\dot{\bar{f}} = \dot{f}$ 在 $\gamma(t)$ 上成立.

和 $\partial\phi_m/\partial q^i$. 为了防止以为 $\phi_m(q,p)=0$ 会导致 $\{f,\phi_m\}=0$ 的这种可能误解, 仿照 Dirac(1964), 我们把 $\phi_m(q,p)=0$ 改写为 $\phi_m(q,p)\approx 0$ (“弱等于” 号 $\approx$ 代表 “在约束面上等于”),[①] 并强调只有算出泊松括号后才能用约束方程 $\phi_m(q,p)\approx 0$.

式(15-2-23)是 $\varGamma$ 上任一函数 $f:\varGamma\to\mathbb{R}$ 同演化曲线 $\gamma(t)$ 结合而得的一元函数 $f(t)$ 的时间导数表达式. 令 f 分别为 q^i 和 p_i , 则式(15-2-23)给出

$$\dot{q}^i=\{q^i,H\}+\{q^i,\phi_m\}\lambda^m,\quad \dot{p}_i=\{p_i,H\}+\{p_i,\phi_m\}\lambda^m,\quad i=1,\ \cdots,\ N. \tag{15-2-24}$$

这无非是约束系统正则方程(15-2-19)用泊松括号的重新表述. 再令 f 为约束函数 $\phi_m(q,p)$, 则式(15-2-23)给出

$$\dot{\phi}_m=\{\phi_m,H\}+\{\phi_m,\phi_n\}\lambda^n,\qquad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-25}$$

演化的自洽性要求演化曲线 $\gamma(t)$ 躺在约束面 $\varGamma_1$ 上, 故 $\gamma(t)$ 上任一点的 ϕ_m 应为零, 因而 $\dot{\phi}_m\approx 0$, 相当于要求

$$\{\phi_m,H\}+\{\phi_m,\phi_n\}\lambda^n\approx 0,\qquad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-26}$$

这称为**自洽性条件**(consistency condition). 对此有必要详加讨论. 首先, 自洽性条件能否满足取决于拉氏函数 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 是否选得恰当. 例如, 如果选 $L=q^1+(\dot{q}^2)^2$, 则 $\partial L/\partial q^1=1$ 而 $\partial L/\partial\dot{q}^1=0$, 于是拉氏方程给出 $1=0$ 的不自洽结果. 这一不自洽性在哈氏形式中的表现就是自洽性条件(15-2-26)无法满足[详见式(15-2-54)后的一段]. 可见拉氏函数 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 的选择并不完全任意. 下面讨论拉氏函数选择得当(系统不存在不自洽性)时自洽性条件(15-2-26)的后果[包括对拉氏待定乘子 $\lambda^m(t)$ 以及对演化曲线经过的范围所提出的可能限制]. 令 $\varPhi_{mn}\equiv\{\phi_m,\phi_n\}$, 则 $\varPhi_{mn}$ 组成 $M\times M$ 反称矩阵 $(\varPhi_{mn})$. 再令 $h_m\equiv-\{\phi_m,H\}$, 则式(15-2-26)可表为

$$\varPhi_{mn}\lambda^n\approx h_m,\qquad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-26$'$}$$

这是关于 M 个未知量 λ^n 的 M 个非齐次线性方程组, 其表现因 $\det(\varPhi_{mn})$ 是否为零而有质的区别. 当 $\varGamma_1$ 上任一点的 $\det(\varPhi_{mn})$ 都非零时, 每点的方程组(15-2-26′)有唯一解. 设 $(\varPhi^{-1})^{mn}$ 是 $\varPhi_{mn}$ 的逆矩阵, 则以 $(\varPhi^{-1})^{mn}$ 作用于 $\varPhi_{np}\lambda^p\approx h_n$ 两边便可解得

$$\lambda^m\approx(\varPhi^{-1})^{mn}h_n,\qquad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-27}$$

注意到泊松括号是 q , p 的函数, 可知上式把 λ^m 确定为 $\varGamma_1$ 上的函数. 代入式(15-2-23)便有

---

① 但是, 对于只在 $\gamma(t)\subset\varGamma_1$ 上成立的公式, 我们仍用普通等号.

$$\dot{f}=\{f,H\}+\{f,\phi_m\}(\varPhi^{-1})^{mn}h_n . \tag{15-2-28}$$

把 $f(t)$ 分别取作 $q^i(t)$ 和 $p_i(t)$ 便可得到不含待定乘子的演化方程:

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}^i&=\{q^i,H\}+\{q^i,\phi_m\}(\varPhi^{-1})^{mn}h_n\\ \dot{p}_i&=\{p_i,H\}+\{p_i,\phi_m\}(\varPhi^{-1})^{mn}h_n\end{aligned}\right\}\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-29}$$

上两式右边都是 q^i 和 p_i 的函数, 把函数关系分别记作 F^i 和 G^i,便可改写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}^i(t)&=F^i(q(t),\,p(t))\\ \dot{p}_i(t)&=G^i(q(t),\,p(t))\end{aligned}\right\}\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-2-29′}$$

这是关于 $2N$ 个待求函数 $q^i(t)$ 和 $p_i(t)$ 的 $2N$ 个一阶常微分方程, 只要给定 $\varGamma_1$ 上任一点作为初态, 便可求得唯一解 $(q^i(t),\,p_i(t))$, 对应于唯一的、躺在 $\varGamma_1$ 上的演化曲线 $\gamma(t)$, M 个 λ^m (作为 $\varGamma_1$ 上的确定函数)限制在 $\gamma(t)$ 上便得 M 个一元函数 $\lambda^m(t)$. 在这种情况下, 自洽性条件对 M 个拉氏待定乘子的限制作用是把它们完全确定, 而对 $\varGamma_1$ 上初态点(因而演化所经历的范围)则毫无限制. 这是一个极端情况.

物理上更常见的情况是 $\det(\varPhi_{mn})\approx 0$. 一个最简单(且常见)的例子是所有泊松括号 $\{\phi_m,\phi_n\}$ 都弱为零, 即

$$\varPhi_{mn}\approx 0,\qquad m,n=1,\cdots,M. \tag{15-2-30}$$

这时自洽性条件(15-2-26′)简化为

$$h_m\approx 0,\qquad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-31}$$

如果 M 个函数 $h_m(q,p)$ 在 $\varGamma_1$ 上点点为零, 则自洽性条件自动满足, 拉氏乘子 λ^m 因而不受任何限制, 求解也就变得简单:对任一初态 $(q^i(0),\,p_i(0))\in\varGamma_1$, 任意指定 M 个一元函数 $\lambda^m(t)$ 代入演化方程(15-2-19)所得唯一解 $(q^i(t),\,p_i(t))$ 必自动满足约束方程(15-2-11), 所以待定乘子 $\lambda^m(t)$ 在此情况下完全自由. 这里出现一个问题:给定初态 $(q^i(0),\,p_i(0))\in\varGamma_1$ 而任选两组拉氏乘子 $\{\lambda^m(t)\}$ 和 $\{\lambda'^m(t)\}$, 便得到两条演化曲线 $\gamma(t)\equiv(q^i(t),\,p_i(t))$ 和 $\gamma'(t)\equiv(q'^i(t),\,p'_i(t))$. 系统到底沿哪条曲线演化? 答案是都可以. 初态不能决定唯一演化线的这一现象表明 $\varGamma_1$ 上的点同物理状态的关系不是一一对应而是多一对应. 这其实是物理系统存在某种规范自由性的反映. 为了有利于心存疑虑的读者理解这一结论, 这里举一个人为例子. 设系统的 $N=2$, 拉氏函数 $L=(\dot{q}^2)^2-q^2$(不含 q^1 和 $\dot{q}^1$), 则 $p_1=0$, $p_2=2\dot{q}^2$, $H=p_2{}^2/4+q^2$, 其中 $p_1=0$ 可看作约束方程, 约束函数 $\phi=p_1$, 代入式(15-2-17)得 4 个哈氏方程:

$$\dot{q}^1=\lambda(t),\quad \dot{q}^2=\frac{1}{2}p_2,\quad \dot{p}_1=0,\quad \dot{p}_2=-1.$$

任意指定函数 $\lambda(t)$ 作为拉氏乘子,在指定初态 $q^1(0)=q^2(0)=p_1(0)=p_2(0)=0$ 下便得唯一解:

$$q^1(t)=\int_0^t \lambda(t')\mathrm{d}t', \quad q^2(t)=-\frac{1}{4}t^2, \quad p_1(t)=0, \quad p_2(t)=-t.$$

如果另选拉氏乘子 $\lambda'(t)$, 则 $q^1(t)$ 改变, 所以演化曲线也要改变. 然而, 从物理上看, $L=(\dot{q}^2)^2-q^2$ 表明这其实是个1维问题(实质上无非是地球引力场中自由下落质点的拉氏量), 把它说成2维问题只不过是故弄玄虚, 所得结果中的另一维运动有任意性并不影响物理实质.

如果式(15-2-30)成立而某些 h_m 不在 Γ_1 上点点为零, 为满足自洽性条件式(15-2-26′)就要把 q 和 p 的取值范围限制在 Γ_1 中 h_m 为零的子集 $\Gamma_2\subset\Gamma_1$ 上(除某些点外 Γ_2 通常可看作 Γ_1 的维数较低的子流形), 这相当于给出进一步的约束. 这种为保证原有约束的自洽性而出现的新约束称为**次级约束**(secondary constraint), 而原来的约束 $\phi_m\approx 0(m=1,\cdots,M)$ 则称为**初级约束**(primary constraint). 初级约束仅由拉氏量 $L(q^i,\dot{q}^i)$ 的函数形式以及动量定义 $p_i=\partial L/\partial\dot{q}^i$ 所导致, 是对 q 和 p 的变动范围的限制, 而次级约束则只在用了演化方程后才出现, 其存在表明初级约束面 Γ_1 上并非所有点都有演化曲线经过. 次级约束同样要满足类似于式(15-2-26)的自洽性条件(只是"$\approx$"应理解为"在 Γ_2 上等于"), 这可能又给出对 λ^n 的限制以及导致新的约束(仍称次级约束). 对新约束的自洽性还应仿此再作讨论. 如此追查下去, 直至所有约束的自洽性条件都得到满足. 最终的约束面由全部初级约束(M 个)和全部次级约束决定, 记作 $\bar{\Gamma}$ (勿把 $\bar{\Gamma}$ 误作 Γ 的闭包). 应该强调, 无论有无次级约束, 演化方程(15-2-19)都成立, 而且其中的 ϕ_m 都只代表初级约束.

根据 Dirac 的建议, Γ 上的函数 f 称为**第一类**(first class)**的**, 若 f 与所有约束函数(包括初、次级约束)的泊松括号弱为零(现在的"弱"是指"在 $\bar{\Gamma}$ 上"); 否则称为**第二类**(second class)**的**. 约束函数为第一(二)类函数的约束称为**第一(二)类约束**. 把全部约束按这一标准分为两大类后, 就可证明关于 M 个拉氏乘子 $\lambda^m(t)$ 的自由性的一个重要结论:有多少个第一类初级约束就有多少个自由拉氏乘子. 详见选读15-2-2.

为了更好地理解约束系统的理论, 笔者曾编就并仔细研究过一批具体例子. 限于篇幅, 只能挑选其中有代表性的、很有帮助的三例作为习题(本章习题1, 2 及 3), 以飨读者.

[选读 15-2-1]

式(15-2-30)和(15-2-31)都满足时 $\lambda^m(t)$ 的完全自由性可用几何语言给出解释. 利用 Γ 上的 $1+M$ 个函数 H 和 $\phi_m(m=1,\cdots,M)$ 可在 Γ 上定义 $1+M$ 个矢量场:

$$X_H{}^A := \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A - \frac{\partial H}{\partial q^i}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^A, \tag{15-2-32}$$

$$X_m{}^A := \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A - \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^A, \quad m=1,\cdots,M. \tag{15-2-33}$$

因为 $\nabla_A \phi_n$ 是第 n 个约束 $\phi_n = 0$ 决定的超曲面的法余矢, 而

$$X_H{}^A \nabla_A \phi_n = X_H{}^A \left[\frac{\partial \phi_n}{\partial q^i}(\mathrm{d}q^i)_A + \frac{\partial \phi_n}{\partial p_i}(\mathrm{d}p_i)_A\right] = \{\phi_n, H\} \approx 0\,, \quad n=1,\cdots,M\,,$$

[最末一步用到式(15-2-31).] 所以 $X_H{}^A$ 切于由 $\phi_n = 0$ 定义的超曲面. 上式对所有 $n\,(=1,\cdots,M)$ 成立表明 $X_H{}^A|_{\Gamma_1}$ 切于 Γ_1. 利用式(15-2-30)则可类似地证明 M 个矢量场 $X_m{}^A$ 也切于 Γ_1. 任意指定 M 个函数 $\lambda^m(q,p)\,(m=1,\cdots,M)$ 作为式(15-2-19)的 λ^m, 则式(15-2-19)便成为关于 $2N$ 个待求函数 $q^i(t)$, $p_i(t)$ 的 $2N$ 个 1 阶常微分方程, 对任意指定初态 $(q^i(0), p_i(0)) \in \Gamma_1$ 便有唯一解 $(q^i(t), p_i(t))$, 对应于 Γ 上的一条曲线 $\gamma(t)$, 其在任一时刻 t 的切矢为

$$w^A = \dot{q}^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A + \dot{p}_i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A.$$

w^A 由于满足式(15-2-19)而满足矢量场等式

$$w^A = X_H{}^A + \lambda^m X_m{}^A, \tag{15-2-34}$$

可见 $\gamma(t)$ 是矢量场 $X_H{}^A + \lambda^m X_m{}^A$ 过点 $(q^i(0), p_i(0)) \in \Gamma_1$ 的积分曲线. $(X_H{}^A + \lambda^m X_m{}^A)|_{\Gamma_1}$ 是 Γ_1 上切于 Γ_1 的矢量场, 积分曲线的存在唯一性定理保证对 Γ_1 的任一点有从它出发并躺在 Γ_1 上的唯一积分曲线, 所以 $\gamma(t)$ 自动满足约束方程 $\phi_m(q,p) = 0$. 可见任意指定的 M 个函数 $\lambda^m(q,p)$ 通过 $\gamma(t)$ 诱导的 M 个函数 $\lambda^m(t)$ 都可充当拉氏乘子, 这说明在式(15-2-30)和(15-2-31)成立时拉氏乘子 $\lambda^m(t)$ 有很大程度的任意性. 为了证明 $\lambda^m(t)$ 有完全的任意性, 即任意指定的 M 个一元函数 $\lambda^m(t)$ [而不是先指定 $\lambda^m(q,p)$]及初态点 $(q^i(0), p_i(0)) \in \Gamma_1$ 所决定的方程组(15-2-19)的唯一解曲线 $\gamma(t) \equiv (q^i(t), p_i(t))$ 也一定躺在 Γ_1 上, 可以借用"增广相空间" $\mathbb{R}\times\Gamma$ (以代替 Γ)为背景流形并仿照上面的做法[把 $\lambda^m(t)$ 看作 $\mathbb{R}\times\Gamma$ 上的函数]证明(练习)以 $\mathbb{R}\times\Gamma_1$ 的任一点为初态点、满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}q^i(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m(t(s))\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^m(t(s))\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = 1$$

的演化曲线 $\tilde{\gamma}(s) \equiv (t(s), q^i(s), p_i(s))$ 必躺在 $\mathbb{R} \times \Gamma_1$ 上. **[选读 15-2-1 完]**

[选读 15-2-2]

正文中对 $\det(\Phi_{mn}) \approx 0$ 的情况只讨论了最简单的特例, 即 $\Phi_{mn} \approx 0$. 现在讨论一般情形. 设矩阵 (Φ_{mn}) 的秩为 z,① 则 $\det(\Phi_{mn}) \approx 0$ 要求 $z < M$, 故 $\Phi_{mn}\lambda^n \approx h_m$ 对应的齐次方程组 $\Phi_{mn}\lambda^n \approx 0$ 有 $M-z$ 个线性独立解, 即存在 $M-z$ 个线性独立的行向量 $l_{(s)}{}^m (s=1,\cdots,M-z)$ 使

$$l_{(s)}{}^m \Phi_{mn} \approx 0, \qquad n=1,\cdots,M, \;\; s=1,\cdots,M-z. \tag{15-2-35}$$

与式(15-2-26′)结合得

$$l_{(s)}{}^m h_m \approx 0, \qquad s=1,\cdots,M-z. \tag{15-2-36}$$

为行文方便, 把 $l_{(s)}{}^m$ 称为 (Φ_{mn}) 的**消灭行向量**. 因 Γ_1 上每点有一个矩阵 (Φ_{mn}), 故每点有 $M-z$ 个线性独立的消灭行向量, 把它们任意地延拓为 Γ 上的行向量, 则 $l_{(s)}{}^m h_m$ 成为 q, p 的函数, 其函数形式归根结底取决于拉氏量 $L(q^i, \dot{q}^i)$ 的函数形式. 如果 $M-z$ 个函数 $l_{(s)}{}^m h_m$ 中有若干个在 Γ_1 上不点点为零, 式(15-2-36)便对 q, p 的取值范围提出了进一步的限制, 即出现次级约束. 正文中由满足式(15-2-30)而不满足式(15-2-31)所导致的次级约束可看作 $z=0$ 的特例. 设不弱为零的 $l_{(s)}{}^m h_m$ 共有 $U(\leqslant M-z)$ 个, 以 $\psi_u(q,p)(u=1,\cdots,U)$ 代表这些函数 $l_{(s)}{}^m h_m$, 便有如下 U 个次级约束:

$$\psi_u(q,p) \approx 0, \qquad u=1,\cdots,U. \tag{15-2-37}$$

次级约束使约束面从 Γ_1 缩到维数较低的子流形 Γ_2. 现在的弱等于号是指"在 Γ_2 上等于". (一般习惯是: 讨论涉及哪个约束面时, ≈就指"在该约束面上等于". 但含 λ^m 的公式例外, 它们只在最终约束面 $\bar{\Gamma}$ 上成立.) 次级约束同初级约束一样必须满足自洽性条件 $\dot{\psi}_u \approx 0$ $(u=1,\cdots,U)$, 因此应把初、次级约束的自洽性条件

$$\begin{aligned} &\{\phi_m, H\} + \{\phi_m, \phi_n\}\lambda^n \approx 0, \qquad m=1,\cdots,M, \\ &\{\psi_u, H\} + \{\psi_u, \phi_n\}\lambda^n \approx 0, \qquad u=1,\cdots,U \end{aligned} \tag{15-2-38}$$

作为一个整体仿照前面对式(15-2-26)的讨论方式进行讨论, 不同之处在于现在涉及的矩阵不是方阵而是 $M+U$ 行、M 列矩阵. 讨论中还有可能出现新的次级约束, 每个新约束还要满足自己的自洽性条件, 从而又可能添加新的、关于 λ^n 的线性方

---

① 我们只关心 z 在约束面上点点相同的情况. 这其实不失一般性, 因为对不满足此条件的情况可以分区处理, 参见 Gotay, Nester, and Hinds(1978)及其所引有关文献.

程或者给出更新的约束. 如此下去, 经过有限次类似操作后得到的最终约束面(记作 $\overline{\Gamma}$, 不代表 Γ 的闭包)原则上有两种可能: ① $\overline{\Gamma}=\varnothing$, 表明系统的拉氏函数选择不当而导致不自洽性, 以下不讨论这种情况; ② $\overline{\Gamma}$ 由 M 个初级约束和 $\overline{U}$ 个次级约束决定, 即

$$\phi_m(q,p)\approx 0\,,\quad \psi_u(q,p)\approx 0\,,\quad m=1,\cdots,M,\ u=1,\cdots,\overline{U}\,, \tag{15-2-39}$$

而且 M 个拉氏乘子 λ^n 必须且只须满足如下方程:①

$$\begin{aligned} &\{\phi_m,H\}+\{\phi_m,\phi_n\}\lambda^n\approx 0\,, && m=1,\cdots,M,\\ &\{\psi_u,H\}+\{\psi_u,\phi_n\}\lambda^n\approx 0\,, && u=1,\cdots,\overline{U}\,. \end{aligned} \tag{15-2-40}$$

上式可看作关于 M 个未知量 λ^n 的 $M+\overline{U}$ 个线性方程, 其系数矩阵

$$(\overline{\Phi}_{\overline{m}\overline{n}})\equiv\begin{bmatrix}\Phi_{mn}\\ \{\psi_u,\phi_n\}\end{bmatrix}$$

是 $M+\overline{U}$ 行、M 列矩阵. 如果 $(\overline{\Phi}_{\overline{m}\overline{n}})$ 在 $\overline{\Gamma}$ 上的秩为最大值, 即等于 M, 式(15-2-40)便含有关于 λ^n 的 M 个线性独立方程, 从而可把 M 个 λ^n 作为 q,p 的函数解出. 全部待定乘子便一一确定. 反之, 设 $(\overline{\Phi}_{\overline{m}\overline{n}})$ 的秩为 $\overline{z}<M$, 这时只有 $\overline{z}$ 个由 λ^n 构成的线性组合可被作为 q,p 的函数解出, 而其余 $M-\overline{z}$ 个线性组合则完全任意. 这些线性组合可用下法构造. 因为矩阵的行秩等于列秩(并称为矩阵的秩), 所以 $(\overline{\Phi}_{\overline{m}\overline{n}})$ 的线性独立的行数和列数都是 $\overline{z}$, 于是 M 个列向量之间存在 $M-\overline{z}$ 个独立关系, 即存在 $M-\overline{z}$ 个独立的消灭列向量 ${\xi_{(\alpha)}}^n(\alpha=1,\cdots,M-\overline{z})$, 使下式成立:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{mn}{\xi_\alpha}^n\approx 0\,, && m=1,\cdots,M,\\ &\{\psi_u,\phi_n\}{\xi_\alpha}^n\approx 0\,, && u=1,\cdots,\overline{U}, \end{aligned}\right\}\quad \alpha=1,\cdots,M-\overline{z}\,. \tag{15-2-41}$$

Γ_1 是由 M 个初级约束 $\phi_m=0$ 决定的. 令 $\phi'_m={C_m}^n\phi_n$ [其中矩阵 $({C_m}^n)$ 有非零行列式], 则 $\phi'_m=0$ $(m=1,\cdots,M)$ 当且仅当 $\phi_n=0$ $(n=1,\cdots,M)$, 故 $\phi'_m=0$ 与 $\phi_n=0$ 决定同一约束面. 现在先用式(15-2-41)的 ${\xi_\alpha}^n$ 作为组合系数生成前 $M-\overline{z}$ 个独立组合 ϕ_α, 即

$$\phi_\alpha={\xi_\alpha}^n\phi_n\,,\qquad \alpha=1,\cdots,M-\overline{z}\,, \tag{15-2-42}$$

(ϕ_α 不再写作 ϕ'_α, 其与 ϕ_n 的区别体现在下标 α 上.) 再用其他适当系数从 $\{\phi_1,\cdots,\phi_M\}$ 生成其他 $\overline{z}$ 个独立组合(记作 ϕ_β), 即

① ψ_u 原本是在 Γ_1 上定义的. 为使含 ψ_u 的泊松括号有意义, 应将 ψ_u 的定义域延拓至 Γ_1 的一个邻域. 我们关心的结果与延拓方式无关.

$$\phi_\beta = \eta_\beta{}^n \phi_n, \qquad \beta = M - \bar{z} + 1, \cdots, M, \tag{15-2-43}$$

则 $\xi_\alpha{}^n$ 和 $\eta_\beta{}^n$ 构成的 $M \times M$ 矩阵非奇异，从式(15-2-42)和(15-2-43)可反解出 ϕ_n：

$$\phi_n = \mu_n{}^\alpha \phi_\alpha + \nu_n{}^\beta \phi_\beta, \tag{15-2-44}$$

其中 $\mu_n{}^\alpha$ 和 $\nu_n{}^\beta$ 构成的矩阵与 $\xi_\alpha{}^n$ 和 $\eta_\beta{}^n$ 构成的矩阵互逆. 初级约束面 Γ_1 可用 $\phi_\alpha = \phi_\beta = 0$ 作等价描述. 这样构造的 $M - \bar{z}$ 个 ϕ_α 有一大优点：式(15-2-41)保证每个 ϕ_α 同所有约束函数(包括初、次级)的泊松括号在 $\bar{\Gamma}$ 上为零：

$$\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\} \approx \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx \{\phi_\alpha, \psi_u\} \approx 0. \tag{15-2-45}$$

证明上式时应注意 $\xi_\alpha{}^m$(和 $\eta_\beta{}^n$)也是 q, p 的函数，但由泊松括号的性质可知凡以它为一个因子的泊松括号都与 ϕ_m 相乘(例如 $\phi_m\{\xi_\alpha{}^m, \psi_u\}$)，借助于 $\phi_m \approx 0$ 便可使这些项全部消失，从而使 $\xi_\alpha{}^m$ 和 $\eta_\beta{}^n$ 在计算式(15-2-45)的泊松括号时可像常数一样从括号中提出.

式(15-2-45)表明上述 $M - \bar{z}$ 个初级约束函数 ϕ_α 都是第一类的. 反之，ϕ_β 及其线性组合则必为第二类的，因为如果它们属于第一类，则除式(15-2-41)外还会存在 $(\overline{\Phi}_{\bar{m}\bar{n}})$ 的列之间的其他独立关系. 如果一开始就用 M 个 ϕ_α, ϕ_β 代替 M 个 ϕ_m 描述 Γ_1，则自洽性条件中的拉氏乘子也将不是 λ^m 而是它们的某种线性组合. 事实上，若以式(15-2-44)中的 $\mu_n{}^\alpha$ 和 $\nu_n{}^\beta$ 作为组合系数按下式构造 $M - \bar{z}$ 个 λ^α 和 $\bar{z}$ 个 λ^β：

$$\lambda^\alpha \equiv \mu_n{}^\alpha \lambda^n, \quad \lambda^\beta \equiv \nu_n{}^\beta \lambda^n, \quad \alpha = 1, \cdots, M - \bar{z}, \quad \beta = (M - \bar{z}) + 1, \cdots, M, \tag{15-2-46}$$

则利用 ϕ_α 为第一类约束的性质可把式(15-2-40)的第一式重新表为

$$\mu_m{}^\alpha \{\phi_\alpha, H\} + \nu_m{}^\beta (\{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\}\lambda^{\beta'}) \approx 0. \tag{15-2-47}$$

把 $\{\phi_\alpha, H\}$ 和 $\{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\}\lambda^{\beta'}$ 合起来看作 M 个未知量，则上式是关于它们的 M 个齐次线性代数方程，$\mu_n{}^\alpha$ 和 $\nu_n{}^\beta$ 构成的 $M \times M$ 矩阵的非奇异性导致这一方程组没有非零解，所以式(15-2-40)的第一式又可重新表为

$$\{\phi_\alpha, H\} \approx 0, \qquad \{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\}\lambda^{\beta'} \approx 0. \tag{15-2-48a}$$

类似地，式(15-2-40)的第二式可重新表为

$$\{\psi_u, H\} + \{\psi_u, \phi_\beta\}\lambda^\beta \approx 0. \tag{15-2-48b}$$

式(15-2-48)便是以 ϕ_α, ϕ_β 代替 M 个 ϕ_m 描述 Γ_1 时的自洽性条件表达式，其中本应存在的某些项，例如 $\{\phi_\beta, \phi_\alpha\}\lambda^\alpha$ 和 $\{\psi_u, \phi_\alpha\}\lambda^\alpha$，由于 ϕ_α 为第一类而自动消失. 拉氏乘子

所应受到的限制体现在自洽性条件之中，而这一条件重新表述为式(15-2-48)表明拉氏乘子 λ^α 不受任何限制. 注意到 λ^α 的个数与 ϕ_α 的个数一样，便可得出结论：有多少个(独立的)第一类初级约束就有多少个自由的拉氏乘子.

此处有必要说明一点. 因为同一初级约束面 Γ_1 既可用这样 M 个初级约束刻画，也可用那样 M 个初级约束刻画，我们说初级约束函数组的选择具有规范自由性. 上面的 $\{\phi_m \mid m=1,\cdots,M\}$ 和 $\{\phi_\alpha,\phi_\beta \mid \alpha=1,\cdots,M-\bar{z}；\beta=(M-\bar{z})+1,\cdots,M\}$ 就是两种不同的规范(描述同一约束面 Γ_1). 每种规范中的第一类初级约束的个数可以不同，就是说，第一类初级约束的个数不具有规范不变性. 不妨把第一类初级约束个数最多的规范称为最大规范. 这样，上段末的结论准确地应理解为：自由拉氏乘子的个数等于最大规范中(独立的)第一类初级约束的个数. 下面证明前面从 $\{\phi_m\}$ 出发用式(15-2-42)和(15-2-43)所作变换(重组)的结果：

$$\{\phi_\alpha,\phi_\beta \mid \alpha=1,\cdots,M-\bar{z},\ \beta=(M-\bar{z})+1,\cdots,M\}$$

正是一个最大规范. 证明分作两步. 第一步，证明矩阵 $(\varPhi_{\overline{m}\overline{n}})$ 的秩 $\bar{z}$ 有规范不变性. 设 $\{\phi_m \mid m=1,\cdots,M\}$ 和 $\{\phi'_i \mid i=1,\cdots,M\}$ 是任意两个规范. $\phi'_i|_{\Gamma_1}=0$ 表明 $\nabla_A\phi'_i$ 是 Γ_1 的法余矢，故可用基矢 $\nabla_A\phi_m$ 线性表出：

$$\nabla_A\phi'_i \approx A_i{}^m\nabla_A\phi_m . \quad (A_i{}^m \text{ 为展开系数，“}\approx\text{”代表在“在 }\Gamma_1\text{ 上等于”})$$

令 $\varOmega^{AB}\equiv(\partial/\partial q^i)^A(\partial/\partial p_i)^B-(\partial/\partial p_i)^A(\partial/\partial q^i)^B$，则不难验证 Γ 上函数 f 和 g 的泊松括号可表为 $\{f,g\}=\varOmega^{AB}(\nabla_A f)\nabla_B g$，因此

$$\{\phi'_i,\phi'_j\}=\varOmega^{AB}(\nabla_A\phi'_i)\nabla_B\phi'_j \approx A_i{}^m A_j{}^n\varOmega^{AB}(\nabla_A\phi_m)\nabla_B\phi_n = A_i{}^m\{\phi_m,\phi_n\}\tilde{A}^n_j ,$$

其中 $\tilde{A}$ 是 A 的转置矩阵，“$\approx$”号指“在 Γ_1 上等于”. 设 $\{\psi_u \mid u=1,\cdots,\bar{U}\}$ 和 $\{\psi'_v \mid v=1,\cdots,\bar{U}\}$ 分别是与 $\{\phi_m\}$ 和 $\{\phi'_i\}$ 相应的次级约束函数组，则类似地有

$$\{\psi'_v,\phi'_j\}\approx B_v{}^m\{\phi_m,\phi_n\}\tilde{A}^n_j + C_v{}^u\{\psi_u,\phi_n\}\tilde{A}^n_j .$$

所以有矩阵等式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\{\phi'_i,\phi'_j\}\\ \{\psi'_v,\phi'_j\}\end{bmatrix}}_{M+\bar{U}\text{行}M\text{列}}=\begin{bmatrix}A_i{}^m & 0\\ B_v{}^m & C_v{}^u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\phi_m,\phi_n\}\\ \{\psi_u,\phi_n\}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{A}^n_\beta\end{bmatrix}.$$

上式右方第一、三个方阵满秩，所以矩阵 $\begin{bmatrix}\{\phi'_i,\phi'_j\}\\ \{\psi'_v,\phi'_j\}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}\{\phi_m,\phi_n\}\\ \{\psi_u,\phi_n\}\end{bmatrix}$ 同秩. 第二步，设已通过某种途径找到一个最大规范，记作 $\{\phi'_\alpha,\phi'_\beta \mid \alpha=1,\cdots,A；\beta=A+1,\cdots,M\}$，

其中第一类初级约束共 A 个. 配以全部次级约束 $\{\psi'_{v} \mid v=1,\cdots,\overline{U}\}$，则所关心的 $M+\overline{U}$ 行、M 列矩阵为

$$\begin{bmatrix}\{\phi',\phi'\}\\ \{\psi',\phi'\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \{\phi'_{\beta},\phi'_{\beta'}\}\\ 0 & \{\psi'_{v},\phi'_{\beta'}\}\end{bmatrix}.$$
$$\underbrace{\quad}_{A列}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{M-A列}$$

由于有 A 列为零，其秩 $\overline{z}\leqslant M-A$，或 $A\leqslant M-\overline{z}$. 另一方面，用前面式(15-2-42)和(15-2-43)的做法求得的约束函数组中至少有 $M-\overline{z}$ 个第一类初级约束，表明 $A\geqslant M-\overline{z}$. 与 $A\leqslant M-\overline{z}$ 结合得 $A=M-\overline{z}$. 于是可得结论：①最大规范中的第一类初级约束共有 $M-\overline{z}$ 个；②自由拉氏乘子的个数等于 $M-\overline{z}$. **[选读 15-2-2 完]**

15.2.4 L 不含 $\dot{q}^1$ 的特别情况

本小节讨论一种特殊情况，对后面关于电磁场和引力场的讨论大有帮助. 设 N 个位形变量 q^i 中有这么一个(记作 q^1)，其广义速度 $\dot{q}^1$ 不出现于拉氏量 L 的表达式中，即

$$L=L(q^1,q^k;\dot{q}^k),\qquad k=2,\cdots,N. \tag{15-2-49}$$

则与 q^1 共轭的动量变量 $p_1=\partial L/\partial\dot{q}^1=0$，所有动量表达式 $p_i=\partial L/\partial\dot{q}^i$ 都不含 $\dot{q}^1$，因此 $\dot{q}^1$ 不能被反解出，即 $\dot{q}^1$ 无法表为 q^i, p_i (及 $\dot{q}^k$)的函数. 令 $\phi(q,p)\equiv p_1$，便得初级约束

$$\phi(q,p)\equiv p_1=0. \tag{15-2-50}$$

进一步假定 $\dot{q}^k(k=2,\cdots,N)$ 都可从 $p_k=\partial L/\partial\dot{q}^k$ 反解出，即除式(15-2-50)外再无初级约束，因此只有一个拉氏乘子 λ. 这时哈氏量

$$H=\sum_{k=2}^{N}p_k\dot{q}^k-L \tag{15-2-51}$$

不是 p_1 的函数，即 $H=H(q^1,\cdots,q^N,p_2,\cdots,p_N)$.① 哈氏演化方程(15-2-19)现在取如下形式：

$$\dot{q}^1=\frac{\partial H}{\partial p_1}+\lambda\frac{\partial\phi}{\partial p_1}=\lambda,\quad \dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q^1}-\lambda\frac{\partial\phi}{\partial q^1}=-\frac{\partial H}{\partial q^1}, \tag{15-2-52}$$

① 小节 15.3.1 将证明，$\overline{\Gamma}$ 上的两个哈氏量 H 和 H' 只要满足 $H|_{\Gamma_1}=H'|_{\Gamma_1}$ 就等价，可见 H 在 Γ 上有很大程度的任意性，式(15-2-51)的 H 只是最简单的选择.

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \quad k = 2, \cdots, N. \quad (15\text{-}2\text{-}53)$$

式(15-2-53)表明共轭变量$(q^k, p_k)(k=2,\cdots,N)$的演化方程在外形上与$N-1$维无约束系统一样. [但其H除依赖于动力学变量$(q^k, p_k)(k=2,\cdots,N)$外还可能依赖于变量q^1, 这是与$N-1$维无约束系统的不同之处.] 式(15-2-52)第一式给出拉氏乘子λ的物理意义:原来它就是q^1的广义速度$\dot{q}^1$. 式(15-2-52)第二式左边是初级约束函数$\phi(q,p) \equiv p_1$在演化过程中的时间导数, 该式与自洽性条件$\dot{\phi} \approx 0$相结合给出如下条件:

$$\frac{\partial H}{\partial q^1} \approx 0. \quad (15\text{-}2\text{-}54)$$

上式左边是q^k, p_k和q^1的函数. 只要拉氏函数选择得当, 则要么$\partial H/\partial q^1$在Γ_1上点点为零, 要么式(15-2-54)成为次级约束, 它把演化限制在比Γ_1低一维的$\Gamma_2 \subset \Gamma_1$内. 电磁场和引力场都可看作后一种情况向无限自由度的推广(详见§15.4和§15.5). 然而, 如果拉氏函数L从一开始就选择不当, 那么式(15-2-54)将根本无法满足, 即系统无自洽解. 式(15-2-26)后面所举的不自洽拉氏函数$L = q^1 + (\dot{q}^2)^2$便是一例. 从哈氏观点看来, 对这样的L有

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 2\dot{q}^2, \quad (\text{因而}\ \dot{q}^2\ \text{可反解出}: \dot{q}^2 = \frac{1}{2}p_2.)$$

$$H = p_2\dot{q}^2 - L = \frac{1}{4}(p_2)^2 - q^1,$$

从而$\partial H/\partial q^1 = -1$, 代入式(15-2-54)便得出$1 \approx 0$的不自洽结果.

我们只关心L选择得当且$\partial H/\partial q^1$在Γ_1上不全为零的情况. 令

$$\psi(q^k, p_k; q^1) \equiv \partial H/\partial q^1,$$

则$\psi \approx 0$就是次级约束, 还应关心其自洽性条件

$$0 \approx \dot{\psi} = \{\psi, H\} + \{\psi, \phi\}\lambda \quad (15\text{-}2\text{-}55)$$

是否得到满足.上式中的$\{\psi, \phi\}$满足

$$\{\psi, \phi\} = \{\psi, p_1\} = \frac{\partial \psi}{\partial q^1} = \frac{\partial^2 H}{(\partial q^1)^2}. \quad (15\text{-}2\text{-}56)$$

一种重要的简单特例是H对q^1的依赖关系为线性(电磁场和引力场都如此), 这时有$\{\psi, \phi\} \approx 0$. 如果还有$\{\psi, H\} \approx 0$(电磁场和引力场恰恰也如此), 则$\dot{\psi} \approx 0$, 于是约束已经穷尽. $\{\psi, \phi\} \approx 0$表明全部约束(ϕ和ψ)为第一类, 因此λ[即$\dot{q}^1$, 见式

(15-2-52)]是自由乘子. 这时 $q^1(t)$ 由于完全任意而没有什么物理意义, 其地位类似于自由拉氏乘子, 不如索性把 q^1, p_1 从正则变量的行列中开除, 于是系统的相空间降为 $2(N-1)$ 维, 而且没有初级约束. 然而, 如果 H 对 q^1 的依赖关系为线性而 $\{\psi,H\}$ 不弱为零, 则 $0\approx\dot{\psi}=\{\psi,H\}$ 就会给出进一步的次级约束, 对其自洽性就还应追究, 直至穷尽. 这时不能根据 $\{\psi,\phi\}=0$ 就说 ϕ, ψ 是第一类的. 反之, 当 H 对 q^1 的依赖为非线性时, $\partial\psi/\partial q^1$ 非零导致 $\{\psi,\phi\}$ 非零, 故 ϕ 和 ψ 一定不是第一类的, 这时 $\lambda(t)$ [因而 $q^1(t)$]并不自由!

§15.3　有限自由度拉、哈氏理论的几何表述[选读]

15.3.1　Legendre 变换

拉氏和哈氏理论(尤其是约束系统的哈氏理论)存在若干微妙问题, 例如, ① $L(q^i,\dot{q}^i)$ 中的 $q^i(t)$ 与 $\dot{q}^i(t)$ 应被看作 $2N$ 个独立宗量, 但 $\dot{q}^i(t)$ 无非是 $q^i(t)$ 的导数, 何言独立?②哈氏量 H 到底是相空间 Γ 上的函数(因而是 $2N$ 元函数)还是约束面 Γ_1 上的函数(因而只是 $2N-M$ 元函数)?③哈氏量 H 是唯一的还是很多?④如何从拉氏角度看约束系统?用几何语言有助于澄清这些问题. 先简略介绍切丛的概念. 设 M 是 n 维流形, V_m 是点 $m\in M$ 的切空间. 以水平直线代表 M, 以 m 点上方的一段竖直线(见图15-3)代表集合

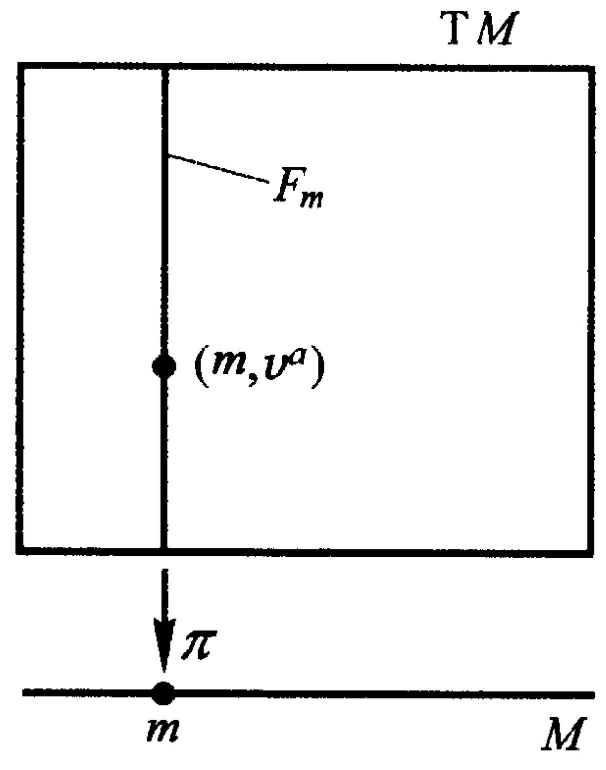


图 15-3　切丛示意

$$F_m\equiv\{(m,v^a)\mid v^a\in V_m\},$$

则 M 中每点的上方都有一段竖直线, 所有竖直线的并记作 TM . 设 $\{x^\mu\}$ 是 M 的一个坐标系(坐标域含 m), 则 m 点对应于 n 个坐标 $x^1,\cdots,x^n$, 且 v^a 也对应于 n 个实数 $v^\mu\equiv v^a(\mathrm{d}x^\mu)_a$. 以 (x^μ,v^μ) 作为点 (m,v^a) 的 $2n$ 个坐标便得 TM 的一个坐标系, 从而把 TM 定义成一个 $2n$ 维流形, 称为流形 M 的**切丛**(tangent bundle), 每一竖直线 F_m 称为一条纤维(fiber). 以上构造表明存在自然的投影映射 π : T$M\to M$, 满足 $\pi((m,v^a))=m$. 类似地不难理解 M 的余切丛(cotangent bundle) T^*M , 它在 m 点上方的纤维可表为

$$F_m^*\equiv\{(m,\omega_a)\mid\omega_a\in V_m^*\}.$$

切丛和余切丛都是**纤维丛**(fiber bundle)的特例(附录 I 对纤维丛理论有详细的讲述).

现在用几何语言表述拉氏和哈氏理论. 设$\mathscr{C}$是位形空间, T$\mathscr{C}$是其切丛, π : T$\mathscr{C}\to\mathscr{C}$是投影映射, 则任一$\sigma\in$T$\mathscr{C}$可表为$\sigma=(Q,v^a)$, 其中$Q\in\mathscr{C}$, $v^a\in V_Q$. 拉氏量L从一开始就被定义为T$\mathscr{C}$上的实函数(实标量场), 即L : T$\mathscr{C}\to\mathbb{R}$. 设$\{q^i\}$是$\mathscr{C}$的一个坐标系, 坐标域含Q, 则Q有N个坐标$q^1,\cdots,q^N$和N个坐标基矢$(\partial/\partial q^1)^a,\cdots,(\partial/\partial q^N)^a$, v^a有N个坐标分量$v^1,\cdots,v^N$, 于是$\sigma=(Q,v^a)$就可表为$\sigma=(q^i,v^i)$, 拉氏量L就可局域地表为$2N$元函数$L(q^i,v^i)$. 选定q^i后仍可任意指定v^i, 两者显然独立[此时尚无函数$q^i(t)$可言, 更谈不上v^i是$q^i(t)$的导数$\dot{q}^i$.] 以$O\subset$T$\mathscr{C}$代表坐标系$\{q^i,v^i\}$的坐标域, $\forall\sigma\in O$定义

$$p_i:=\ \partial L(q,v)/\partial v^i,$$

则不难证明(习题)当$\mathscr{C}$上有坐标变换$\{q^i\}\mapsto\{q'^i\}$时p_i按下式变换:

$$p'_j=(\partial q^i/\partial q'^j)p_i,$$

故σ点的N个实数$(p_1,\cdots,p_N)$构成点$Q=\pi(\sigma)$的一个余矢量$p_a\equiv p_i(\mathrm{d}q^i)_a\in V_Q{}^*$, 称为$\sigma$点的**动量**, 它与$\sigma=(Q,v^a)$中的$v^a$的缩并是实数, 所以T$\mathscr{C}$上有实标量场$p_av^a$, 它与实标量场$L$之差

$$\tilde{H}\equiv p_av^a-L \tag{15-3-1}$$

也是T$\mathscr{C}$上的实标量场, 其重要意义将在稍后揭示.

另一方面, 位形空间$\mathscr{C}$的余切丛T$^*\mathscr{C}$构成系统的相空间, 记作Γ. 任一$P\in\Gamma$可表为$P=(Q,\omega_a)$, 其中$Q\in\mathscr{C}$, $\omega_a\in V_Q{}^*$, 在$\mathscr{C}$选定坐标系$\{q^i\}$后又可记作

$$P=(q^i,\omega_i)\in\Gamma.$$

在拉氏量L选定后, 可以自然地定义映射f : T$\mathscr{C}\to\Gamma$如下: $\forall\sigma=(Q,v^a)\in$T$\mathscr{C}$, 定义$f(\sigma)$为

$$f(\sigma):=(Q,p_a),\quad 其中\ p_a 是\ \sigma\ 点的动量.$$

这一定义也可用坐标语言表述: $\forall\sigma=(q^i,v^i)$, 定义$f(\sigma)$为Γ中满足以下条件的点(q^i,ω_i):

$$q^i\,|_{f(\sigma)}=q^i\,|_\sigma,\qquad \omega_i\,|_{f(\sigma)}=p_i\,|_\sigma,\qquad i=1,\cdots,N. \tag{15-3-2}$$

这样定义的映射f : T$\mathscr{C}\to\Gamma$称为**Legendre 变换**, 是从拉氏形式过渡到哈氏形式的关键, 其表现及后果密切依赖于其雅可比矩阵$(\partial\omega_j/\partial v^i)=(\partial^2L/\partial v^jv^i)=(J_{ij})$的秩$Z$. 不难证明(习题)$J_{ij}$在坐标变换$\{q^i\}\mapsto\{q'^i\}$时按下式变换:

$$J'_{kl}=\frac{\partial q^i}{\partial q'^k}\frac{\partial q^j}{\partial q'^l}J_{ij},$$

因此构成点 $Q\equiv\pi(\sigma)$ 的一个 $(0,2)$ 型张量，即 $J_{ab}\equiv J_{ij}(\mathrm{d}q^i)_a(\mathrm{d}q^j)_b$，由此可知 Z 与坐标系无关．令 $J\equiv\det(J_{ij})$，若 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 的任一点都有 $J\neq 0$，则由反函数定理[见陈省身，陈维桓(1983)第一章定理3.1]可知 f 至少为局部一一映射，因而有局部逆 f^{-1}，所以有 $\varGamma$ 上的函数 $f^{-1*}\tilde{H}:\varGamma\to\mathbb{R}$，这就是无约束的情况(即 L 为正规的情况①)，$f^{-1*}\tilde{H}$ 就是前面定义的哈氏量 H．然而，如果 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 上任一点都有 $J=0$，则映射 $f:\mathrm{T}\mathscr{C}\to\varGamma$ 不是一一的，因而也不到上．这就是有约束(L 为非正规)的情况．$J=0$ 意味着 $Z<N$ (只讨论 Z 在 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 上为常数的情形)，由式(15-2-11)前一段可知 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 的任一点 σ 的 q^i 和 p_i 要满足 $M(\equiv N-Z)$ 个独立方程：

$$\phi_m(q^i,p_i)=0,\qquad m=1,\cdots,M,\tag{15-3-3}$$

于是式(15-3-2)要求 σ 的像点 $f(\sigma)$ 的 $2N$ 个坐标 q^i，ω_i 必须满足

$$\phi_m(q^i,\omega_i)=0,\qquad m=1,\cdots,M,\tag{15-3-4}$$

可见 f 把整个 $2N$ 维流形 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 映为 $\varGamma$ 中由式(15-3-4)定义的 $2N-M$ 维子流形 $\varGamma_1$，这正是初级约束面．f 无逆使 $\varGamma$ 上的哈氏量 H 的定义变得微妙，这时可以先借 $\tilde{H}:\mathrm{T}\mathscr{C}\to\mathbb{R}$ 和 $f:\mathrm{T}\mathscr{C}\to\varGamma$ 给 $\varGamma_1$ 定义一个“哈氏量”，再把定义域延拓至 $\varGamma$．$\forall P\in\varGamma_1=f[\mathrm{T}\mathscr{C}]$，$f^{-1}[P]\subset\mathrm{T}\mathscr{C}$ 可能含有不止一个弧连通分支(相应于 $J\neq 0$ 时 f 可能非整体一一的情形)，我们把讨论限制于 $f^{-1}[P]$ 只含一个弧连通分支的情况．设

$$(q^i,v_1^{\,i}),\ (q^i,v_2^{\,i})\in f^{-1}[P],$$

则 $f^{-1}[P]$ 的弧连通性保证存在曲线 $\beta:[0,1]\to f^{-1}[P]$ 使

$$\beta(0)=(q^i,v_1^{\,i}),\quad \beta(1)=(q^i,v_2^{\,i}),\quad \beta(s)=(q^i,v^i(s)),\quad \forall s\in[0,1].$$

作为 $f^{-1}[P]$ 的子集，曲线 $\beta(s)$ 上任一点 (q^i,v^i) 的 p_i 满足 $p_i\,|_{\beta(s)}=\omega_i\,|_P$，故

$$\tilde{H}(q,v_2)-\tilde{H}(q,v_1)=\omega_i\,|_P\,(v_2^{\,i}-v_1^{\,i})-L(q,v_2)+L(q,v_1).\tag{15-3-5}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}L(q,v_2)-L(q,v_1)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(q,v(s))\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{\partial}{\partial v^i}L(q,v(s))\frac{\mathrm{d}v^i(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 p_i(\beta(s))\mathrm{d}v^i=\omega_i\,|_P\,(v_2^{\,i}-v_1^{\,i}),\end{aligned}$$

① L 称为超正规的(hyperregular)，若 $f:\mathrm{T}\mathscr{C}\to\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 是微分同胚．[见，例如，Marsden and Ratiu(1994).]

代入式(15-3-5)得 $\tilde{H}(q,v_2)-\tilde{H}(q,v_1)=0$，可见 $\tilde{H}|_{f^{-1}[P]}=$常数. 因此 $\tilde{H}$ ：$\mathrm{T}\mathscr{C}\to\mathbb{R}$ 自然诱导出 $\varGamma_1$ 上的函数 H ：$\varGamma_1\to\mathbb{R}$，其定义为

$$H(P):=\tilde{H}|_\sigma,\quad \forall P\in\varGamma_1,\ 其中\ \sigma\in\mathrm{T}\mathscr{C}\ 满足\ f(\sigma)=P. \tag{15-3-6}$$

稍后再介绍如何把 H 的定义域从 $\varGamma_1$ 拓展为 $\varGamma$.

以上是数学框架，现在注入物理内容，即说明如何用于描述物理系统的动力学演化.

先讨论拉氏形式. 设 Q 是 $\mathscr{C}$ 中曲线 $\eta(t)$ 的一点，v^a 是曲线在 Q 点的切矢，则 $(Q,v^a)\in\mathrm{T}\mathscr{C}$，而且 $\pi(Q,v^a)=Q\in\mathscr{C}$. 假定 $\eta(t)$ 躺在某坐标系 $\{q^i\}$ 的坐标域内，则 $\eta(t)$ 可用参数式 $q^i(t)$ 表出，而线上任一点 $q^i(t)$ 的切矢的分量便是 $\dot{q}^i(t)$，所以曲线 $\eta(t)$ 自然给出 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 中的一条曲线 $(q^i(t),\dot{q}^i(t))$，不妨称之为 $\eta(t)$ 的提升曲线，并记作 $\tilde{\eta}(t)$. 如果 $\eta(t)$ 是 $\mathscr{C}$ 中描述系统演化的曲线(简称为 $\mathscr{C}$ 中的演化线，即正路)，则 $\tilde{\eta}(t)$ 也可称为 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 中的演化线. 于是拉氏理论的基本命题可以表为：$\mathrm{T}\mathscr{C}$ 中的曲线 $(q^i(t),v^i(t))$ 是演化线当且仅当①对每一 t 值有 $v^i(t)=\dot{q}^i(t)$；②满足拉氏方程：

$$\frac{\partial}{\partial q^i}L(q(t),v(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v^i}L(q(t),v(t))=0,\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-3-7}$$

条件①保证 $(q^i(t),v^i(t))$ 是 $\mathscr{C}$ 中某线 $\eta(t)$ 的提升曲线；条件②保证 $\eta(t)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的演化线(正路). 上述讨论清楚地表明：拉氏量 $L(q^i,v^i)$ 的两组宗量 q^i 和 v^i 本来就是独立的，只当涉及 $\mathscr{C}$ 中曲线的提升曲线时才有 $v^i(t)=\dot{q}^i(t)$，而此时的 $v^i(t)$ [作为 $q^i(t)$ 的导函数]当然不再独立于 $q^i(t)$.

再讨论哈氏形式. 设 $\tilde{\eta}(t)\subset T\mathscr{C}$ 是演化线，则无论有无约束，$\gamma(t)\equiv f(\tilde{\eta}(t))$ 都是 $\varGamma_1$ 上的曲线(无约束时 $\varGamma_1=\varGamma$)，而且重复小节15.2.2的推导过程便可证明它服从哈氏方程(15-2-19). 但存在一个问题：方程涉及 H 对所有 p_i 的偏导数 $\partial H/\partial p_i$，而 H 只是 $\varGamma_1$ 上的函数，有些 $\partial H/\partial p_i$ 并无意义. 解决的办法是把 H ：$\varGamma_1\to\mathbb{R}$ 任意延拓为 $\varGamma$ 上的哈氏量 H ：$\varGamma\to\mathbb{R}$. 然而，设 H 和 H' 是两个不同延拓，则 $\partial H/\partial p_i|_{\varGamma_1}$ 未必等于 $\partial H'/\partial p_i|_{\varGamma_1}$，由哈氏方程岂非得出不同的 $\dot{q}^i$？答案是否定的，理由是：设 $H''\equiv H'-H$，则 $\nabla_A H''|_{\varGamma_1}$ 是 $\varGamma_1$ 的法余矢，于是 $\varGamma_1$ 上存在函数 μ^m $(m=1,\cdots,M)$ 使

$$\nabla_A H''=\mu^m\nabla_A\phi_m,$$

用对偶坐标基底展开并比较系数便得

$$\frac{\partial H''}{\partial q^i}=\mu^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i},\qquad \frac{\partial H''}{\partial p_i}=\mu^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i},$$

所以

$$\frac{\partial H'}{\partial q^i}=\frac{\partial H}{\partial q^i}+\mu^m\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \qquad \frac{\partial H'}{\partial p_i}=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\mu^m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i},$$

由此可知 $(q^i(t), p_i(t), \lambda^m(t))$ 是方程

$$\dot q^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\lambda^m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}-\lambda^m\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}$$

的解当且仅当 $(q^i(t), p_i(t), \lambda'^m(t))$ [其中 $\lambda'^m(t)\equiv\lambda^m(t)+\mu^m(t)$]是方程

$$\dot q^i=\frac{\partial H'}{\partial p_i}+\lambda'^m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i=-\frac{\partial H'}{\partial q^i}-\lambda'^m\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}$$

的解. 注意到一组 $(q^i(t), p_i(t))$ 对应于一条演化线, 可知: 无论以 H 还是 H' 为哈氏量, 各种可能的演化线构成的集合 $\{q^i(t), p_i(t)\}$ 一样, 唯一区别只在于线上的函数 $\lambda^m(t)$ 可不同于 $\lambda'^m(t)$.

以上讨论表明哈氏量 H (作为 Γ 上的函数)的定义有很大的规范自由性. 本书的做法是允许 $H:\Gamma\to\mathbb{R}$ 为 $H:\Gamma_1\to\mathbb{R}$ 的任意延拓[与 Dirac(1964) 实质一致], 而 Sudarshan and Mukunda(1974) 则对延拓方式有所限制. 该书的实质是: 首先论述 $\tilde H\equiv p_i\dot q^i-L(q,\dot q)$ 仅是 N 个 q^i 和 $Z\ (<N)$ 个 p_i 的函数, 即

$$\tilde H=\tilde H(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_Z), \tag{15-3-8}$$

再用下式定义一个 $2N$ 元函数 $\tilde H'(q^i,p_i)$:

$$\tilde H'(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_Z,\underbrace{p_{Z+1},\cdots,p_N}_{\text{无论取何值}}):=\tilde H(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_Z), \tag{15-3-9}$$

最后定义哈氏量 H 为 Γ 上满足如下条件的函数:

$$H|_{\Gamma_1}=\tilde H'|_{\Gamma_1} \text{ 且 } \nabla_A H|_{\Gamma_1}=\nabla_A\tilde H'|_{\Gamma_1}. \tag{15-3-10}$$

可见它的哈氏量的自由范围比本书的要窄. 此外, 该书对初级约束函数 ϕ_m 的选择也做了规范固定, 基本思路是: 由矩阵 $\partial^2 L/\partial\dot q^i\partial\dot q^j$ 的秩为 $Z<N$ 出发说明 $2N$ 个 q^i, p_i 之间存在 $M\ (\equiv N-Z)$ 个关系式:

$$\Omega_m(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_N)=0, \qquad m=1,\cdots,M, \tag{15-3-11}$$

由此可把与“不可反解”的 M 个 $\dot q^m$ 对应的 M 个 p_m 表为 N 个 q 和 Z 个 p 的函数:

$$p_m=\psi_m(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_Z), \tag{15-3-12}$$

再定义初级约束函数 ϕ_m 为

$$\phi_m := p_m - \psi_m(q^1,\cdots,q^N,p_1,\cdots,p_Z),\quad m=1,\cdots,M. \tag{15-3-13}$$

这种对初级约束函数的特定选法配以 H 的特定定义[式(15-3-10)]导致一个后果: M 个拉氏乘子 $\lambda^m(t)$ 恰等于系统的 M 个不能被"反解"的广义速度 $\dot{q}^m(t)$.

借助几何语言的上述讨论使我们对位形空间 $\mathscr{C}$ 的切丛 $T\mathscr{C}$ 和余切丛 $T^*\mathscr{C}$ (即相空间 Γ)的区别和联系有了更为清晰的了解. 反观式(15-2-19)的推导, 发现存在某些含糊之处有待澄清. 该段先从式(15-2-2′)与(15-2-7)的比较出发得出下式[原编号为(15-2-12)]:

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i = 0. \tag{15-3-14}$$

现在要提出两点质疑. 首先, 式(15-2-2′)来自式(15-2-2), 后者中的 H (即 $p_i\dot{q}^i - L$)其实是 $\tilde{H}$, 所以式(15-2-2′)是 $T\mathscr{C}$ 上的(对偶矢量场)等式; 然而式(15-2-7)却是 $\Gamma \equiv T^*\mathscr{C}$ 上的等式(式中的 p_i 按本节的符号应改为 ω_i). 从这两个在不同流形上成立的等式如何得出 Γ 上的等式(15-2-12)(式中的 p_i 也应改为 ω_i)?其次, 式(15-2-12)中的 $\dot{q}^i$ 应如何理解(须知 $\dot{q}^i$ 并非 Γ 或 Γ_1 上的函数)?回答这些质疑的关键是 Legendre 变换式(15-3-2). 注意到 $p_i := \partial L(q,v)/\partial v^i$, 由 $\tilde{H} := p_i v^i - L(q,v)$ 得

$$\mathrm{d}\tilde{H} = v^i \mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i. \tag{15-3-15}$$

另一方面, 由 $\tilde{H}$ 与 H 的关系式 $\tilde{H} = f^*H$ 又得 $\mathrm{d}\tilde{H} = f^*(\mathrm{d}H)$. 而 H 是 Γ 上的标量场, 可表为 $q^1,\cdots,q^N;\omega_1,\cdots,\omega_N$ 的 $2N$ 元函数 $H(q,\omega)$, 于是

$$\mathrm{d}\tilde{H} = f^*\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}\omega_i\right] = f^*\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}(f^*q^i) + f^*\left(\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}(f^*\omega_i)$$

$$= f^*\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i + f^*\left(\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}p_i, \tag{15-3-16}$$

其中最末一步是因为式(15-3-2)导致

$$f^*q^i = q^i \quad 和 \quad f^*\omega_i = p_i. \tag{15-3-17}$$

对比式(15-3-15)和(15-3-16)得

$$\left(v^i - f^*\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} + f^*\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i = 0. \tag{15-3-18}$$

把讨论限制在演化线 $\eta(t)\subset\mathscr{C}$, $\tilde{\eta}(t)\subset T\mathscr{C}$ 和 $\gamma(t) = f[\tilde{\eta}(t)]\subset\Gamma_1$ 上, 则 $\dot{q}^i(t)$ 有意义,

而且由式(15-3-6)后面"注入物理内容"一段可知$\forall\sigma\in\tilde{\eta}(t)$有$v^i(t)=\dot{q}^i(t)$以及

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_i\,,\qquad \text{[来自拉氏方程(15-3-7)]}$$

故由式(15-3-18)得

$$\left.\left[\left(\dot{q}^i-f^*\frac{\partial H}{\partial\omega_i}\right)\mathrm{d}p_i-\left(\dot{p}_i+f^*\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i\right]\right|_\sigma=0,\quad \forall\sigma\in\tilde{\eta}(t)\,. \tag{15-3-19}$$

由式(15-3-17)又可求得$\mathrm{d}q^i=\mathrm{d}(f^*q^i)=f^*\mathrm{d}q^i$及$\mathrm{d}p_i=\mathrm{d}(f^*\omega_i)=f^*\mathrm{d}\omega_i$. 因为$(f^*\mathrm{d}q^i)|_\sigma$和$(f^*\mathrm{d}\omega_i)|_\sigma$都是$\sigma$点的对偶矢量, 所以式(15-3-19)在补上抽象指标A后可表为

$$\left[\left(\dot{q}^i-f^*\frac{\partial H}{\partial\omega_i}\right)(f^*\mathrm{d}\omega_i)_A-\left(\dot{p}_i+f^*\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(f^*\mathrm{d}q^i)_A\right]_\sigma=0\,. \tag{15-3-20}$$

上式左边是σ点的零对偶矢量, 它作用于任一$u^A\in V_\sigma$得零:

$$\left[\left(\dot{q}^i-f^*\frac{\partial H}{\partial\omega_i}\right)(f^*\mathrm{d}\omega_i)_A-\left(\dot{p}_i+f^*\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(f^*\mathrm{d}q^i)_A\right]_\sigma u^A=0\,. \tag{15-3-21}$$

由式(15-3-2)及$\gamma(t)\equiv f(\tilde{\eta}(t))$可知$\dot{q}^i|_\sigma=\dot{q}^i|_{f(\sigma)}$, $\dot{p}_i|_\sigma=\dot{\omega}_i|_{f(\sigma)}$, 再由函数的拉回映射$f^*$的定义得$(f^*\partial H/\partial q^i)|_\sigma=(\partial H/\partial q^i)|_{f(\sigma)}$和$(f^*\partial H/\partial\omega_i)|_\sigma=(\partial H/\partial\omega_i)|_{f(\sigma)}$, 于是式(15-3-21)又可改写为(从而把T$\mathscr{C}$上的等式变成$\Gamma_1$上的等式)

$$\left[\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial\omega_i}\right)(\mathrm{d}\omega_i)_A-\left(\dot{\omega}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(\mathrm{d}q^i)_A\right]_{f(\sigma)}(f_*u)^A=0\,. \tag{15-3-22}$$

以$W_{f(\sigma)}$代表$V_{f(\sigma)}$中切于Γ_1的元素构成的子空间, 则u^A跑遍V_σ导致$(f_*u)^A$跑遍$W_{f(\sigma)}$, 故上式表明方括号内的对偶矢量是Γ_1在点$f(\sigma)$的法余矢, 因而$\exists\lambda^m(t)$使

$$\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial\omega_i}\right)(\mathrm{d}\omega_i)_A-\left(\dot{\omega}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(\mathrm{d}q^i)_A=\lambda^m(t)\nabla_A\phi_m\,.$$

这其实就是式(15-2-18)中$\xi_A=\lambda^m\nabla_A\phi_m$的准确化, 于是就有式(15-2-19).

15.3.2 从拉氏角度看约束

本小节简要介绍笔者用几何语言从拉氏角度研究约束的某些结果.

无论从哈氏角度看来是否存在约束, 只要N个位形变量$q^1,\cdots,q^N$完全独立

(就是说没有完整约束), 由小节15.1.1便知系统的演化必定服从拉氏方程(15-1-5). 或者说, 演化可由T$\mathscr{C}$ 中的演化曲线 $\tilde{\eta}(t)\equiv(q^i(t),v^i(t))$ 描述, 它满足拉氏方程(15-3-7), 其中 $v^i(t)=\dot{q}^i(t)$. 再令 $A^i(t)\equiv\dot{v}^i(t)$(加速度), 则拉氏方程可重新表述为

$$A^j\frac{\partial^2L}{\partial v^i\partial v^j}+v^j\frac{\partial^2L}{\partial v^i\partial q^j}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-3-23}$$

注意到 $J_{ij}\equiv\partial^2L/\partial v^i\partial v^j$, 令 $C_i\equiv\partial L/\partial q^i-v^j\partial^2L/\partial v^i\partial q^j$, 则拉氏方程又可表为

$$J_{ij}A^j=C_i,\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-3-24}$$

如前所述, 系统存在哈氏初级约束当且仅当 $J\equiv\det(J_{ij})=0$. 虽然初级约束在 $\Gamma\equiv\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 中划出了维数较低的子流形 Γ_1, 在T$\mathscr{C}$ 中却并不划出与 Γ_1 对应的"初级约束面". 事实上, Legendre 变换把整个T$\mathscr{C}$ 变为 Γ_1. 约束的存在当然也会使系统在T$\mathscr{C}$ 中的表现与正规系统不同, 现在探讨这些表现. 设 $\tilde{\eta}(t)$ 是起自 $\sigma\in\mathrm{T}\mathscr{C}$ 的一条演化线["起自 σ"是指 $\tilde{\eta}(0)=\sigma$], 把方程(15-3-24)用于 $t=0$ 得

$$J_{ij}|_\sigma A^j|_\sigma=C_i|_\sigma,\quad i=1,\cdots,N. \tag{15-3-25}$$

若 $J|_\sigma\neq0$, 则借用 $(J_{ij})|_\sigma$ 的逆矩阵 $(J^{-1})^{ij}|_\sigma$ 可求得 $A^i|_\sigma$ 的唯一解

$$A^i|_\sigma=(J^{-1})^{ij}|_\sigma C_j|_\sigma,\quad i=1,\cdots N. \tag{15-3-26}$$

如果T$\mathscr{C}$ 上处处 $J\neq0$(无约束情况), 则坐标域 $O\subset\mathrm{T}\mathscr{C}$ 内的每点 σ 有确定的 A^i, 故T$\mathscr{C}$ 上局域存在 N 个函数 $A^i(i=1,\cdots,N)$, 借此可在T$\mathscr{C}$ 上定义一个**演化矢量场**

$$Y^a:=v^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A+A^i\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)^A, \tag{15-3-27}$$

其积分曲线族就是演化曲线族. 然而, 如果T$\mathscr{C}$ 上处处 $J=0$(有约束情况), 则 $Z<N$(只讨论 Z 在T$\mathscr{C}$ 上为常数的情形), 故与式(15-3-25)相应的齐次方程组 $J_{ij}|_\sigma A^j|_\sigma=0$ 有 $S\equiv N-Z$ 个线性独立解, 即存在 $N-Z$ 个非零的 $\beta_{(s)}{}^i|_\sigma$ 使

$$(\beta_{(s)}{}^iJ_{ij})|_\sigma=0,\quad s=1,\cdots,N-Z,$$

与式(15-3-25)结合给出 $\beta_{(s)}{}^iC_i=0,\ s=1,\cdots,N-Z$. 此式左边是 $O\subset\mathrm{T}\mathscr{C}$ 上的函数, 令 $\mu_s(q,v)\equiv\beta_{(s)}{}^iC_i$, 则

$$\mu_s(q,v)=0,\quad s=1,\cdots,N-Z. \tag{15-3-28}$$

T$\mathscr{C}$ 中不满足上式的点不会有演化曲线经过(因为演化曲线经过的点都满足上式), 可见T$\mathscr{C}$ 中存在约束[除非 $\mu_s(q,v)$ 处处自动为零(对所有 s)]. 从哈氏角度看,

这既可能对应于哈氏次级约束(如习题1和2)，也可能对应于其他情况(例如习题3). 事实上，哈氏次级约束一定表现为T$\mathscr{C}$中的约束. 然而，即使系统从哈氏角度看来只有初级约束而无次级约束(即$\bar{\Gamma}=\Gamma_1$)，从拉氏角度看来在T$\mathscr{C}$中也一定存在约束(例如习题3)，可见T$\mathscr{C}$中的约束未必与哈氏次级约束对应. 与Γ中的约束类似，T$\mathscr{C}$中的约束也应满足自洽性条件，即$\dot{\mu}_s(q(t),v(t))$必须为零[$\mu_s(q(t),v(t))$是函数$\mu_s(q,v)$与演化线$\tilde{\eta}(t)\equiv(q^i(t),v^i(t))$结合而得的一元函数]. μ_s(以下简记作μ)不含v^i的约束$\mu(q)=0$称为 A **型约束**，否则称为 B 型. 线性独立解$\beta_{(s)}{}^i$的选择有相当的自由性，不同选法可以导致A型约束的数目不同，我们约定取这样的选择，使A型约束的数目最大. A型约束函数$\mu(q)$的时间导数$\dot{\mu}(q,v)$仍是T$\mathscr{C}$上的函数，因而$\dot{\mu}_s(q,v)=0$给出进一步的约束. B型约束函数$\mu(q,v)$的时间导数$\dot{\mu}_s(q,v,A)$含有A^i，故$\dot{\mu}(q,v,A)=0$不是约束而是关于A^i的方程，应该与拉氏方程(15-3-24)联立求解. 新约束也应满足自洽性条件，因而还可能导致进一步的约束. 以$\bar{S}\subset$T$\mathscr{C}$代表最终约束面，则①$\bar{S}$是T$\mathscr{C}$的某个子集；②$\sigma\in$T$\mathscr{C}$有演化线经过当且仅当$\sigma\in\bar{S}$；③$f[\bar{S}]=\bar{\Gamma}$.

前已述及，无约束时过任一$\sigma\in$T$\mathscr{C}$的演化线不但存在而且唯一，它无非是演化矢量场Y^a过σ的积分曲线. 然而，约束的存在不仅使T$\mathscr{C}$的某些点没有演化线经过，而且导致过$\sigma\in\bar{S}$的演化线可能不止一条. 设$\tilde{\eta}(t)$和$\tilde{\eta}'(t)$都是起自$\sigma\in\bar{S}$的演化线，它们在σ点的加速度分别是$A^i|_\sigma$和$A'^i|_\sigma$，则由式(15-3-25)得

$$[J_{ij}(A'^j-A^j)]|_\sigma=0,\qquad j=1,\cdots,N. \tag{15-3-29}$$

当$J|_\sigma=0$时$(A'^j-A^j)|_\sigma=0$可以有非零解，于是$\bar{S}$上可能存在无数个演化矢量场.

约束系统哈氏理论的一个重要概念是拉氏乘子$\lambda^m(t)$. 它一开始就是作为t的函数引入的，一般不是Γ_1上的函数. 如果指定$P\in\bar{\Gamma}$，则在某些情况下P点的λ^m被完全确定，在某些情况下它(们)又完全自由，此外还有更多更复杂的居中情况. 这些扑朔迷离的表现使λ^m不容易被把握. 然而，如果从T$\mathscr{C}$与Γ的关系的角度考察，这些表现就较为容易理解. 这里的一个关键结论是：λ^m可被视为$\bar{S}\subset$T$\mathscr{C}$上的函数. 讨论如下.

由$f[\bar{S}]=\bar{\Gamma}$可知$\forall P\in\bar{\Gamma}$，$\exists\sigma\in\bar{S}$使$f(\sigma)=P$. 设Y^A是T$\mathscr{C}$上的一个演化矢量场，则f_*把$Y^A|_\sigma$变为$f(\sigma)$点的矢量$Z^A\equiv f_*(Y^A|_\sigma)$，而且

$$Z^A=v^i|_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A\Bigg|_{f(\sigma)}+\left(A^jJ_{ji}+v^j\frac{\partial^2L}{\partial q^j\partial v^i}\right)\Bigg|_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\omega_i}\right)^A\Bigg|_{f(\sigma)}. \tag{15-3-30}$$

为证明上式，只须验证两边作用于$(\mathrm{d}q^i)_A|_{f(\sigma)}$及$(\mathrm{d}\omega_i)_A|_{f(\sigma)}$分别给出相同结果.

以 Y'^A 代表 T$\mathscr{C}$ 上的另一演化矢量场，$Z'^A \equiv f_*(Y'^A|_\sigma)$，则由式(15-3-30)及(15-3-29)得

$$Z'^A - Z^A = [(A'^j - A^j)J_{ji}]|_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \omega_i}\right)^A\Bigg|_{f(\sigma)} = 0,$$

可见过 σ 的所有演化线的切矢 Y^A 在 f_* 下有相同的像 Z^A. 注意到 $\gamma(t) = f[\tilde{\eta}(t)]$ 是 $\bar{\Gamma}$ 上与 $\gamma(t) = f[\tilde{\eta}(t)]$ 相应的、过 $f(\sigma)$ 的演化线，便知 Z^A 是 $\gamma(t)$ 在 $f(\sigma)$ 点的切矢. σ 点的所有 Y^A 的像 Z^A 相同并不意味着 $\bar{\Gamma}$ 上过 $f(\sigma)$ 的演化线只有一条，因为有约束时起自 P 的、以 Z^A 为切矢的演化线未必唯一，而且 $f(\sigma)$ (作为 $\bar{\Gamma}$ 的独点子集)的逆像 $f^{-1}[f(\sigma)]$ 未必是 $\bar{S}$ 的独点子集. 设 $\exists\hat{\sigma} \in \bar{S}$ 使 $f(\hat{\sigma}) = f(\sigma)$，则过 $\hat{\sigma}$ 点的所有演化线在 $\hat{\sigma}$ 的切矢 $Y^A|_{\hat{\sigma}}$ 的像为

$$\hat{Z}^A = v^i|_{\hat{\sigma}} \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A\Bigg|_{f(\sigma)} + \left(A^j J_{ji} + v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\right)\Bigg|_{\hat{\sigma}} \left(\frac{\partial}{\partial \omega_i}\right)^A\Bigg|_{f(\sigma)},$$

只要 $\hat{\sigma} \neq \sigma$，就不会有 $v^i|_{\hat{\sigma}} = v^i|_\sigma\ (i = 1, \cdots, N)$，故 $\hat{Z}^A \neq Z^A$. 为了弄清有关问题，应当弄清 $P \in \bar{\Gamma}$ (作为独点子集)的逆像 $f^{-1}[P]$ 是个怎样的子集. 设 $\sigma \in f^{-1}[P]$，$\hat{\sigma}$ 是与 σ "无限邻近"的点，则

$$\hat{\sigma} \in f^{-1}[P] \quad\Leftrightarrow\quad q^i|_{\hat{\sigma}} = q^i|_\sigma \text{ 和 } p_i|_{\hat{\sigma}} = p_i|_\sigma .$$

如果 D^A 是从 σ "指向" $\hat{\sigma}$ 的矢量，则上式右边两条件可分别表为 $D^A \nabla_A q^i = 0$ 和 $D^A \nabla_A p_i = 0$. 把 D^A 写成坐标分量展开式：

$$D^A = D^j \left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)^A + \tilde{D}^j \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^A,$$

则条件 $D^A \nabla_A q^i = 0$ 等价于 $\tilde{D}^j = 0$，于是条件 $D^A \nabla_A p_i = 0$ 等价于

$$0 = D^j \left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)^A \nabla_A \frac{\partial L}{\partial v^i} = J_{ij} D^j . \qquad (15\text{-}3\text{-}31)$$

现在把上述直观思考准确化. $\forall \sigma \in$ T$\mathscr{C}$，用下式定义 σ 的切空间 V_σ 的一个子空间：

$$\mathscr{D}_\sigma := \{D^A \in V_\sigma \mid D^A = D^j (\partial/\partial v^j)^A,\ J_{ij} D^j = 0\},^{①} \qquad (15\text{-}3\text{-}32)$$

① 虽然此定义借用了坐标系，但不难证明(习题)定义出的 $\mathscr{D}_\sigma$ 与坐标系无关.

则 2N 维流形 T$\mathscr{C}$ 上有一个 $N-Z$ 维的子空间场，亦称 $N-Z$ 维分布(见中册附录 F)，记作 $\mathscr{D}$．不难验证 $\mathscr{D}$ 满足命题 F-1 的条件，因而可积，就是说，$\forall\sigma\in\mathrm{T}\mathscr{C}$，有 T$\mathscr{C}$ 的一个含 σ 的 $N-Z$ 维子流形 $\mathscr{S}_\sigma$，其任一点 ρ 的、切于 $\mathscr{S}_\sigma$ 的切空间与 $\mathscr{D}_\rho$ 重合．$\mathscr{S}_\sigma$ 称为 $\mathscr{D}$ 的一个积分子流形，其重要性在于 $\forall\sigma\in\mathrm{T}\mathscr{C}$ 有 $f^{-1}[f(\sigma)]=\mathscr{S}_\sigma$．于是我们弄清了任一 $P\in\bar{\Gamma}$ 的逆像 $f^{-1}[P]$ 是个怎样的子集：它无非是 $\mathscr{D}$ 的、过某点 σ [满足 $f(\sigma)=P$]的那个积分子流形 $\mathscr{S}_\sigma$ (即 $f^{-1}[P]=\mathscr{S}_\sigma$)，原则上可由 $\mathscr{D}$ 的定义出发计算．

$\forall\sigma\in\bar{S}$，有 $f(\sigma)\in\bar{\Gamma}$．起自 σ 的所有演化曲线在 σ 的切矢 $Y^A|_\sigma$ 在 f_* 下的像是同一矢量 Z^A．设 $\gamma(t)$ 是起自 $f(\sigma)$ 的任一演化曲线，其在点 $f(\sigma)$ 的切矢为 Z^A．上小节末已证明存在 M 个一元函数 $\lambda^m(t)$ 使 $\gamma(t)$ 的方程可表为式(15-2-19)，该式在 $t=0$ 取值后也可改写为点 $f(\sigma)$ 的一个矢量等式：

$$Z^A=X_H{}^A|_{f(\sigma)}+\lambda^m(0)X_m{}^A|_{f(\sigma)}, \tag{15-3-33}$$

其中 $X_H{}^A$ 和 $X_m{}^A$ 的定义见式(15-2-32)和(15-2-33)．设 $\gamma'(t)$ 是起自 $f(\sigma)$ 的另一演化曲线，在点 $f(\sigma)$ 的切矢也是 Z^A．由于式(15-3-22)中的 $(\dot{q}^i-\partial H/\partial\omega_i)|_{f(\sigma)}$ 以及 $(\dot{\omega}_i-\partial H/\partial q^i)|_{f(\sigma)}$ 对两线一样[只取决于点 $f(\sigma)$]，由该式便知两线的 $\lambda^m(0)$ 相同．所以，指定 $\sigma\in\bar{S}$ 后就可通过

$$Y^A|_\sigma\xrightarrow{f_*}Z^A\xrightarrow{(15\text{-}3\text{-}33)}\lambda^m(0)\quad(\text{简记作 }\lambda^m)$$

获得一组 λ^m，于是可视 λ^m 为 $\bar{S}$ 上的 M 个函数(标量场)．请注意 λ^m 不能看作 $\bar{\Gamma}$ 上的函数，因为任一 $P=f(\sigma)$ 虽可通过“继承” σ 点的 λ^m 值而获得一组 λ^m，但 $f^{-1}[P]$ 未必是独点子集，其不同点不会有全同的 v^i，再由式(15-3-30)及(15-3-33)便知不会有全同的 λ^m．由于只关心 $\bar{S}\subset\mathrm{T}\mathscr{C}$ 和 $\bar{\Gamma}\subset\Gamma$，所以可把 f 的定义域限制于 $\bar{S}$．等式 $f[\bar{S}]=\bar{\Gamma}$ 表明映射 $f:\bar{S}\to\bar{\Gamma}$ 是到上的，但却未必一一，因为现在有 $f^{-1}[P]=\mathscr{S}_\sigma\cap\bar{S}$．这正是哈氏理论中 λ^m 问题复杂性的重要根源．我们不拟深入探讨全部细节，只想对两种重要又较简单的情况用拉氏观点(强调 λ^m 是 $\bar{S}$ 上的函数)作出解释．第一种是 $\det(\varPhi_{mn})\neq 0$ 的情况，这时 $\bar{\Gamma}$ 上每点 P 有一组确定的 λ^m，因此有唯一的演化线 $\gamma(t)$ 经过 P 点(哈氏理论的已有结论)．从拉氏角度看，这是因为在这种情况下 $f:\bar{S}\to\bar{\Gamma}$ 是一一映射，每点 $P\in\bar{\Gamma}$ 由于继承了它的唯一逆像点 $f^{-1}[P]$ 的 λ^m 而获得确定的 λ^m 值(见习题 2 和 3)．第二种情况是所有(M 个)初级约束都属于第一类，这时 $\bar{\Gamma}$ 的每点 P 的全部(M 个) λ^m 完全自由．从拉氏角度看，这是因为在这种情况下 $f:\bar{S}\to\bar{\Gamma}$ 并非一一映射，而且子集 $f^{-1}[P]$ 的所有点的 λ^m

构成一个 M 维仿射空间[每点的 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^M)$ 是此空间的一个元素](例如习题1)(仿射空间与线性空间在定义上的唯一区别就是它没有特定的零元). 总之, 拉氏理论强调 λ^m 是 $\overline{S}$ 上的函数, λ^m 在哈氏理论中的复杂性在相当程度上来自 $f: \overline{S}\to\overline{\Gamma}$ 的非一一性.

本节用几何语言对拉氏和哈氏理论作了一定程度的重新表述, 主要目的之一是澄清本节开头提出的几个问题. 我们只限于讨论有限维位形空间和相空间. 然而, 只要涉及经典场(本章实际关心的正是电磁场和引力场), 就必然遇到无限维位形空间和相空间, 问题就变得复杂. 仿照 Dirac , 我们将把有限维的理论直接用到电磁场和引力场而不过多地涉及可能存在的数学严格性问题. 此处只想指出, 数十年来借助于几何语言所做的研究已经(或正在)建立起越来越严格(和深入)的有关理论. 对 Dirac-Bergmann 理论的几何语言再表述的早期代表作也许要数 Gotay, Nester, and Hinds(1978) 及其姐妹篇. 据笔者所知, 这也许是有 Dirac-Bergmann 理论以来首次出现的既正确又优雅的用整体微分几何语言对该理论的再表述和推广, 从这一高度看来, Dirac-Bergmann 理论无非是它的一个局域表现. Dirac-Bergmann 理论还存在某些深层次的理论问题, 例如拉氏方程与哈氏方程的等价性问题. 这一等价性对无约束系统毫无疑问(至少局域地说), 但对约束系统则变得微妙. (本节的讨论证明了拉氏方程的解是哈氏方程的解, 但对逆命题并未涉及.)长期以来人们默认这一等价性成立, 但似乎无人给出过严格证明. Gotay 等. (1998)首次对这一问题(以及一系列相关问题)做了深入探讨, 明确指出并证明了如下结论: 只要系统满足某些正规性条件[物理上有兴趣的许多系统(包括电磁场和引力场)都满足这些条件], 则拉氏方程与哈氏方程等价, 即: 拉氏方程的解对应于哈氏方程的解, 反之亦然. 该文对带约束的经典场论的拉氏和哈氏结构做了空前深入的研究, 提出了**能动量映射**(energy-momentum map)这一重要概念, 从而在有关领域中带来重大进展.

§15.4　经典场论的哈氏形式

15.4.1　哈氏理论离不开 3+1 分解

由 §15.1 可知拉氏理论是明显的 4 维协变理论, 不必对时空作 3+1 分解. 反之, 哈氏理论从一开始就把时间 t 放在特殊地位(见 §15.2), 而相对论中不存在绝对时间, 所以要把 4 维时空的场论改铸成哈氏形式必须先选择一个对时空的 3+1 分解. 中册 §14.4 已为此打下基础, 而本章对哈氏场论的讨论则反过来为 §14.4 展示一个重要的应用实例. 对闵氏时空, 通常采用最简单、物理意义最明晰的标准 3+1 分解. 对整体双曲的弯曲时空, 通常选择单参类空柯西面族 $\{\Sigma_t\}$ 为分层面, 并任意选择一个类时矢量场 t^a, 其积分曲线与各 Σ_t 的交点被视为“同一空间点”. 时空度规场

g_{ab} 在每一 Σ_t 上诱导出空间度规场 h_{ab}，用以描述空间几何. 哈氏场论涉及许多函数的积分, 为此应事先指定体元. 按照习惯, 计算函数在 M 上的积分时通常都用与 g_{ab} 适配的体元 ε_{abcd}，计算函数在 Σ_t 上的积分时则用与 h_{ab} 适配的体元 ${}^3\varepsilon = n^a\varepsilon_{abcd}$ (其中 n^a 是 Σ_t 的单位法矢). 然而现在出现这样一个问题: $\mathscr{L}_t\varepsilon_{abcd}$ 和 $\mathscr{L}_t{}^3\varepsilon_{abc}$ 未必为零. 例如, 对空间平直的 RW 时空有

$$\varepsilon = a^3(t)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \qquad \text{和} \qquad {}^3\varepsilon = a^3(t)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\,,$$

选 $t^a = (\partial/\partial t)^a$, 则

$$\mathscr{L}_t\varepsilon = 3\,a^2\dot{a}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \neq 0 \quad \text{和} \quad \mathscr{L}_t{}^3\varepsilon = 3\,a^2\dot{a}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \neq 0\,.$$

由于空间张量场 $T^a{}_b$ 沿 t^a 的李导数(的投影, 即 $\tilde{\mathscr{L}}_t T^a{}_b$)可解释为 $T^a{}_b$ 的时间导数 $\dot{T}^a{}_b$ (见小节14.4.5), $\mathscr{L}_t{}^3\varepsilon \neq 0$ (更准确地是 $\tilde{\mathscr{L}}_t{}^3\varepsilon \neq 0$)表明观者测得的3维体元随时间而变, 这给讨论带来不便. 克服这一困难的办法之一是在计算 M 及 Σ_t 上的积分时分别使用坐标体元

$$\boldsymbol{e} = \mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$$

及

$$t^a(\mathrm{d}t)_a\wedge(\mathrm{d}x^1)_b\wedge(\mathrm{d}x^2)_c\wedge(\mathrm{d}x^3)_d = \mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\,.$$

这里的 $\{t,x,y,z\}$ 是所选 3+1 分解的共动坐标系(§14.4), 所以自然有 $\mathscr{L}_t\boldsymbol{e}=0$ 和 $\mathscr{L}_t(\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3)=0$. 然而还要注意在非正交分解中 $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ 并非空间张量场. (读者不妨以2维闵氏时空的非正交分解为例验证, 也可参阅选读14-4-5.) 因此, 准确地说, 应选 $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ 在 Σ_t 的投影作为3维坐标体元 ${}^3\boldsymbol{e}$, 即定义

$${}^3\boldsymbol{e} := (t^a e_{abcd})^{\sim} = (\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3)^{\sim}. \quad (\sim\text{代表取投影}) \tag{15-4-1}$$

今后不加声明时 $\int_M f$ 和 $\int_{\Sigma_t} f$ 将分别代表 $\int_M f\boldsymbol{e}$ 和 $\int_{\Sigma_t} f\,{}^3\boldsymbol{e}$. ① 由命题5-4-1可知 ${}^3\varepsilon = \sqrt{h}\,{}^3\boldsymbol{e}$. 此式还有助于证明如下有用关系(习题): 设 g 和 h 分别是 g_{ab} 和 h_{ab} 在共动系的行列式, N 为时移, 则

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}\,. \tag{15-4-2}$$

提示: 因

① 但是, 为保证结果与坐标系无关, $\int_M f$ 和 $\int_{\Sigma_t} f$ 中的 f 应为标量密度场. 例如稍后出现的式(15-4-6)中的 $\mathscr{H}$ 就是标量密度场.

$$t^a e_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} t^a \varepsilon_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (N n^a \varepsilon_{abcd} + N^a \varepsilon_{abcd}) ,$$

注意到(试证) $N^a e_{abcd}$ 的投影为零, 便得

$$^3 e_{bcd} = (t^a e_{abcd})^{\sim} = \frac{1}{\sqrt{-g}} N\, ^3\varepsilon_{bcd} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{-g}} N\, ^3 e_{bcd} .$$

15.4.2　从拉氏场论到哈氏场论

拉氏场论的场位形变量 ψ 是时空中的一组张量场(我们不讨论其他场), 哈氏场论关心的则是 ψ 场在每一时刻 t 的表现, 记作 $q(t)$, 称为**空间场位形变量**, 代表 $\psi|_{\Sigma_t}$ 在 $3+1$ 分解后的各分量(都是空间张量场). 我们关心的是 $q(t)$ 的演化. 满足适当边界条件的所有空间场位形 $q(t)$ 的集合记作 $\mathscr{C}$. 设所选 $3+1$ 分解的类时矢量场为 t^a, 则 $\dot{q} \equiv \mathscr{L}_t q$ 称为广义速度. 下面介绍如何从拉氏场论发展出哈氏场论. 对拉氏场论中的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 有两种处理方式, 其一是把 $\mathscr{L}$ 看作标量场, 其二是把 $\mathscr{L}$ 看作标量密度场, 我们约定采用后者, 即是从一开始就把式(15-1-21)的 $\mathscr{L}$ 理解为标量密度场("密度场" 一词中的密度与 "拉氏密度" 中的密度是两回事). 正如该式所表明的那样, 拉氏场论中的 $\mathscr{L}$ 是场量 ψ 及其导数 $\nabla\psi, \cdots, \nabla^K\psi$ 的局域函数. 然而, 哈氏场论的特点是把时间和空间分开, 因此建立哈氏场论的第一步就是要把 $\nabla\psi, \cdots, \nabla^K\psi$ 分解为 q 的各种时、空导数. 我们只讨论这样的情况, 其中 $\mathscr{L}$ 所含的 q 的时间导数只允许到一阶, 而且不含时、空混合导数, 即

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \dot{q}, \mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q) . \tag{15-4-3}$$

请注意上式右边的 $\mathscr{L}$ 与式(15-1-21)右边的 $\mathscr{L}$ 代表不同的函数关系(甚至自变量也不同). 用下式定义与位形变量 q 共轭的**动量密度** π :

$$\pi := \frac{\partial \mathscr{L}(q, \dot{q}, \mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q)}{\partial \dot{q}} , \tag{15-4-4}$$

(偏导数 $\pi \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$ 的准确定义见选读15-4-1.) 则 π 是 Σ_t 上的空间张量密度场(因 $\mathscr{L}$ 是标量密度场). 若 q (因而 $\dot{q}$)是 (k,l) 型, 则 $\pi \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$ 是 (l,k) 型. 例如, 设 q 是对偶矢量场, 记作 q_a, 则 π 是矢量密度场, 记作 π^a, 其含义可用分量作如下定义: 设 q_i 和 π^i 分别为 q_a 和 π^a 在共动系的分量, 则有

$$\pi^i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} , \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{15-4-5}$$

满足适当边界条件的全体(q,π)的集合就是系统的相空间Γ. 定义哈氏密度$\mathscr{H}$和哈氏量H如下:

$$\mathscr{H} := \pi\dot{q} - \mathscr{L} \quad (\text{其中}\ \pi\dot{q}\ \text{代表}\ \pi\ \text{与}\ \dot{q}\ \text{的缩并}), \qquad H := \int_{\Sigma_t} \mathscr{H}\, {}^3\boldsymbol{e}. \tag{15-4-6}$$

请注意$\mathscr{H}$是标量密度场. 同有限自由度系统一样, 经典场的H也是相空间上的函数, 即$H : \Gamma \to \mathbb{R}$, 不过现在$\Gamma$的每点$(q,\pi)$由$\Sigma_t$上的张量场$q$和张量密度场$\pi$决定, H所依赖的不是自变数而是Σ_t上的(自变)场, 因此H是q和π的泛函, 记作$H[q,\pi]$. 因为要决定一个q场(或π场)需要知道Σ_t上每点的q值, 所以经典场的相空间是无限维流形. 我们将不加证明地把有限自由度系统的哈氏演化方程推广到场系统, 关键是把有限元函数$H(q,p)$的偏导数$\partial H/\partial q^i$和$\partial H/\partial p_i$改为"无限多元函数"H的泛函导数$\delta H/\delta q^i$和$\delta H/\delta p_i$. 泛函导数可直观地看作偏导数概念向无限元函数的推广. 设H是有限维相空间Γ上的函数, $(q^i(\lambda), p_i(\lambda))$是$\Gamma$中的一条曲线, 则把$H$的定义域限制在曲线上便得一元函数$H(\lambda) \equiv H(q^i(\lambda), p_i(\lambda))$, 其在$\lambda = 0$的导数值为

$$\left.\frac{\mathrm{d}H(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q^i} \left.\frac{\mathrm{d}q^i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left.\frac{\mathrm{d}p_i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \right], \tag{15-4-7}$$

即

$$\delta H = \sum_i \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\delta p_i \right]. \tag{15-4-7'}$$

推广至无限维相空间Γ的情况(把求和换为积分)便有如下定义: $\forall (q,\pi) \in \Gamma$, 考虑$\Gamma$中满足如下条件(及适当边界条件)的单参族$(q(\lambda), \pi(\lambda))$:

(a) $q(0) = q$, $\pi(0) = \pi$; (b) $\mathrm{d}H(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$存在,

如果Σ_t上存在空间张量(密度)场χ_q和χ_π使得对每个满足上述条件的单参族有

$$\delta H \equiv \left.\frac{\mathrm{d}H(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma_t} {}^3\boldsymbol{e}(\chi_q \delta q + \chi_\pi \delta \pi), \tag{15-4-8}$$

则称 H 是在(q,π)点**泛函可微**的(functionally differentiable), 称χ_q和χ_π为H在(q,π)点的**泛函导数**(functional derivative), 记作

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \chi_q, \qquad \frac{\delta H}{\delta \pi} = \chi_\pi. \tag{15-4-9}$$

注1 ① χ_q与δq的张量型号应互相"对偶", 就是说, 设q(因而δq)为(k,l)型,

则 χ_q 应为 (l,k) 型. 类似说法也适用于 χ_π 和 $\delta\pi$. ②式(15-4-8)中积分的体元是 ${}^3\boldsymbol{e}$, 所以 $\chi_q\delta q$ 和 $\chi_\pi\delta\pi$ 都应为标量密度场. 又因 δq 是 (k,l) 型张量场, 所以 χ_q 应为 (l,k) 型张量密度场. 反之, $\delta\pi$ 是 (l,k) 型张量密度场, 为保证 $\chi_\pi\delta\pi$ 为标量密度场, χ_π 应为 (k,l) 型张量场.

经典场论的哈氏形式也分为无约束和有约束两种. 若 $\dot{q}$ 可从式(15-4-4)反解出, 即 $\dot{q}$ 可表为 $\dot{q}(q, \pi, \mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q)$, 则系统无约束, 哈氏演化方程便为

$$\dot{q} \equiv \mathscr{L}_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \qquad \dot{\pi} \equiv \mathscr{L}_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q}. ① \tag{15-4-10}$$

作为无约束经典场的例子, 下面讨论闵氏时空KG标量场论的哈氏形式.

选用与惯性系 $\{t,x^i\}$ 相应的标准 $3+1$ 分解. 设 ε_{abcd} 是与 η_{ab} 适配的体元, e_{abcd} 是坐标体元, 则 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{e}=\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$. 选场量 ϕ 在 Σ_t 上的值为位形变量 q, 则拉氏密度 $\mathscr{L}$ 可表为[见式(15-1-20)]

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_a\phi\,\partial^a\phi + m^2\phi^2) = -\frac{1}{2}(\partial_0\phi\,\partial^0\phi + \partial_i\phi\,\partial^i\phi + m^2\phi^2)\\ &= -\frac{1}{2}(-\dot{\phi}^2 + \partial_i\phi\,\partial^i\phi + m^2\phi^2),\end{aligned}$$

与 ϕ 共轭的动量变量则为

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}, \tag{15-4-11}$$

故 $\dot{\phi}$ 可由上式反解出, 即 $\dot{\phi}=\dot{\phi}(\phi,\pi)=\pi$. 哈氏密度按定义为

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L} = \pi^2 + \frac{1}{2}(-\pi^2 + \partial_i\phi\,\partial^i\phi + m^2\phi^2) = \frac{1}{2}(\pi^2 + \partial_i\phi\,\partial^i\phi + m^2\phi^2),$$

哈氏量按定义为

$$H[\phi,\pi] = \int_{\Sigma_t}\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_t}(\pi^2 + \partial_i\phi\,\partial^i\phi + m^2\phi^2).$$

由式(15-4-10)可知为得哈氏演化方程应先求泛函导数 $\delta H/\delta\pi$ 和 $\delta H/\delta\phi$. 考虑相空间 Γ 中从某点 (ϕ,π) 出发的任一光滑曲线 $(\phi(\lambda), \pi(\lambda))$ [满足 $\phi(0)=\phi,\ \pi(0)=\pi$], 则变分可化为对参数 λ 的微分:

$$\delta H \equiv \left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma_t}[\pi\delta\pi + \partial_i\phi\,\partial^i(\delta\phi) + m^2\phi\delta\phi], \tag{15-4-12}$$

① 式中的 $\mathscr{L}_t q$ (及 $\mathscr{L}_t\pi$)其实是 $\tilde{\mathscr{L}}_t q$ (及 $\tilde{\mathscr{L}}_t\pi$)的空间投影的简写, 见式(14-4-27)及其下一段.

右边第二项可化为

$$\int_{\Sigma_t} \partial_i\phi\,\partial^i(\delta\phi) = \int_{\Sigma_t} \partial^i(\partial_i\phi\,\delta\phi) - \int_{\Sigma_t} (\partial^i\partial_i\phi)\,\delta\phi\,, \tag{15-4-13}$$

上式右边第一项又可用高斯定理化为 $\lim_{r\to\infty}\int_S n^i(\partial_i\phi)\delta\phi$，其中 S 是 Σ_t 上半径为 r 的球面，n^i 是 S 的单位外向法矢. 通常要求 ϕ 场满足适当的边界条件以保证这一面积分的极限为零. 代回式(15-4-12)得 $\delta H = \int_{\Sigma_t}[\pi\delta\pi + (-\partial^i\partial_i\phi + m^2\phi)\,\delta\phi]$. 由泛函导数定义便有 $\delta H/\delta\pi = \pi$ 和 $\delta H/\delta\phi = -\partial^i\partial_i\phi + m^2\phi$，故哈氏方程(15-4-10)给出

$$\dot\phi = \pi, \qquad \dot\pi = \partial^i\partial_i\phi - m^2\phi\,. \tag{15-4-14}$$

上式第一式与动量 π 的定义式(15-4-11)一致，第二式则给出

$$\partial^i\partial_i\phi - m^2\phi = \partial_0\dot\phi = -\partial_0\partial^0\phi\,,\ \text{即 Klein-Gordon 方程}\ \ \partial^\mu\partial_\mu\phi - m^2\phi = 0\,.$$

可见标量场论的拉氏和哈氏形式给出同样的演化方程.

15.4.3 约束系统的例子——麦氏理论的哈氏形式

如果 $\dot q$ 不能从式(15-4-4)反解出，则系统存在初级约束. 这时可仿照有限自由度约束系统的讨论处理. 本书最关心的是引力场，它虽然也是约束系统，但其初级约束仅源于拉氏密度 $\mathscr{L}$ 不含某些广义速度，因此不拟涉及约束系统的一般理论. 电磁场也是初级约束仅源于 $\mathscr{L}$ 不含某些广义速度的约束系统，与引力场有不少共性，却又比引力场简单得多，因此本小节先对它作一介绍. 只讨论闵氏时空的无源电磁场.

借惯性系 $\{t, x^i\}$ 作标准 3+1 分解. 选电磁 4 势 A_a 为时空场位形变量 ψ，则其在时刻 t 的表现 $A_a|_{\Sigma_t}$ 在 3+1 分解后的分量 $A_\mu = (A_0, A_i)$ 就是空间场位形变量 q，其中 $A_0 = A_a(\partial/\partial t)^a$ 等于标势 V 的负值(即 $A_0 = -V$)，$A_i = A_a(\partial/\partial x^i)^a$ 是3矢势 $\vec a$ 的 i 分量，即 $A_i = a_i$. 拉氏密度[见式(15-1-22)]可表为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}(2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij}) = \frac{1}{16\pi}[2(\dot a^i + \partial^i V)(\dot a_i + \partial_i V) - F^{ij}F_{ij}], \tag{15-4-15}$$

其中最后一步用到

$$F^{0i}F_{0i} = (\partial^0 a^i - \partial^i A^0)(\partial_0 a_i - \partial_i A_0) = -(\dot a^i + \partial^i V)(\dot a_i + \partial_i V)\,.$$

由于 $\mathscr{L}$ 不含 $\dot V$，与 V 共轭的动量 $\pi_V = \partial\mathscr{L}/\partial\dot V = 0$. 这 $\pi_V = 0$ 就是初级约束. 与 a_j 共轭的动量则为

$$\pi^j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{a}_j} = \frac{1}{4\pi}(\dot{a}^i + \partial^i V)\frac{\partial(\dot{a}_i + \partial_i V)}{\partial \dot{a}_j} = \frac{1}{4\pi}(\dot{a}^i + \partial^i V)\delta_i{}^j = \frac{1}{4\pi}(\dot{a}^j + \partial^j V). \quad (15\text{-}4\text{-}16)$$

$\dot{a}_j$ 显然可由上式反解出：

$$\dot{a}_j(V,\pi_j) = 4\pi\pi_j - \partial_j V, \quad 即\ \dot{\vec{a}} = 4\pi\vec{\pi} - \vec{\nabla}V, \quad (15\text{-}4\text{-}17)$$

(请注意正体π代表圆周率而斜体的 π_j 和 $\vec{\pi}$ 代表动量.) 可见初级约束只有 $\pi_V = 0$ 一个. 另一方面, 电场 $\vec{E}$ 的 j 分量

$$E_j = -F_{0j} = -(\partial_0 A_j - \partial_j A_0) = -(\dot{a}_j + \partial_j V),$$

即 $-\vec{E} = \dot{\vec{a}} + \vec{\nabla}V$, 与式(15-4-17)对比可知 $4\pi\vec{\pi} = -\vec{E}$, 说明与 $\vec{a}$ 共轭的动量 $\vec{\pi}$ 正比于电场 $\vec{E}$. 把式(15-4-17)代入(15-4-15)得

$$\mathscr{L} = 2\pi\pi^i\pi_i - \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}, \quad (15\text{-}4\text{-}18)$$

故

$$\mathscr{H} = (\pi_V\dot{V} + \pi^i\dot{a}_i) - \mathscr{L} = 2\pi\pi^i\pi_i + \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} - \pi^i\partial_i V, \quad (15\text{-}4\text{-}19)$$

及

$$H[V,a_i;\pi_V,\pi^i] = \int_{\Sigma_t}[2\pi\pi^i\pi_i + \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + V\partial_i\pi^i - \partial_i(\pi^i V)]. \quad (15\text{-}4\text{-}20)$$

由右边可知 H 实际上不依赖于 π_V. 上式右边最后一项可用高斯定理化为边界项 $-\lim_{r\to\infty}\int_S n_i\pi^i V$, 通常电动力学对 V 和 $\vec{E}$ 所要求的边界条件保证此项为零, 故

$$H[V,a_i;\pi_V,\pi^i] = \int_{\Sigma_t}[2\pi\pi^i\pi_i + \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + V\partial_i\pi^i]. \quad (15\text{-}4\text{-}21)$$

由以上讨论可知电磁场类似于 L 不含 $\dot{q}^1$ 的有限自由度系统(其中 V 起到 q^1 的作用), 仿照式(15-2-52)和(15-2-53)便可写出电磁场的哈氏方程

$$\text{(a)}\ \dot{V} = \lambda\ (拉氏乘子), \quad \text{(b)}\ \dot{\pi}_V = -\frac{\delta H}{\delta V}, \quad (15\text{-}4\text{-}22)$$

$$\text{(a)}\ \dot{a}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi^i}, \qquad \text{(b)}\ \dot{\pi}^i = -\frac{\delta H}{\delta a_i}. \quad (15\text{-}4\text{-}23)$$

先计算 $\delta H/\delta V$, $\delta H/\delta\pi^i$ 和 $\delta H/\delta a_i$. 考虑 Γ_1 中从某点出发、以 μ 为参数的任一光滑曲线, 则 H 的变分

$$\begin{aligned}\delta H = \left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu}\right|_{\mu=0} &= \int_{\Sigma_t}[4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{8\pi}F^{ij}\delta F_{ij} + (\partial_i\pi^i)\delta V + V\partial_i\delta\pi^i] \\ &= \int_{\Sigma_t}[4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{2\pi}(\partial^{[i}a^{j]})\partial_i\delta a_j + (\partial_i\pi^i)\delta V + V\partial_i\delta\pi^i] \\ &= \int_{\Sigma_t}\{4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{2\pi}[\partial_i((\partial^{[i}a^{j]})\delta a_j) - (\partial_i\partial^{[i}a^{j]})\delta a_j] \\ &\quad + (\partial_i\pi^i)\delta V + \partial_i(V\delta\pi^i) - (\partial_i V)\delta\pi^i\} \\ &= \int_{\Sigma_t}[(4\pi\pi_i - \partial_i V)\delta\pi^i - \frac{1}{2\pi}(\partial_i\partial^{[i}a^{j]})\delta a_j + (\partial_i\pi^i)\delta V],\end{aligned}$$

其中最后一步是由于倒数第二行中的第二、五项可用高斯定理化为边界项, 而且通常的边界条件保证它们为零. 由上式得

$$\frac{\delta H}{\delta V} = \partial_i\pi^i = \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}, \tag{15-4-24}$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi^i} = 4\pi\pi_i - \partial_i V, \quad 即 \quad \frac{\delta H}{\delta\vec{\pi}} = 4\pi\vec{\pi} - \vec{\nabla}V, \tag{15-4-25}$$

$$\frac{\delta H}{\delta a_i} = -\frac{1}{2\pi}\partial_j\partial^{[j}a^{i]}, \quad 即 \quad \frac{\delta H}{\delta\vec{a}} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}, \tag{15-4-26}$$

从式(15-4-26)第一式到第二式是由于

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})^i = [\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})]^i = [\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}]^i = \partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i = -2\partial_j\partial^{[j}a^{i]}.$$

把式(15-4-24)~(15-4-26)代入式(15-4-22)、(15-4-23)得

$$(a)\ \dot{V} = \lambda, \qquad (b)\ \dot{\pi}_V = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}, \tag{15-4-27}$$

$$(a)\ \dot{\vec{a}} = 4\pi\vec{\pi} - \vec{\nabla}V, \quad (b)\ \dot{\vec{\pi}} = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}. \tag{15-4-28}$$

注意到 $4\pi\vec{\pi} = -\vec{E}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{a}$ 和 $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V) = 0$, 式(15-4-28)便可改写为常见的麦氏演化方程

$$(a)\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}, \qquad (b)\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{B}. \tag{15-4-29}$$

另一方面, 初级约束 $\pi_V = 0$ 的自洽性 $\dot{\pi}_V = 0$ 与式(15-4-27b)结合给出次级约束

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi} = 0 \quad 即 \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0. \tag{15-4-30}$$

这正是在中册§14.5 已经见过的约束. 由于现在的正则变量是 $\vec{a}$ 和 $\vec{\pi}$, 引入3矢势

$\vec{a}$(定义为$\vec{\nabla}\times\vec{a}=\vec{B}$)本身已使$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$成为恒等式，因此在这种理论框架中不再把$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$看作约束.

任一物理态$(\vec{a},\vec{\pi})$都应满足约束方程$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$，所以由式(15-4-21)得

$$H=\int_{\Sigma_t}[2\pi\pi^i\pi_i+\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}]=\int_{\Sigma_t}\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2),$$

可见作为麦氏方程的解的电磁场的哈氏量在数值上等于电磁场的总能量.

同有限自由度系统一样，无限自由度系统的约束函数也应是Γ上的函数(也就是泛函)，即从Γ到$\mathbb{R}$的映射. 然而电磁场的约束$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$却不符合这一要求：$\vec{\pi}$给定后$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$是$\Sigma_t$上的标量场，故$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$是从$\Gamma$到集合$\{\Sigma_t$上标量场$\}$(而不是$\mathbb{R}$)的映射. 这一问题可通过改变约束的表达式来解决. 事实上，由Σ_t上的标量场$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$可产生$\Gamma$上的一系列(无限个)函数. 为此，令$\chi$为$\Sigma_t$上任一满足适当边界条件(而且与$t$无关)的标量场(称为**试验标量场**)，定义

$$C_\chi:=\int_{\Sigma_t}\chi\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi},\ (\text{积分的收敛性由}\ \chi\ \text{的适当边界条件保证})\qquad(15\text{-}4\text{-}31)$$

则C_χ是Γ上的函数，即$C_\chi:\Gamma\to\mathbb{R}$. [任意给定$(V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi})\in\Gamma$后便有$\Sigma_t$上的矢量场$\vec{\pi}$，其散度$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$与标量场$\chi$乘积的积分(一个实数)便是$C_\chi$.] 因此可以写成$C_\chi[V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi}]$. 又因为$\chi$场有无限多个，所以有无限多个泛函$C_\chi$. 由式(15-4-31)可知

$$\Sigma_t\text{上标量场}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0\Leftrightarrow C_\chi=0,\ \forall\chi\ (\text{指对任一满足适当边界条件的}\ \chi),\qquad(15\text{-}4\text{-}32)$$

可见一个方程$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$对应于无限多个约束方程$C_\chi=0$. 当我们说$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$是“一个约束”时，其实是指一组(无限多个)约束$C_\chi=0$. 这也可以从另一个角度直观理解：$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$意味着对$\Sigma_t$的每点$x$都有$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}|_x=0$，又因为$\Sigma_t$有无限多个$x$点，所以$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$代表无限多个约束. 由于$\Sigma_t$是3维流形，直观上也说$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$代表“$\infty^3$个”约束.

对次级约束$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$也应进行自洽性检验，即检查它在演化中能否自动保持. 为此只须检查$\dot{C}_\chi\equiv \mathrm{d}C_\chi/\mathrm{d}t$是否自动为零. 给定$\chi$后，$C_\chi[V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi}]$的值依赖于$\Sigma_t$上的8个场$a_1$, a_2, a_3, π^1, π^2, π^3, V, π_V，其中每个在Σ_t上的每点x都可“自变”，因此可直观地认为C_χ是“$8\times\infty^3$”个“自变量”的函数，每个自变量随t而变，都对$\mathrm{d}C_\chi/\mathrm{d}t$提供贡献，总贡献既要对8类自变量求和，又要对每类自变量在Σ_t上的每点求积分，于是

$$\dot{C}_\chi \equiv \frac{\mathrm{d}C_\chi}{\mathrm{d}t} = \int_{\Sigma_t}\left(\frac{\delta C_\chi}{\delta a_i}\dot{a}_i + \frac{\delta C_\chi}{\delta \pi^i}\dot{\pi}^i + \frac{\delta C_\chi}{\delta V}\dot{V} + \frac{\delta C_\chi}{\delta \pi_V}\dot{\pi}_V\right), \tag{15-4-33}$$

(重复指标已代表对各类自变量求和.) 由式(15-4-31)得

$$C_\chi = \int_{\Sigma_t}[\vec{\nabla}\cdot(\chi\vec{\pi}) - (\vec{\nabla}\chi)\cdot\vec{\pi}] = -\int_{\Sigma_t}(\partial_i\chi)\,\pi^i\,, \tag{15-4-34}$$

故

$$\frac{\delta C_\chi}{\delta \pi^i} = -\partial_i\chi, \quad \frac{\delta C_\chi}{\delta a_i} = 0, \quad \frac{\delta C_\chi}{\delta V} = 0, \quad \frac{\delta C_\chi}{\delta \pi_V} = 0\,. \tag{15-4-35}$$

把上式及 $\dot{\pi}^i = (2\pi)^{-1}\partial_j\partial^{[j}a^{i]}$ [来自式(15-4-23b)和(15-4-26)]代入式(15-4-33)得

$$\dot{C}_\chi = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_t}(\partial_i\chi)\;\partial_j\partial^{[j}a^{i]} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_t}[\partial_i(\chi\,\partial_j\partial^{[j}a^{i]}) - \chi\partial_{(i}\partial_{j)}\partial^{[j}a^{i]}] = 0\,.$$

(右边第一项因为可化成为零的边界项而为零.) 可见约束泛函 C_χ 自动满足自洽性条件，因而不会再出现其他次级约束.

作为本节最后一个问题，我们证明初级约束 $\pi_V = 0$ 和次级约束 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi} = 0$ 都是第一类的. 为此，应注意初级约束也不是一个而是“∞^3 个”. 仿照 C_χ，可定义与 π_V 相对应的约束泛函

$$C_\xi := \int_{\Sigma_t}\xi\,\pi_V\,, \tag{15-4-36}$$

其中 ξ 是 Σ_t 上满足适当边界条件的任一(与 t 无关的)试验标量场. 由上式可知

$$\frac{\delta C_\xi}{\delta \pi_V} = \xi\,, \qquad \frac{\delta C_\xi}{\delta V} = \frac{\delta C_\xi}{\delta \pi^i} = \frac{\delta C_\xi}{\delta a_i} = 0\,.$$

把泊松括号定义式(15-2-21)推广到无限维的情况，可知任意两个初级约束泛函 C_ξ 和 $C_{\xi'}$ 的泊松括号为零:

$$\{C_\xi, C_{\xi'}\} = \int_{\Sigma_t}\left(\frac{\delta C_\xi}{\delta V}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta \pi_V} + \frac{\delta C_\xi}{\delta a_i}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta \pi^i} - \frac{\delta C_\xi}{\delta \pi_V}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta V} - \frac{\delta C_\xi}{\delta \pi^i}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta a_i}\right) = 0\,.$$

注意到 $\delta C_\chi/\delta\pi^i = -\partial_i\chi$, $\delta C_\chi/\delta a_i = \delta C_\chi/\delta\pi_V = \delta C_\chi/\delta V = 0$，便知任意两个次级约束泛函 C_χ 和 $C_{\chi'}$ 的泊松括号也为零:

$$\{C_\chi, C_{\chi'}\} = \int_{\Sigma_t}\left(\frac{\delta C_\chi}{\delta a_i}\frac{\delta C_{\chi'}}{\delta \pi^i} - \frac{\delta C_\chi}{\delta \pi^i}\frac{\delta C_{\chi'}}{\delta a_i}\right) = 0\,.$$

最后，H 对 V 的依赖为线性[见式(15-4-21)]使 C_χ 中不含 V，因而次级约束泛函 C_χ

与初级约束泛函 C_ξ 的泊松括号也为零(参见小节15.2.4末的讨论). 可见电磁场是第一类约束系统, 拉氏乘子 λ 有完全自由性, 与式(15-4-22a)结合表明 $\dot{V}$ 完全任意, 这正是电磁场的规范自由性的部分表现. 为简单起见不妨选 $\lambda=0$ 以使 V 不随 t 而变. 人们甚至常把 (V,π_V) 开除出正则变量的行列, 使系统的自由度从"$8\times\infty^3$"减为"$6\times\infty^3$". 在这种处理中, 谈到相空间时是指初级约束面 Γ_1, 谈到约束时则只指次级约束 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$.

[选读 15-4-1]

式(15-1-19)(标量场 ϕ 的拉氏演化方程) $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_a\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}=0$ 涉及偏导数 $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)$, 由于 $\partial_a\phi$ 不是自变数而是自变张量场, $\mathscr{L}$ 对 $\partial_a\phi$ 的"偏导数"的含义其实并不清楚. 类似地, 式(15-4-4)(简写为 $\pi=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$)中的 $\dot{q}$ 也是自变张量场, 故 $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$ 的含义也不清楚. 本选读旨在给出张量场对其所依赖的张量场的偏导数的准确定义.

先从最简单的情况入手. 设 ϕ 是闵氏时空 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 的标量场, 则其拉氏密度只是 ϕ 和 $\partial_a\phi$ 的局域函数, 即 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\partial_a\phi)$ [式(15-1-15)]. 如前所述, "局域函数"一词中的"局域"体现为 $\mathscr{L}$ 在每点 $p\in\mathbb{R}^4$ 的值只取决于 ϕ 及 $\partial_a\phi$ 在 p 点的值而与这两个场在 p 点以外的值无关, 即

$$\mathscr{L}|_p=\mathscr{L}(\phi|_p,\ \partial_a\phi|_p),\qquad \forall p\in\mathbb{R}^4. \tag{15-4-37}$$

这就区别于泛函 $S=\int\mathscr{L}(\phi,\partial_a\phi)$, 后者依赖于场 ϕ 在全 $\mathbb{R}^4$ 上的值. 再谈对"偏导数" $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)$ 的理解. 在分量语言中这是清楚的: 因 ϕ 是标量场, 故 $\partial_a\phi$ 是余矢场, 选定基底后有 4 个分量 $\partial_\mu\phi$, 于是 $\mathscr{L}$ 可表为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$. 给定 $p\in\mathbb{R}^4$ 后, ϕ_p (是 $\phi|_p$ 的简写)和 $(\partial_\mu\phi)_p$ 都是数, 故 $\mathscr{L}_p=\mathscr{L}(\phi_p,(\partial_\mu\phi)_p)$ 是 5 元函数, 其中每一个元[包括 ϕ_p 和 4 个 $(\partial_\mu\phi)_p$]都可独立地变(充当独立自变数, 但若去掉下标 p, 则 $\partial_\mu\phi$ 被 ϕ 场完全确定, 不能独立地变), 因而偏导数 $\partial\mathscr{L}_p/\partial(\partial_\mu\phi)_p$ 就是普通多元函数的偏导数. 然而, 在几何语言中 $(\partial_a\phi)_p$ 是 p 点的张量而不是数, 于是 $\partial\mathscr{L}_p/\partial(\partial_a\phi)_p$ 就远不如 $\partial\mathscr{L}_p/\partial(\partial_\mu\phi)_p$ 含义清晰. 现在给它下一个明确定义. 首先把偏导数 $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)$ 定义为 $\mathbb{R}^4$ 上的矢量场(我们仍借用偏导数一词而不愿杜撰出"偏导张量"和"偏导张量场"一类罕见术语), 记作 Λ^a, 然后只须对每一 $p\in\mathbb{R}^4$ 定义 $\Lambda^a|_p$ 的值. $\mathscr{L}$ 可看作一部有两个槽的机器 $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$, 定义偏导数时自然要强调每个槽的变量可以独立地变. 给定 ϕ 场后 $\partial_a\phi$ 场也就确定, 因此, 为强调独立性, 最好把两槽的变量改记作 α 和 β_a (分别是 $\mathbb{R}^4$ 上的标量场和余矢场), 而为表达它们自变的方式则应对 p 点引入单参族 $\{\alpha(\lambda),\beta_a(\lambda)\}$. 为了定义 $\Lambda^a|_p$, 这些单参族应满足三个条件:

(a) $\alpha(0)=\phi$, $\beta_a(0)=\partial_a\phi$;

(b) $\alpha(\lambda)|_p$ 与 λ 无关，即 $\mathscr{L}|_p$ 的两槽中只有第二槽 $\beta_a(\lambda)|_p$ (是 p 点的余矢)随 λ 而变(从而体现“偏”字);

(c)对每一 λ，标量场 $\alpha(\lambda)$ 和余矢场 $\beta_a(\lambda)$ 都是光滑的，而且 $\delta\beta_a|_p$ 及 $\delta\mathscr{L}|_p$ 存在，其中 $\delta\beta_a\equiv \mathrm{d}\beta_a(\lambda)/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$，$\delta\mathscr{L}\equiv \mathrm{d}\mathscr{L}(\alpha(\lambda),\beta_a(\lambda))/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$.

我们称满足上述条件的单参族为 A_p 类单参族. 请注意：①每点 $p\in\mathbb{R}^4$ 都有无数个不同的 A_p 类单参族；②若 $p'\neq p$，则 A_p 类单参族很可以不是 $\mathrm{A}_{p'}$ 类单参族.

定义 1　满足下式的 Λ^a 称为 $\mathscr{L}$ 对 $\partial_a\phi$ 的偏导数：

$$(\delta\mathscr{L})|_p=(\Lambda^a\delta\beta_a)|_p,\quad \forall p\in\mathbb{R}^4,\ \forall \mathrm{A}_p \text{类单参族}. \tag{15-4-38}$$

就是说，我们把偏导数 $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)$ 定义为满足式(15-4-38)的 Λ^a：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}:=\Lambda^a. \tag{15-4-39}$$

注 2　可以证明 $\Lambda^a|_p$ 在任一基底的 μ 分量 $\Lambda^\mu|_p$ 等于 $\partial\mathscr{L}_p/\partial(\partial_\mu\phi)_p$，所以定义1合理.

定义1还可在以下三方面做推广：① $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 推广为任意4维时空 (M,g_{ab})；② $\mathscr{L}$ 可以是有限多个自变场(M 上的张量场)的局域函数，例如，弯曲时空 (M,g_{ab}) 的电磁场 F_{ab} 的

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{ab}F_{ab}=-\frac{1}{4\pi}(\nabla^{[a}A^{b]})\nabla_aA_b$$

就是3个自变场 A_a,∇_aA_b,g_{ab} 的局域函数，即 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(A_a,\nabla_aA_b,g_{ab})$，而且可定义 $\mathscr{L}$ 对任一自变场[而不像式(15-4-39)那样只对 $\partial_a\phi$]的偏导数；③还可定义4维张量场(而不限于标量场 $\mathscr{L}$)对张量场的偏导数.

在以上讨论中，$\mathscr{L}$ 所依赖的自变场都是 M 上的(4维)张量场，丝毫不涉及时空的3+1分解，适用于拉氏(而不是哈氏)形式. 然而在哈氏形式中会出现更多的“空间张量场对空间张量场的偏导数”，如式(15-4-4)就含偏导数 $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$：

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}(q,\dot{q},\mathrm{D}q,\cdots,\mathrm{D}^Kq)}{\partial\dot{q}},\quad [\text{原式(15-4-4)}] \tag{15-4-40}$$

由于事先已对时空及其上的张量场做了3+1分解，$\mathscr{L}$ 已被看作空间位形变量 q (空间张量场)及其时间和空间导数 $q;\dot{q};\mathrm{D}q,\cdots,\mathrm{D}^Kq$ (每个都是空间张量场)的局域函数，定义1(及其推广)不适用于定义 $\mathscr{L}$ 对任一自变场的偏导数(如 $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$). 更有甚者，后面还将遇到除 $\mathscr{L}$ 外的其他型空间张量场对自变场的偏导数(如§15.5 的

$\partial K_{cd}/\partial \dot{h}_{cd}$), 因此有必要对这类偏导数给出一个较为一般的定义.

设 Y 是 M 上的任意型空间张量场(略去抽象指标), 它局域地依赖于空间位形变量 q 及其时间导数 $\dot{q}$ 和空间导数 $\mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q$, 即

$$Y = Y(q; \dot{q}; \mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q) . \qquad (15\text{-}4\text{-}41)$$

所谓局域地"依赖于", 是指 Y 在每点 $p \in M$ 的值只取决于 $q; \dot{q}; \mathrm{D}q, \cdots, \mathrm{D}^K q$ 在 p 点的值, 即

$$Y|_p = Y(q|_p; \dot{q}|_p; \mathrm{D}q|_p, \cdots, \mathrm{D}^K q|_p) . \text{（显然是"局域函数"的推广）} \qquad (15\text{-}4\text{-}42)$$

例如, 对闵氏时空的电磁场有 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V, a_i; \dot{a}_i; \partial_i V, \partial_i a_j)$ [式(15-4-15)], 把 $\mathscr{L}$ 看作 Y, 便可说 $\mathscr{L}$ 是局域依赖于 $V, a_i, \dot{a}_i, \partial_i V, \partial_i a_j$ 的标量场. 其实此式的 $\mathscr{L}$ 所依赖的场也可改用抽象指标表述, 即改为 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V, a_a; \dot{a}_a; \partial_a V, \partial_a a_b)$. §15. 5 还有更多的例子.

虽然式(15-4-41)右边的自变量可分为空间位形变量、其时间导数和空间导数等三类, 但 Y 对每一自变量都可求偏导数, 各个自变量在这个意义上平权. 把它们依次记作 $X_1, \cdots, X_N$, 则式(15-4-41)又可表为

$$Y = Y(X_1, \cdots, X_N) . \text{（其中只有前 } C \text{ 个是位形变量）} \qquad (15\text{-}4\text{-}41')$$

现在给 Y 对任一自变场 X_n 的偏导数 $\partial Y/\partial X_n$ 下定义. 仿照定义 1 前的做法, 为了强调每点 $p \in M$ 的 $Y|_p$ 所依赖的各个自变张量可以独立地变, 我们对 p 点引入单参空间张量场族 $\{\alpha_1(\lambda), \cdots, \alpha_N(\lambda)\}$, 并要求它满足三个条件:

(a) $\alpha_1(0) = X_1, \cdots, \alpha_N(0) = X_N$;

(b) $\alpha_1(\lambda)|_p, \cdots, \alpha_N(\lambda)|_p$ 中除 $\alpha_n(\lambda)|_p$ 外都与 λ 无关, 即 p 点的 N 个空间张量场中只有 $\alpha_n(\lambda)|_p$ 随 λ 而变(从而体现"偏"字);

(c) 对每一 λ, 空间张量场 $\alpha_1(\lambda), \cdots, \alpha_N(\lambda)$ 都是光滑的, 而且 $(\delta Y)|_p$ 及 $(\delta X_n)|_p \equiv \mathrm{d}\alpha_n(\lambda)/\mathrm{d}\lambda|_{\lambda=0}$ 存在.

我们称满足上述条件的单参族为 B_p 类单参族.

定义 2　若 M 上存在空间张量场 Λ 使得 $\forall p \in M$ 以及对每一 B_p 类单参族有

$$(\delta Y)|_p = (\Lambda\, \delta X_n)|_p , \quad \text{其中 } \Lambda \delta X_n \text{ 代表 } \Lambda \text{ 与 } \delta X_n \text{ 的缩并}, \qquad (15\text{-}4\text{-}43)$$

则称 Λ 为 **Y 对 X_n 的偏导数**, 即

$$\frac{\partial Y}{\partial X_n} := \Lambda . \qquad (15\text{-}4\text{-}44)$$

把式(15-4-40)的 $\mathscr{L}$ 和 $\dot{q}$ 分别看作 Y 和 X_n, 则该式右边(作为标量密度场 $\mathscr{L}$ 对

张量场 $\dot{q}$ 的偏导数)就有准确含义.

一个微妙问题出现在 X_n 是对称张量场的情况. 先讨论最简单的例子: Y 是标量场且自变场只有 X_{ab}, 满足 $X_{ab}=X_{(ab)}$. 这时应要求所选的 B_p 类单参族也对称, 于是式(15-4-43)具体化为 $\delta Y|_p=\Lambda^{ab}\delta X_{ab}|_p$. 因 $\delta X_{ab}=\delta X_{(ab)}$, 故由 $\delta Y|_p=\Lambda^{ab}\,\delta X_{ab}|_p$ 定义的 Λ^{ab} 不唯一(可差到任一反对称张量 $\Phi^{ab}=\Phi^{[ab]}$), 为使之唯一, 自然规定 Λ^{ab} 为对称张量, 即规定 $\Lambda^{ab}=\Lambda^{(ab)}$. 推广至一般便知对定义 2 还应补充一句:

定义 2 补充规定 当 X_n 有对称(或反称)指标时 Λ 的相应指标应有对称(或反称)性, 即 Λ 关于这些指标是对称(或反称)的.

在不含对称(或反称)指标时, 可以证明定义 2 所定义的偏导数 $\partial Y/\partial X_n$ 与用分量语言定义的偏导数一致: 后者是前者的分量. 然而, 一旦涉及对称(或反称)指标, 用分量语言表达的偏导数公式却容易出现佯谬. 例如, 设 h_{ab} 是 3+1 分解后的空间度规场(自然有 $h_{ab}=h_{(ab)}$), 则由定义 2 及其补充规定得

$$\frac{\partial h_{cd}}{\partial h_{ab}}=\delta^{(a}{}_c\delta^{b)}{}_d, \tag{15-4-45}$$

例如下节推导式(15-5-10)时就用到一个类似公式

$$\frac{\partial \dot{h}_{cd}}{\partial \dot{h}_{ab}}=\delta^{(a}{}_c\delta^{b)}{}_d. \tag{15-4-46}$$

然而有人对此提出质疑: 把此式的抽象指标改为具体指标便有分量等式

$$\frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial h_{\mu\nu}}=\delta^{(\mu}{}_\rho\delta^{\nu)}{}_\sigma=\frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma+\delta^\nu{}_\rho\delta^\mu{}_\sigma), \tag{15-4-47}$$

从而导致 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=1/2$, 与他们认为的正确答案 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=1$ 相悖. 下面介绍我们对这一"悖论"的看法.

如果说 h_{12} 对 h_{12} 的导数等于 1, 那是指一元函数 $h_{12}(h_{12})$ 的导数 $\mathrm{d}h_{12}(h_{12})/\mathrm{d}h_{12}=1$. 而只要写成**偏**导数 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$, 就意味着 h_{12} 不是一元函数. 注意到 $h_{12}=h_{21}$, 自然想到可把 h_{12} 看作二元函数

$$h_{12}=f(h_{12},h_{21})=\frac{1}{2}(h_{12}+h_{21}), \tag{15-4-48}$$

于是 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 自然是指 $f(h_{12},h_{21})$ 对第一自变数 h_{12} 的偏导数, 因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}}&=\frac{\partial}{\partial h_{12}}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+h_{21})\right]\equiv\lim_{\Delta h_{12}\to 0}\frac{1}{\Delta h_{12}}[f(h_{12}+\Delta h_{12},\ h_{21})-f(h_{12},\ h_{21})]\\&=\lim_{\Delta h_{12}\to 0}\frac{1}{\Delta h_{12}}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+\Delta h_{12}+h_{21})-\frac{1}{2}(h_{12}+h_{21})\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由此看来应有 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=1/2\neq 1$. 然而上式又可改写为

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}}=\frac{\partial}{\partial h_{12}}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+h_{21})\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}}+0\,,(\text{因为 } h_{21} \text{ 应被视为独立于 } h_{12}) \qquad (15\text{-}4\text{-}49)$$

从而导致 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=0$ 的矛盾结果. 主张 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=1/2$ 者可能会争辩说式(15-4-49)右端的 $\frac{1}{2}(\partial h_{12}/\partial h_{12})$ 实为 $\frac{1}{2}(\mathrm{d}h_{12}/\mathrm{d}h_{12})=\frac{1}{2}$, 故仍得 $\partial h_{12}/\partial h_{12}=1/2$. 但为什么可以这样看?须知在把 h_{12} 和 h_{21} 看作独立变量时 $\partial(h_{12}+h_{21})/\partial h_{12}$ 确实就是 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$. 再看 $\partial h_{21}/\partial h_{12}$. 因 $h_{21}=h_{12}=(h_{12}+h_{21})/2$, 故

$$\frac{\partial h_{21}}{\partial h_{12}}=\frac{\partial}{\partial h_{12}}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+h_{21})\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}}+\frac{1}{2}\frac{\partial h_{21}}{\partial h_{12}}=\frac{1}{2}\frac{\partial h_{12}}{\partial h_{12}}+0\,,\ (\text{仍是因为 } h_{21} \text{ 独立于 } h_{12})$$

于是, 无论认为 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 等于1/2还是1, 上式都给出 $\partial h_{21}/\partial h_{12}\neq 0$, 而上式末步分明用到 $\partial h_{21}/\partial h_{12}=0$. 类似的"两难等式"不胜枚举. 也许有人还能找到"理由"逐一争辩, "排除"悖论, 但这终究不是办法. 其实, 造成所有这些两难问题的总祸根都是: 先用 $h_{12}=h_{21}$ 得出式(15-4-48), 再用该式求 $f(h_{12},h_{21})$ 对一个自变数的偏导数, 而这个"偏"字偏偏要求你把 h_{12} 和 h_{21} 看作独立变数, 从而有悖于 $h_{12}=h_{21}$ (因而互不独立)的初衷. 这一总祸根导致对偏导数 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 等无法给出一个明确而且自洽的定义, 因而从根本上就不应(也无法)提出" $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 到底等于几?"一类的问题. 试问: 如果一个"二元"函数 $f(x,y)$ 的两个自变数互不独立, 它对任一自变数的偏导数还能有意义吗?不过, 读者对这个看似十分消极的结论大可不必沮丧. 首先, 只要用抽象指标按定义1, 2 (及其补充规定)行事, 一切都很清晰正确(抽象指标的优越性由此可见一斑). 其次, 虽然大量文献都用具体指标, 但都只停留在带着指标 $\mu,\nu,\cdots$ (而不是取 μ 为1或2)的公式上(对"具体指标"并未具体取值). 事实上, 文献中存在着两种不同的体系, 分别默认以下两类不同公式:

$$(\text{a})\ \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial h_{\mu\nu}}=\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}+\delta^{\nu}{}_{\rho}\delta^{\mu}{}_{\sigma}\,,\quad (\text{b})\ \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial h_{\mu\nu}}=\frac{1}{2}(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}+\delta^{\nu}{}_{\rho}\delta^{\mu}{}_{\sigma})\,. \qquad (15\text{-}4\text{-}50)$$

但是, 只要不把指标具体到取1, 2, ⋯, 而且坚持按同一体系写出其他公式, 最后结果仍然一致(殊途同归). 据笔者所见, 在用具体指标的大量文献中的所有计算过程都处于地下状态[甚至明确写出式(15-4-50a)或(15-4-50b)者也少见], 但只要始终坚持一个体系, 结果就正确. 如果一定要把 μ,ν 取具体数值, 例如问 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 为何值, 两个体系给出的答案当然不同. 不过, 据笔者经验, 在实际应用中这种问题出现的机会几乎不存在. 至于纯理论探讨中专为举反例而问及 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 为何值, 我们的回答不是给出数字答案而是要指出: 承认 $h_{12}=h_{21}$ 就是承认两者互不独立, 偏导数 $\partial h_{12}/\partial h_{12}$ 就没有意义. 除非你能先给出确切而且自洽的定义, 然而(就我们所知而言)

又给不出. 结论: 对"$\partial h_{12}/\partial h_{12}$到底等于几?"一类的问题的最好回答是"这个问题无意义, 因为其中的关键概念$\partial h_{12}/\partial h_{12}$并未(也无法)定义."

最后还想说明一点: 只要把由式(15-4-47)引起的上述"悖论"拿出来认真讨论, 就难免出现"仁者见仁, 智者见智"的情况. 以上只是我们的看法, 权作引玉之砖.

[选读 15-4-1 完]

§15.5 广义相对论的哈氏形式

把广义相对论重铸为哈氏形式有一系列重要意义. 例如, 在经典物理方面, 它有助于更好地从动力学演化(几何动力学)角度理解广义相对论, 有助于 ADM 能量概念的提出; 在量子物理方面, 它为引力的正则量子化程序打下不可或缺的基础.

爱因斯坦方程并不涉及时空流形的整体拓扑性质和边界条件, 而哈氏形式则对这两方面都提出一定要求. 我们只讨论整体双曲(见§11.5)真空时空的哈氏形式, 至于整体拓扑和边界条件, 将在适当地方(选读15-5-1开头)提及.

设Σ是某一3维流形, M是这样一个4维定向流形M, 其上有光滑函数t使每一等t面Σ_t都是微分同胚于Σ的超曲面. 在M上定义光滑矢量场t^a使$t^a\nabla_a t=1$. 至此尚未涉及M上的度规. 如果给M指定洛伦兹度规g_{ab}使每一等t面Σ_t为类空超曲面, 且t^a为指向未来的类时矢量场, 则$\{\Sigma_t\}$和t^a构成时空(M,g_{ab})的一个3+1分解(见§14.4), t^a便可表为

$$t^a = Nn^a + N^a, \tag{15-5-1}$$

其中n^a是Σ_t的指向未来单位法矢, N和N^a分别为时移和位移. 因为g^{ab}是拉氏形式中的场位形变量, 所以$g^{ab}|_{\Sigma_t}$在3+1分解后的各分量就构成哈氏形式中的空间场位形变量, 统一记作$q(t)$. 设h_{ab}是g_{ab}在Σ_t上的诱导度规, 即$h_{ab}=g_{ab}+n_a n_b$, 我们来说明, 在t和t^a已知的前提下只用$(N,N_a,h_{ab})|_{\Sigma_t}$就能决定$g^{ab}|_{\Sigma_t}$, 因而$(N,N_a,h_{ab})|_{\Sigma_t}$可充当$q(t)$. 令

$$h^{ab} \equiv g^{ab} + n^a n^b, \tag{15-5-2}$$

则

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b). \tag{15-5-3}$$

先说明由h_{ab}如何决定h^{ab}. 首先, 式(15-5-2)的h^{ab}满足

$$(h^{ab}h_{bc})w^c = w^a \quad \forall w^c \in W_q; \quad (\text{但满足此式的}\ h^{ab}\ \text{很多}) \tag{15-5-4}$$

其次, h^{ab}还应是空间张量, 即$h^{ab}\nabla_b t=0$. 这一要求从满足式(15-5-4)的众多h^{ab}中

挑出了唯一的一个. 有了 h^{ab} 又可从 N_a 求得 $N^a(=h^{ab}N_b)$，代入式(15-5-3)便得 g^{ab}. 可见 $(N,N_a,h_{ab})|_{\Sigma_t}$ 的确可充当空间场位形变量.

把引力理论重铸为哈氏形式的第一步是把 Hilbert 拉氏密度 $\mathscr{L}=(-g)^{1/2}R$ 用位形变量 N,N_a,h_{ab} 及其时、空导数表出. 由 $G_{ab}=R_{ab}-Rg_{ab}/2$ 得

$$R=2(G_{ab}n^an^b-R_{ab}n^an^b)=({}^3R-K_{ab}K^{ab}+K^2)-2R_{ab}n^an^b\,, \tag{15-5-5}$$

其中第二步用到中册命题14-5-1. 上式右边第二项可求之如下:

$$\begin{aligned}n^aR_{ab}n^b&=n^aR_{acb}{}^cn^b=-n^a(\nabla_a\nabla_c-\nabla_c\nabla_a)n^c\\&=-\nabla_a(n^a\nabla_cn^c)+(\nabla_an^a)\nabla_cn^c+\nabla_c(n^a\nabla_an^c)-(\nabla_cn^a)\nabla_an^c\\&=-\nabla_a(n^a\nabla_cn^c)+K^2+\nabla_c(n^a\nabla_an^c)-K_{ac}K^{ac}\,,\end{aligned}$$

其中最末一步用到 $K^{ac}=K^{ca}$. 代入式(15-5-5)再代入 $\mathscr{L}=\sqrt{-g}\,R$ 并利用式(15-4-2)便得

$$\mathscr{L}=\sqrt{h}\,N\,({}^3R+K_{ab}K^{ab}-K^2)+2\sqrt{-g}\,[\nabla_a(n^a\nabla_cn^c)-\nabla_c(n^a\nabla_an^c)]\,. \tag{15-5-6}$$

在对 $\mathscr{L}$ 积分时, 上式右边后两项可用高斯定理化为边界积分. 后面还会多次出现边界项. 为了突出主线, 暂时略去所有边界项, 留待最后统一讨论. 上式在略去边界项后简化为

$$\mathscr{L}=\sqrt{h}N({}^3R+K_{ab}K^{ab}-K^2)\,, \tag{15-5-7}$$

其中的 K_{ab} 可由命题14-4-5 (并注意 $\mathrm{D}_ch_{ab}=0\Rightarrow\mathscr{L}_{\vec N}h_{ab}=2\mathrm{D}_{(a}N_{b)}$)求得:

$$K_{ab}=\frac{1}{2}N^{-1}(\dot h_{ab}-2\mathrm{D}_{(a}N_{b)})\,. \tag{15-5-8}$$

代入式(15-5-7)便可看出 $\mathscr{L}$ 确是位形变量 (N,N_a,h_{ab})，h_{ab} 的一阶时间导数 $\dot h_{ab}$ 以及 h_{ab} 和 N_a 的空间导数的局域函数(${}^3R$ 中含有 h_{ab} 的坐标分量 h_{ij} 对空间坐标的偏导数). 然而 $\mathscr{L}$ 不含 $\dot N$ 和 $\dot N_a$，故相应的动量变量

$$\pi_N\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot N}=0\,,\qquad \pi_{N_a}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot N_a}=0\,.$$

于是 $\pi_N=0$ 及 $\pi_{N_a}=0$ 就给出两个初级约束. 另一方面, 注意到式(15-5-7)中只有 $K_{ab}K^{ab}$ 和 K^2 含 $\dot h_{ab}$，可知与 h_{ab} 共轭的动量变量

$$\pi^{ab}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot h_{ab}}=2\sqrt{h}N\left(K^{cd}\frac{\partial K_{cd}}{\partial\dot h_{ab}}-K\frac{\partial K}{\partial\dot h_{ab}}\right), \tag{15-5-9}$$

其中 $\partial K_{cd}/\partial\dot h_{ab}$ 可由式(15-5-8)求得:

$$\frac{\partial K_{cd}}{\partial \dot{h}_{ab}}=\frac{1}{2N}\frac{\partial \dot{h}_{cd}}{\partial \dot{h}_{ab}}=\frac{1}{2N}\delta^{(a}{}_{c}\delta^{b)}{}_{d}\,,$$

(其中第二步用到$\partial \dot{h}_{cd}/\partial \dot{h}_{ab}=\delta^{(a}{}_{c}\delta^{b)}{}_{d}$，此式的来源见选读15-4-1.) 从而又有

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{h}_{ab}}=\frac{\partial (h^{cd}K_{cd})}{\partial \dot{h}_{ab}}=h^{cd}\frac{1}{2N}\delta^{(a}{}_{c}\delta^{b)}{}_{d}=\frac{1}{2N}h^{ab}\,,$$

故

$$\pi^{ab}=\sqrt{h}\,(K^{ab}-Kh^{ab})\,. \tag{15-5-10}$$

由此得

$$K=-\frac{\pi}{2\sqrt{h}}\,,\quad (\text{其中}\ \pi\equiv h^{ab}\pi_{ab}) \tag{15-5-11}$$

从而 K_{ab} 可用 π_{ab} 表出：

$$K_{ab}=\frac{1}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab})\,, \tag{15-5-12}$$

因而 $\dot{h}_{ab}$ 可由位形和动量变量表出(即 h_{ab} 相应的速度变量 $\dot{h}_{ab}$ 可被反解出)：

$$\dot{h}_{ab}=2NK_{ab}+2\mathrm{D}_{(a}N_{b)}=2N\frac{1}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab})+2\mathrm{D}_{(a}N_{b)}\,, \tag{15-5-13}$$

可见除 $\pi_N=0$ 和 $\pi_{N_a}=0$ 外没有其他初级约束.

把式(15-5-12)、(15-5-11)代入(15-5-7)得

$$\mathscr{L}=\sqrt{h}N\left[{}^{3}R+\frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^{2}\right)\right], \tag{15-5-14}$$

与 Hilbert 拉氏密度相应的哈氏密度在忽略边界项时可表为

$$\mathscr{H}=\pi^{ab}\dot{h}_{ab}-\mathscr{L}=\sqrt{h}N\left[-{}^{3}R+\frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^{2}\right)\right]+2\pi^{ab}\mathrm{D}_{a}N_{b}\,. \tag{15-5-15}$$

因而与 Hilbert 作用量相应的哈氏量在忽略边界项时可表为

$$H=\int_{\Sigma_t}\mathscr{H}=\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N\left[-{}^{3}R+\frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^{2}\right)\right]$$

$$-2\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N_{b}\mathrm{D}_{a}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}\right)+2\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}\,\mathrm{D}_{a}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}N_{b}\pi^{ab}\right). \tag{15-5-16}$$

积分号下没有写出的体元按小节15.4.1的约定一律为 ${}^{3}\boldsymbol{e}$ 而非 ${}^{3}\boldsymbol{\varepsilon}$. 注意到

${}^3e\,h^{1/2}={}^3\varepsilon$，便知最后一个积分实为 $2\int_{\Sigma_t}{}^3\varepsilon\,\mathrm{D}_a(h^{-1/2}N_b\pi^{ab})$，可用高斯定理化为 Σ_t 边界上的积分并留待最后一并讨论(见选读15-5-1). 暂时忽略这一积分, 则

$$H[N,N_b;h_{ab},\pi^{ab}]=\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N[-{}^3R+h^{-1}(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2)]-2\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N_b\mathrm{D}_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}),$$

或

$$H=\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}(NC+N_bC^b),\tag{15-5-17}$$

其中

$$C\equiv-{}^3R+h^{-1}(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2),\qquad C^b\equiv-2\mathrm{D}_a(h^{-1/2}\pi^{ab}).\tag{15-5-18}$$

仿照小节15.2.4 及15.4.3，只要 $\delta H/\delta N$ 和 $\delta H/\delta N_b$ 不在整个初级约束面 Γ_1 上为零, 则要求它们为零便给出次级约束. 由式(15-5-17)易得

$$\delta H/\delta N=h^{1/2}C,\qquad \delta H/\delta N_b=h^{1/2}C^b,$$

所以次级约束为

$$C=-{}^3R+h^{-1}(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2)=0\tag{15-5-19}$$

和

$$C^b=-2\mathrm{D}_a(h^{-1/2}\pi^{ab})=0.\tag{15-5-20}$$

利用 π_{ab} 同 K_{ab} 的关系式(15-5-12)不难验证式(15-5-19)、(15-5-20)与§14.5 曾推出的约束方程(14-5-9)、(14-5-10)一致.

真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=0$ 当然满足约束方程(15-5-19)、(15-5-20), 于是由式(15-5-17)有 $H=0$. 这是否表明相应的引力场的总能量为零? 问题在于式(15-5-17)是忽略边界项的结果. 考虑边界项后的答案见选读15-5-1.

仿照小节15.2.4 (及小节15.4.3)还可知道

$$\dot{h}_{ab}=\frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}},\qquad \dot{\pi}^{ab}=-\frac{\delta H}{\delta h_{ab}}\tag{15-5-21}$$

代表演化方程. 所以欲得演化方程应先计算泛函导数 $\delta H/\delta\pi^{ab}$ 和 $\delta H/\delta h_{ab}$. 为此, 把式(15-5-15)改写为

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2+\mathscr{H}_3,\tag{15-5-22}$$

其中

$$\mathscr{H}_1\equiv-N\sqrt{h}\,{}^3R,\quad \mathscr{H}_2\equiv\frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2\right),\quad \mathscr{H}_3\equiv2\pi^{ab}\mathrm{D}_aN_b.\tag{15-5-23}$$

先考虑N, N_b, h_{ab}, π^{ab}中只有$\delta\pi^{ab} \neq 0$的情况. 这时

$$\delta\mathscr{H}_1|_{\delta\pi^{ab}\neq 0} = 0 , \quad \delta\mathscr{H}_3|_{\delta\pi^{ab}\neq 0} = 2(\mathrm{D}_a N_b)\delta\pi^{ab} ,$$

$$\delta\mathscr{H}_2|_{\delta\pi^{ab}\neq 0} = \frac{N}{\sqrt{h}}(2\pi_{ab}\delta\pi^{ab} - \pi\delta\pi) = \frac{N}{\sqrt{h}}(2\pi_{ab} - \pi h_{ab})\delta\pi^{ab} ,$$

其中第二步用到$\pi = \pi^{ab}h_{ab} \Rightarrow \delta\pi = h_{ab}\delta\pi^{ab}$. 于是

$$\delta H|_{\delta\pi^{ab}\neq 0} = \int_{\Sigma_t}\left[\frac{N}{\sqrt{h}}(2\pi_{ab} - \pi h_{ab}) + 2\mathrm{D}_a N_b\right]\delta\pi^{ab} ,$$

从而

$$\frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}\right) + 2\mathrm{D}_{(a}N_{b)} . \tag{15-5-24}$$

上式最末一项加圆括号是出于如下考虑: 设$\delta H = \int \chi_{ab}\delta\pi^{ab}$, 在$\pi^{ab} = \pi^{(ab)}$的情况下, 若$\chi_{ab}$满足上式, 则$\chi_{ab} + \Lambda_{ab}$ (其中$\Lambda_{ab} = \Lambda_{[ab]}$)也满足. 为消除泛函导数的这一不确定性, 我们约定在$\pi^{ab} = \pi^{(ab)}$的情况下把$\delta H/\delta\pi^{ab}$定义为$\chi_{(ab)}$.

再考虑只有$\delta h_{ab} \neq 0$的情况. 这时式(15-5-23)最好明确表为

$$\mathscr{H}_1(\lambda) \equiv -N\sqrt{h(\lambda)}\,{}^3R(\lambda), \quad \mathscr{H}_2(\lambda) \equiv \frac{N}{\sqrt{h(\lambda)}}\left[\pi^{ab}\pi_{ab}(\lambda) - \frac{1}{2}\pi^2(\lambda)\right], \quad \mathscr{H}_3(\lambda) \equiv 2\pi^{ab}\overset{\lambda}{\mathrm{D}}_a N_b . \tag{15-5-23'}$$

仿照式(15-1-40)的推导可推得(当时用到$\delta g = g g^{ab}\delta g_{ab}$, 现在要用$\delta h = h h^{ab}\delta h_{ab}$)

$$\delta\mathscr{H}_1|_{\delta h_{ab}\neq 0} = -N\sqrt{h}\,\mathrm{D}^a v_a - N\sqrt{h}\left({}^3R_{ab} - \frac{1}{2}{}^3R h_{ab}\right)\delta h^{ab} , \tag{15-5-25}$$

其中

$$v_a \equiv \mathrm{D}^b\delta h_{ab} - h^{cd}\mathrm{D}_a\delta h_{cd} . \tag{15-5-26}$$

式(15-5-25)右边第一项$= -\sqrt{h}\,[\mathrm{D}^a(N v_a) - v_a\mathrm{D}^a N] = \sqrt{h}\, v_a \mathrm{D}^a N$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{h}(\mathrm{D}^a N)\mathrm{D}^b\delta h_{ab} - \sqrt{h}(\mathrm{D}^a N)h^{cd}\mathrm{D}_a\delta h_{cd} \\
&= -\sqrt{h}(\mathrm{D}^b\mathrm{D}^a N)\delta h_{ab} + \sqrt{h}\, h^{cd}(\mathrm{D}_a\mathrm{D}^a N)\delta h_{cd} \\
&= (-\sqrt{h}\,\mathrm{D}^a\mathrm{D}^b N + \sqrt{h}\, h^{ab}\mathrm{D}_c\mathrm{D}^c N)\,\delta h_{ab} ,
\end{aligned} \tag{15-5-27}$$

其中第二、四步都略去了边界项. 仿照(15-1-36)的推导可得$\delta h^{ab} = -h^{ac}h^{bd}\delta h_{cd}$, 故

$$\text{式(15-5-25)右边第二项} = N\sqrt{h}\left({}^3R_{ab} - \frac{1}{2}{}^3Rh_{ab}\right)h^{ac}h^{bd}\delta h_{cd}$$

$$= N\sqrt{h}\left({}^3R^{cd} - \frac{1}{2}{}^3Rh^{cd}\right)\delta h_{cd}.$$

代入式(15-5-25)得

$$\delta\mathscr{H}_1|_{\delta h_{ab}\neq 0} = \left[-\sqrt{h}(\mathrm{D}^a\mathrm{D}^b N - h^{ab}\mathrm{D}_c\mathrm{D}^c N) + N\sqrt{h}\left({}^3R^{ab} - \frac{1}{2}{}^3Rh^{ab}\right)\right]\delta h_{ab}. \tag{15-5-28}$$

由式(15-5-23′)第二式得(再次用 $\delta h = hh^{ab}\delta h_{ab}$)

$$\delta\mathscr{H}_2|_{\delta h_{ab}\neq 0} = -\frac{N}{2\sqrt{h^3}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\delta h + \frac{N}{\sqrt{h}}\delta\left[\pi^{ab}\pi^{cd}h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}(\pi^{ab}h_{ab})^2\right]$$

$$= -\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\delta h_{ab} + \frac{N}{\sqrt{h}}(2\pi^{ab}\pi^{cd}h_{ac}\delta h_{bd} - \pi\pi^{ab}\delta h_{ab})$$

$$= \left[-\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd} - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ac}\pi^b{}_c - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right)\right]\delta h_{ab}. \tag{15-5-29}$$

此外, 由式(15-5-23′)第三式得

$$\delta\mathscr{H}_3|_{\delta h_{ab}\neq 0} = 2\pi^{ab}\delta(\overset{\lambda}{\mathrm{D}}_a N_b) = 2\pi^{ab}\delta[\mathrm{D}_a N_b - {}^3C^c{}_{ab}(\lambda)N_c]$$

$$= -2\pi^{ab}(\delta\,{}^3C^c{}_{ab})N_c = -\pi^{ab}N^d(2\mathrm{D}_a\delta h_{bd} - \mathrm{D}_d\delta h_{ab})$$

$$= 2\sqrt{h}\,\mathrm{D}_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{bd} - \sqrt{h}\,\mathrm{D}_d\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{ab}$$

$$= 2\pi^{ab}(\mathrm{D}_a N^d)\delta h_{bd} - \sqrt{h}\,\mathrm{D}_d\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{ab}$$

$$= \left[2\pi^{cb}\mathrm{D}_c N^a - \sqrt{h}\mathrm{D}_c\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c\right)\right]\delta h_{ab}, \tag{15-5-30}$$

其中第四步用到 $\delta\,{}^3C^c{}_{ab} = h^{cd}(\mathrm{D}_a\delta h_{bd} + \mathrm{D}_b\delta h_{ad} - \mathrm{D}_d\delta h_{ab})/2$ [其推导类似于式(15-1-29)关于 $\delta C^b{}_{ac}$ 的推导], 第五步略去了两个边界项, 第六步用到分部积分及约束方程(15-5-20). 于是由式(15-5-28)、(15-5-29)和(15-5-30)得

$$\frac{\delta H}{\delta h_{ab}} = -\sqrt{h}\,(\mathrm{D}^a\mathrm{D}^b N - h^{ab}\mathrm{D}_c\mathrm{D}^c N) + N\sqrt{h}\left({}^3R^{ab} - \frac{1}{2}{}^3Rh^{ab}\right)$$

$$-\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd}-\frac{1}{2}\pi^2\right)+\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ac}\pi^b{}_c-\frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right)$$

$$+2\pi^{c(a}\mathrm{D}_cN^{b)}-\sqrt{h}\,\mathrm{D}_c\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c\right). \tag{15-5-31}$$

由式(15-5-21)和(15-5-24)、(15-5-31)得演化方程

$$\dot{h}_{ab}=\frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}}=\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab}\right)+2\,\mathrm{D}_{(a}N_{b)} \tag{15-5-32}$$

及

$$\dot{\pi}^{ab}=-\frac{\delta H}{\delta h_{ab}}$$

$$=\sqrt{h}(\mathrm{D}^a\mathrm{D}^bN-h^{ab}\mathrm{D}_c\mathrm{D}^cN)-N\sqrt{h}\left({}^3R^{ab}-\frac{1}{2}{}^3Rh^{ab}\right)+\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd}-\frac{1}{2}\pi^2\right)$$

$$-\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ac}\pi^b{}_c-\frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right)-2\pi^{c(a}\mathrm{D}_cN^{b)}+\sqrt{h}\,\mathrm{D}_c\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c\right). \tag{15-5-33}$$

利用π_{ab}同K_{ab}的关系(15-5-10)便可验证以$\dot{h}_{ab}$，$\dot{\pi}^{ab}$表出的演化方程(15-5-32)、(15-5-33)同以$\dot{h}_{ab}$，$\dot{K}_{ab}$表出的演化方程(14-5-11)、(14-5-12)一致. 由此可知约束方程(15-5-19)、(15-5-20)和演化方程(15-5-32)、(15-5-33)等价于真空爱因斯坦方程$G_{ab}=0$.

第14章末已经指出, 计算表明约束在演化中自动保持, 即

$$\mathscr{L}_t({}^3R-K_{ab}K^{ab}+K^2)=0, \qquad \mathscr{L}_t(\mathrm{D}_aK^a{}_c-\mathrm{D}_cK)=0,$$

用本章的符号表示也就是$\dot{C}=0$和$\dot{C}^b=0$, 即次级约束$C=0$和$C^b=0$满足自洽性条件, 因此不会再有进一步的次级约束, 终极约束面$\bar{\varGamma}$就是由初级约束$\pi_N=0$，$\pi_{N_a}=0$和次级约束$C=0$，$C^b=0$所决定的子流形. 还可证明(见小节15.7.4)所有这些约束都为第一类. 仿照小节15.4.3的讨论, 引力场的全部约束为第一类表明N和N_a可看作自由拉氏乘子, 因而N和N_a及其共轭动量π_N和π_{N_a}可从动力学变量的行列中开除出去, 这时的相空间往往是指初级约束面$\varGamma_1$. N和N_a的自由性的物理意义见小节15.7.4.

[选读 15-5-1]

现在讨论一直被忽略的边界项问题. 由于有$3+1$分解, 定义作用量所用的开域U自然取“三明治”式[见式(15-1-8)前的一段], 即U是介于分层面$\varSigma_1$和$\varSigma_2$的

时空区域. 广义相对论的哈氏形式对整体拓扑和边界条件提出如下要求: Σ_t 要么是紧致且无边界的(例如 3 维球面 S^3), 要么 Σ_t 存在一个紧致子集, 其补集微分同胚于 $\mathbb{R}^3$ 中的一个闭球的补集 (即在足够远处有最简单的拓扑), 而且 Σ_t 上的场量的边界条件足以保证它在空间无限远为渐近平直.①

先讨论 Σ_t 为紧致而且没有边界的情况(相应的时空称为**封闭宇宙**), 这时 $\dot{U} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 现在对前面计算 H 时所有略掉的边界项算一笔总帐.

首先, Hilbert 作用量 S 比正确作用量 S' [见式(15-1-46)]少一附加项 $2\int_{\dot{U}} K$, 我们来证明它与式(15-5-6)中被略去的 $2\nabla_a(n^a\nabla_c n^c)$ 的贡献恰好相消. $\int_{\dot{U}} K$ 中的 K 是边界 $\dot{U}$ 的外曲率 K_{ab} 的迹, 而 K_{ab} 的定义涉及 $\dot{U}$ 的单位法矢[正因如此才可能与 $\nabla_a(n^a\nabla_c n^c)$ 相消]. 但法矢的方向问题现在比较微妙. 由于涉及高斯定理

$$\int_U \varepsilon \nabla^a v_a = \int_{\dot{U}} n_a v^a , \qquad \text{[见式(15-1-41)]}$$

而现在 $\dot{U} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 的法矢类时, 根据上册§5.5 注 2, 定义 K 时要用 $\dot{U}$ 的内向法矢. 然而从 $\nabla_a(n^a\nabla_c n^c)$ 的来源考察, 法矢应指向未来, 在 Σ_1 上固然向内, 但在 Σ_2 上却向外, 与 $\int_{\dot{U}} K$ 对法矢的要求不尽相同, 有必要用不同符号区分两种法矢. 我们用 n^a 代表指向未来法矢, 而用 $\tilde{n}^a$ 代表内向法矢, 于是对 Σ_1 和 Σ_2 分别有 $\tilde{n}^a = n^a$ 和 $\tilde{n}^a = -n^a$. 既然 $\int_{\dot{U}} K$ 涉及的 K_{ab} 是用 $\tilde{n}^a$ 定义的, 不如把 K_{ab} 和 K 相应改记为 $\tilde{K}_{ab}$ 和 $\tilde{K}$, 后者又可表为

$$\tilde{K} \equiv h^{ab}\tilde{K}_{ab} = h^{ab}h_a{}^c\nabla_c\tilde{n}_b = g^{cb}\nabla_c\tilde{n}_b + \tilde{n}^c\tilde{n}^b\nabla_c\tilde{n}_b = \nabla_c\tilde{n}^c .$$

于是下式表明略去 $2\nabla_a(n^a\nabla_c n^c)$ 与略去 $2\int_{\dot{U}} K$ 的效果相消:

$$\int_U 2\nabla_a(n^a\nabla_c n^c) = 2\int_{\dot{U}}(n^a\nabla_c n^c)\,\tilde{n}_a = 2\int_{\dot{U}}(\tilde{n}^a\nabla_c\tilde{n}^c)\,\tilde{n}_a = -2\int_{\dot{U}}\nabla_c\tilde{n}^c = -2\int_{\dot{U}}\tilde{K} ,$$

其中第一步用到高斯定理. 若要补写积分体元, 则 U 上的积分应补与 g_{ab} 适配的 ε, 而 $\dot{U}$ 上的积分应补 ε 在 $\dot{U}$ 上的诱导体元 $\hat{\varepsilon}$, 满足 $\hat{\varepsilon}_{abc} = n^d_{外}\varepsilon_{dabc}$, 其中 $n^d_{外}$ 是 $\dot{U}$ 的外向单位法矢, 见式(5-5-6)及其说明.

其次, 式(15-5-6)中曾被略去的 $-2\nabla_c(n^a\nabla_a n^c)$ 的贡献为零, 因为

$$\int_U 2\nabla_c(n^a\nabla_a n^c) = 2\int_{\dot{U}}(n^a\nabla_a n^c)\tilde{n}_c = 2\int_{\dot{U}}(\tilde{n}^a\nabla_a\tilde{n}^c)\tilde{n}_c = \int_{\dot{U}}\tilde{n}^a\nabla_a(\tilde{n}^c\tilde{n}_c) = 0 .$$

第三, 由于 Σ_t 没有边界, 式(15-5-16)最末一项贡献为零. 因此, 即使计算 H 时

① 这一要求可弱化为允许 Σ_t 包含不止一个渐近平直区, 以便适用于诸如施瓦西时空的 Kruskal 延拓.

不略去任一可化为边界项的项，所得结果仍为式(15-5-17). 同理，在计算 $\delta H/\delta h_{ab}$ 的过程中略掉的各项也都因 Σ_t 没有边界而可略去.

下面讨论 Σ_t 为非紧致且渐近平直的情况. 选读15-1-1(结果为 $S \equiv S+2\int_{\dot U} K$)是对任意形状的 U 讨论的，现在 $\dot U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，关于 $\dot U$ 的边界条件是 Σ_1 和 Σ_2 上的场要渐近平直. 如果仿照紧致情况的思路从作用量所应添补的边界项谈起，势必更加复杂. 但我们可直接从哈氏形式着手. 把引力场论重铸为哈氏形式的关键是找出适当的哈氏量 H，使由 $\dot h_{ab} = \delta H/\delta \pi^{ab}$ 和 $\dot\pi^{ab} = -\delta H/\delta h_{ab}$ 求得的演化方程恰为式(15-5-32)和(15-5-33)，因为§14.5 已经证明它们配以约束方程(15-5-19)、(15-5-20)等价于真空爱因斯坦方程. 因此，我们不必逐项追究对拉氏密度以及从它出发求得 H 表达式(15-5-17)的过程中所作的添加和忽略，只须检查从该式的 H 出发通过计算泛函导数 $\delta H/\delta\pi^{ab}$ 和 $\delta H/\delta h_{ab}$ 导出演化方程(15-5-32)和(15-5-33)的过程中所略去的边界项，然后考虑如何修改 H 的表达式以使在保留这些项时恰能得出式(15-5-32)和(15-5-33). 利用空间渐近平直条件可在 Σ_t 上选择渐近笛卡儿系 $\{x^i\}$. 令

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\,,$$

则 $r\to\infty$ 代表趋于空间无限远. 选择 $3+1$ 分解所用的类时矢量场 t^a 使得在 $r\to\infty$ 时 $N_a \to 0$, $N-\hat N \to 0$ (其中 $\hat N$ 为某常数)，而且各量的分量(及其对坐标的导数)趋于零的速率满足 Regge and Teitelboim(1974) 的渐近为零条件(例如 $N^i \sim r^{-1}$，$N-\hat N \sim r^{-1}$). 以 S 代表半径为 r 的坐标球面，把在 $\delta H/\delta h_{ab}$ 计算中略去的各项表达为 S 上的面积分，利用渐近为零条件便可发现除一个面积分外都在 $r\to\infty$ 时趋于零. 例如，式(15-5-27)中第三个等号后的第一项曾被表为

$$\sqrt{h}(\mathrm{D}^a N)\,\mathrm{D}^b\delta h_{ab} = \sqrt{h}\,\mathrm{D}_b[(\mathrm{D}_a N)\,\delta h^{ab}] - \sqrt{h}(\mathrm{D}^b\mathrm{D}^a N)\,\delta h_{ab} = -\sqrt{h}(\mathrm{D}^b\mathrm{D}^a N)\,\delta h_{ab}\,,$$

其中最后一步略去的一项在 S 面内(开球)的积分为

$$\int_{S\text{面内}} {}^3\boldsymbol{e}\,\sqrt{h}D_b[(\mathrm{D}_a N)\,\delta h^{ab}] = \int_S \hat r_b[(\mathrm{D}_a N)\,\delta h^{ab}] \to 0 \quad \text{当 } r\to\infty\,,$$

其中 $\hat r^b$ 是 S 的单位法矢. 上式第一步用到高斯定理，第二步是由于 N 在 $r\to\infty$ 时足够快地趋于常数. 上面提到的唯一非零面积分来自式(15-5-27)第一个等号后的第一项，即 $-\sqrt{h}\,\mathrm{D}^a(Nv_a)$. 它在 S 面内的积分可由高斯定理化为 $-\int_S Nv_a\hat r^a$，以式(15-5-26)代入得

$$-\int_S Nv_a\hat r^a = -\int_S N\hat r^a h^{bc}[\mathrm{D}_c(\delta h_{ab}) - \mathrm{D}_a(\delta h_{bc})]\,.$$

以 $-\delta C$ 代表上式在 $r\to\infty$ 时的极限，因 $r\to\infty$ 时 $N\to\hat N$ (常数)，$h^{bc}\to\delta^{bc}$，

$\mathrm{D}_c \to \partial_c$ (与欧氏度规适配),

$$\delta C = \hat{N} \lim_{r\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\int_S \left[\partial\left(\frac{\delta h_{ij}}{\partial x^j}\right) - \partial\left(\frac{\delta h_{jj}}{\partial x^i}\right)\right]\hat{r}^i = \hat{N}\,\delta\left[\lim_{r\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\int_S\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\hat{r}^i\right]. \quad (15\text{-}5\text{-}34)$$

前面从式(15-5-17)的 H 表达式出发略去所有边界项得

$$\delta H = \int_{\Sigma_t} (T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab})\,, \quad (15\text{-}5\text{-}35)$$

其中 T_{ab} 和 S^{ab} 分别是式(15-5-32)和(15-5-33)最右边的长式的简写. 现在看到, 如果不忽略边界项, 则上式不成立而应代之以下式:

$$\delta H = \int_{\Sigma_t} (T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab}) - \delta C\,. \quad (15\text{-}5\text{-}36)$$

令

$$H' \equiv H + C = H + \hat{N} \lim_{r\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\int_S\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\hat{r}^i\,, \quad (15\text{-}5\text{-}37)$$

则

$$\delta H' = \int_{\Sigma_t} (T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab})\,, \quad (15\text{-}5\text{-}38)$$

故 $\delta H'/\delta\pi^{ab} = T_{ab}$, $\delta H'/\delta h_{ab} = -S^{ab}$. 若选 H' 为哈氏量, 则由哈氏方程

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}} \qquad \text{和} \qquad \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ab}}$$

便得引力场的演化方程(15-5-32)和(15-5-33). 所以 H' 可用作真空引力场的哈氏量.

应该强调, 哈氏量的必要条件是存在张量场 T_{ab} 和张量密度场 S^{ab} 使

$$\delta\,(\text{哈氏量}) = \int_{\Sigma_t} (T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab})\,. \quad (15\text{-}5\text{-}39)$$

因为只有这样方可定义泛函导数 δ(哈氏量)$/\delta\pi^{ab}$ 和 δ(哈氏量)$/\delta h_{ab}$, 而只有这两个导数有意义方可导出哈氏演化方程. 然而由式(15-5-17)定义的 H 在渐近平直情况下的变分 δH (不忽略边界项)并不满足这一要求, 所以 H 根本不是哈氏量. 反之, H' 的变分 $\delta H'$ 不但可表为式(15-5-39)的形式, 而且式中的 T_{ab} 和 S^{ab} 分别等于式(15-5-32)和(15-5-33)最右边的长式, 因而由 $\dot{h}_{ab} = \delta H'/\delta\pi^{ab}$ 和 $\dot{\pi}^{ab} = -\delta H'/\delta h_{ab}$ 给出的演化方程正是引力场的演化方程, 所以说 H' 才是真空引力场的正确的哈氏量.

现在就可以回答前面[式(15-5-20)后]提出的问题. 对空间渐近平直的情况, 哈

氏量应为 H' 而非 H. 因为 H 在约束面上的值为零, 所以 H' 在约束面上的值为

$$C = \hat{N}\lim_{r\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\int_S\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j}-\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\hat{r}^i \,. \tag{15-5-40}$$

与式(12-7-5)对比可知此值正比于渐近平直时空的 ADM 能量. 只要把 $\hat{N}$ 所渐近趋于的常数取作 $1/16\pi$, 则 C 正好等于 ADM 能量. 于是得到"哈氏量 H' 在约束面 $\overline{\Gamma}$ 上的数值等于 ADM 能量"这一满意结论. 事实上, 正是哈氏形式的这一讨论为 ADM 能量的创意提供了动机, 而式中的系数 $1/16\pi$ 则只须把该式用于施瓦西时空并要求所得的 ADM 能量 E 等于施瓦西度规的参数 M 便可得到. **[选读 15-5-1 完]**

[选读 15-5-2]

考虑到引力场能的非定域性(见小节 12.6.3), 许多相对论学者长期以来致力于寻找准局域能(动)量和角动量的合理定义, 其中不少人采用哈氏方法. 下面非常简略地介绍 Nester 等在这方面的工作的要点: 既然全空间 Σ_t 的哈氏量 H' 的数值(在满足引力场方程的前提下)等于边界面积分, 即 ADM 能量, 自然可以认为 Σ_t 的任一有限 3 维区域 σ_t (其边界 $\partial\sigma_t$ 为闭合 2 维面)的哈氏量 $H'(\sigma_t)$ 的数值代表该区域内的准局域引力场能. 与 Σ_t 的能量值类似, $H'(\sigma_t)$ 也可表为两项之和:

$$H'(\sigma_t) = \int_{\sigma_t} \boldsymbol{e}\, h^{1/2}\mathscr{H} + \int_{\sigma_t} \mathrm{d}\boldsymbol{B} \quad ,$$

其中 $\mathscr{H} = NC + N_b C^b$ [参见式(15-5-17)], $\boldsymbol{B}$ 是一个 2 形式场. 由于引力场满足约束方程, 上式右边第一个积分为零, 于是由 Gauss 定理得

$$H'(\sigma_t) = \int_{\partial\sigma_t} \boldsymbol{B} \quad .$$

因此, 任一时刻 t 的任一 2 维闭曲面 $\partial\sigma_t$ 内的准局域能量等于一个边界面积分 $\int_{\partial\sigma_t}\boldsymbol{B}$. 然而被积 2 形式 $\boldsymbol{B}$ 并不唯一, 事实上, 他们发现前人求得的每种赝张量都对应于现在的一个边界项. 他们还进一步对边界项的唯一性做了深入讨论, 发现在满足合理条件的情况下这一边界项(准局域量)被确定到只有两种选择的程度, 详见 Chen and Nester(2000)和 Nester(2004)及其所引文献. **[选读 15-5-2 完]**

§15.6 张量密度 [选读]

张量密度在广义相对论的拉氏、哈氏形式(特别是 §15.7)以及许多数学物理问题(例如几何量子化)中都有重要应用, 本节对此作一比较详细的介绍. [可参阅 Ashtekar(1991), Woodhouse(1980), Lee and Wald(1990).]

设 $e_{a_1\cdots a_n}$ 是定向流形 M 上与定向相容的一个体元(称为右手体元), 则它依下

式决定唯一的全反称 $(n,0)$ 型张量场 $\bar{e}^{a_1\cdots a_n}$：

$$\bar{e}^{a_1\cdots a_n}e_{a_1\cdots a_n}=n!\ . \tag{15-6-1}$$

我们称 $\bar{e}^{a_1\cdots a_n}$ 为与体元 $e_{a_1\cdots a_n}$ 相伴的(右手)**上标体元**. $e_{a_1\cdots a_n}$ 和 $\bar{e}^{a_1\cdots a_n}$ 又分别简记为 $\boldsymbol{e}$ 和 $\bar{\boldsymbol{e}}$.

定义1　设 M 是 n 维定向流形，$\mathscr{F}_M(k,l)$ 是 M 上全体光滑 (k,l) 型张量场的集合，$\varPhi_M$ 是 M 上全体右手上标体元的集合，即 $\varPhi_M\equiv\{\bar{\boldsymbol{e}}\equiv\bar{e}^{a_1\cdots a_n}\}$，则映射

$$\hat{T}\ :\ \varPhi_M\to\mathscr{F}_M(k,l)$$

称为 M 上的**权**(weight)**为** $\boldsymbol{m}$ $(\in\mathbb{R})$ **的** $\boldsymbol{(k,l)}$ **型张量密度场**(tensor density field), 若

$$\hat{T}(\alpha\bar{\boldsymbol{e}})=\alpha^m\hat{T}(\bar{\boldsymbol{e}}),\quad \forall\bar{\boldsymbol{e}}\in\varPhi_M,\ \alpha\in\mathscr{F}_M(0,0),\ \alpha>0\,. \tag{15-6-2}$$

定义1中的“**场**”字来源于 $\hat{T}$ 可逐点定义. 设 $p\in M$，则 $\hat{T}|_p$ 定义为把 $\bar{\boldsymbol{e}}|_p$ 变为 p 点的 (k,l) 型张量的映射. 而 $\bar{\boldsymbol{e}}|_p$ 又可表为 $\bar{\boldsymbol{e}}(p)$，故 $\hat{T}(\bar{\boldsymbol{e}}(p))$ 就是 p 点的一个 (k,l) 型张量. 在这个意义上也可把 $\hat{T}(\bar{\boldsymbol{e}})$ 改写为复合映射 $\hat{T}\circ\bar{\boldsymbol{e}}$，于是式(15-6-2)又可表为

$$\hat{T}\circ(\alpha\bar{\boldsymbol{e}})=\alpha^m(\hat{T}\circ\bar{\boldsymbol{e}}),\quad \forall\bar{\boldsymbol{e}}\in\varPhi_M,\ \alpha\in\mathscr{F}_M(0,0),\ \alpha>0\,. \tag{15-6-2$'$}$$

张量密度 $\hat{T}$ 是一个非常特别的映射：只要指定其定义域 $\varPhi_M$ 的一个元素 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 的像 $\hat{T}\circ\bar{\boldsymbol{e}}$，整个映射就被式(15-6-2′)完全确定(因为 $\varPhi_M$ 的任意两个元素只差一个乘子). 这一特点给讨论带来许多方便. 例如，为定义权为 m 的张量密度只须指明它作用于某一 $\bar{\boldsymbol{e}}\in\varPhi_M$ 的像，为证明某张量密度为零只须证明它作用于某一 $\bar{\boldsymbol{e}}\in\varPhi_M$ 得零张量.

权相同的张量密度的加法以及张量密度的数乘按最自然的方法定义. 权为 m 的 (k,l) 型张量密度 $\hat{T}$ 与权为 m' 的 (k',l') 型张量密度 $\hat{T}'$ 的乘积 $\hat{T}\hat{T}'$ ($\otimes$ 号略)也是张量密度，定义为

$$(\hat{T}\hat{T}')\circ\bar{\boldsymbol{e}}:=(\hat{T}\circ\bar{\boldsymbol{e}})\otimes(\hat{T}'\circ\bar{\boldsymbol{e}}), \tag{15-6-3}$$

易证 $\hat{T}\hat{T}'$ 是权为 $(m+m')$ 的 $(k+k',\,l+l')$ 型张量密度.

设 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 是与体元 $\boldsymbol{e}$ 相伴的上标体元，$\hat{T}$ 是任一张量密度场，则

$$T\equiv\hat{T}\circ\bar{\boldsymbol{e}} \tag{15-6-4}$$

随体元 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 的选择而变，因此是体元依赖的张量场，称为张量密度场 $\hat{T}$ 在体元 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 上的**表示**. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是一个右手基底场，(一般只能局域定义，即只定义在 M 的某一开集上.) $\{(e^\mu)_a\}$ 是其对偶基底场，则

$$e_{a_1\cdots a_n} := (e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n} \tag{15-6-5}$$

和

$$\bar{e}^{a_1\cdots a_n} := (e_1)^{a_1} \wedge \cdots \wedge (e_n)^{a_n} \tag{15-6-6}$$

便是由该基底定义的局域体元及其相伴的上标体元(上标形式的$\wedge$积的定义与下标形式的$\wedge$积的定义相仿). 用上式的$\bar{e}^{a_1\cdots a_n}$作为式(15-6-4)的$\bar{e}$所得的T也可称为$\widehat{T}$在基底$\{(e_\mu)^a\}$上的表示, 是基底依赖的张量场. 把张量密度与普通张量(指非基底依赖的张量)作一对比有助于加深理解. 张量密度是绝对的, 但其表示却基底依赖. 这与张量的绝对性及其分量的基底依赖性非常类似. 在坐标语言中, 知道了张量的全部分量也就知道了张量本身, 而且对张量的所有陈述都用分量来表达. 类似地, 对张量密度也可用其表示来表达. 如果说张量可分为张量自身及其分量两个层次, 那么张量密度可分为密度自身、其表示以及表示的分量等三个层次, 例如, 张量密度$\widehat{T}^a{}_b$的表示是$T^a{}_b \equiv \widehat{T}^a{}_b \circ \bar{\boldsymbol{e}}$, 表示的分量则是$T^\mu{}_\nu \equiv (e^\mu)_a (e_\nu)^b (\widehat{T}^a{}_b \circ \bar{\boldsymbol{e}})$. 对同一$\widehat{T}$, 当基底改变时其表示从一个张量变为另一张量, 因此表示的分量不服从张量分量变换律. 下面给出(证明)表示在基底变换时的变换规律, 由此易得表示的分量的变换规律.

命题 15-6-1 设两个右手基底$\{(e_\mu)^a\}, \{(e'_\mu)^a\}$有如下关系: $(e'_\mu)^a = A^\nu{}_\mu (e_\nu)^a$, 它们的上标体元分别为$\bar{\boldsymbol{e}}$和$\bar{\boldsymbol{e}}'$, 则权为$m$的张量密度$\widehat{T}$的表示在基底变换$\{(e_\mu)^a\} \mapsto \{(e'_\mu)^a\}$下的变换规律为

$$\widehat{T} \circ \bar{\boldsymbol{e}}' = J^m \widehat{T} \circ \bar{\boldsymbol{e}}, \tag{15-6-7}$$

其中J为两基底间的雅可比行列式, 即$J \equiv \det(A^\nu{}_\mu) > 0$.

证明 先看$n = 2$的情况. 这时

$$\begin{aligned}\bar{e}'^{ab} &= (e'_1)^a \wedge (e'_2)^b = [A^1{}_1 (e_1)^a + A^2{}_1 (e_2)^a] \wedge [A^1{}_2 (e_1)^a + A^2{}_2 (e_2)^a] \\ &= (A^1{}_1 A^2{}_2 - A^2{}_1 A^1{}_2)(e_1)^a \wedge (e_2)^b = J \bar{e}^{ab}.\end{aligned}$$

这一证明思路可推广至n为任意正整数的情况, 结论是

$$\bar{e}'^{a_1\cdots a_n} = J \bar{e}^{a_1\cdots a_n}, \quad 或 \quad \bar{\boldsymbol{e}}' = J \bar{\boldsymbol{e}}. \tag{15-6-8}$$

于是$\widehat{T} \circ \bar{\boldsymbol{e}}' = \widehat{T} \circ (J\bar{\boldsymbol{e}}) = J^m \widehat{T} \circ \bar{\boldsymbol{e}}$. □

由于本书涉及的张量密度场大都与度规有关, 我们对M上有度规g_{ab}时的张量密度作一讨论. 以$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$代表与$g_{ab}$(及定向)适配的唯一体元, 则其相伴上标体元$\bar{\varepsilon}^{a_1\cdots a_n}$满足下式(右边对任何号差的度规都不加负号):

$$\bar{\varepsilon}^{a_1\cdots a_n} \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = n! \ . \tag{15-6-9}$$

$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$与任一基底的体元$e_{a_1\cdots a_n}$的关系为[见式(5-4-4)]

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\sqrt{|g|}\,e_{a_1\cdots a_n}, \tag{15-6-10}$$

其中g是g_{ab}在该基底的行列式. 由此易得两个上标体元之间的关系

$$\overline{\varepsilon}^{a_1\cdots a_n}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\overline{e}^{a_1\cdots a_n}. \tag{15-6-11}$$

式(15-6-5)、(15-6-6)、(15-6-10)、(15-6-11)又可分别简写为

$$\boldsymbol{e}=e^1\wedge\cdots\wedge e^n,\ \ \overline{\boldsymbol{e}}=e_1\wedge\cdots\wedge e_n,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}=|g|^{1/2}\boldsymbol{e},\ \ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\overline{\boldsymbol{e}}. \tag{15-6-12}$$

请注意$e_{a_1\cdots a_n}$, $\overline{e}^{a_1\cdots a_n}$依赖于基底而$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$, $\overline{\varepsilon}^{a_1\cdots a_n}$与基底无关.

用下式定义权为1的标量密度场$\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma}\circ\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}:=1, \tag{15-6-13}$$

则由式(15-6-11)易知

$$\hat{\gamma}\circ\overline{\boldsymbol{e}}=\sqrt{|g|}. \tag{15-6-14}$$

可见$\hat{\gamma}$的表示就是$\sqrt{|g|}$. 因为g是度规在所论基底的行列式[由式(15-6-7)可知$\sqrt{|g'|}=J\sqrt{|g|}$], 所以标量密度场$\hat{\gamma}$的表示式基底依赖的标量场. 正如在分量语言中常把张量的分量称为张量那样, 人们也常把密度的表示称为密度. 例如, 人们常说$\sqrt{|g|}$是权为1的标量密度场.

设$\hat{T}$是任一权为1的(k,l)型张量密度场, 则其表示

$$T\equiv\hat{T}\circ\overline{\boldsymbol{e}}=\hat{T}\circ(\sqrt{|g|}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})=\sqrt{|g|}\,\hat{T}\circ\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

令$\tilde{T}\equiv\hat{T}\circ\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 则$\tilde{T}$是一个与基底无关的$(k,l)$型张量场, 于是上式可改写为

$$T=\sqrt{|g|}\,\tilde{T}. \tag{15-6-15}$$

既然常把密度的表示称为密度, 在简易讲法中不妨用上式作为权为1的张量密度的定义. 我们在小节15.1.3中正是这样做的[式(15-1-25)及其前后]. 类似地, 对权为m的张量密度$\hat{T}$有

$$T=\sqrt{|g|}^{\,m}\tilde{T},\quad 其中\ \tilde{T}\equiv\hat{T}\circ\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{15-6-16}$$

式(15-6-15)和(15-6-16)的优点是把T的“密度味”和“张量味”分别体现于因子$\sqrt{|g|}$(或$\sqrt{|g|}^{\,m}$)和$\tilde{T}$上, 其中$\tilde{T}$是不带密度味的张量. 因此, 也可把式(15-6-15)和(15-6-16)的操作称为**退密度化**(dedensitization).

标量场 f 是最特殊的张量场，它的分量同基底无关，因而可认为分量等于 f 自身. 类似地，设 $\widehat{T}$ 是权为 0 的张量密度，则它作用到任一 $\overline{\boldsymbol{e}}\in\Phi_M$ 都得同一张量，这表明它的表示 $T\equiv\widehat{T}\circ\overline{\boldsymbol{e}}$ 同基底无关，所以可把 $m=0$ 的张量密度认同为张量. 任何张量 T 都可看作 $m=0$ 的同型张量密度 $\widehat{T}$，且 $\widehat{T}\circ\overline{\boldsymbol{e}}=T\ \ \forall\overline{\boldsymbol{e}}\in\Phi_M$. 这种认同的一大好处是使张量密度与张量的乘积(及缩并)有意义.

用下式定义权为 -1 的 $(0,n)$ 型全反称张量密度场 $\widehat{e}$:

$$\widehat{e}\circ\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}:=\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{15-6-17}$$

则

$$\widehat{e}\circ\overline{\boldsymbol{e}}=\widehat{e}\circ(\sqrt{|g|}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{e}, \tag{15-6-18}$$

于是 $\boldsymbol{e}$ 也可看作 $\widehat{e}$ 在上标体元 $\overline{\boldsymbol{e}}$ 的表示，因此常说 $e_{a_1\cdots a_n}$ 是权为 -1 的 n 形式密度场. 由于 $\widehat{e}$ 和 $\widehat{\gamma}$ 的权分别为 -1 和 $+1$，其积 $\widehat{\gamma}\widehat{e}$ 是权为零的张量密度，即张量. 这也可从它的表示的体元无关性看出：设 $\mathring{\overline{\boldsymbol{e}}}$ 是任一基底的上标体元，则

$$(\widehat{\gamma}\widehat{e})\circ\mathring{\boldsymbol{e}}=(\widehat{\gamma}\circ\mathring{\boldsymbol{e}})(\widehat{e}\circ\mathring{\boldsymbol{e}})=\sqrt{|g|}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}\ (\text{与体元无关}).$$

此式还说明 $\widehat{\gamma}\widehat{e}$ 正是与 g_{ab} 适配的体元 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$，即

$$\widehat{\gamma}\widehat{e}=\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{15-6-19}$$

借此可对真空引力场拉氏密度 $\sqrt{|g|}\,R$ 的引入加深理解. 真空引力场的 Hilbert 作用量定义为 $S=\int R\boldsymbol{\varepsilon}$. 由于积分体元 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 依赖于场变量 g^{ab}，应用哈氏原理时还须考虑 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的变分. 为免去这一麻烦，可借式(15-6-19)把 $S=\int R\boldsymbol{\varepsilon}$ 改写为 $S=\int R\widehat{\gamma}\widehat{e}$. 令 $\widehat{\mathscr{L}}\equiv R\widehat{\gamma}$ (把 R 看作 $m=0$ 的标量密度场)，便有

$$S=\int\widehat{\mathscr{L}}\widehat{e}\,. \tag{15-6-20}$$

这种做法的实质是把 $\widehat{e}$ 和 $\widehat{\mathscr{L}}$ 分别看作新的体元和拉氏密度，好处在于新体元 $\widehat{e}$ 与 g^{ab} 无关(不论 g^{ab} 如何，$\widehat{e}$ 作用到任一上标体元 $\overline{\boldsymbol{e}}$ 都给出其相伴的 $\boldsymbol{e}$)，因而不必参与变分，所付出的代价则是新拉氏密度 $\widehat{\mathscr{L}}$ 是标量密度场，不像普通标量场 R 那样简单. 因 $\widehat{\mathscr{L}}\widehat{e}$ 的表示为 $(\widehat{\mathscr{L}}\widehat{e})\circ\overline{\boldsymbol{e}}=R\sqrt{|g|}\,\boldsymbol{e}$，故式(15-6-20)亦可表为 $S=\int R\sqrt{|g|}\,\boldsymbol{e}$，与小节 15.1.3 实质一致.

下面介绍张量密度场的导数，这时不要求流形 M 上有度规场. 先对张量场的导数定义做一回顾. 设 ∇_a 是 M 上任一协变导数算符，则 (1,0) 型张量场 v^b 的协变导数 $\nabla_a v^b$ 是 (1,1) 型张量场. 以 v^ν 代表 v^b 在某(坐标)基底的分量，则它有两种导数，即 $v^\nu{}_{,\mu}$ 和 $v^\nu{}_{;\mu}$. 虽然 v^ν 是张量场 v^b 的分量(这些分量“组装”成张量 v^b)，$v^\nu{}_{,\mu}$ 却

不是任何(非基底依赖的)(1,1)型张量的分量，我们说张量经这样一求导就“散架”了．然而 $v^\nu{}_{;\mu}$ 却有本质不同：它定义为(非基底依赖的)张量 $\nabla_a v^b$ 的分量，就是说它能组装成张量 $\nabla_a v^b$，因而不散架．设 $\widehat{T}$ 是张量密度场，$T\equiv\widehat{T}\circ\overline{e}$ 是其表示，我们想借助于对应关系 $\widehat{T}\leftrightarrow v^b$，$\widehat{T}\circ\overline{e}\leftrightarrow v^\nu$ 寻求 $\widehat{T}$ 的协变导数 $\nabla_a\widehat{T}$ 的合理定义．$\nabla_a\widehat{T}$ 自然对应于 $\nabla_a v^b$．(坐标)基底固定后，v^ν 是普通标量场，它有一种自然的导数(对坐标的偏导数)，此即 $v^\nu{}_{,\mu}$．类似地，基底固定后，$\widehat{T}\circ\overline{e}$ 是普通张量场，它也有一种自然的导数，即用 ∇_a 的求导结果，自然记作 $\nabla_a(\widehat{T}\circ\overline{e})$．可见 $\nabla_a(\widehat{T}\circ\overline{e})\leftrightarrow v^\nu{}_{,\mu}$．关键问题是：与 $v^\nu{}_{;\mu}$ 对应的是什么？注意到 $v^\nu{}_{;\mu}$ 是 $\nabla_a v^b$ 的坐标分量，即

$$v^\nu{}_{;\mu}=(\nabla_a v^b)(\partial/\partial x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_b\,,$$

可知它对应于 $\nabla_a\widehat{T}$ 的表示，即 $(\nabla_a\widehat{T})\circ\overline{e}\leftrightarrow v^\nu{}_{;\mu}$．仿照 $v^\nu{}_{;\mu}=v^\nu{}_{,\mu}+\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma$，(附加项 $\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma$ 保证 $v^\nu{}_{;\mu}$ 是某张量的分量，即保证 v^ν 求导后不散架．) 我们把 $(\nabla_a\widehat{T})\circ\overline{e}$ 定义为 $\nabla_a(\widehat{T}\circ\overline{e})$ 与一个适当的附加项之和，请看如下定义．

定义 2　设 ∇_a 是定向流形 M 上的任一无挠协变导数算符，则 M 上权为 m 的 (k,l) 型**张量密度场** $\widehat{T}$ **的协变导数** $\nabla_a\widehat{T}$ 是权为 m 的 $(k,l+1)$ 型张量密度场，定义为

$$(\nabla_a\widehat{T})\circ\overline{e}:=\nabla_a(\widehat{T}\circ\overline{e})-m\psi_a(\overline{e},\nabla)\,\widehat{T}\circ\overline{e}\,,\qquad\forall\,\overline{e}\in\varPhi_M\,,\tag{15-6-21}$$

其中 $\psi_a(\overline{e},\nabla)$ 是由下式定义的唯一对偶矢量场：

$$\nabla_a\,\overline{e}^{a_1\cdots a_n}=\psi_a(\overline{e},\nabla)\,\overline{e}^{a_1\cdots a_n}\,.\tag{15-6-22}$$

在 ψ_a 的括号里写 $\overline{e}$ 和 ∇ 旨在强调 ψ_a 依赖于 $\overline{e}$ 和 ∇_a．作为习题，请读者验证由式(15-6-21)定义的 $\nabla_a\widehat{T}$ 的确是权为 m 的 $(k,l+1)$ 型张量密度场(求导后不散架)，即验证

$$(\nabla_a\widehat{T})\circ(\alpha\overline{e})=\alpha^m(\nabla_a\widehat{T})\circ\overline{e},\qquad\forall\overline{e},\alpha\overline{e}\in\varPhi_M\,.\tag{15-6-23}$$

注 1　由定义 2 可知：①张量密度场的协变导数有线性性并满足莱布尼兹律．②把张量场 T 看作权为 0 的张量密度场 $\widehat{T}$，则 $\nabla_a\widehat{T}$ 与 T 的协变导数 $\nabla_a T$ 一致．

注 2　由式(15-6-22)可知，当 ∇_a 与 $\overline{e}$ 相适配(即 $\nabla_a\,\overline{e}^{a_1\cdots a_n}=0$)时 $\psi_a(\overline{e},\nabla)=0$．

式(15-6-21)虽然给出 $\nabla_a\widehat{T}$ 的定义，但却带着 $\nabla_a\widehat{T}$ 的作用对象 $\overline{e}$，不是 $\nabla_a\widehat{T}$ 的显表达式，不便应用．为了甩掉 $\overline{e}$，我们先对矢量密度场 $\widehat{v}^a$ 作一讨论．把式(15-6-21)用于 $\widehat{v}^a$ 得

$$(\nabla_a\widehat{v}^b)\circ\overline{e}=\nabla_a(\widehat{v}^b\circ\overline{e})-m\psi_a(\overline{e},\nabla)\,\widehat{v}^b\circ\overline{e}\,.\tag{15-6-24}$$

任选坐标系 $\{x^\mu\}$，以 $\Gamma^c{}_{ab}$ 代表 ∇_a 在该系的克氏符，令上式的 $\overline{e}$ 为

$$\bar{e}^{a_1\cdots a_n} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{a_1} \wedge\cdots\wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{a_n}, \tag{15-6-25}$$

则可证明(习题)

$$\psi_a(\bar{e},\nabla) = \Gamma^c{}_{ca}. \tag{15-6-26}$$

[提示:用 ∂_a 和 $\Gamma^c{}_{ab}$ 表出 $\nabla_a \bar{e}^{a_1\cdots a_n}$, 令其等于 $\psi_a(\bar{e},\nabla)\,\bar{e}^{a_1\cdots a_n}$, 再同 $e_{a_1\cdots a_n}$ 缩并.] 于是

$$(\nabla_a \hat{v}^b)\circ\bar{e} = \nabla_a(\hat{v}^b\circ\bar{e}) - m\Gamma^c{}_{ca}\hat{v}^b\circ\bar{e} = \partial_a(\hat{v}^b\circ\bar{e}) + \Gamma^b{}_{ac}\,\hat{v}^c - m\Gamma^c{}_{ca}\,\hat{v}^b\circ\bar{e}$$

$$= (\partial_a\hat{v}^b + \Gamma^b{}_{ac}\,\hat{v}^c - m\Gamma^c{}_{ca}\,\hat{v}^b)\circ\bar{e}, \tag{15-6-27}$$

其中第三步是因为 $\partial_a\bar{e}^{a_1\cdots a_n} = 0$ 导致 $\psi_a(\bar{e},\partial) = 0$. 由上式便可得到 $\nabla_a\hat{v}^b$ 的(甩掉了作用对象 $\bar{e}$ 的)显表达式:

$$\nabla_a\hat{v}^b = \partial_a\hat{v}^b + \Gamma^b{}_{ac}\hat{v}^c - m\Gamma^c{}_{ca}\hat{v}^b. \tag{15-6-28}$$

上式表明矢量密度场和矢量场的协变导数表达式在形式上只差含 $-m\Gamma^c{}_{ca}$ 的一项. 不难看出这一规律对任意型张量密度场也适用. 注意到 (k,l) 型普通张量场 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 的协变导数表达式(3-1-8), 便有

$$\nabla_a\hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots} = \underbrace{[\partial_a\hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots} + (k+l\text{ 个含 }\Gamma^{\cdot}{}_{\cdot\cdot}\text{ 的项})]}_{\text{与普通张量场导数公式形式一样}} - m\Gamma^c{}_{ca}\hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots}\ , \tag{15-6-29}$$

其中 ∂_a 是坐标系 $\{x^\mu\}$ 的普通导数算符, $\Gamma^c{}_{ba}$ 是 ∇_a 在 $\{x^\mu\}$ 系的克氏符.

为了便于具体计算, 我们来找出式(15-6-29)的坐标分量表达式. 仍先以式(15-6-28)为例. 令 $v^b \equiv \hat{v}^b\circ\bar{e}$, 用式(15-6-28)作用于式(15-6-25)的 $\bar{e}$ 并再次利用 $\psi_a(\bar{e},\partial) = 0$ 得

$$(\nabla_a\hat{v}^b)\circ\bar{e} = \partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac}\,v^c - m\Gamma^c{}_{ca}\,v^b.$$

以 $(\partial/\partial x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_b$ 缩并全式得

$$[(\nabla_a\hat{v}^b)\circ\bar{e}]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a(\mathrm{d}x^\nu)_b = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma - m\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}v^\nu. \tag{15-6-30}$$

上式左边是 $\hat{v}^b$ 的协变导数 $\nabla_a\hat{v}^b$ 的表示 $(\nabla_a\hat{v}^b)\circ\bar{e}$ 的坐标分量, 记作 $v^\nu{}_{;\mu}$, 便有

$$v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma - m\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}v^\nu. \tag{15-6-31}$$

这就是矢量密度场 $\hat{v}^b$ 的协变导数的坐标分量(其实是其表示的坐标分量)的表达式, 与普通矢量场的协变导数的坐标分量表达式相较, 上式在形式上多出一项 $-m\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}v^\nu$. 不难看出这一规律适用于任意 (k,l) 型张量密度场的协变导数, 即

$$(T^{\cdots}{}_{\cdots})_{;\mu} = [\underbrace{(T^{\cdots}{}_{\cdots})_{,\mu} + (k+l\text{ 个含 }\Gamma^{\cdot}{}_{\cdot\cdot}\text{的项})}_{\text{与普通张量场导数公式形式一样}}] - m\Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\mu}T^{\cdots}{}_{\cdots}. \tag{15-6-32}$$

其中 $(T^{\cdots}{}_{\cdots})_{;\mu}$ 代表 $(\nabla_a T^{\cdots}{}_{\cdots})\circ\overline{e}$ 的坐标分量.

以上关于协变导数的讨论并未涉及度规. 设 g_{ab} 是 M 上的度规场, ∇_a 和 $\overline{\varepsilon}$ 分别是与 g_{ab} 适配的导数算符和上标体元, $\hat{\gamma}$ 是由 $\hat{\gamma}\circ\overline{\varepsilon} := 1$ 定义的、权为 1 的标量密度场, 则 $\psi_a(\overline{\varepsilon},\nabla)=0$, 因而 $(\nabla_a\hat{\gamma})\circ\overline{\varepsilon} = \nabla_a(\hat{\gamma}\circ\overline{\varepsilon}) = \nabla_a(1)=0$. 可见 $\hat{\gamma}$ 的协变导数为零, 即

$$\nabla_a\hat{\gamma}=0. \tag{15-6-33}$$

在文献中通常把上式表为

$$\sqrt{|g|}_{;\mu}=0. \tag{15-6-33$'$}$$

$\sqrt{|g|}$ 是 $\hat{\gamma}$ 的表示, 要使上式有意义应先做如下补充: 张量密度的表示的协变导数定义为张量密度的协变导数的表示. 据此便可由 $\nabla_a\hat{\gamma}=0$ 推出 $\sqrt{|g|}_{;\mu}=0$. 还应注意, 如果取定一个 $\overline{e}$, 则 $\sqrt{|g|}_{;\mu}=0=\hat{\gamma}\circ\overline{e}$ 是固定的标量场(不能再充当 $\hat{\gamma}$ 的表示), 其协变导数 $\sqrt{|g|}_{;\mu}$ 一般非零.

最后介绍张量密度场的李导数.

定义 3　定向流形 M 上权为 m 的 (k,l) 型**张量密度场** $\hat{T}$ **关于矢量场** v^a **的李导数** $\mathscr{L}_v\hat{T}$ 是同权、同型张量密度场, 定义为

$$(\mathscr{L}_v\hat{T})\circ\overline{e} := \mathscr{L}_v(\hat{T}\circ\overline{e}) - m\xi(\overline{e},v)\,\hat{T}\circ\overline{e}, \qquad \forall\,\overline{e}\in\Phi_M, \tag{15-6-34}$$

其中 $\mathscr{L}_v(\hat{T}\circ\overline{e})$ 是 $\hat{T}\circ\overline{e}$ (作为普通张量场)的李导数, $\xi(\overline{e},v)$ 则是由下式定义的唯一标量场:

$$\mathscr{L}_v\overline{e}^{a_1\cdots a_n} = \xi(\overline{e},v)\overline{e}^{a_1\cdots a_n}. \tag{15-6-35}$$

作为习题, 请读者验证由式(15-6-34)和(15-6-35)定义的 $\mathscr{L}_v\hat{T}$ 的确是权为 m 的 (k,l) 型张量密度场(求导后不散架), 即验证

$$(\mathscr{L}_v\hat{T})\circ(\alpha\overline{e}) = \alpha^m(\mathscr{L}_v\hat{T})\circ\overline{e}, \qquad \forall\,\overline{e},\alpha\overline{e}\in\Phi_M. \tag{15-6-36}$$

注 3　由定义 3 可知: ①张量密度场的李导数有线性性并满足莱布尼兹律. ②把张量场 T 看作权为 0 的张量密度场 $\hat{T}$, 则 $\mathscr{L}_v\hat{T}$ 与 T 的李导数 $\mathscr{L}_vT$ 一致.

为了找到式(15-6-34)在甩掉作用对象 $\overline{e}$ 后的表达式, 先看标量密度场 $\hat{f}$ 这一特例. 我们来证明它的李导数可以表为

$$\mathscr{L}_v\hat{f} = v^a\nabla_a\hat{f} + m\hat{f}\,\nabla_a v^a. \tag{15-6-37}$$

任意指定度规场 g_{ab}，设 ε 和 ∇_a 分别是其适配体元和导数算符，$\bar{\varepsilon}$ 是与 ε 相伴的上标体元[即满足式(15-6-9)]，先证明式(15-6-37)对此 ∇_a 成立. 该式左边作用于 $\bar{\varepsilon}$ 得

$$(\mathscr{L}_v \hat{f}) \circ \bar{\varepsilon} = \mathscr{L}_v (\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) - m\xi(\bar{\varepsilon}, v)(\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) . \tag{15-6-38}$$

由式(15-6-35)可证(习题)

$$\xi(\bar{\varepsilon}, v) = -\nabla_a v^a , \tag{15-6-39}$$

(提示：写出 $\mathscr{L}_v \bar{\varepsilon}^{a_1 \cdots a_n}$ 的展开式，令其等于 $\xi(\bar{\varepsilon}, v)\bar{\varepsilon}^{a_1 \cdots a_n}$，再同 $\varepsilon_{a_1 \cdots a_n}$ 缩并.) 于是

$$(\mathscr{L}_v \hat{f}) \circ \bar{\varepsilon} = v^a \nabla_a (\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) + m(\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) \nabla_a v^a . \tag{15-6-40}$$

另一方面，由 $\psi_a(\bar{\varepsilon}, \nabla) = 0$ 可知式(15-6-37)右边作用于 $\bar{\varepsilon}$ 给出

$$v^a \nabla_a (\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) + m(\hat{f} \circ \bar{\varepsilon}) \nabla_a v^a ,$$

与式(15-6-40)对比便知式(15-6-37)对满足 $\nabla_a g_{bc} = 0$ 的 ∇_a 成立. 为证明它对任意 ∇'_a 也成立，只须补证(习题)

$$v^a \nabla'_a \hat{f} + m\hat{f} \nabla'_a v^a = v^a \nabla_a \hat{f} + m\hat{f} \nabla_a v^a . \tag{15-6-41}$$

式(15-6-37)表明标量密度场的李导数公式比标量场的李导数公式多一含 $m\nabla_a v^a$ 的附加项. 不难证明这一结论也适用于任意张量密度场 $\hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$，例如

$$\mathscr{L}_v \hat{\omega}_a = v^b \nabla_b \hat{\omega}_a + \hat{\omega}_b \nabla_a v^b + m\hat{\omega}_a \nabla_b v^b , \tag{15-6-42}$$

$$\mathscr{L}_v \hat{T}^{ab} = v^c \nabla_c \hat{T}^{ab} - \hat{T}^{cb} \nabla_c v^a - \hat{T}^{ac} \nabla_c v^b + m\hat{T}^{ab} \nabla_c v^c . \tag{15-6-43}$$

一般地有

$$\mathscr{L}_v \hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots} = \underbrace{(v^c \nabla_c \hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots} + \cdots - \cdots)}_{\text{与普通张量场李导数公式形式一样}} + m\hat{T}^{\cdots}{}_{\cdots} \nabla_c v^c . \tag{15-6-44}$$

文献中也常出现张量密度场的表示的李导数[例如式(15-7-48)的 $\mathscr{L}_v \pi^{ab}$]，只要约定"表示的李导数定义为李导数的表示"，其含义同样是清楚的.

§15.7 辛几何及其在哈氏理论的应用[选读]

15.7.1 辛几何简介

定义1 $2N$ 维流形(N 是正整数) Γ 上的非退化的闭 2 形式场 Ω_{AB} 称为 Γ 上的辛形式(symplectic form)，(Γ, Ω_{AB}) 称为辛流形(symplectic manifold).

此外也存在无限维的辛流形. 我们只讨论有限维辛流形.

注 1

① $A, B, \cdots$ 是 Γ 上张量场的抽象指标.

② Ω_{AB} 为非退化是指 $\Omega_{AB}v^A u^B = 0\ \forall u^B \Rightarrow v^A = 0$. Ω_{AB} 的非退化性保证它有唯一逆 Ω^{AB}，[①] 其定义为 $\Omega^{AB}\Omega_{BC} = \delta^A{}_C$. Ω_{AB} 的非退化性还保证它在任一基底的分量排成的矩阵非退化(逆命题也成立). 后面的式(15-7-18)就是一例.

定义 2　微分同胚 $\psi: \Gamma \to \Gamma$ 称为**正则变换**(canonical transformation), 若

$$\psi^* \Omega_{AB} = \Omega_{AB} . \qquad (15\text{-}7\text{-}1)$$

注 2　可见正则变换保持辛几何(体现为 Ω_{AB})不变.

定义 3　(Γ, Ω_{AB}) 上的矢量场 v^A 称为**无限小对称性**(infinitesimal symmetry), 若它生出的单参微分同胚族的每个微分同胚都是正则变换. 等价地, v^A 称为无限小对称性, 若

$$\mathscr{L}_v \Omega_{AB} = 0 . \qquad (15\text{-}7\text{-}2)$$

注 3　广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 是配有度规 $g_{ab} = g_{(ab)}$ 的流形, 辛流形 (Γ, Ω_{AB}) 是配有辛形式 $\Omega_{AB} = \Omega_{[AB]}$ 的流形, 两者有类似之处, 也有许多不同. (M, g_{ab}) 上的无限小对称性是指满足 $\mathscr{L}_v g_{ab} = 0$ 的矢量场 v^a , 亦即 Killing 矢量场. (M, g_{ab}) 上的独立 Killing 矢量场最多只有 $n(n+1)/2$ 个(n 是 M 的维数), 而命题15-7-1(见稍后)则表明 (Γ, Ω_{AB}) 上的独立无限小对称性有无限多个.

利用 Ω_{AB} 的唯一逆 Ω^{AB} 可从 Γ 上的每个实函数 $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ 生成 Γ 上的一个矢量场, 定义如下.

定义 4　设 f 是 Γ 上的实函数, 则矢量场

$$X_f{}^A := \Omega^{AB} \nabla_B f \qquad (15\text{-}7\text{-}3)$$

称为 f **的哈氏矢量场**(Hamiltonian vector field of f), 其中 ∇_B 是 Γ 上任一(无挠)导数算符.

命题 15-7-1　局域地说, Γ 上的矢量场 v^A 是无限小对称性当且仅当它是某函数 f 的哈氏矢量场.

证明　由第 5 章习题 6(a) 得

$$\mathscr{L}_v \Omega_{AB} = \mathrm{d}_A(v^C \Omega_{CB}) + (\mathrm{d}\Omega)_{CAB} v^C = \mathrm{d}_A(v^C \Omega_{CB}) , \qquad (15\text{-}7\text{-}4)$$

其中第二步用到 Ω_{AB} 的闭性, 即 $\mathrm{d}\Omega = 0$.

设 Γ 上局域存在函数 f 使 $v^C = \Omega^{CD} \nabla_D f$ (即 v^A 局域地是 f 的哈氏矢量场),

---

① 对无限维辛流形, Ω_{AB} 的非退化性分为弱、强两个档次. 弱非退化性不保证 Ω_{AB} 有逆, 见下小节末.

则由式(15-7-4)可知对Γ的任一点有

$$\mathscr{L}_v \Omega_{AB} = \mathrm{d}_A(\Omega_{CB}\Omega^{CD}\nabla_D f) = -\mathrm{d}_A(\mathrm{d}_B f) = 0,$$

故v^A是无限小对称性. 反之, 设v^A是无限小对称性, 则$\mathscr{L}_v \Omega_{AB} = 0$, 故式(15-7-4)导致$\mathrm{d}_A(v^C \Omega_{CB}) = 0$, 即1形式$v^C \Omega_{CB}$为闭, 所以至少是局域恰当的: 至少局域存在函数$f$使$v^C \Omega_{CB} = \mathrm{d}_B f = \nabla_B f$. 以$\Omega^{BA}$缩并两边得$v^A = -\Omega^{AB}\nabla_B f$, 可见$v^A$是哈氏矢量场. □

定义 5 (Γ, Ω_{AB})上两个函数f, g的**泊松括号**(Poisson bracket)定义为

$$\{f, g\} := \Omega^{AB}(\nabla_A f)\nabla_B g. \qquad (15\text{-}7\text{-}5)$$

注 4

①泊松括号是把Γ上的任意两个函数变为Γ上的一个函数的映射;

②易见

$$\{f, g\} = X_g{}^A \nabla_A f = \mathscr{L}_{X_g} f = -X_f{}^B \nabla_B g = -\mathscr{L}_{X_f} g = -X_f(g). \qquad (15\text{-}7\text{-}5')$$

③式(15-7-5)与(15-2-21)定义的泊松括号等价, 见命题15-7-5.

可以证明(Darboux定理), $\forall P \in \Gamma$, 必有局域坐标系

$$\{x^1, \cdots, x^N; y_1, \cdots, y_N\} \text{ (其坐标域含 } P\text{)}$$

使Ω_{AB}可表为如下的简单形式:

$$\Omega_{AB} = (\mathrm{d}y_i)_A \wedge (\mathrm{d}x^i)_B. \quad (\text{对 } i \text{ 从 } 1 \text{ 到 } N \text{ 取和}) \qquad (15\text{-}7\text{-}6)$$

满足上式的坐标x^i, y_i称为**正则坐标**. 在这个意义上, 辛流形的辛形式Ω_{AB}比广义黎曼流形的度规g_{ab}简单得多. 这是辛流形与黎曼流形的又一重要不同.

命题 15-7-2 设$\psi: \Gamma \to \Gamma$是正则变换, x^i, y_i是$O \subset \Gamma$上的正则坐标, 则$\psi^* x^i$, $\psi^* y_i$是$\psi^{-1}[O]$上的正则坐标.

证明 $\forall p \in \psi^{-1}[O]$, 记$q \equiv \psi(p) \in O$, 则

$$\begin{aligned}\Omega_{AB}|_p &= (\psi^*\Omega_{AB})|_p = \psi^*(\Omega_{AB}|_q) = \psi^*[(\mathrm{d}_A y_i)|_q \wedge (\mathrm{d}_B x^i)|_q] = \psi^*[(\mathrm{d}_A y_i)|_q] \wedge \psi^*[(\mathrm{d}_B x^i)|_q] \\ &= [\mathrm{d}_A(\psi^* y_i)]_p \wedge [\mathrm{d}_B(\psi^* x^i)]_p = [\mathrm{d}_A(\psi^* y_i) \wedge \mathrm{d}_B(\psi^* x^i)]_p,\end{aligned}$$

[第一步用到式(15-7-1), 第三步用到式(15-7-6), 第五步用到$\mathrm{d}(\psi^* F) = \psi^*(\mathrm{d}F)$(其中$F$代表函数), 此式的证明见注5.] 上式表明$\psi^* x^i$, $\psi^* y_i$是$\psi^{-1}[O]$上的正则坐标. □

命题15-7-2印证了本科理论力学教程中的说法: 正则变换就是把正则坐标变为正则坐标的坐标变换.

注 5　命题15-7-2证明中用到的结论 $\psi^*(\mathrm{d}F)=\mathrm{d}(\psi^*F)$ 在本书下册里不止一处要用，此处补做证明．此结论(定理)的准确提法是：

定理 1　设 N, M 是流形，$\psi: N\to M$ 是光滑映射，F 是 M 上的光滑函数，则

$$\mathrm{d}(\psi^*F)=\psi^*(\mathrm{d}F)\,. \tag{15-7-7}$$

证明　$\forall p\in N$，记 $q\equiv\psi(p)$，$f\equiv\psi^*F$．以 v 代表 p 点的任一矢量(略去抽象指标)，则由式(2-3-7)得

$$(\mathrm{d}f)|_p(v)=v(f)\,. \tag{15-7-8}$$

设 $C(t)$ 是 N 中的曲线(看作映射 $C: I\to N$ 的像)，满足：① $C(0)=p$；② $C(t)$ 在 p 点的切矢为 v，则 $C'\equiv\psi\circ C: I\to M$ 是 M 中的曲线，满足：① $C'(0)=\psi(p)\equiv q$；② $C'(t)$ 在 q 点的切矢为 ψ_*v (曲线切矢的像等于曲线像的切矢)．于是由曲线切矢定义[式(2-2-6)]得

$$v(f)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ C)\qquad 及\qquad (\psi_*v)(F)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(F\circ C')\,.$$

但 $F\circ C'=F\circ(\psi\circ C)=(F\circ\psi)\circ C=f\circ C$，故

$$v(f)=(\psi_*v)(F)\,. \tag{15-7-9}$$

再把式(2-3-7)用于 $q\in M$ 又得

$$(\psi_*v)(F)=(\mathrm{d}F)|_q(\psi_*v)=[\psi^*(\mathrm{d}F)]_p(v)\,. \tag{15-7-10}$$

上式两个等号之间的量代表对偶矢量 $(\mathrm{d}F)|_q$ 对矢量 ψ_*v 的作用结果．式(15-7-8)、(15-7-9)及(15-7-9)联立给出

$$(\mathrm{d}f)|_p(v)=[\psi^*(\mathrm{d}F)]_p(v)\,.$$

再由 p 和 v 的任意性便得 $\mathrm{d}f=\psi^*(\mathrm{d}F)$，此即待证等式(15-7-7)．□

注 6　上述命题其实适用于 M 上的任意 l 形式场，证明详于命题16-3-1的证明中．

命题 15-7-3　函数 f, g 的泊松括号的哈氏矢量场等于 f, g 的哈氏矢量场的对易子(之负值)，即

$$X_{\{f,g\}}{}^A=-[X_f, X_g]^A\,. \tag{15-7-11}$$

证明　令 $v^A\equiv X_{\{f,g\}}{}^A+[X_f, X_g]^A$，则由 Ω_{AB} 的非退化性(见注1之②)可知只须证明 $\Omega_{AB}v^A=0$，即只须证明

$$\Omega_{AB}(X_{\{f,g\}}{}^A + [X_f, X_g]^A) = 0 \,. \tag{15-7-12}$$

上式左边第二项 $= \Omega_{AB}[X_f, X_g]^A = \Omega_{AB}\mathscr{L}_{X_f} X_g{}^A$

$$= \mathscr{L}_{X_f}(\Omega_{AB}X_g{}^A) - X_g{}^A \mathscr{L}_{X_f}\Omega_{AB} = \mathscr{L}_{X_f}(\Omega_{AB}X_g{}^A)\,,$$

[其中末步用到哈氏矢量场是无限小对称性, 满足式(15-7-2).] 于是

式(15-7-12)左边 $= \Omega_{AB}X_{\{f,g\}}{}^A + \mathscr{L}_{X_f}(\Omega_{AB}X_g{}^A)$

$$= \Omega_{AB}\Omega^{AC}\nabla_C\{f,g\} + \mathscr{L}_{X_f}(\Omega_{AB}\Omega^{AC}\nabla_C g) = -\nabla_B\{f,g\} - \mathscr{L}_{X_f}(\nabla_B g)$$

$$= \mathrm{d}_B(\mathscr{L}_{X_f} g) - \mathscr{L}_{X_f}(\mathrm{d}_B g) = \mathrm{d}_B(\mathscr{L}_{X_f} g) - \mathrm{d}_B(\mathscr{L}_{X_f} g) = 0\,,$$

其中第二步用到哈氏矢量场的定义, 第三步用到 $\Omega_{AB}\Omega^{AC} = -\Omega_{BA}\Omega^{AC} = -\delta_B{}^C$, 第四步用到式(15-7-5′), 第五步用到外微分与李导数算符的可交换性[见第 5 章习题 6(b)]. □

注 7 本命题也可借用坐标语言直接证明: 以正则坐标系的普通导数算符 ∂_C 代替哈氏矢量场定义中的 ∇_C, 通过直接计算(用到 $\partial_C\Omega^{AB} = 0$)就可证明式(15-7-11).

下面介绍辛流形的应用. 在理论力学及许多其他应用中, 哈氏系统的相空间 Γ 都是位形空间 $\mathscr{C}$ 的余切丛, 即 $\Gamma = \mathrm{T}^*\mathscr{C}$. 设 $\dim\mathscr{C} = N$, 则 $\dim \mathrm{T}^*\mathscr{C} = 2N$. 在 $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 上定义 1 形式场 θ_A [见, 例如, Woodhouse (1980)]: $\forall P = (Q, \omega_a) \in \mathrm{T}^*\mathscr{C}$ (a 代表 $\mathscr{C}$ 上张量的抽象指标), 定义 $\theta_A|_P$ 为

$$\theta_A|_P\, X^A := \omega_a(\pi_* X)^a, \quad \forall X^A \in V_P\,, \tag{15-7-13}$$

其中 V_P 代表 $P \in \mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 的切空间, $\pi: \mathrm{T}^*\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 是从余切丛 $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}$ 的投影映射. 于是 $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 上便有闭的 2 形式场

$$\Omega_{AB} := \mathrm{d}_A\theta_B\,. \tag{15-7-14}$$

在 $\mathscr{C}$ 中选定坐标系 $\{q^i\}$ 后, $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 中有坐标系 $\{q^i, \omega_i\}$. 由式(15-7-13)可以证明(习题) θ_A 可借坐标系表为

$$\theta_A = \omega_i(\mathrm{d}q^i)_A\,,^{①} \tag{15-7-15}$$

[证明提示: 令 $X^A = X^i(\partial/\partial q^i)^A + \hat{X}^i(\partial/\partial\omega_i)^A$ 并注意 $(\pi_* X)^a = X^i(\partial/\partial q^i)^a$.] 本书

---

① 选定拉氏量 L 后, 每点 $\sigma \in \mathrm{T}\mathscr{C}$ 有动量 p_a, 是点 $\pi(\sigma)$ 的一个对偶矢量. 也可在 $\mathrm{T}\mathscr{C}$ 上定义对偶矢量场 $p_A \equiv p_i(\mathrm{d}q^i)_A$, 而且, 设 $f: \mathrm{T}\mathscr{C} \to \mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 是 L 给出的 Legendre 变换, 则不难看出 $p_A = f^*\theta_A$.

从§15.3起把$T^*\mathscr{C}$的点的后N个坐标记作ω_i，是因为符号p_i已用做$T\mathscr{C}$上的函数(动量分量). 现在只讨论$T^*\mathscr{C}$，我们从现在起按多数文献的习惯把$T^*\mathscr{C}$上的ω_i(及ω_a)改回p_i(及p_a). 于是式(15-7-15)重新表为

$$\theta_A = p_i (\mathrm{d}q^i)_A, \tag{15-7-15'}$$

因而Ω_{AB}可表为

$$\Omega_{AB} = (\mathrm{d}p_i)_A \wedge (\mathrm{d}q^i)_B. \tag{15-7-16}$$

由式(15-7-16)的矩阵表达式[见稍后的式(15-7-18)]可知这样定义的Ω_{AB}非退化，故可充当辛形式. 因此相空间$T^*\mathscr{C}$可看作$2N$维辛流形，而且q^i和p_i是正则坐标.

下面介绍借助正则坐标q^i, p_i表出的一些重要公式. 由式(15-7-16)易得

$$\begin{gathered}\Omega_{AB}(\partial/\partial q^i)^A(\partial/\partial q^j)^B = 0, \quad \Omega_{AB}(\partial/\partial p_i)^A(\partial/\partial p_j)^B = 0, \\ \Omega_{AB}(\partial/\partial q^i)^A(\partial/\partial p_j)^B = -\delta^j{}_i.\end{gathered} \tag{15-7-17}$$

先看$N=2$的简单情况. 令$z^1 = q^1$, $z^2 = q^2$, $z^3 = p_1$, $z^4 = p_2$，则由式(15-7-17)易见Ω_{AB}在坐标系$\{z^1, \cdots, z^4\}$的分量矩阵为

$$(\Omega_{\Phi\Psi}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 0 \end{bmatrix},$$

其中Φ, Ψ代表具体指标，$I_{2\times2}$代表2×2单位矩阵. 上式不难推广至$T^*\mathscr{C}$是$2N$维的情况：

$$(\Omega_{\Phi\Psi}) = \begin{bmatrix} 0 & -I_{N\times N} \\ I_{N\times N} & 0 \end{bmatrix}. \tag{15-7-18}$$

此矩阵非退化，可见Ω_{AB}的确是非退化2形式. [Ω_{AB}非退化等价于其矩阵$(\Omega_{\Phi\Psi})$非退化，这类似于度规g_{ab}非退化等价于其矩阵$(g_{\mu\nu})$非退化，证明也类似，可参见式(2-6-8).] 由式(15-7-16)不难验证

$$\Omega^{AB} = 2(\partial/\partial q^i)^{[A}(\partial/\partial p_i)^{B]}. \tag{15-7-19}$$

由上式易得

$$\begin{gathered}\Omega^{AB}(\mathrm{d}q^i)_A(\mathrm{d}q^j)_B = 0, \quad \Omega^{AB}(\mathrm{d}p_i)_A(\mathrm{d}p_j)_B = 0, \\ \Omega^{AB}(\mathrm{d}q^i)_A(\mathrm{d}p_j)_B = \delta^i{}_j,\end{gathered} \tag{15-7-20}$$

故 Ω^{AB} 的分量矩阵 $(\Omega^{\Phi\Psi})$ 同 $(\Omega_{\Phi\Psi})$ 差一负号，即

$$(\Omega^{\Phi\Psi})=\begin{bmatrix} 0 & I_{N\times N} \\ -I_{N\times N} & 0 \end{bmatrix}. \tag{15-7-21}$$

命题 15-7-4 相空间 $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 上函数 f 的哈氏矢量场可用坐标基矢表为

$$X_f{}^A=\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A-\frac{\partial f}{\partial q^i}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^A. \tag{15-7-22}$$

证明 $X_f{}^A=\Omega^{AB}\nabla_B f=2\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^{[A}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^{B]}\left[\frac{\partial f}{\partial q^j}(\mathrm{d}q^j)_B+\frac{\partial f}{\partial p_j}(\mathrm{d}p_j)_B\right]$

$$=\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A-\frac{\partial f}{\partial q^i}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^A.$$ □

命题 15-7-5 由式(15-7-5)定义的泊松括号 $\{f,g\}$ 可借 f, g 对坐标 q^i, p_i 的偏导数表为

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}, \tag{15-7-23}$$

与式(15-2-21)定义的泊松括号一致.

证明 由式(15-7-5′)最末一个等号及式(15-7-22)立即得证. □

无约束系统的动力学演化可由相空间 $\mathrm{T}^*\mathscr{C}$ 上的一个函数 H (哈氏量)的哈氏矢量场 $X_H{}^A$ 描述，就是说，$\forall P\in\mathrm{T}^*\mathscr{C}$，$X_H{}^A$ 过 P 的积分曲线 $\gamma(t)$ (其中 t 代表时间)可看作系统从初态 P 出发的演化轨迹. 设 $f: T^*\mathscr{C}\to\mathbb{R}$ 是系统的可观测量，则由 f 与 $\gamma(t)$ 结合而得的函数 $f(t)$ 的时间变率

$$\dot{f}=\frac{\partial}{\partial t}(f)=X_H(f)=\mathscr{L}_{X_H}f=\{f,H\}. \tag{15-7-24}$$

这正是式(15-2-23)在无约束系统的表现.

15.7.2 第一类约束系统

物理系统由相空间 Γ、其上的辛形式 Ω_{AB} 及哈氏量 H 决定，记作 (Γ,Ω_{AB},H).

定义 6 物理状态必须落在相空间 Γ 的低维子流形 $\bar{\Gamma}$ 上的物理系统称为**约束系统**(constrained system)，$\bar{\Gamma}$ 称为**约束面**(constraint surface). 我们只讨论 $\bar{\Gamma}$ 是最终约束面的约束系统. 约束系统 $(\Gamma,\Omega_{AB},H,\bar{\Gamma})$ 称为**第一类**(first class)的，若 $\bar{\Gamma}$ 上的每一法余矢 n_A 对应的矢量 $n^A\equiv\Omega^{AB}n_B$ 都切于 $\bar{\Gamma}$.

注 8　辛流形(Γ,Ω_{AB})没有度规，两个矢量之间的相互正交性并无定义.(人们不愿用$\Omega_{AB}u^A v^B=0$作为u^A与v^B正交的定义，因为Ω_{AB}的反称性会使任一矢量都同自身正交.）但对偶矢量(余矢)μ_A同矢量v^A的正交性不论有无度规都有定义(μ_A同v^A正交当且仅当$\mu_A v^A=0$)，所以曲面$\bar{\Gamma}$上一点P的法余矢n_A有明确定义[与切于$\bar{\Gamma}$的所有矢量正交的余矢(包括零余矢)称为法余矢①]. 第一类约束系统的要求是$\Omega^{AB}n_B$切于$\bar{\Gamma}$.

设$\dim\Gamma=2N$. 如果$\dim\bar{\Gamma}=2N-1$，则$\bar{\Gamma}$可以局域地用方程$C=0$描述，其中C是Γ上的函数(还要求$\nabla_A C$处处非零)，称为约束函数. 推广至一般情况，设$\dim\bar{\Gamma}=2N-R$，则约束面$\bar{\Gamma}$可局域地用R个独立的约束函数C_r②为零来描述，即$\bar{\Gamma}=\{P\in\Gamma\,|\,C_r(P)=0,\ r=1,\cdots,R\}$，其中

然而，给定$\bar{\Gamma}$并不意味着约束函数组被唯一确定，因为同一曲面$\bar{\Gamma}$既可看作这样R个超曲面之交，也可看作那样R个超曲面之交. 约束函数组的选择有很大程度的规范任意性.

因为$\bar{\Gamma}$由$\{C_1=0,\cdots,C_R=0\}$定义，所以$\nabla_A C_r$是$\bar{\Gamma}$的法余矢. 若以W_P代表点$P\in\bar{\Gamma}$的切于$\bar{\Gamma}$的切空间，则不难证明P点的所有法余矢的集合是V_P^*的一个R维子空间，而且$\{\nabla_A C_1|_P,\cdots,\nabla_A C_R|_P\}$是这个子空间的一个基底.

定义 7　设$(\Gamma,\Omega_{AB},H,\bar{\Gamma})$是约束系统(不限于第一类). Γ上的函数f称为**第一类的**，若$X_f{}^A|_{\bar{\Gamma}}$切于$\bar{\Gamma}$.

命题 15-7-6　Γ上的函数f是第一类的当且仅当$\{f,C_r\}|_{\bar{\Gamma}}=0,\ r=1,\cdots,R$.

证明

$$f\text{为第一类函数}\Leftrightarrow X_f{}^A|_{\bar{\Gamma}}\text{切于}\bar{\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow (X_f{}^A\nabla_A C_r)|_{\bar{\Gamma}}=0,\ r=1,\cdots,R\Leftrightarrow\{f,C_r\}|_{\bar{\Gamma}}=0,\ r=1,\cdots,R,$$

其中第一步用到定义 7，第二步是因为$\nabla_A C_r$是$\bar{\Gamma}$的法余矢(还用到余矢与矢量正交性的定义)，第三步用到式(15-7-5′).　□

注 9　命题15-7-6表明定义 7 与 Dirac 关于第一类函数的定义(见选读15-2-1前)等价.

命题 15-7-7　设约束面$\bar{\Gamma}$由约束函数$C_r(r=1,\cdots,R)$决定，则

$$\text{约束系统为第一类}\Leftrightarrow\text{每一}C_r\text{都是第一类函数}\Leftrightarrow\{C_r,C_s\}|_{\bar{\Gamma}}=0,\ r,s=1,\cdots,R.\quad(15\text{-}7\text{-}25)$$

---

① 各文献对“法余矢是否含零余矢”的问题似未有一致约定. 本书上册§4.4 定义 3 的法余矢要求非零，但此处为陈述方便又规定零余矢也算法余矢. 总之，这一问题在本书不同地方并不统一，只能请读者酌情理解.

② 还要求各$\nabla_A C_r$在每点都互相线性独立.

证明 由命题15-7-6显见第二个⇔成立, 下面是第一个⇔的证明:

$$\text{每一}C_r\text{都是第一类函数} \Leftrightarrow X_{C_r}{}^A|_{\bar{\Gamma}}\ (\equiv \Omega^{AB}\nabla_B C_r|_{\bar{\Gamma}})\ \text{切于}\ \bar{\Gamma},\ \forall r=1,\cdots,R$$

$$\Leftrightarrow \text{约束系统为第一类},$$

其中第一步用到定义7, 第二步是因为每一$\nabla_B C_r|_{\bar{\Gamma}}$都是$\bar{\Gamma}$的法余矢. □

注10

①命题15-7-7表明用几何语言陈述的第一类约束(定义6)同Dirac定义的第一类约束(见选读15-2-1前)在以下意义上实质一致: 约束系统是第一类的(按定义6)当且仅当所有约束(不论初、次级)按Dirac定义是第一类的.

②必要时将分别用ϕ_m和ψ_u代表初级和次级约束, 它们合起来就是$C_1,\cdots,C_R$. 于是命题15-7-7与式(15-2-40)结合便证明了如下命题:

命题 15-7-8 第一类约束系统的哈氏量H是第一类函数.

命题 15-7-9 设约束面$\bar{\Gamma}$由约束函数$C_r(r=1,\cdots,R)$决定, 则式(15-7-25)等价于Γ上局域存在函数$f_{rs}{}^t\ (r,s,t=1,\cdots,R)$使

$$\{C_r,C_s\}=\sum\nolimits_{t=1}^{R} f_{rs}{}^t C_t\,,\qquad r,s=1,\cdots,R\,. \tag{15-7-26}$$

证明 (初读时可略去) 令$\Lambda\equiv\{C_r,C_s\}$, 则Λ是$2N$元函数且

$$\Lambda|_{\bar{\Gamma}}=0\,. \tag{15-7-27}$$

在Γ上选局域坐标系$\{x^1,\cdots,x^R;y^1,\cdots,y^{2N-R}\}$使$x^r=C_r,\ r=1,\cdots,R$, 则上式可表为

$$\Lambda\,(0,\cdots,0\,;y^1,\cdots,y^{2N-R})=0\,. \tag{15-7-27$'$}$$

y坐标的每一组确定值对应于一个R元函数

$$\Lambda_y(x^1,\cdots,x^R)\equiv\Lambda\,(x^1,\cdots,x^R;\underbrace{y^1,\cdots,y^{2N-R}}_{\text{一组确定值}})\,. \tag{15-7-28}$$

把$\Lambda_y(x^1,\cdots,x^R)$简写作$\Lambda_y(x)$, 则式(15-7-27′)等价于

$$\Lambda_y(0)=0\,. \tag{15-7-27$''$}$$

数学上有如下定理[见Wald(1984)第2章习题2, 有提示]: 若C^∞函数$\Lambda(x^1,\cdots,x^R)$满足$\Lambda(0,\cdots,0)=0$, 则存在C^∞函数$\Phi_1(x^1,\cdots,x^R),\cdots,\Phi_R(x^1,\cdots,x^R)$使

$$\Lambda(x^1,\cdots,x^R)=\Phi_1(x^1,\cdots,x^R)x^1+\cdots+\Phi_R(x^1,\cdots,x^R)x^R\,. \tag{15-7-29}$$

将此定理用于我们的问题, 得

$$\Lambda_y(x)=\sum_{t=1}^{R}\Phi_t(x,y)x^t\ .$$

$\Lambda\equiv\{C_r,C_s\}$ 依赖于指标 r 和 s 导致 $\sum_{t=1}^{R}\Phi_t(x,y)x^t$ 依赖于 r 和 s，以 $f_{rs}{}^t$ 代表 $\Phi_t(x,y)$，注意到 $x^t=C_t$，便得

$$\Lambda_y(x)=\sum_{t=1}^{R}f_{rs}{}^tC_t\ ,\qquad r,s=1,\cdots,R\ .$$

此即式(15-7-26). □

第一类约束系统的哈氏量 H 及约束函数 $C_r(r=1,\cdots,R)$ 都是第一类函数导致

$$X_H{}^A\nabla_AC_r\,|_{\bar\Gamma}=\{C_r,H\}\,|_{\bar\Gamma}=0\ ,\quad r=1,\cdots,R$$

及

$$X_s{}^A\nabla_AC_r\,|_{\bar\Gamma}=\{C_r,C_s\}\,|_{\bar\Gamma}=0\ ,\quad r,s=1,\cdots,R\ .$$

仿照选读15-2-1后半部分的讨论可知第一类约束系统的哈氏方程(15-2-19)中的 $\lambda^m(t)$ 可为任意函数，就是说，由任意指定的 M 个一元函数 $\lambda^m(t)$ 以及初态点 $(q^i(0),p_i(0))\in\bar\Gamma$ 所决定的方程组(15-2-19)的唯一解曲线 $\gamma(t)=(q^i(t),p_i(t))$ 一定躺在 $\bar\Gamma$ 上，因而一定是演化线. $\lambda^m(t)$ 的任意性使得从同一初态点出发的演化线有无限多条. 这对应于物理上的规范自由性. 下面再深入一步讨论这个问题.

设第一类约束系统共有 R 个(独立)约束 $C_r=0,\ r=1,\cdots,R$，则每一约束函数 C_r 的哈氏矢量场(称为**约束矢量场**) $X_r{}^A\equiv\Omega^{AB}\nabla_BC_r$ 都切于 $\bar\Gamma$. Ω_{AB} 的非退化性保证这 R 个 $X_r{}^A$ 在任意 $P\in\bar\Gamma$ 处线性独立. 以 W_P 代表 $P\in\bar\Gamma$ 的所有切于 $\bar\Gamma$ 的矢量的集合(因而是 $2N-R$ 维线性空间)，则以 $\{X_1{}^A|_P,\cdots,X_R{}^A|_P\}$ 为基底构成的线性空间 Δ_P 是 W_P 的 R 维子空间. 由于描述同一约束面 $\bar\Gamma$ 的约束函数的选择存在任意性，Δ_P 的任一非零元素都可以看作某一约束矢量场在 P 点的值，可见 Δ_P 与 P 点所有法余矢组成的空间同构. 以 $\bar\Omega_{AB}$ 代表 Ω_{AB} 在 $\bar\Gamma$ 上的限制，即

$$\bar\Omega_{AB}\bar v^A\bar u^B=\Omega_{AB}\bar v^A\bar u^B,\qquad\forall\bar v^A,\ \bar u^B\in W_p,\quad p\in\bar\Gamma\ .$$

既然系统的代表点离不开 $\bar\Gamma$，撇开 Γ 而径直对 $(\bar\Gamma,\bar\Omega_{AB},H)$ (其中 H 应理解为 $H|_{\bar\Gamma}$)进行讨论的想法自然是诱人的. 然而，与 Ω_{AB} 不同，$\bar\Omega_{AB}$ 是退化的，理由如下：设 n_A 是任一法余矢，则 $\forall P\in\bar\Gamma$ 有

$$0=\bar v^An_A=\bar v^A\Omega_{AC}\Omega^{CB}n_B=\bar v^A\Omega_{AC}n^C=\bar\Omega_{AC}n^C\bar v^A,\quad\forall\bar v^A\in W_P\ ,$$

(其中最末一步是因为第一类约束系统的定义保证 $n^C\equiv\Omega^{CB}n_B\in W_P$.) 上式表明 $\bar\Omega_{AC}n^C=0$，而 $n^C\neq0$，可见 $\bar\Omega_{AC}$ 退化. 满足 $\bar\Omega_{AC}\bar u^C=0$ 的 $\bar u^C\in W_P$ 称为**退化矢量**，故所有相应于法余矢 n_B 的矢量 $n^C\equiv\Omega^{CB}n_B$ 都是退化矢量. 反之也可看出，任一退

化矢量$\bar{u}^A$相应的余矢量$\bar{u}_B \equiv \Omega_{BA}\bar{u}^A$必为法余矢. 可见$P$点的所有退化矢量的集合正是前面定义的$\Delta_P$. 由于$\Delta_P$是$R$维子空间, 我们就说$\bar{\Omega}_{AB}$是 **$R$ 重退化的**(R-fold degenerate). $\bar{\Omega}_{AB}$的退化性使它不能充当辛形式, 其重要后果之一就是无逆(虽可定义某种广义逆, 但不唯一). 鉴于哈氏量H的哈氏矢量场对演化的重要性, 自然希望用$\bar{\Omega}_{AB}$在$\bar{\Gamma}$上定义H的"哈氏矢量场". (记作$\bar{X}_H{}^A$, 以区别于用Ω_{AB}定义的$X_H{}^A$.) $X_H{}^A$是用Ω_{AB}的逆定义的, $\bar{\Omega}_{AB}$的无逆性给$\bar{X}_H{}^A$的定义造成困难. 克服困难的办法是改从$X_H{}^A = \Omega^{AB}\nabla_B H$的等价形式$\Omega_{AB}X_H{}^B = \nabla_A H$出发, 即用下式定义$\bar{X}_H{}^A$:

$$\bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B = \bar{\nabla}_A H. \quad (\text{其中}\bar{\nabla}_A\text{是}\bar{\Gamma}\text{ 上任一无挠导数算符, }H\text{ 指 }H|_{\bar{\Gamma}}) \qquad (15\text{-}7\text{-}30)$$

然而这样定义的$\bar{X}_H{}^B$并不唯一, 因为设$\bar{X}_H{}^B$满足上式, 则$\bar{X}_H{}^B + X^B$也满足, 其中X^B是任一约束矢量场在$\bar{\Gamma}$上的值. 反之, 任何两个满足式(15-7-30)的$\bar{X}_H{}^B$之差只能是一个约束矢量场X^B(在$\bar{\Gamma}$上的值). 现在来看$\bar{X}_H{}^B$同$X_H{}^B|_{\bar{\Gamma}}$的联系. 因为$X_H{}^B|_{\bar{\Gamma}}$切于$\bar{\Gamma}$(第一类约束系统的H是第一类函数), 所以对任一切于$\bar{\Gamma}$的矢量场$\bar{v}^A$有

$$\bar{\Omega}_{AB}X_H{}^B\,\bar{v}^A = \Omega_{AB}X_H{}^B\,\bar{v}^A = \bar{v}^A\nabla_A H.$$

虽然$\nabla_A H \neq \bar{\nabla}_A H$, 但

$$\bar{v}^A\nabla_A H = \bar{v}^A\bar{\nabla}_A H = \bar{v}^A\bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B,$$

因而

$$\bar{\Omega}_{AB}X_H{}^B\,\bar{v}^A = \bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B\,\bar{v}^A,$$

所以

$$\bar{\Omega}_{AB}X_H{}^B = \bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B. \qquad (15\text{-}7\text{-}31)$$

上式表明$X_H{}^B|_{\bar{\Gamma}}$是众多$\bar{X}_H{}^B$中的一个. 因为$\bar{\Omega}_{AB}$是R重退化的, 而且$X_H{}^B$满足式(15-7-30), 所以满足此式的所有$\bar{X}_H{}^B$都可表为

$$\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^r X_r{}^B)|_{\bar{\Gamma}}, \quad (\text{对 }r\text{ 从 1 到 }R\text{ 取和}) \qquad (15\text{-}7\text{-}32)$$

其中$\alpha^r (r = 1, \cdots, R)$是$\bar{\Gamma}$上的$R$个任意函数, $X_r{}^B \equiv \Omega^{BA}\nabla_A C_r$是与约束函数$C_r$相应的$R$个约束矢量场, 又可分为初级和次级, 即

$$\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^m X_m{}^B + \alpha^u X_u{}^B)|_{\bar{\Gamma}}, \qquad (15\text{-}7\text{-}32')$$

其中$X_m{}^B \equiv \Omega^{BA}\nabla_A\phi_m \ (m = 1, \cdots, M)$, $X_u{}^B \equiv \Omega^{BA}\nabla_A\psi_u \ (u = M+1, \cdots, R)$. $X_H{}^B$的

积分曲线当然是演化线. 问题是: $\bar{X}_H{}^B$ 的积分曲线也一定是演化线吗? 如果只考虑初级约束, 即暂时把式(15-7-32′)缩窄为

$$\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^m X_m{}^B)|_{\bar{\Gamma}}, \tag{15-7-33}$$

则利用拉氏乘子 λ^m 的自由性, 把 α^m 看作拉氏乘子便可证明 $\bar{X}_H{}^B$ 的积分曲线是哈氏方程(15-2-19)的解, 因此自然是演化线. $\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^m X_m{}^B)|_{\bar{\Gamma}}$ 的非唯一性导致从同一初态出发的演化线的非唯一性(图 15-4). 这表明初级约束矢量场 $X_m{}^B|_{\bar{\Gamma}}$ 的同一积分曲线上的所有点对应于同一物理态, 这些点之间的差别纯粹是规范差别. 以小节 15.2.4 (L 不含 $\dot{q}^1$ 的情况)为例, 系统只有一个初级约束 $p_1 = 0$, 由式(15-7-3)和(15-7-19)易见其哈氏矢量场 $X_{p_1}{}^A = (\partial/\partial q^1)^A$, 因此, $X_{p_1}{}^A$ 的积分曲线上任意两点唯一有区别的坐标是 q^1, 而 q^1 的差别完全是规范差别. 无源电磁场可看作与此类似的一个具体实例, 其标势 V 对应于 q^1, 图 15-4 中两条演化线的差别无非来源于标势选择的不同, 纯粹是规范差别.

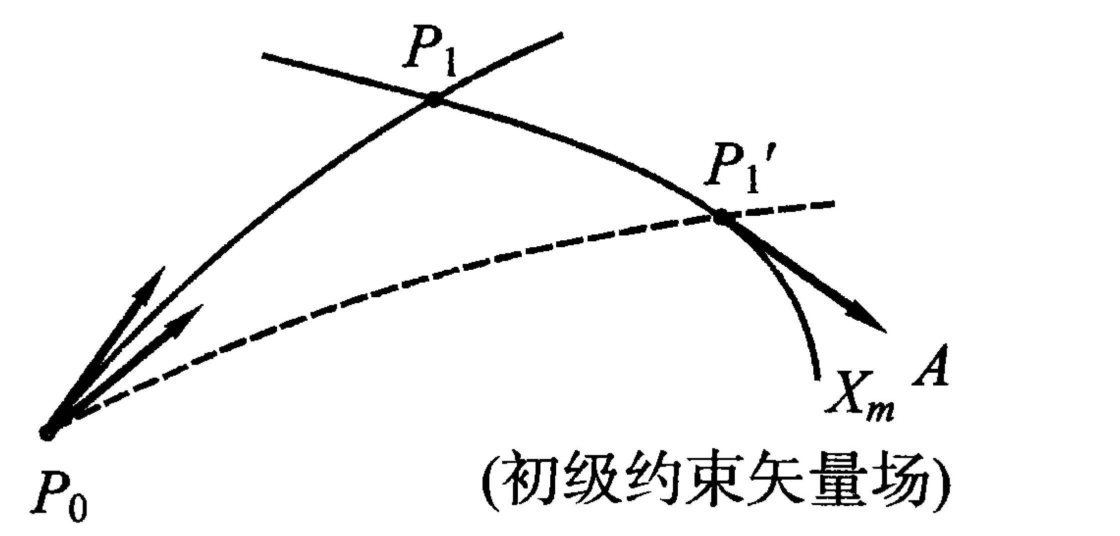


图 15-4　从初态 P_0 出发的演化线不唯一. 初级约束矢量场 $X_m{}^A$ 的积分曲线上所有点代表同一物理态

注意到哈氏方程中含 $\partial\phi_m/\partial p_i$ 而不含 $\partial\psi_u/\partial p_i$, 以上论据对次级约束矢量场 $X_u{}^B$ 不适用. 不过这并不排除结论仍适用于次级约束的可能性, 于是问题集中表现为: $\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^u X_u{}^B)|_{\bar{\Gamma}}$ 的积分线也一定是演化线吗?这是一个颇为微妙的问题. 回答问题的第一步是明确演化线的定义. $X_H{}^B$ 在 $\bar{\Gamma}$ 上的积分线 $\gamma(t)$ [一般地, 哈氏方程(15-2-19)的解]当然是演化线. 推广一步, $\bar{\Gamma}$ 上任一曲线 $\gamma'(t)$ 称为以 $\gamma(0)$ 为初态的演化线, 若 $\gamma'(0) = \gamma(0)$, 而且对任一 t_1 值, $\gamma'(t_1)$ 和 $\gamma(t_1)$ 代表同一物理态. [“同一物理态”的含义则要由物理决定. 例如, 对电磁场而言, $(\vec{a}, \vec{\pi})$ 与 $(\vec{a} + \vec{\nabla}\chi, \vec{\pi})$ 代表同一物理态.] 明确定义后, 要回答上述问题还须用到如下结论(证明见稍后的命题 15-7-11): 设 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$ 分别是 $X_H{}^A|_{\bar{\Gamma}}$ 和 $\bar{X}_H{}^A$ 的积分线, 而且 $\gamma'(0) = \gamma(0)$, 则对任一时刻 t_1, 点 $\gamma'(t_1)$ 和 $\gamma(t_1)$ 必位于某约束矢量场的某条积分线上. 在此基础上, 问题“$\bar{X}_H{}^B = (X_H{}^B + \alpha^u X_u{}^B)|_{\bar{\Gamma}}$ 的积分线也是演化线吗?”就等价于问题“任一次级约束矢量场 Z^A 的积分线上各点代表相同物理态吗?”. 针对这一微妙问题, Dirac(1964) 第 17 页说: “不改变物理态的那些动力学变量的变换是无穷小切变换, 其生成函数是一个初级第一类约束, 或是一个次级第一类约束. ……我猜想很可能全部第一类次级约束都应该包括在那些不改变物理态的变换中, 但我尚未能证明这一点. ”小节 15.7.3 将证明电磁场的全部(初次级)约束都对

应于不改变物理态的规范变换，而小节15.7.4则将证明，引力场的两组第一类次级约束的表现很不相同，第一组(矢量约束)对应于规范变换，第二组(标量约束)则不然．这似乎应视为Dirac猜想的反例．关于Dirac猜想的其他可能反例(不涉及引力场)的讨论可参阅李子平(1993,1999)及其所引文献．

下面介绍“约化相空间”的概念．前面讲过任一点$P\in\bar{\Gamma}$的、切于$\bar{\Gamma}$的切空间W_P有一个R维子空间Δ_P，所以$\bar{\Gamma}$上有子空间场Δ．命题15-7-3表明任意两个约束矢量场$X_r{}^A, X_s{}^A$满足$[X_r, X_s]^A=-X_{\{C_r,C_s\}}{}^A$，而命题15-7-9表明$\{C_r,C_s\}$也可看作约束函数，故$[X_r,X_s]^A\in\Delta$，于是Frobenius定理(见附录F定理F-1)保证Δ可积．设$\mathscr{S}$是任一最大积分子流形(R维)，则可以证明$\mathscr{S}$上任意两点P_1,P_2总可用有限段光滑曲线连接，每段都是约束矢量场的积分线．以$\bar{\Gamma}$的每一最大积分子流形为元素构成的集合记作$\hat{\Gamma}$(即定义$\hat{\Gamma}$为$\bar{\Gamma}/\Delta$)，① 其维数等于$2(N-R)$(偶数)，而且存在自然的投影映射π：$\bar{\Gamma}\to\hat{\Gamma}$，用它可给$\hat{\Gamma}$依下式定义一个自然的辛形式$\hat{\Omega}_{AB}$：$\forall S\in\hat{\Gamma}$，定义$\hat{\Omega}_{AB}$为

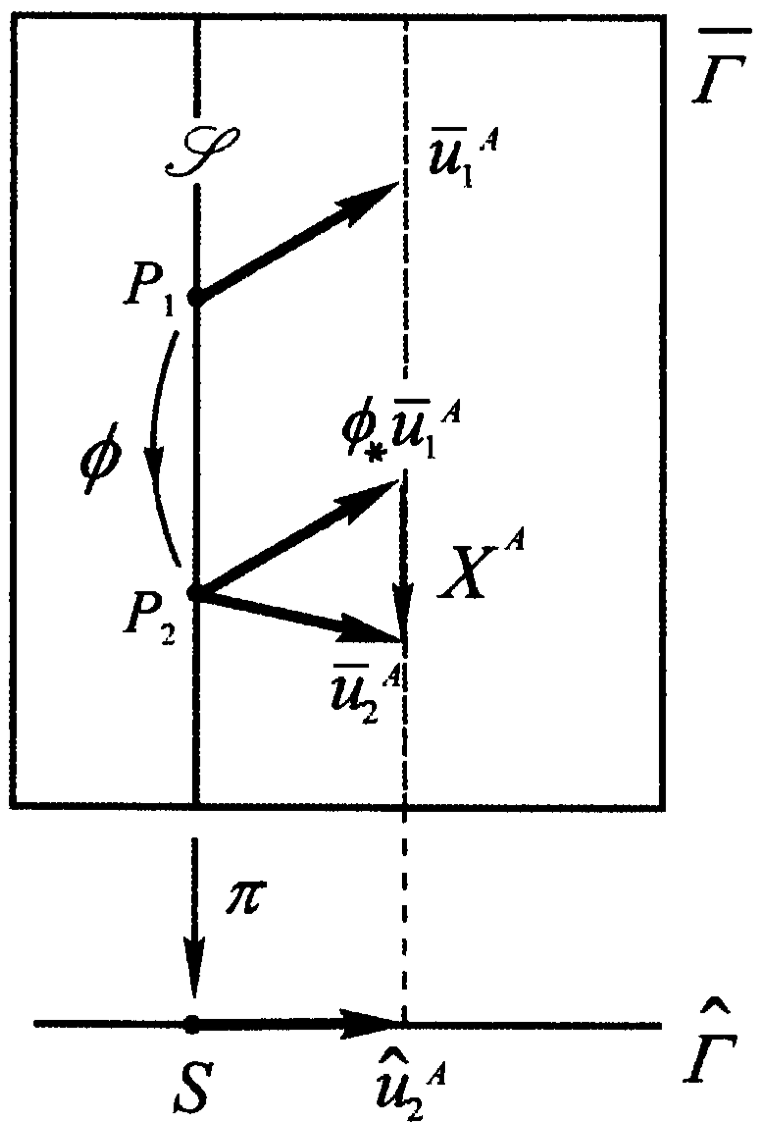


图 15-5　$\pi_*\bar{u}_1{}^A=\pi_*\bar{u}_2{}^A$保证$\bar{u}_2{}^A-\phi_*\bar{u}_1{}^A=X^A$(约束矢量)

$$\hat{\Omega}_{AB}|_S\,\hat{u}^A\hat{v}^B:=\bar{\Omega}_{AB}|_P\,\bar{u}^A\bar{v}^B,\quad\forall\hat{u}^A,\ \hat{v}^B\in V_S,\tag{15-7-34}$$

其中P是$\mathscr{S}\equiv\pi^{-1}(S)$的任一点，$\bar{u}^A,\bar{v}^B\in W_P$满足

$$\pi_*\bar{u}^A=\hat{u}^A,\qquad\pi_*\bar{v}^B=\hat{v}^B.\tag{15-7-35}$$

由于$\mathscr{S}$的点很多，每点满足式(15-7-35)的$\bar{u}^A$和$\bar{v}^A$也很多，要保证式(15-7-34)的定义合法，还应补证$\bar{\Omega}_{AB}|_P\,\bar{u}^A\bar{v}^B$同$P$点以及$\bar{u}^A,\bar{v}^B$的选择无关，即还应补证

$$\bar{\Omega}_{AB}|_{P_1}\,\bar{u}_1{}^A\bar{v}_1{}^B=\bar{\Omega}_{AB}|_{P_2}\,\bar{u}_2{}^A\bar{v}_2{}^B,$$

① 在许多情况下$\hat{\Gamma}$不是个流形，我们只讨论$\hat{\Gamma}$是流形的情况．

$$\forall P_1, P_2 \in \mathscr{S}, \quad \bar{u}_1{}^A, \bar{v}_1{}^B \in W_{P_1}, \quad \bar{u}_2{}^A, \bar{v}_2{}^B \in W_{P_2}, \tag{15-7-36}$$

(满足 $\pi_*\bar{u}_1{}^A = \pi_*\bar{u}_2{}^A = \hat{u}^A$，$\pi_*\bar{v}_1{}^B = \pi_*\bar{v}_2{}^B = \hat{v}^B$.)

设 ϕ 是某约束矢量场 Z^A 生出的、满足 $\phi(P_1) = P_2$ 的微分同胚，[1] 则 $\pi \circ \phi = \pi$，故 $\pi_* \circ \phi_* = \pi_*$，因而

$$0 = \pi_*\bar{u}_2{}^A - \pi_*\bar{u}_1{}^A = \pi_*\bar{u}_2{}^A - (\pi_* \circ \phi_*)\,\bar{u}_1{}^A = \pi_*(\bar{u}_2{}^A - \phi_*\,\bar{u}_1{}^A),$$

所以 P_2 点有约束矢量 X^A 和 Y^A 使 $\bar{u}_2{}^A - \phi_*\bar{u}_1{}^A = X^A$（图 15-5）和 $\bar{v}_2{}^A - \phi_*\bar{v}_1{}^A = Y^A$.
于是

$$\bar{\Omega}_{AB}|_{P_2}\,\bar{u}_2{}^A\bar{v}_2{}^B = \bar{\Omega}_{AB}|_{P_2}\,(\phi_*\bar{u}_1{}^A + X^A)(\phi_*\bar{v}_1{}^B + Y^B)$$
$$= \bar{\Omega}_{AB}|_{P_2}\,(\phi_*\bar{u}_1)^A(\phi_*\bar{v}_1)^B = (\phi^*\bar{\Omega})_{AB}|_{P_1}\,\bar{u}_1{}^A\bar{v}_1{}^B = \bar{\Omega}_{AB}|_{P_1}\,\bar{u}_1{}^A\bar{v}_1{}^B,$$

[其中第二步用到 $\bar{\Omega}_{AB}X^A = 0$, $\bar{\Omega}_{AB}Y^B = 0$，第四步用到 $\mathscr{L}_Z\bar{\Omega}_{AB} = 0$（来自 $\mathscr{L}_Z\Omega_{AB} = 0$ [2]）.] 可见式(15-7-36)成立. 由式(15-7-34)定义的 $\hat{\Omega}_{AB}$ 是非退化的、闭的 2 形式，可充当 $\hat{\Gamma}$ 上的辛形式. 由 H 是第一类函数(即 $\{H, C_r\}|_{\bar{\Gamma}} = 0, r = 1, \cdots, R$) 可知 H 在每一积分子流形 $\mathscr{S}$ 上为常数，因此 $\hat{\Gamma}$ 上的哈氏量 $\hat{H}$ 可自然定义为

$$\hat{H}|_S := H|_{\mathscr{S}}, \quad \forall S \in \hat{\Gamma}, \quad 其中 \mathscr{S} \equiv \pi^{-1}(S), \tag{15-7-37}$$

令 $X_{\hat{H}}{}^A \equiv \hat{\Omega}^{AB}\hat{\nabla}_B\hat{H}$（其中 $\hat{\nabla}_B$ 是 $\hat{\Gamma}$ 上任一无挠导数算符），则还可证明 $X_{\hat{H}}{}^A$ 的积分线是 $X_H{}^A$ 的积分线的投影(见命题15-7-11). 于是 $(\hat{\Gamma}, \hat{\Omega}_{AB})$ 是一个消除了全部约束的相空间，称为 (Γ, Ω_{AB}) 的**约化相空间**(reduced phase space).

命题 15-7-10　$\forall P \in \bar{\Gamma}$ 有

$$\text{(a)}\ \pi_*(X_H{}^B|_P) = X_{\hat{H}}{}^B|_{\pi(P)}, \quad \text{(b)}\ \pi_*(\bar{X}_H{}^B|_P) = X_{\hat{H}}{}^B|_{\pi(P)}. \tag{15-7-38}$$

证明　满足定义式(15-7-30)的 $\bar{X}_H{}^B$ 很多（$X_H{}^B|_{\bar{\Gamma}}$ 也是其一），但任意两个之差只能是个约束矢量场(记作 X^B). 因为 $\pi_*X^B = 0$，所以为证明式(15-7-38)只须证明 P 点有一个矢量 $\bar{J}^B$，它既满足

$$\pi_*\bar{J}^B = X_{\hat{H}}{}^B|_{\pi(P)}, \tag{15-7-39}$$

又满足 $\bar{\Omega}_{AB}\bar{J}^B = \bar{\nabla}_A H$ [因而可充当式(15-7-30)的一个 $\bar{X}_H{}^B|_P$]. 首先，

---

① 如果这微分同胚 ϕ 是指 $\phi: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$，则满足 $\phi(P_1) = P_2$ 的这种 ϕ 未必存在. 但至少存在由 Z^A 生出的、满足 $\phi(P_1) = P_2$ 的微分同胚 $\phi: U_1 \to U_2$，其中 U_1 和 U_2 分别是 P_1 和 P_2 在 $\bar{\Gamma}$ 中的适当邻域. 这对本证明已经足够.

② $\bar{\Omega}_{AB}$ 是 Ω_{AB} 在 $\bar{\Gamma}$ 上的限制，由 $\mathscr{L}_Z\Omega_{AB} = 0$ 之所以能导出 $\mathscr{L}_Z\bar{\Omega}_{AB} = 0$，是因为求李导数和求限制操作可以互换. 这一互换性的详细证明见 16 章命题 16-3-2 .

$$\bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B = \bar{\nabla}_A H = \bar{\nabla}_A(\pi^*\hat{H}) = \pi^*(\hat{\nabla}_A\hat{H}) = \pi^*(\hat{\Omega}_{AB}X_{\hat{H}}{}^B), \tag{15-7-40}$$

其中第一步就是式(15-7-30), 第二步来自式(15-7-37), 第三步可用上册§4.1的知识证明(练习), 第四步可由 $X_{\hat{H}}{}^A$ 的定义式 $X_{\hat{H}}{}^A \equiv \hat{\Omega}^{AB}\hat{\nabla}_B\hat{H}$ 及 $\hat{\Omega}_{AB}$ 的非退化性推出. 将式(15-7-40)在 P 点取值, 以 P 点的任一矢量 $\bar{u}^A$ 缩并两端得

$$\bar{\Omega}_{AB}\bar{u}^A\bar{X}_H{}^B = \bar{u}^A\pi^*(\hat{\Omega}_{AB}X_{\hat{H}}{}^B) = (\pi_*\bar{u}^A)\hat{\Omega}_{AB}X_{\hat{H}}{}^B = \hat{\Omega}_{AB}\hat{u}^A X_{\hat{H}}{}^B, \tag{15-7-41}$$

其中 $\hat{u}^A \equiv \pi_*\bar{u}^A$. 满足式(15-7-39)的 $\bar{J}^B$ 及 $X_{\hat{H}}{}^B$ 可分别充当式(15-7-34)的 $\bar{v}^B$ 和 $\hat{v}^B$, 故

$$\hat{\Omega}_{AB}\hat{u}^A X_{\hat{H}}{}^B = \bar{\Omega}_{AB}\bar{u}^A\bar{J}^B. \tag{15-7-42}$$

式(15-7-42)与(15-7-41)相减给出 $\bar{\Omega}_{AB}\bar{u}^A(\bar{J}^B - \bar{X}_H{}^B) = 0$, 再由 $\bar{u}^A$ 的任意性便得 $\bar{\Omega}_{AB}(\bar{J}^B - \bar{X}_H{}^B) = 0$, 因而

$$\bar{\Omega}_{AB}\bar{J}^B = \bar{\Omega}_{AB}\bar{X}_H{}^B = \bar{\nabla}_A H. \quad \text{[第二步就是式(15-7-30)]} \tag{15-7-43}$$

上式的左右端相等表明 $\bar{J}^B$ 也是众多的 $\bar{X}_H{}^B$ 中的一个, 于是式(15-7-39)保证命题成立. □

命题 15-7-11 设 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$ 分别是 $X_H{}^A|_{\bar{\Gamma}}$ 和 $\bar{X}_H{}^A$ 的积分曲线, 而且满足 $\pi(\gamma'(0)) = \pi(\gamma(0))$, 则对任一时刻 t_1, 点 $\gamma'(t_1)$ 和 $\gamma(t_1)$ 必位于某约束矢量场的某条积分曲线上.

证明 本证明涉及多条以 t 为参数的曲线, 例如 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$, 若仍用 $(\partial/\partial t)^A$ 代表切矢就易混淆, 因此改用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ 代表曲线 $\gamma(t)$ 的切矢(相应地还略去了抽象指标, 对其他曲线也类似). $\gamma(t)$ 是矢量场 X_H 的积分线保证 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=t_1}\gamma(t) = X_H|_{\gamma(t_1)}$ [左边代表 $\gamma(t)$ 在点 $\gamma(t_1)$ 的切矢], 以 π_* 作用两边得

$$\pi_*\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}\gamma(t)\right) = \pi_*(X_H|_{\gamma(t_1)}) = X_{\hat{H}}|_{\pi(\gamma(t_1))}, \tag{15-7-44}$$

其中第二步用到式(15-7-38a). 由于曲线切矢的像是曲线像的切矢, 上式左边又可改写为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=t_1}\pi(\gamma(t))$ [即像曲线 $\pi(\gamma(t))$ 在点 $\pi(\gamma(t_1))$ 的切矢], 故

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}\pi(\gamma(t)) = X_{\hat{H}}|_{\pi(\gamma(t_1))}, \tag{15-7-45}$$

表明 $\pi(\gamma(t))$ 是矢量场 $X_{\hat{H}}$ 的积分线. 同理可证 $\pi(\gamma'(t))$ 也是 $X_{\hat{H}}$ 的积分线. 注意到已知条件 $\pi(\gamma'(0)) = \pi(\gamma(0))$, 由积分线的唯一性定理便知对任一时刻 t_1 有

$\pi(\gamma'(t_1))=\pi(\gamma(t_1))$，可见点 $\gamma'(t_1)$ 和 $\gamma(t_1)$ 在同一积分子流形 $\mathscr{S}$ 上，因此必位于某约束矢量场的某条积分线上. □

最后来探讨一个问题. 设 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$ 分别是 $X_H{}^A$ 和 $\bar{X}_H{}^A \equiv (X_H{}^A+\alpha^u X_u{}^A)|_{\bar{\Gamma}}$ 的、满足 $\gamma(0)=\gamma'(0)\in\bar{\Gamma}$ 的积分线，则命题15-7-11 表明它们的投影 $\hat{\gamma}(t)\equiv\pi(\hat{\gamma}(t))$ 和 $\hat{\gamma}'(t)\equiv\pi(\hat{\gamma}'(t))$ 是 $\hat{\Gamma}$ 上的同一曲线，满足 $\hat{\gamma}(0)=\hat{\gamma}'(0)=\pi(P_0)\in\hat{\Gamma}$. 然而，对于不满足Dirac 猜想的次级约束 ψ_u（取 $X_u{}^A\equiv\Omega^{AB}\nabla_B\psi_u$ 作为 $\alpha^u X_u{}^A$），其 $\bar{X}_H{}^A$ 的积分线 $\gamma'(t)$ 与 $X_H{}^A$ 的积分线 $\gamma(t)$ 的区别并非纯规范区别，而约化相空间 $\hat{\Gamma}$ 中的曲线 $\hat{\gamma}(t)$ 和 $\hat{\gamma}'(t)$ 由于相同而无法体现 $\gamma(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 的区别. 因而笔者认为在这种情况下使用约化相空间并不适宜，它"约化得太狠"，以致抹煞了 $\gamma(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 的实质性区别. 小节15.6.5 的约化位形空间则不存在这一问题.

上小节和本小节的主要参考文献如下：Ashtekar(1991)； Woodhouse(1980)；Marsden and Ratiu(1994).

下面两小节将分别把电磁场和引力场作为第一类约束系统进行讨论. 应该说明，这两类系统的相空间都是无限维辛流形，而前面只简介了有限维辛流形. 对无限维辛流形 Γ，辛形式 Ω 的非退化性分为弱和强两个档次. $\forall P\in\Gamma$，$\Omega|_P$ 可看作从 P 点的切空间 V_P 到其对偶空间 $V_P{}^*$ 的线性映射，记作 $\tilde{\Omega}: V_P\to V_P{}^*$. $\Omega|_P$ 称为**弱非退化的**，若 $\tilde{\Omega}$ 为一一映射（即 $\tilde{\Omega}(u)=0\Rightarrow u=0$）； $\Omega|_P$ 称为**强非退化的**，若 $\tilde{\Omega}: V_P\to V_P{}^*$ 为同构映射. Γ 上的 Ω 场称为**弱(强)非退化的**，若 $\Omega|_P$ 为弱(强)非退化的（$\forall P\in\Gamma$）. 虽然弱非退化的 Ω 未必有唯一逆，但是，粗略地说，前面的公式中凡不涉及 Ω 之逆者仍可适用，至于涉及 Ω 之逆的公式，可以先用 Ω 与之相乘，其中 Ω 的指标结构这样选择，以使结果中不再出现 Ω 之逆，便可把它用于无限维 Γ 中. 这可以看作"物理上可行"的做法.

15.7.3　作为第一类约束系统的电磁场

§15.4 已证明闵氏时空的无源电磁场是第一类约束系统. 现在讨论约束矢量场 $X_{C_\chi}{}^A$ 的积分曲线上两邻点所代表的物理态的关系[C_χ 的定义见式(15-4-31)]. 先从一个简单例子开始. 设 X^A 是某 2 维相空间 Γ 上的矢量场，P 和 P' 是 X^A 的某条积分曲线上的两邻点(图 15-6)，两点的参数差为小量 ε，即 $P'=\psi_\varepsilon(P)$，其中 $\psi_\varepsilon: \Gamma\to\Gamma$ 是 X^A 相应的单参微分同胚族中的一个微分同胚. 设 P 点的正则坐标为 (a,π)（分别代表位形和动量坐标），则 P' 点的正则坐标近似为（ε 越小误差越小）$(a+\varepsilon X^1,\pi+\varepsilon X^2)$，其中 X^1，X^2 是 X^A 在相应坐标系的分量，即

$$\psi_\varepsilon: (a,\pi)\mapsto(a+\varepsilon X^1,\pi+\varepsilon X^2). \tag{15-7-46}$$

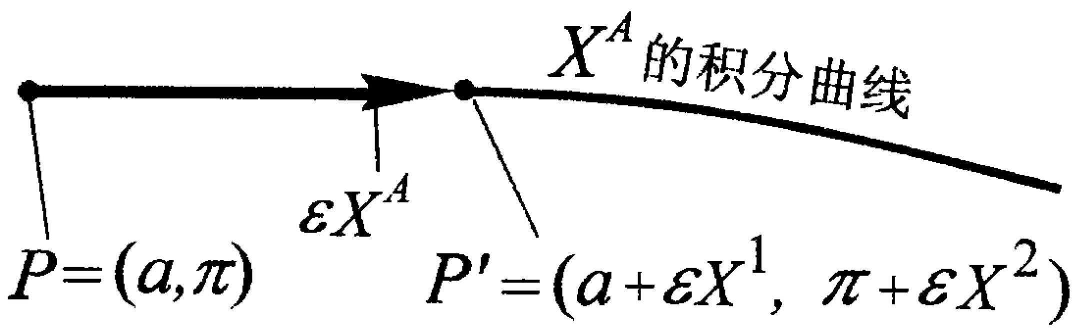


图 15-6 相空间中由矢量场 X^A 产生的"无限小"正则变换 ψ_ε ：$(\alpha,\pi)\mapsto(\alpha+\varepsilon X^1,\pi+\varepsilon X^2)$

现在回到电磁场. 首先应分清问题所涉及的各个流形并弄清它们之间的关系. 时空的背景流形是 $\mathbb{R}^4$，它被某惯性系作标准 3+1 分解，因而有一系列 3 维流形 Σ_t. 用观者世界线把各层 Σ_t 的对应点认同后得 3 维流形 $\hat{\Sigma}$（参见中册图 14-20），这就是我们的 3 维"空间"，我们要讨论 $\hat{\Sigma}$ 上的无源电磁场及其演化. 相空间 Γ 中每点由 $(V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi})$ 刻画，其中 V 和 $\vec{a}$ 分别代表 $\hat{\Sigma}$ 上的一个(满足边界条件的)标势场和矢势场，$\vec{\pi}$（准确说是 $-4\pi\vec{\pi}$）代表 $\hat{\Sigma}$ 上的一个(满足边界条件的)无源电场 $\vec{E}$. 因为 π_V 恒为零(初级约束)，且无源电场必须满足 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$（次级约束），所以只有 Γ 中的低维子流形(约束面)

$$\bar{\Gamma}\equiv\{(V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi})\in\Gamma\,|\,\pi_V=0,\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0\}$$

的点才代表物理态. 然而 $\bar{\Gamma}$ 与所有物理态的集合之间的关系不是一一对应而是多一对应. 为了看出这点，先写出与约束 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$ 对应的约束泛函 C_χ 的哈氏矢量场 ${X_{C_\chi}}^A$ 的表达式. 把试验标量场 χ 看作 $\hat{\Sigma}$ 上的标量场，把式(15-7-22)推广到无限多自由度情况得

$$ {X_{C_\chi}}^A=\int_{\hat{\Sigma}}\left[\frac{\delta C_\chi}{\delta\pi^i}\left(\frac{\delta}{\delta a_i}\right)^A-\frac{\delta C_\chi}{\delta a_i}\left(\frac{\delta}{\delta\pi^i}\right)^A+\frac{\delta C_\chi}{\delta\pi_V}\left(\frac{\delta}{\delta V}\right)^A-\frac{\delta C_\chi}{\delta V}\left(\frac{\delta}{\delta\pi_V}\right)^A\right]=-\int_{\hat{\Sigma}}(\partial_i\chi)\left(\frac{\delta}{\delta a_i}\right)^A. \tag{15-7-47}$$

其中最后一步用到式(15-4-35). 仿照式(15-7-46)便知 ${X_{C_\chi}}^A$ 产生的无限小微分同胚 ψ_ε ：$\bar{\Gamma}\to\bar{\Gamma}$ 把 $\bar{\Gamma}$ 的一点 $(V,\vec{a};\pi_V,\vec{\pi})$ 映为邻点 $(V,\vec{a}-\varepsilon\vec{\nabla}\chi;\pi_V,\vec{\pi})$. 就是说，像点的位形和动量坐标分别为

$$V'=V,\quad \vec{a}'=\vec{a}-\varepsilon\vec{\nabla}\chi,\quad \pi'_V=\pi_V=0,\quad \vec{\pi}'=\vec{\pi}. \tag{15-7-48}$$

注意到磁场 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{a}$ 和电场 $\vec{E}=-4\pi\vec{\pi}$，可知上式给出 $\vec{B}'=\vec{B},\ \vec{E}'=\vec{E}$. 这说明约束矢量场 ${X_{C_\chi}}^A$ 带来的正则变换无非是电磁矢势 $\vec{a}$ 的规范变换，${X_{C_\chi}}^A$ 的同一积分曲线上的所有点代表相同的物理态. 这与上小节末介绍的 Dirac 猜想吻合. 与此非常不同，式(15-4-21)的哈氏量 H 的哈氏矢量场 ${X_H}^A$ 的积分曲线 $\gamma(t)\subset\bar{\Gamma}$ 代表的却是物理态的时间演化. 仿照式(15-7-47)，利用演化方程 $\dot{\vec{a}}=\delta H/\delta\vec{\pi}$ 和 $\dot{\vec{\pi}}=-\delta H/\delta\vec{a}$ 得

$$X_H{}^A = \int_{\hat{\Sigma}} \left[\dot{\vec{a}} \left(\frac{\delta}{\delta \vec{a}} \right)^A + \dot{\vec{\pi}} \left(\frac{\delta}{\delta \vec{\pi}} \right)^A \right].\ \text{(略去了适配体元)} \tag{15-7-49}$$

设 $\gamma(t_1) = (V(t_1); \vec{a}(t_1), \pi_V = 0, \vec{\pi}(t_1))$，则由上式可得

$$\gamma(t_2) = (V(t_1),\ \vec{a}(t_1) + \varepsilon \dot{\vec{a}}(t_1);\ \pi_V = 0,\ \vec{\pi}(t_1) + \varepsilon \dot{\vec{\pi}}(t_1)),$$

其中 $\varepsilon \equiv \Delta t \equiv t_2 - t_1$. 这说明空间 $\hat{\Sigma}$ 在两个相邻时刻的有关物理量之差为

$$V(t_2) - V(t_1) = 0,\quad \vec{a}(t_2) - \vec{a}(t_1) = \dot{\vec{a}}(t_1)\Delta t,\quad \vec{\pi}(t_2) - \vec{\pi}(t_1) = \dot{\vec{\pi}}(t_1)\Delta t,$$

因此 $\gamma(t)$ 正好描述 $\hat{\Sigma}$ 上的物理态的时间演化. 以上用 3 维空间 $\hat{\Sigma}$ 表述的结论也可改用 4 维语言表述, 这时 $\hat{\Sigma}$ 应改为 4 维时空中的同时面 Σ_t，而 $\dot{\vec{a}}$ 和 $\dot{\vec{\pi}}$ 则分别用 4 维时空中的李导数 $\mathscr{L}_{\vec{t}}\vec{a} \equiv \dot{\vec{a}}$ 和 $\mathscr{L}_{\vec{t}}\vec{\pi} \equiv \dot{\vec{\pi}}$ 表示(其中 $\vec{t}$ 代表 3+1 分解所用的类时矢量场 t^a), 就是说, $X_H{}^A$ 可改写为

$$X_H{}^A = \int_{\Sigma_t} \left[(\mathscr{L}_{\vec{t}}\vec{a}) \left(\frac{\delta}{\delta \vec{a}} \right)^A + (\mathscr{L}_{\vec{t}}\vec{\pi}) \left(\frac{\delta}{\delta \vec{\pi}} \right)^A \right], \tag{15-7-49'}$$

物理意义不变.

15.7.4 作为第一类约束系统的引力场

引力场也是第一类约束系统, 其证明见本小节之末. 由于张量密度场的求导在选读部分(§15.6)才讲, 我们在必读部分中凡遇到张量密度场的求导一律都先换成张量场再求导. 例如式(15-5-20)的 $\mathrm{D}_a(h^{-1/2}\pi^{ab})$ 就是张量场(而非张量密度场)的导数, 因为 $h^{-1/2}$ 和 π^{ab} 的权分别为 -1 和 $+1$. 为了便于计算, 本小节把有关公式都写成张量密度场(也可理解为其表示)的等式. 先把两个约束改写为矢量密度和标量密度等式. 计算 H 时如果从式(15-5-15)出发, 则由分部积分得

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathscr{H} = \int_{\Sigma_t} N[-\sqrt{h}\ {}^3\!R + \frac{1}{\sqrt{h}}(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2)] + 2\int_{\Sigma_t} \mathrm{D}_a(\pi^{ab}N_b) - 2\int_{\Sigma_t} N_b \mathrm{D}_a \pi^{ab}.$$

上式右边第二、三项都含张量密度场的协变导数. 以第二项为例, $\mathrm{D}_a(\pi^{ab}N_b)$ 是权为 1 的标量密度场. 由于略去的体元 ${}^3e$ 是权为 -1 的 n 形式密度, $\int_{\Sigma_t} {}^3\boldsymbol{e}\, \mathrm{D}_a(\pi^{ab}N_b)$ 正是 n 形式场(非密度)的积分, 意义明确. 因为此项可化成为零的边界项,① 由上式及

---

① 先改写为 $\int_{\Sigma_t} {}^3\boldsymbol{e} h^{1/2}\, \mathrm{D}_a(h^{-1/2}\pi^{ab}N_b)$，其中 $\mathrm{D}_a(h^{-1/2}\pi^{ab}N_b)$ 是(非密度)标量场, 其积分可用高斯定理化成边界面积分, 再由 π^{ab} 的默认渐近趋零条件可知积分为零. 以下类似情况同此处理.

$\delta H/\delta N_b=0$ 便可得出次级约束

$$C^b\equiv -2\mathrm{D}_a\pi^{ab}=0\,. \tag{15-7-50}$$

这虽同式(15-5-20)的约束等价，但现在的约束方程是矢量密度方程. 另一约束(15-5-19)则可改写为如下的标量密度方程:

$$C\equiv\ -\sqrt{h}\ {}^3\!R+\frac{1}{\sqrt{h}}(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2)=0\,. \tag{15-7-51}$$

请注意现在的 C 和 C^b 分别等于式(15-5-18)的 C 和 C^b 乘以 $\sqrt{h}$. 于是引力场的哈氏量在略去边界项后可改写为

$$H=\int_{\Sigma_t}(NC+N_bC^b)\,. \tag{15-7-52}$$

但边界项不应略去，考虑边界项后，H 应以 H' [见式(15-5-37)]代替，其哈氏矢量场可表为

$$X_{H'}{}^A=\int_{\Sigma_t}\left[\frac{\delta H'}{\delta\pi^{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A-\frac{\delta H'}{\delta h_{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right]=\int_{\Sigma_t}\left[\dot{h}_{ab}\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A+\dot{\pi}^{ab}\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right]$$

$$=\int_{\Sigma_t}\left[(\mathscr{L}_t h_{ab})\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A+(\mathscr{L}_t\pi^{ab})\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right]. \tag{15-7-53}$$

与电磁场的情况类似，也可把上式看作描述 $\hat{\Sigma}$ 上的物理态 (h_{ab},π^{ab}) 的时间演化.

下面讨论约束矢量场的意义. 与电磁场的 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$ 相仿，C 和 C^b 都是 Σ_t 上的场而非相空间 Γ 上的函数. 仿照电磁场的做法，可用 C 和 C^b 生成 Γ 上的一系列(无限个)函数，即一系列约束泛函. 令 v^a 和 v 分别为 Σ_t 上满足适当边界条件的任意矢量场和标量场(统称为**试验场**)，定义 Γ 上的函数(约束泛函)

$$C_{\vec{v}}:=\int_{\Sigma_t}v^aC_a\,, \tag{15-7-54}$$

$$C_v:=\int_{\Sigma_t}vC\,. \tag{15-7-55}$$

v^a 和 v 所满足的边界条件保证上面两个积分收敛. 由以上两式可知

$$\begin{aligned}C^b=0\Leftrightarrow C_{\vec{v}}=0,\quad\forall v^a,\\ C=0\Leftrightarrow C_v=0,\quad\forall v.\end{aligned}\qquad(\text{指满足边界条件的任意 } v^a \text{ 和 } v) \tag{15-7-56}$$

这表明两个约束方程 $C^b=0$ 和 $C=0$ 实际上相当于“$4\times\infty^3$”个约束，即

$C_{\bar{v}}=0\ \forall v^a$ 和 $C_v=0\ \forall v$. 约束泛函 $C_{\bar{v}}$ 的哈氏矢量场为

$$X_{C_{\bar{v}}}{}^A=\int_{\Sigma_t}\left[\frac{\delta C_{\bar{v}}}{\delta\pi^{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A-\frac{\delta C_{\bar{v}}}{\delta h_{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right],\tag{15-7-57}$$

其中泛函导数 $\delta C_{\bar{v}}/\delta\pi^{ab}$ 和 $\delta C_{\bar{v}}/\delta h_{ab}$ 可从式(15-7-54)和(15-7-50)出发计算：

$$C_{\bar{v}}=-2\int_{\Sigma_t}v_b\mathrm{D}_a\pi^{ab}=-2\int_{\Sigma_t}[\mathrm{D}_a(v_b\pi^{ab})-\pi^{ab}\mathrm{D}_{(a}v_{b)}]=\int_{\Sigma_t}\pi^{ab}\mathscr{L}_{\bar{v}}h_{ab}\,,\tag{15-7-58}$$

最末一步是由于 v^a 所满足的边界条件保证所化成的边界项为零. 由上式得

$$\frac{\delta C_{\bar{v}}}{\delta\pi^{ab}}=\mathscr{L}_{\bar{v}}h_{ab}\,.\tag{15-7-59}$$

为求得 $\delta C_{\bar{v}}/\delta h_{ab}$，可对式(15-7-58)最末一个等号右边作分部积分：

$$C_{\bar{v}}=\int_{\Sigma_t}(\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi-h_{ab}\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi^{ab})\,.\tag{15-7-60}$$

上式的 $\pi\equiv\pi^{ab}h_{ab}$ 是权为 1 的标量密度场，利用式(15-6-37)得

$$\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi=v^a\mathrm{D}_a\pi+\pi\mathrm{D}_av^a=\mathrm{D}_a(v^a\pi)\,,$$

故

$$C_{\bar{v}}=\int_{\Sigma_t}[\mathrm{D}_a(v^a\pi)-h_{ab}\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi^{ab}]=-\int_{\Sigma_t}h_{ab}\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi^{ab}\,,\tag{15-7-61}$$

从而

$$\frac{\delta C_{\bar{v}}}{\delta h_{ab}}=-\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi^{ab}\,.\tag{15-7-62}$$

代入式(15-7-57)得

$$X_{C_{\bar{v}}}{}^A=\int_{\Sigma_t}\left[(\mathscr{L}_{\bar{v}}h_{ab})\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A+(\mathscr{L}_{\bar{v}}\pi^{ab})\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right].\tag{15-7-63}$$

仿照式(15-7-46)便知 $X_{C_{\bar{v}}}{}^A$ 所产生的无限小微分同胚映射 $\psi_\varepsilon:\ \bar{\varGamma}\to\bar{\varGamma}$ 把 $\bar{\varGamma}$ 的一点

$$P=(N,N_a,h_{ab};\pi_N=0,\pi_{\vec{N}}=0,\pi^{ab})$$

映为邻点

$$P'=(N',N'_a,h'_{ab};\pi'_N=0,\pi'_{\vec{N}}=0,\pi'^{ab}),$$

满足

$N'=N$, $N'_a=N_a$, $h'_{ab}=h_{ab}+\varepsilon\mathscr{L}_v h_{ab}=\phi_\varepsilon{}^* h_{ab}$, $\pi'^{ab}=\pi^{ab}+\varepsilon\mathscr{L}_v\pi^{ab}=\phi_\varepsilon{}^*\pi^{ab}$,

其中$\phi_\varepsilon: \Sigma_t\to\Sigma_t$是空间矢量场$v^a$产生的无限小微分同胚映射. 可见$h'_{ab}$与$h_{ab}$以及$\pi'^{ab}$与$\pi^{ab}$都"只差到一个空间微分同胚", 因此$P, P'\in\overline{\Gamma}$代表同一物理态. 这说明由约束矢量场$X_{C_{\vec v}}{}^A$产生的正则变换也是一种规范变换, 与电磁场论中由约束矢量场$X_{C_\chi}{}^A$产生的正则变换的作用非常类似. ①

然而引力场的标量约束$C_\nu=0$的表现却与上述两者有重要差别. 与式(15-7-57)类似, C_ν的哈氏矢量场可表为

$$X_{C_\nu}{}^A=\int_{\Sigma_t}\left[\frac{\delta C_\nu}{\delta\pi^{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A-\frac{\delta C_\nu}{\delta h_{ab}}\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right]. \qquad (15\text{-}7\text{-}64)$$

把式(15-7-55)中的ν看作某种3+1分解的时移函数, 与式(15-7-52)对比便知C_ν可看作位移N^b为零、时移ν渐近为零情况下的H(在此情况下有$t^a=\nu n^a$), 因此哈氏演化方程可表为

$$\frac{\delta C_\nu}{\delta\pi^{ab}}=\dot h_{ab}=\mathscr{L}_{\nu\vec n}h_{ab},\qquad -\frac{\delta C_\nu}{\delta h_{ab}}=\dot\pi^{ab}=\mathscr{L}_{\nu\vec n}\pi^{ab},$$

代入式(15-7-64)得

$$X_{C_\nu}{}^A=\int_{\Sigma_t}\left[(\mathscr{L}_{\nu\vec n}h_{ab})\left(\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\right)^A+(\mathscr{L}_{\nu\vec n}\pi^{ab})\left(\frac{\delta}{\delta\pi^{ab}}\right)^A\right]. \qquad (15\text{-}7\text{-}65)$$

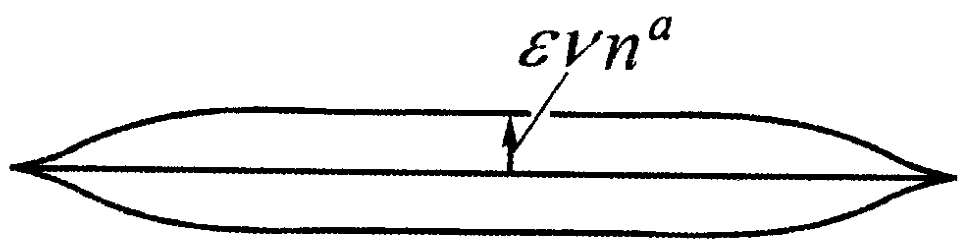


图 15-7 泡泡时间演化示意(ν渐近为零)

$X_{H'}{}^A$和$X_{C_\nu}{}^A$都是$\overline{\Gamma}$上切于$\overline{\Gamma}$的矢量场. 既然式(15-7-53)的$X_{H'}{}^A$代表物理态(h_{ab},π^{ab})沿矢量场t^a的时间演化, 式(15-7-65)的$X_{C_\nu}{}^A$就应代表物理态(h_{ab},π^{ab})沿矢量场νn^a的时间演化. 不同的是, $X_{C_\nu}{}^A$的积分曲线上的两邻点所代表的是两个这样的分层面上的共轭对(h_{ab},π^{ab}), 它们(指分层面)在"空间无限远处"互相重合(因为ν渐近为零). 这两个分层面上的(h_{ab},π^{ab})和(h_{ab},π^{ab})代表两个不同的物理态, 它们的差别并非规范差别. 可见引力场的标量约束看来应该视为Dirac猜想(见小

① 电磁场只是Yang-Mills场的最简单例子. 事实上, 一般Y-M场论中由高斯约束矢量场产生的正则变换也是规范变换. 这同如下事实有关: 引力场的矢量约束泛函$C_{\vec v}$与Y-M场的高斯约束泛函(对电磁场就是C_χ)有一共性, 即都是正则动量的线性泛函.

节 15.7.2)的一个反例. $X_{C_v}{}^A$ 所描述的这种特殊演化也称为**泡泡时间演化** (bubble-time evolution), 图 15-7 是泡泡时间演化的示意图. 为了尽量缩小与 Dirac 的猜想的距离, Ashtekar(1987b) II.2 曾做过一番讨论, 但结论仍是不能解释为纯规范差别. Kuchar(1986) 则明确指出: "人们在物理中经常讨论这样的系统, 其作用量在某个无限维群的作用下是不变的. 通常(虽然不幸地)把这些系统的理论一律称为规范理论. ……这一不变性导致对正则变量提出限制的约束, 而且它们在约束面上组成轨道. (引者注: 指约束矢量场的积分曲线.) 同一轨道上的点有时可被看作同一物理态的等价描述, 有时则应被视为系统的动力学演化中的不同阶段. 只有在第一种情况下谈及规范才是物理上恰当的. 第二种情况与时间选择的任意性以及把时间纳入正则变量的行列一事相关联. 这一过程常被称为参数化 (parametrization). " 接着又写道: "在物理上感兴趣的所有理论中, 与规范相联系的约束是正则动量的线性函数, 而与参数化相联系的约束则是动量的 2 次函数(虽然不一定是 2 次型). …… 在场系统中, 电动力学和 Yang-Mills 理论是规范理论(在这个词汇的本来意义上)的典型例子. 这些理论中的约束对正则动量是线性和齐次的. 参数化理论的典型则是广义相对论和非线性 σ 模型. 在这些理论中与时间选择的任意性相联系的约束[超哈氏约束(引者注: 即标量约束)]对正则动量是 2 次的. 除这些约束外还存在着与空间微分同胚不变性相联系的线性齐次约束[超动量约束(引者注: 即矢量约束)]. 这些微分同胚起到规范群的作用. "

规范自由性同某种任意性有关. 广义相对论中的规范自由性是 4 维时空中的微分同胚不变性, 即在彼此只差到一个微分同胚的所有时空度规中任选一个的任意性(见小节 8.10.2). 矢量约束 $C_{\vec{v}}=0$ 反映的规范自由性只是在每一层上的空间微分同胚不变性, 而标量约束 $C_v=0$ 则可看作是对时空做 $3+1$ 分解的任意性的结果. 因此, 虽然 $X_{C_v}{}^A$ 的积分曲线上不同点的差别不只是规范差别, 标量约束与时空的规范自由性仍有紧密的联系.

在结束本小节之前, 我们补证引力场为第一类约束系统. 首先, 不难证明(习题)初级约束 $\pi_N=0$ 和 $\pi_{\vec{N}}=0$ 必为第一类, 因此只须证明全体次级约束(即标量和矢量约束)为第一类, 为此只须证明任意两个次级约束泛函之间的泊松括号弱为零. 这些括号分为三类: 两个矢量约束泛函 $C_{\vec{v}}, C_{\vec{\mu}}$ 之间的括号; 两个标量约束泛函 C_v, C_μ 之间的括号; 一个矢量约束泛函 $C_{\vec{v}}$ 与一个标量约束泛函 C_v 之间的括号. 对这三类括号的计算结果为

$$\{C_{\vec{v}}, C_{\vec{\mu}}\}=2\int_{\Sigma_t}(\mathscr{L}_{\vec{v}}\mu^a)\,h_{ab}\mathrm{D}_c\pi^{bc}=-C_{\vec{\lambda}}\approx 0, \tag{15-7-66}$$

(其中 $\vec{\lambda}$ 代表矢量场 $\lambda^a\equiv v^b\mathrm{D}_b\mu^a-\mu^b\mathrm{D}_b v^a=[v,\mu]^a$.)

$$\{C_\nu, C_\mu\} = -C_{\vec{\xi}} \approx 0\text{，(其中}\vec{\xi}\text{代表}\xi^a \equiv \nu D^a\mu - \mu D^a\nu\text{.)} \tag{15-7-67}$$

$$\{C_{\bar{\nu}}, C_\nu\} = -2\int_{\Sigma_t} (\mathscr{L}_{\vec{\nu}}\nu)\left[\sqrt{h}\,{}^3R - \frac{1}{\sqrt{h}}(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2)\right] = 2C_{\mathscr{L}_{\vec{\nu}}\nu} \approx 0. \tag{15-7-68}$$

我们只证明式(15-7-67). 由式(15-7-5′)和(15-7-64)得

$$\{C_\nu, C_\mu\} = -\int_{\Sigma_t}\left(\frac{\delta C_\nu}{\delta\pi^{ab}}\frac{\delta C_\mu}{\delta h_{ab}} - \frac{\delta C_\nu}{\delta h_{ab}}\frac{\delta C_\mu}{\delta\pi^{ab}}\right), \tag{15-7-69}$$

把C_ν(或C_μ)看作位移为零、时移为ν(或μ)情况下的H，借用式(15-5-32)和(15-5-33)得

$$\frac{\delta C_\nu}{\delta\pi^{ab}} = 2\nu\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}\right), \tag{15-7-70}$$

$$\frac{\delta C_\mu}{\delta h_{ab}} = -\sqrt{h}\,(D^aD^b\mu - h^{ab}D_cD^c\mu) + \mu U^{ab}. \quad (U^{ab}\text{含若干项}) \tag{15-7-71}$$

因为$\{C_\nu, C_\mu\}$关于ν, μ反称，计算$\{C_\nu, C_\mu\}$时如果出现某一含系数$\nu\mu$的项(例如$\nu\mu U^{ab}$)，则后面必出现含$-\mu\nu$的对应项(例如$-\mu\nu U^{ab}$)，于是两项相消. 所以计算中凡含$\nu\mu$的项都可略去. 把式(15-7-70)和(15-7-71)代入(15-7-69)便得

$$\{C_\nu, C_\mu\} = 2\int_{\Sigma_t}(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab})[\nu(D^aD^b\mu - h^{ab}D_cD^c\mu) - \nu,\mu\text{ 互换项}]$$

$$= 2\int_{\Sigma_t}(\nu\pi_{ab}D^aD^b\mu - \nu,\mu\text{ 互换项}) = -2\int_{\Sigma_t}[D^a(\nu\pi_{ab})D^b\mu - \nu,\mu\text{ 互换项}]$$

$$= -2\int_{\Sigma_t}[\nu(D_a\pi^{ab})D_b\mu - \mu(D_a\pi^{ab})D_b\nu]$$

$$= -2\int_{\Sigma_t}(\nu D^a\mu - \mu D^a\nu)\,h_{ab}D_c\pi^{bc} = -C_{\vec{\xi}}. \quad (\xi^a \equiv \nu D^a\mu - \mu D^a\nu)$$

(第三步是因为π^{ab}所应满足的渐近条件保证$\int_{\partial\Sigma_t}\pi_{ab}\xi^b = 0$.) 此即式(15-7-67).

最后说明一点. 作为计算结果，式(15-7-66)~(15-7-68)的成立是肯定的. 但若要由此三式认定真空引力场是第一类约束系统，则还要借助于另一结论——次级约束$C_{\vec{\nu}} = 0$和$C_\nu = 0$满足自洽性条件，因而不再有进一步约束. 这一结论的正确性是在14章之末指出的，但当时并未给出证明(计算)过程. 现在，在有了式(15-7-66)~

(15-7-68)之后，这一证明变得十分容易．用式(15-7-52)的 N 和 N^a 分别取代式(15-7-66)~(15-7-68)中的 ν 和 ν^a，与式(15-7-54)、(15-7-55)对比可知 $H = C_N + C_{\vec{N}}$．这样一来，借助于式(15-7-66)~(15-7-68)，H 与任一约束泛函的泊松括号自然弱等于零(例如 $\{H, C_\mu\} = \{C_N, C_\mu\} + \{C_{\vec{N}}, C_\mu\} \approx 0$)，从而 $\dot{C}_\mu \approx 0$．

15.7.5　约化位形空间

电磁场的约束 $C_\chi = 0$ 表明，虽然已把 V 看作拉氏乘子，所余相空间仍嫌“太大”．这与位形变量 $\vec{a}$ 的规范自由性密切有关．引力场也有类似情况．本小节讨论压缩位形空间以消除约束的可能性．

电磁场的规范自由性表现为 $\vec{a}$ 和 $\vec{a} + \vec{\nabla}\chi$（$\chi$ 为 Σ_t 上任一标量场）代表相同物理态．位形空间 $\mathscr{C}$ 的任意两点 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}'$ 称为等价的，若 Σ_t 上有标量场 χ 使 $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{\nabla}\chi$．这一定义把 $\mathscr{C}$ 分成无数等价类．以每一等价类为元素构成的集合 $\hat{\mathscr{C}}$ 称为**约化位形空间**(reduced configuration space)．于是存在自然的多对一映射 $\zeta: \mathscr{C} \to \hat{\mathscr{C}}$，它把 $\mathscr{C}$ 中任一元素 $\vec{a}$ 映为 $\vec{a}$ 所属的那个等价类．[是 $\hat{\mathscr{C}}$ 的一点，记作 $\hat{\vec{a}}$．] 就是说，ζ 是把每一等价类内的所有元素映为 $\hat{\mathscr{C}}$ 的同一点的映射，是一种投影映射，见图 15-8．设 $\vec{\nabla}\chi$ 是 Σ_t 上长度很小的矢量场，则 $\vec{a} + \vec{\nabla}\chi$ 与 $\vec{a}$ 是同一等价类中的两邻点，可近似认为 $\vec{\nabla}\chi$ 是从 $\vec{a}$ 点指向 $\vec{a} + \vec{\nabla}\chi$ 点的矢量，就是说，可把 $\vec{\nabla}\chi$ 看作过 $\vec{a}$ 的、躺在 $\vec{a}$ 所属等价类内的某曲线的切矢．该曲线在 ζ 映射下的像显然为独点线 $\hat{\vec{a}}$，其切矢为零．因为曲线切矢的像等于曲线像的切矢，所以

$$\zeta_*(\vec{\nabla}\chi) = 0 \in V_{\hat{\vec{a}}}, \tag{15-7-72}$$

其中 $V_{\hat{\vec{a}}}$ 是 $\hat{\vec{a}} \in \hat{\mathscr{C}}$ 的切空间．设 $V_{\hat{\vec{a}}}{}^*$ 是其对偶空间，则由映射 $\zeta: \mathscr{C} \to \hat{\mathscr{C}}$ 在 $\hat{\vec{a}}$ 点诱导出的拉回映射 $\zeta^*: V_{\hat{\vec{a}}}{}^* \to V_{\vec{a}}{}^*$ 不是到上映射，$V_{\vec{a}}{}^*$ 的元素只有满足一定条件才能成为 $V_{\hat{\vec{a}}}{}^*$ 的某元素在 ζ^* 下的像，这条件可讨论如下．设 $\vec{\pi} \in V_{\vec{a}}{}^*$ 是 $\hat{\vec{\pi}} \in V_{\hat{\vec{a}}}{}^*$ 的像，即

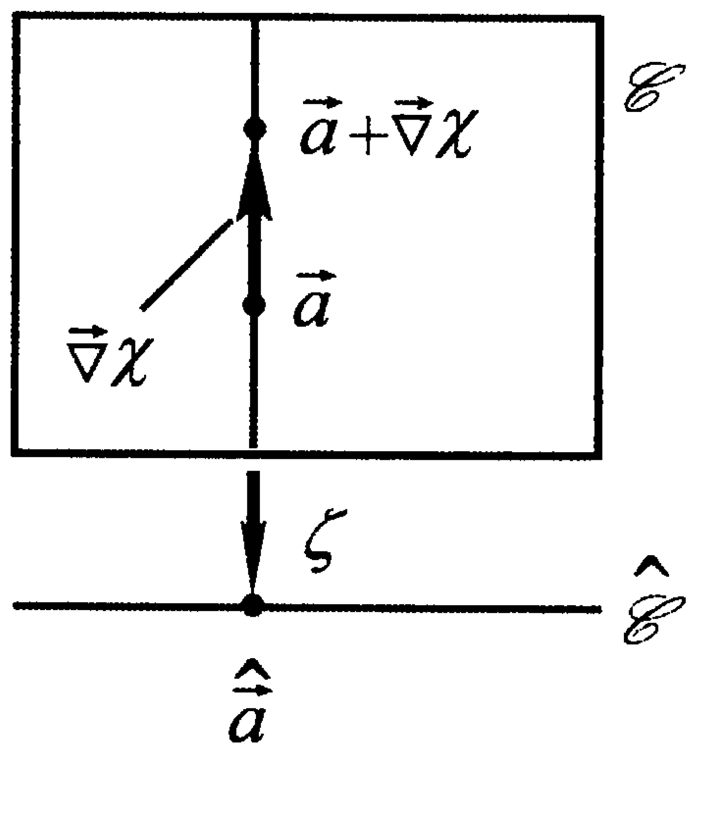


图 15-8　$\zeta: \mathscr{C} \to \hat{\mathscr{C}}$ 是自然投影映射．把 $\vec{\nabla}\chi$ 看作从 $\vec{a}$ 指向 $\vec{a} + \vec{\nabla}\chi$ 的矢量，则 $\zeta_*(\vec{\nabla}\chi) = 0$．

$\vec{\pi}=\zeta^{*}\hat{\vec{\pi}}$，则 $\vec{\pi}$ 作用于 $\vec{\nabla}\chi\in V_{\vec{a}}$ 的结果为

$$\vec{\pi}(\vec{\nabla}\chi)=(\zeta^{*}\hat{\vec{\pi}})(\vec{\nabla}\chi)=\hat{\vec{\pi}}(\zeta_{*}\vec{\nabla}\chi)=0\,. \tag{15-7-73}$$

[最末一步用到式(15-7-72).] 位形空间 $\mathscr{C}$ 之所以有无限维，是因为其中每点 $\vec{a}$ 代表 $\hat{\Sigma}$ 上的一个矢量场，为强调起见不妨记作 $\vec{a}(x)$，其中 x 可跑遍 $\hat{\Sigma}$ 表明 $\vec{a}$ 有无限多的坐标[若写成三个分量 $a_i(x)$，则可看出 $\vec{a}$ 有"$3\times\infty^3$"个坐标.] 因此，$\vec{\nabla}\chi$ 和 $\vec{\pi}$(分别作为点 $\vec{a}\in\mathscr{C}$ 的矢量及对偶矢量)应有无限多分量，而 $\vec{\pi}$ 作用于 $\vec{\nabla}\chi$ 则应等于对应分量之积之和，这个"和"实际是在 $\hat{\Sigma}$ 上的积分，所以式(15-7-73)可表为

$$0=\vec{\pi}(\vec{\nabla}\chi)=\int_{\hat{\Sigma}}\vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}\chi=\int_{\hat{\Sigma}}[\vec{\nabla}\cdot(\chi\vec{\pi})-\chi\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}]=-\int_{\hat{\Sigma}}\chi\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}\,,$$

其中最末一步是由于 χ 和 $\vec{\pi}$ 所满足的边界条件保证所化成的面积分为零. 因为上式对满足边界条件的任意 χ 成立，所以 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$. 可见 $V_{\vec{a}}{}^{*}$ 中只有满足 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$ 的元素 $\vec{\pi}$ 才可在 $V_{\hat{\vec{a}}}{}^{*}$ 中找到逆像. 事实上，$\zeta^{*}[V_{\hat{\vec{a}}}{}^{*}]$ 是 $V_{\vec{a}}{}^{*}$ 的、满足 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$ 的子空间. 因此也常把 $\hat{\vec{\pi}}$ 记作 $\vec{\pi}$. 现在可以更清楚地理解"$\mathscr{C}$ 作为位形空间其实太大"的含义：不仅因为 $\mathscr{C}$ 的许多不同点(同一等价类中的点)代表相同的物理态(空间 $\hat{\Sigma}$ 上的同一磁场 $\vec{B}$)，而且因为 $\mathscr{C}$ 的每点 $\vec{a}\in\mathscr{C}$ 的对偶空间中只有满足 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$ 的元素 $\vec{\pi}$ 才有物理意义(才代表 $\hat{\Sigma}$ 上的一个电场 $\vec{E}$)，因而 $V_{\vec{a}}{}^{*}$ 也嫌太大. 反之，$\hat{\mathscr{C}}$ 却可以非常合适地充当位形空间：由于 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{a}$ 和 $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\chi)=0$，$\hat{\Sigma}$ 上的所有(满足适当边界条件的)磁场 $\vec{B}$ 的集合与 $\hat{\mathscr{C}}$ 一一对应；$\hat{\Sigma}$ 上的所有(满足适当边界条件的)无源电场 $\vec{E}\,(=-4\pi\vec{\pi})$ 则与 $\hat{\mathscr{C}}$ 的任一点 $\hat{\vec{a}}$ 的对偶空间 $V_{\hat{\vec{a}}}{}^{*}$ 一一对应(从而保证 $\hat{\mathscr{C}}$ 的余切丛的确就是无源电磁场的相空间). 可见 $\hat{\mathscr{C}}$ 是对 $\mathscr{C}$ 作合理"消肿"的结果，$\mathscr{C}$ 中所含的非物理自由度已被约化一空，自然也不再有约束. 现在就可用 $\hat{\mathscr{C}}$ 作为位形空间重新构造电磁场(看作无约束系统)的拉氏和哈氏形式. 因为原来的拉氏密度 $\mathscr{L}=-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 与规范无关(只依赖于 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$)，它自然诱导出新处理中的一个拉氏密度 $\hat{\mathscr{L}}=-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，由此求得的哈氏量 $\hat{H}$ 与原哈氏量 H 很像，只须把式(15-4-21)右边的 $V\partial_i\pi^i$ 项略去，即

$$\hat{H}=\int_{\hat{\Sigma}}(2\pi\hat{\vec{\pi}}\cdot\hat{\vec{\pi}}+\frac{1}{8\pi}\vec{B}\cdot\vec{B})\,. \tag{15-7-74}$$

于是由无约束系统的哈氏正则方程便得

$$\dot{\hat{\vec{a}}}=\frac{\delta\hat{H}}{\delta\hat{\vec{\pi}}}=4\pi\hat{\vec{\pi}},\qquad \dot{\hat{\vec{\pi}}}=-\frac{\delta\hat{H}}{\delta\hat{\vec{a}}}=-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}\,, \tag{15-7-75}$$

对上式的第一式取旋度得 $\partial\vec{B}/\partial t=4\pi\vec{\nabla}\times\hat{\vec{\pi}}=-\vec{\nabla}\times\vec{E}$，而第二式则可改写为

$\partial\vec{E}/\partial t=\vec{\nabla}\times\vec{B}$，这正是熟知的麦氏方程组中的两个演化方程.

这种通过引入约化位形空间来消除约束的做法在一定程度上可推广到引力场，所谓"一定程度"，是指只适用于消除矢量约束 $C^a=0$. 这一约束对应的规范自由性是：若 $\hat{\Sigma}$ 上两个正定度规场 h_{ab} 和 h'_{ab} 只差到一个微分同胚，则它们代表相同的物理位形. 满足上述要求的 h_{ab} 和 h'_{ab} 称为等价的，以位形空间 $\mathscr{C}\equiv\{h_{ab}\}$ 中的每一等价类为元素构成的约化位形空间 $\hat{\mathscr{C}}$ 称为**超空间**(superspace). 仿照电磁场的讨论可得

$$0=\int_{\hat{\Sigma}}\pi^{ab}\mathscr{L}_v h_{ab}=\int_{\hat{\Sigma}}2\pi^{ab}\mathrm{D}_a v_b=2\int_{\hat{\Sigma}}[\mathrm{D}_a(\pi^{ab}v_b)-v_b\mathrm{D}_a\pi^{ab}]=-2\int_{\hat{\Sigma}}v_b\mathrm{D}_a\pi^{ab}\ ,$$

从而有 $2\mathrm{D}_a\pi^{ab}=0$，此即矢量(密度)约束方程. 可见超空间中没有矢量约束. 因为定义超空间所用的等价类并未涉及标量约束(15-7-51)，所以标量约束仍存在于超空间中. 由上册小节 8.10.2 可知广义相对论的规范自由性实质上是时空度规 g_{ab} 可差到一个时空微分同胚 $M\to M$，而矢量约束只反映空间诱导度规 h_{ab} 可差到一个空间微分同胚 $\hat{\Sigma}\to\hat{\Sigma}$，"其余的"自由性由标量约束反映. 如前所述，标量约束反映的是对时空作 3+1 分解的任意性. 这一约束与所谓的"参数化粒子动力学"中的约束十分类似. 为便于读者对比(理解)，下面简介这种理论.

考虑牛顿力学中的一个 $N=3$ 的无约束系统，例如位于势场(不含时间)中的单个粒子. 选粒子的 3 个笛卡儿坐标 $q^i(i=1,2,3)$ 为位形坐标. 设系统的拉氏函数为 $L(q^i,\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t)$ (其中 t 为牛顿的绝对时间)，哈氏函数为 $H(q^i,p_i)$. 把 t 的任一(常增)函数 t' 看作新的"时间"，把 t 看作第 0 坐标(即令 $q^0\equiv t$)，以 $\dot{q}^\mu(\mu=0,1,2,3)$ 代表 $\mathrm{d}q^\mu/\mathrm{d}t'$，则 $\dot{q}^0=\mathrm{d}t/\mathrm{d}t'$，$\dot{q}^i=\dot{q}^0\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$. 定义新拉氏量 $L':=L\dot{q}^0$，把 L 看作 7 元函数 $L(q^i,\dot{q}^i(\dot{q}^0)^{-1})$，则 L' 是 8 元函数 $L'(q^\mu,\dot{q}^\mu=\dot{q}^0\mathrm{d}q^\mu/\mathrm{d}q^0)$. 在几何语言中，以 $\mathscr{C}'$ 代表新的位形空间(每点有 4 个坐标 q^μ)，则 L' 是切丛 $\mathrm{T}\mathscr{C}'$ 上的函数. 由 L' 给出的动量 p'_μ 为

$$p'_i\equiv\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}^i}=\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial(\dot{q}^j(\dot{q}^0)^{-1})}\frac{\partial(\dot{q}^j(\dot{q}^0)^{-1})}{\partial\dot{q}^i}=\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t)}(\dot{q}^0)^{-1}=p_i,\qquad(15\text{-}7\text{-}76)$$

$$p'_0\equiv\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}^0}=L+\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^0}=L+\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial(\dot{q}^i(\dot{q}^0)^{-1})}\frac{\partial(\dot{q}^i(\dot{q}^0)^{-1})}{\partial\dot{q}^0}$$

$$=L+\dot{q}^0\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t)}[-\dot{q}^i(\dot{q}^0)^{-2}]=L-p_i\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}=-H,\qquad(15\text{-}7\text{-}77)$$

故 $p'_0+H=0$. 令 $\phi\equiv p'_0+H$，注意到 $H=H(q^i,p_i)=H(q^i,p'_i)$，得 $\phi=\phi(q^i,p'_i,p'_0)$，所以 $\phi(q^i,p'_i,p'_0)=0$ 给出初级约束. 仿照小节 15.3.1 定义切丛 $\mathrm{T}\mathscr{C}'$ 上的函数

$$\tilde{H}' := p'_\mu \dot{q}^\mu - L' = p'_0 \dot{q}^0 + p_i \dot{q}^i - L\dot{q}^0 = p'_0 \dot{q}^0 + \dot{q}^0(p_i(\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t) - L) = \dot{q}^0 \phi = 0 . \quad (15\text{-}7\text{-}78)$$

以 Γ' 代表 $\mathscr{C}'$ 的余切丛(相空间), 则 Legendre 变换 f ： $\mathrm{T}\mathscr{C}' \to \Gamma'$ 把整个 $\mathrm{T}\mathscr{C}'$ 映为 Γ' 中由 $\phi = 0$ 定义的 7 维子流形(初级约束面) Γ'_1, 其上的哈氏量按定义为(均见小节 15.3.1)

$$H'|_{\Gamma'_1} = \dot{q}^0 \phi|_{\Gamma'_1} = 0 \quad (这是颇为特殊的“零哈氏量”), \qquad (15\text{-}7\text{-}79)$$

它在 Γ' 上的任意延拓都可充当 Γ' 上的哈氏量 H'. 设 β ： $\Gamma' \to \mathbb{R}$ 为任意函数, 则可定义

$$H'|_{\Gamma'} := \beta\phi . \qquad (15\text{-}7\text{-}80)$$

现在就可用有约束哈氏方程(15-2-19)求得新“演化观”(以 t' 为时间)中的演化曲线:

$$\dot{q}^0 = \frac{\partial H'}{\partial p'_0} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p'_0} = \phi \frac{\partial \beta}{\partial p'_0} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial p'_0} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p'_0} \approx \beta + \lambda , \qquad (15\text{-}7\text{-}81)$$

$$\dot{p}'_0 = -\frac{\partial H'}{\partial q^0} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^0} = 0 , \qquad (15\text{-}7\text{-}82)$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p'_i} = \phi \frac{\partial \beta}{\partial p'_i} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial p'_i} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p'_i} \approx (\beta + \lambda) \frac{\partial \phi}{\partial p'_i} = (\beta + \lambda) \frac{\partial H}{\partial p_i} , \qquad (15\text{-}7\text{-}83)$$

$$\dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q^i} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = -\phi \frac{\partial \beta}{\partial q^i} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial q^i} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^i} \approx -(\beta + \lambda) \frac{\partial H}{\partial q^i} . \qquad (15\text{-}7\text{-}84)$$

把式(15-7-81)代入(15-7-83)和(15-7-84)得

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad (15\text{-}7\text{-}85)$$

这正是原“演化观”中的哈氏方程. 另一方面,

$$\dot{\phi} = \{\phi, H'\} + \lambda \{\phi, \phi\} = \{\phi, \beta\phi\} = \phi \{\phi, \beta\} \approx 0$$

表明 $\phi = 0$ 的自洽性条件自动满足, 所以不再有次级约束. 由选读15-2-1可知 λ 是自由拉氏乘子. 注意到 β 可为任意函数, 由式(15-7-81)便知 $\dot{q}^0$ 完全自由. 事实上, 如果愿意, 也可取 $\beta = 0$, 这时 $\dot{q}^0 = \lambda$ 就是自由拉氏乘子. 这正是 Sudarshan and Mukunda(1974) 的做法[见式(15-3-8)的评述]. 这表明 $q^0(t')$ 没有物理意义[式(15-7-82)的 $\dot{p}'_0 = 0$ 也是旁证], 共轭对 (q^0, p'_0) 完全是人为的. 用以上手法构造的“(重)参数化粒子理论”给出的完全是重参数化前的结果. 然而, 假如一开始就把这个貌似4维的系统(即 L' 而非 L)放在你面前, 你会觉得它是一个约束系统, 而且

与引力场有一些很类似的特征[①]:①它同引力场一样是第一类约束系统; ②拉氏量 L' 中含有自由拉氏乘子 $\dot{q}^0$, 而引力场的 $\mathscr{L}$ 也含有自由拉氏乘子 N [见式(15-5-7)]; ③哈氏量 H' 在约束面 $\bar{\Gamma}'=\Gamma_1'$ 上为零, 与引力场的哈氏量 H 在 $\bar{\Gamma}$ 上为零类似. 在此应作一点说明. 由于引力场哈氏量 H 的计算放在§15.5 的必读部分, 我们在 H 的定义问题上讲得较为粗略. 事实上, 式(15-5-17)的 H 只定义在由初级约束 $\pi_N=0$, $\pi_{N^a}=0$ 决定的 Γ_1 上(详见小节15.3.1关于由 $\tilde{H}:\mathrm{T}\mathscr{C}\to\mathbb{R}$ 定义 $H|_{\Gamma_1}$ 的讨论. 现在还有次级约束 $C=0$ 和 $C_a=0$, 所以最终约束面 $\bar{\Gamma}\subset\Gamma_1$. 与重参数化粒子系统稍有不同之处是 H 只在 $\bar{\Gamma}\subset\Gamma_1$ 而不是整个 Γ_1 上为零.) 至于 H 在 $\Gamma-\Gamma_1$ 上的定义, 也允许它是 $H|_{\Gamma_1}$ 的任意延拓. 总之, 我们看到重参数化粒子系统与引力场有许多类似之处. 对于重参数化粒子系统, 你可以通过"退参数化"的反操作来消除约束以恢复其本来面目. 一个天真的想法是:引力场的标量约束是否也可通过"退参数化"来消除? 它真有一个不含标量约束的"本来面目"吗? 长期、艰苦的研究给出的答案是:很可能不. 在上述参数化理论中, 约束函数 ϕ 是动量 p_0' 的线性函数, 通过分解约束方程可以求得 p_0' 的表达式, 从而进行退参数化. 然而, 引力场的标量约束函数 C 是动量的 2 次函数, 不太可能进行类似的退参数化操作. 总之, 引力场很可能不存在这样一个约化位形空间 $\mathscr{C}$, 其相应的相空间(即 $\mathscr{C}$ 的余切丛)的所有变量反映的都是"真实的动力学自由度". 标量约束在广义相对论哈氏形式中的存在性看来是不可摆脱的. 这构成引力场正则量子化的一个严重障碍.

§15.8　从几何动力学到联络动力学

—— Ashtekar 新变量理论简介[选读]

种种考虑(例如对奇性定理的思考)表明, 不管经典广义相对论多么优雅, 它不可能是关于引力的终结理论:广义相对论最终必须量子化. 引力量子化存在不止一种途径, 其中一个重要途径是正则量子化. 对任一经典理论进行正则量子化的第一步是把该理论正则化(哈氏化), 即把它重铸成哈氏形式, 而正则化的第一步则是选择一对正则变量, 即位形变量及其共轭动量. 本章介绍了真空引力场的哈氏形式, 其正则变量分别为空间度规 h_{ab} (位形变量)及其共轭动量 π^{ab} (也可说是外曲率 K_{ab}), 用这一共轭对表出的矢量约束 $C^b=0$ 和标量约束 $C=0$ 分别为式(15-7-36)和(15-7-37). 由这两个式子可以看出 C^b 和 C 对 h_{ab} 的依赖关系非常复杂, 这给研究带来许多技术性困难. 特别是, 根据量子化程序, 这两组约束方程在量子化时将

---

① 与引力场标量约束更类似的是在给定背景时空上的"参数化场论"的约束, 见 Kuchar(1981).

被改写为算符方程，C^b 和 C 对 h_{ab} 依赖关系的复杂性使这些算符方程难以求解. 这一困难原则上可通过选择新的正则变量(共轭对)来克服. Ashtekar 于1986 年首次提出一组新的正则变量(后称 **Ashtekar 新变量**)，成功地使约束表达式得以明显简化，并带来一系列优点. 限于篇幅，下面只能对Ashtekar 新变量作一非常简略的介绍. 有兴趣的读者可参阅 Ashtekar(1986,1987a,1991,1999)，Ashtekar et al.(2004) 和 Han et al.(2005).

传统的正则变量 (h_{ab},π^{ab}) 是3 维流形 Σ_t 上的一对张量场. (准确地说，π^{ab} 是张量密度场.) 以 $\{(e_i)^a \mid i=1,2,3\}$ 代表 Σ_t 上的一个局域标架场，$\{(e^i)_a\}$ 代表其对偶标架场. 设 $\{(e_i)^a\}$ 用 h_{ab} 衡量为正交归一，则 $h_{ab}=\delta_{ij}(e^i)_a(e^j)_b$. 把 $(e^i)_a$ 简记为 e^i_a，则上式可改写为

$$h_{ab}=\delta_{ij}e^i_a e^j_b\,. \tag{15-8-1}$$

若先给定标架场 $\{e_i^a\}$，则它唯一确定一个度规场 h_{ab}，用它衡量 $\{e_i^a\}$ 为正交归一，即满足上式. 反之，若先给定 h_{ab}，欲求 $\{e_i^a\}$ 使之满足式(15-8-1)，则 $\{e_i^a\}$ 并不唯一：式(15-8-1)只能把 $\{e_i^a\}$ 确定到差一个 O(3) 转动(含反演)的程度，因为两个标架 $\{e_i^a\}$ 和 $\{\hat{e}_i^a\}$ 用 h_{ab} 衡量都正交归一当且仅当 $\{e_i^a\}$ 与 $\{\hat{e}_i^a\}$ 差一个 O(3) 转动(含反演). 在新变量理论中，$\{e_i^a\}$ 将代替 h_{ab} 用作共轭对中的一个变量. 注意到引力场拉氏密度 $\mathscr{L}$ 是标量密度，可知共轭对的一个变量应为张量密度. 下面先把 e_i^a 改为张量密度. 以 h 和 $\det(e)$ 分别代表 h_{ab} 和 e^i_a 在任一(但同一)基底的行列式，则式(15-8-1)给出 $h=[\det(e)]^2$，令

$$E_i^a := \det(e)\,e_i^a\,, \tag{15-8-2}$$

则 E_i^a 便是密度化的3标架. 设对 e_i^a 作一O(3)反演(例如变为 $\hat{e}_i^a=-e_i^a$)，则 $\det(e)$ 变号，故 E_i^a 不变. 因此，与 e_i^a 略有不同，h_{ab} 只能把 $\{E_i^a\}$ 确定到差一个SO(3) 转动的程度.① 设 K_{ab} 是 Σ_t 的外曲率，令

$$K_a^i := eK_{ab}e_j^b\delta^{ji}\,, \tag{15-8-3}$$

其中

$$e\equiv \operatorname{sgn}[\det(e)]\,. \tag{15-8-4}$$

---

① Ashtekar 的早期文献忽视了这一微妙差别. 他把 E_i^a 定义为 $h^{1/2}e_i^a$，却说 h_{ab} 只能把 $\{e_i^a\}$ 确定到差一个SO(3) 转动的程度. 其实在 E_i^a 的这一定义下上述结论中的SO(3) 应改为 O(3).

可以证明，如果选择 K_a^i 作为真空引力场的位形变量，则 E_i^a 是与之共轭的动量变量，即 (K_a^i, E_i^a) 组成一对新的正则变量. 原来的矢量约束 $C^b=0$ 和标量约束 $C=0$ 现在可用这组新变量重新表出，遗憾的是，这两组新的约束表达式并不比原来的表达式简单，简化约束的希望尚未实现.

简化约束表达式的关键一步是对联络进行修改——引进新的联络以代替同 h_{ab} 适配的那个联络. 按照§5.7 所讲，3 维黎曼流形 (Σ_t, h_{ab}) 上的联络可看作一组(3 个)实值 1 形式场 ω_{ija}，其中下标 a 是抽象指标，i, j 则是编号指标($i,j=1,2,3$). 设 x 是 Σ_t 的一点，v^a 是 x 点的一个(切于 Σ_t 的)矢量，则 x 点的 ω_{ija} 作用于 v^a 的结果(记作 $B_{ij}\equiv\omega_{ija}v^a$)构成一个 3×3 反称矩阵. 注意到李代数 $\mathscr{SO}(3)$ 是由全体 3×3 反称矩阵组成的集合(见附录 G 定理 G-5-3)以及附录 C 关于"$\mathscr{V}$ 值 1 形式场"的定义，便有以下抽象提法：

(Σ_t, h_{ab}) 上的一个联络是 Σ_t 上的一个 $\mathscr{SO}(3)$ 值 1 形式场.

$\mathscr{SO}(3)$ 的如下 3 个元素

$$a_1\equiv\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad a_2\equiv\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad a_3\equiv\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

构成 $\mathscr{SO}(3)$ 的一个基底(见§G.6)，任一元素 $B\in\mathscr{SO}(3)$ 可用此基底展开：

$$B=B^i a_i.\quad (\text{对}\ i\ \text{从 1 至 3 取和})$$

因此，$\mathscr{SO}(3)$ 的任一元素 B 既可用三个带两个下标的数 B_{ij}(3×3 反称矩阵的三个独立矩阵元)表示，也可用三个带一个上标的数 B^i(即 B 在基底 $\{a_i\}$ 的分量)表示，不难验证两者的关系为

$$B^i=-\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}B_{jk},\quad i=1,2,3,\ (j,k\ \text{都从 1 到 3 取和})\qquad(15\text{-}8\text{-}5)$$

其中 ε^{ijk} 是 Levi-Civita 记号. 用下式定义 Σ_t 上的三个实值 1 形式场 ω_a^i：[①]

$$\omega_a^i:=-\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jka},\quad i=1,2,3,\ (j,k\ \text{都从 1 到 3 取和})\qquad(15\text{-}8\text{-}6)$$

则不难看出 ω_a^i 实质上就是 ω_{ija}，三个 ω_a^i 合起来就是 Σ_t 上的一个联络[一个 $\mathscr{SO}(3)$ 值 1 形式场]，称为一个 SO(3) 联络.

以 Γ_a^i 代表 Σ_t 上与 h_{ab} 适配的那个唯一 SO(3) 联络. 在 Σ_t 上定义一个新的

① a 称为时空指标(或空间指标)，i 则称为内部指标.

SO(3) 联络:

$$A_a^i := \Gamma_a^i - \mathrm{i}K_a^i\,,\quad i=1,2,3\,, \tag{15-8-7}$$

其中 K_a^i 由式(15-8-3)定义, $\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$. 请注意 A_a^i 是复张量场. Γ_a^i 与 K_a^i 是性质不同的两种类型的几何量, 前者反映 (Σ_t,h_{ab}) 的内禀几何性质, 后者代表 (Σ_t,h_{ab}) 的外曲率, 而 A_a^i 则是 (Σ_t,h_{ab}) 的内、外几何性质的一种精心策划的结合. 新联络 A_a^i 对应于一个新的导数算符 $\mathscr{D}_a$ (有别于与 h_{ab} 适配的导数算符 D_a), 从而对应于一个新的曲率张量, 记作 F_{ijab}. 仿照式(15-8-5)可定义

$$F_{ab}^i := -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jkab}\,,\quad i=1,2,3\,, \tag{15-8-8}$$

正如 A_a^i 的抽象下标 a 暗示联络 $\{A_a^i\}$ 是 Σ_t 上的(复) $\mathscr{SO}(3)$ 值 1 形式场那样, F_{ab}^i 的两个抽象下标 ab 暗示曲率 $\{F_{ab}^i\}$ 是 Σ_t 上的(复) $\mathscr{SO}(3)$ 值 2 形式场.

以复数化为代价引进的新联络 A_a^i 的一大好处就是可以简化约束表达式. 可以证明, ①若选 A_a^i 为真空引力场的位形变量, 则 E_i^a 正是与之共轭的动量变量, 共轭对 (A_a^i,E_i^a) 就是所谓的 Ashtekar 新变量. ②矢量约束 $C_a=0$ 和标量约束 $C=0$ 可用这组新变量表为如下的简单得多的多项式形式:

$$F_{ab}^i E_i^b = 0\ (\text{矢量约束}),\qquad F_{ab}^i \varepsilon_i{}^{jk} E_j^a E_k^b = 0\ \ (\text{标量约束}). \tag{15-8-9}$$

此外, 引进标架 $\{E_i^a\}$ 代替度规 h_{ab} 必然带来新的规范任意性[对应于 SO(3) 群], 从而导致附加约束, 它可以表为

$$\mathscr{D}_a E_i^a = 0\,. \tag{15-8-10}$$

从数学角度看来, 由传统变量 (h_{ab},π^{ab}) 到新变量 (A_a^i,E_i^a) 的转换无非是相空间中的一种正则变换. 从物理角度看来, 这一转换反映人们关心的重点由空间度规 h_{ab} 的演化转移到联络 A_a^i 的演化. 既然前者早已被称为几何动力学(geometrodynamics), 后者自然被称为**联络动力学**(connection dynamics). 由于联络动力学(Ashtekar 新变量理论)具有若干明显的优点, 它一问世就引起一批同行的兴趣, 各种新的研究成果(包括经典方面和量子化方面, 尤以后者为突出)相继涌现, 对联络动力学的研究很快就形成一个新的分支, 而且方兴未艾. 在 Ashtekar 的联络动力学中, 真空引力场的相空间可以等同于[以 SO(3) 为内部对称群的]复值 Yang-Mills 场的相空间, 而且, 联络动力学的额外约束 $\mathscr{D}_a E_i^a=0$ 与 Yang-Mills 规范理论的高斯约束非常相像. (无源电磁场理论是最简单的 Yang-Mills 理论, 其高斯约束是 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$.) 更一般地说, 关于引力相互作用的联络动力学与关于其他相互作用的物理学在数学框

架上非常类似，这使得引力量子化问题不再像从前那样孤立，使得非引力场量子化的某些重要技巧[如 Yang-Mills 场量子化中的圈(loop)技巧]可以被借用到引力量子化的程序之中．人们很快就在引力量子化理论中引入了**圈表象**(loop representation)的概念[把量子态看作闭合曲线(圈)的泛函]，并早在1988~1990年就借助它在形式上找到了量子约束(算符)方程的许多解(构成一个无限维的解空间)．总之，广义相对论在使用 Ashtekar 新变量后与规范场论的相似性为非微扰正则量子引力论[①]提供了一个新起点．原始的 Ashtekar 新变量理论也有其自身缺点，其中之一就是它的正则变量为复张量，这实际上是在讨论复广义相对论．为了得出洛伦兹号差的实时空理论，必须加上**实性条件**(reality condition)，即要限制在复相空间的实洛伦兹截面上(以保证 h_{ab} 和 K_{ab} 为实张量)，这给量子化带来一系列麻烦，特别是，在圈量子化中执行实性条件非常困难．此外，这种复理论的结构群为非紧致群，而从非紧致结构群出发目前尚无法构造严格的不依赖于背景的量子引力理论．针对这一困难，Barbero(1994) 提出了**实 Ashtekar 变量**的建议．他指出，Ashtekar 变量(指 A_a^i)之所以必须为复，其实只是为保证标量约束得到简化，即取式(15-8-10)的形式．如果牺牲这一优点，便可引入实 Ashtekar 变量．[即 A_a^i 为实，为此只须用一任意非零实常数 β 取代式(15-8-7)的 $-\mathrm{i}$.] 这种实变量理论不但保留了复变量理论中与几何性质有关的一切优点，而且还有其自身优点，已经成为目前圈量子引力界内普遍采用的方法．人们利用实变量理论已经在运动学的层面上得到了一个数学上严格的量子几何理论(对几何实行量子化)，在此理论中长度、面积、体积等几何量(作为算符)都取分立本征值，表明“时空连续性”这一经典图象在 Planck 尺度下不再成立．做出这一关键突破之后，圈量子引力论近几年来在宇宙论和黑洞方面又取得了重要进展．除了关于黑洞熵(准确说是孤立视界的熵，见第 16 章)的贡献外，在消除奇性方面的贡献更是值得一提．奇性问题是广义相对论的老大难问题，人们长期以来积累了一批非常基本的、概念性的疑难问题一直没有答案．例如(仅以宇宙论的奇性为例陈述)，①离大爆炸多“久”才能像经典广义相对论那样把时空看作光滑连续体?特别是，能证明这种近似处理在暴涨开始时是允许的吗?如不允许就有大麻烦．) ②量子引力论能自然地消除大爆炸和大挤压奇性吗?须知此前的正则量子引力论(Wheeler-Dewitt 理论，是几何动力学而非联络动力学)未能消除这些奇性．所谓自然地消除，是指无须像某些量子引力论那样要人为地引入某种新的原理或者对大爆炸人为地规定某种边界条件．③如能消除，那么奇点的“另一侧”是个什么样子?是否也如同“这一侧”那样有一个很大的、经典的

① 背景闵氏度规在 Yang-Mills 场的量子化中起重要作用．引力场的量子化没有背景度规可用，由此带来许多困难．圈量子引力的研究者们在 1992 至 1995 年发展出一种新的泛函微积分方法，它在数学上是严格的，而且与背景时空几何完全无关．这一新方法对非微扰正则量子引力论的新进展作出了重要贡献．

宇宙?可以说, 至少就某些“对称约化模型”(symmetry reduced models)而言, 圈量子宇宙论近期的解析和数值研究对以上三个问题都给出了较满意的答案: ①至少在暴涨开始时刻仍然可以近似使用经典广义相对论; ②大爆炸和大挤压奇性的确能被自然地消除[见Bojowald(2001)]. 以 $k=1$ 的宇宙为例, 经典图像是宇宙先从大爆炸开始膨胀, 至尺度因子 a 取最大值时开始收缩, 最终缩到大挤压(Wheeler-Dewitt 量子引力论也未能幸免); 而圈量子宇宙论图像则是: 任选一时刻作为初始时刻, 设宇宙此刻正在收缩($\dot{a}<0$), 则当 a 缩到足够小(但非零)时又转为膨胀, 至 a 取最大值时再度收缩, 如此周而复始. 这可称为量子反弹(quantum bounce)模型, 其中 a 永远非零, 既无大爆炸奇性又无大挤压奇性(以大反弹取代大爆炸); ③由答案②可知奇点的“另一侧”如同“这一侧”那样有一个很大的、经典的宇宙, 两个“相邻”宇宙(一个在收缩一个在膨胀)之间是 a 非常小(Planck 尺度)的、包含经典奇点的过渡区域, 称为 Planck 小区(Planck regime), 正是小区中的量子几何充当了连接两大经典宇宙的桥梁. 当然, 以上明确答案只是研究对称约化模型的结果, 其中的关键限制是空间均匀性和各向同性性. 这一研究手法不难被推广到非各向同性模型, 但向非均匀性的推广则仍仅处于起步阶段, 还有大量艰苦工作要做. 圈量子宇宙论之所以能取得与经典宇宙论如此不同的结果, 一个重要原因是经典演化方程在奇点处失效而圈量子演化方程却处处表现良好, [①]其解(波函数)所代表的是这样一个物理态, 它从经典奇点的一侧穿越 Planck 小区演化至他侧. 另一方面, 圈量子宇宙论与 Wheeler-Dewitt 量子宇宙论之所以有如此实质不同的结论, 关键在于量子几何对爱因斯坦方程做出了重要修正, 使得在圈量子宇宙论中有待求解的方程与 Wheeler-Dewitt 方程(它不考虑量子几何)有所不同. 这种不同只在 Planck 小区内才有明显表现, 因而宇宙的圈量子演化也只在该小区内才与 Wheeler-Dewitt 演化有重大区别. 有关内容可参阅 Ashtekar et al. (2006a,b), Bojowald(2005). 上面仅以宇宙论为例简述了圈量子引力论的近期成果, 其主要结论(特别是问题②和③及其答案)也适用于黑洞奇点研究中的对称约化模型(例如施瓦西黑洞), 联络(而不是几何)动力学以及奇点附近的量子几何在其中依然起到关键性作用, 见 Ashtekar and Bojowald(2006). 此外, 圈量子引力论在与黑洞相关的若干其他问题上(特别是黑洞蒸发及其导致的“信息丢失疑难”)也给出了很值得重视的结果, 详见 Ashtekar and Bojowald(2005).

习　题

注: 题 1,2,3 中经常涉及 q^i 的平方, 为避免混淆, 此三题中的 q^i 一律改记作 q_i.

① 与“曲率在奇点发散”这一众所周知的经典结论相反, 在圈量子宇宙论中, 曲率(作为算符)的期望值处处(含经典奇点)有限(曲率算符是有界算符).

1. 设 2 维系统的拉氏函数 $L=(\dot{q}_2{}^2/2q_1)+q_1q_2,\ q_1>0$.

$^\sim$(a)找出全部哈氏初、次级约束.

$^\sim$(b)验证全部约束都为第一类, 因而 λ 有完全自由性.

$^\sim$(c)选 $\lambda=0$, 指定 $(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2)\in\bar{\Gamma}$ 为初值点, 求演化函数 $q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t)$.

$^\sim$(d)由小节 15.3.1 可知两个哈氏量只要在 Γ_1 上相同就等价. 利用这一规范自由性, 可以改用 $H'=-p_1p_2+H$ 为哈氏量(其中 H 是前三问中所用的最简单哈氏量), 仍选 $\lambda=0$, 再求以 $(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2)\in\bar{\Gamma}$ 为初值点的演化函数 $q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t)$.

$^\sim$(e)验证上两问求得的 $q_1(t), q_2(t)$ 满足拉氏方程.

(f)从 $J_{ij}A^j=C_i$ 求 T$\mathscr{C}$ 上的约束, 验证它就是(a)问中求得的哈氏次级约束.

(g)写出最终约束面 $\bar{\Gamma}\subset\Gamma$ 和 $\bar{S}\subset$ T$\mathscr{C}$ 的表达式, 验证 Legendre 变换 f : $\bar{S}\to\bar{\Gamma}$ 是到上映射而非一一映射. $\forall P\equiv(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1=0,\hat{p}_2)\in\bar{\Gamma}$, 求 $f^{-1}[P]$.

2. 设 2 维系统的拉氏函数 $L=(\dot{q}_1{}^2/2)+2\dot{q}_1\dot{q}_2+2\dot{q}_2{}^2+q_1q_2$.

$^\sim$(a)找出全部哈氏初、次级约束.

$^\sim$(b)求出所有演化函数 $q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t)$ 的通解表达式.

$^\sim$(c)在全部哈氏约束中, 哪些是第一类? 哪些是第二类?

$^\sim$(d)验证所求得的 $q_1(t), q_2(t)$ 满足拉氏方程.

(e)从 $J_{ij}A^j=C_i$ 求 T$\mathscr{C}$ 上的约束(姑且称为一级约束), 再从其自洽性导出二级约束. 此乃 B 型, 其自洽性给出关于 A^i 的方程, 试与 $J_{ij}A^j=C_i$ 联立求解[甚易, 与(b)问用哈氏法的结果相同.]

(f)写出 $\bar{\Gamma}$ 和 $\bar{S}$ 的表达式, 验证 Legendre 变换 f : $\bar{S}\to\bar{\Gamma}$ 是一一到上映射.

3. 设 3 维系统的拉氏函数 $L=(\dot{q}_2{}^2/2q_1)+2\dot{q}_2\dot{q}_3+2q_1\dot{q}_3{}^2+q_1q_2q_3,\ q_1>0$.

$^\sim$(a)求出全部哈氏初级约束以及哈氏量 H 的表达式.

$^\sim$(b)求出矩阵 (Φ_{mn}) 的表达式, 你会发现它在 Γ_1 上除某些点外为满秩(以下提到 Γ_1 和 $\bar{\Gamma}$ 时都略去这些点). 求解 $\Phi_{mn}\lambda^n=h_m$ 以确定全部 λ^m (作为 Γ_1 上的函数).

$^\sim$(c)验证全部哈氏约束都为第二类.

(d)求出 T$\mathscr{C}$ 上的全部约束, 验证它们对应于哈氏理论中[(b)问求得的]的 λ^m 的表达式.

*(e)本书只讨论矩阵 (Φ_{mn}) 的秩 z 在 Γ_1 上为常数的情况(包括次级约束的定义), 但本题涉及 z 不完全是常数的问题, 于是对某些问题要做特殊讨论. 令 $\Gamma_1\equiv\Gamma_{1+}\cup\Gamma_{10}\cup\Gamma_{1-}$, 其中 Γ_{1+}, Γ_{10} 和 Γ_{1-} 分别代表满足 $p_2>0,\ p_2=0$ 和 $p_2<0$ 的子集, 则易见 $z|_{\Gamma_{1+}}=z|_{\Gamma_{1-}}=2$ 而 $z|_{\Gamma_{10}}=0$. 试证: ①任一演化曲线只要有一点在 Γ_{10} 上则全线躺在 Γ_{10} 上(于是对 Γ_{1+} 和 Γ_{1-} 也有同样结论); ② Γ_{10} 上的演化曲线必有 $q_2=q_3=0$ (于是 $q_2=q_3=0$ 可看作"次级约束"); ③由"自洽性条件" $\dot{p}_2\approx0,\ \dot{q}_2\approx0,\ \dot{q}_3\approx0$ ($\approx$ 代表"在 Γ_{10} 上等于")可知 $\lambda_2\approx0$ 而 λ_1 完全自由.

$^\sim$4. 试证小节 15.3.1 引入的共轭动量 p_i 和矩阵元 J_{ij} 在位形空间 $\mathscr{C}$ 的坐标变换 $\{q^i\}\mapsto\{q'^i\}$ 下分别按对偶矢量和 $(0,2)$ 型张量的规律变换, 即证明

$$p'_j=(\partial q^i/\partial q'^j)p_i \text{ 和 } J'_{kl}=(\partial q^i/\partial q'^k)(\partial q^j/\partial q'^l)J_{ij}.$$

5. 试证由式(15-3-32)定义的 $\mathscr{D}_\sigma$ 其实与坐标系无关.

~6. 试证式(15-4-2), 即 $(-g)^{1/2} = Nh^{1/2}$.

~7. 验证由式(15-6-21)定义的 $\nabla_a \widehat{T}$ 是权为 m 的 $(k,\ l+1)$ 型张量密度场.

~8. 试证式(15-6-26), 即 $\psi_a(\overline{e},\nabla) = \Gamma^c{}_{ca}$ (在该式后有提示).

9. 验证由式(15-6-34)定义的 $\mathscr{L}_v \widehat{T}$ 是权为 m 的 (k,l) 型张量密度场.

10. 试证式(15-6-39), 即 $\xi(\overline{\varepsilon},v) = -\nabla_a v^a$ (在该式后有提示).

~11. 补证式(15-6-41), 即 $v^a \nabla'_a \widehat{f} + m\widehat{f}\,\nabla'_a v^a = v^a \nabla_a \widehat{f} + m\widehat{f}\,\nabla_a v^a$.

12. 试证式(15-7-15), 即 $\theta_A = \omega_i (\mathrm{d}q^i)_A$.

13. 试证真空引力场的初级约束 $\pi_N = 0$ 和 $\pi_{\vec{N}} = 0$ 都是第一类约束(见小节15.7.4倒数第二段).

第16章　孤立视界、动力学视界和黑洞(热)力学

§16.1　传统黑洞热力学及其不足

16.1.1　传统黑洞热力学与 Killing 视界

在稳态黑洞的研究中, 人们一直认为未来事件视界$\mathscr{E}$可以恰当地充当黑洞的边界. 以球对称恒星坍缩而成的施瓦西黑洞为例(图16-1), 由于$\mathscr{E}$是类光无限远$\mathscr{I}^+$的编时过去$I^-(\mathscr{I}^+)$的边界, 即$\mathscr{E}=\dot{I}^-(\mathscr{I}^+)\cap M$, [其中$M$是物理时空, 请注意与非物理时空$\tilde{M}\supset M$的区别(见§12.4 注 1). 补上$\cap M$旨在祛除所有无限远点.] 以它为边界的时空区域$\mathscr{B}$内的任一点都与$\mathscr{I}^+$没有因果联系: 任一到达$\mathscr{I}^+$的观者永远接收不到从$\mathscr{B}$区内任一点发出的任何信息(故言"黑"). 反之, $\mathscr{B}$区外的任一点都与$\mathscr{I}^+$存在因果联系. 因此把$\mathscr{E}$称为事件视界(可被看见和不可被看见的事件的分界), 把$\mathscr{B}$区称为黑洞区, 而作为黑洞区的边界的事件视界$\mathscr{E}$自然就是黑洞的边界. 这种认识给早期黑洞研究提供过丰富的成果, 黑洞热力学就是突出的一例. Hawking 在1971年发表了他的黑洞边界面积不减定理, 其中的黑洞边界就是

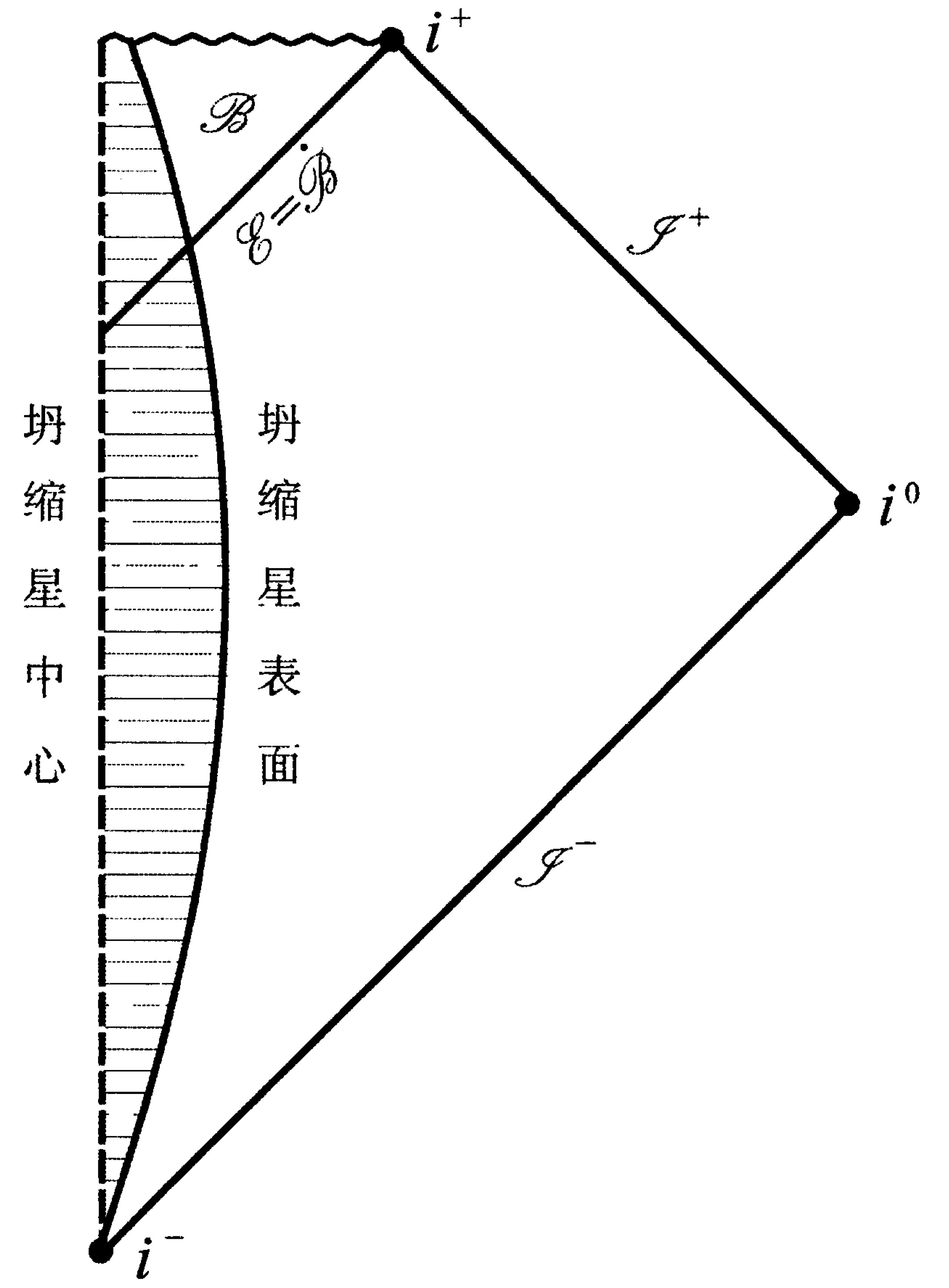


图 16-1　球对称坍缩星所在时空的 Penrose 图(相应于图 9-17)

指事件视界$\mathscr{E}$. 事件视界本是个3维子流形(类光超曲面), 其面积从何谈起?设$\{\Sigma_t\}$是类空超曲面族, 把Σ_t看作时刻t的全空间, 则$B_t \equiv \mathscr{B} \cap \Sigma_t$代表时刻$t$的(3维)黑洞, 它以$E_t \equiv \mathscr{E} \cap \Sigma_t$为(2维)边界, 于是$E_t$的面积(记作$S_t$)就可称为黑洞在时刻$t$的面积. 所谓面积不减, 就是指$S_{t_2} \geqslant S_{t_1}\ \forall t_2 > t_1$. [证明见Wald(1984)定理12.2.6, 前提要求很低, 只要满足爱因斯坦方程和弱能量条件.] 这一定理形式上与热力学第二定律(熵不减定律)非常类似. 乍看起来, 黑洞与热力学系统属于两个毫不相干的物理领域, 这种类似性恐怕只是形式类似而已. 不过, 两者在味道上的如此相似性在物理中毕竟是不多见的. 更有甚者, 后续的研究竟表明热力学的其他几个定律在黑洞物理学中也能找到很好的对应定律(后来知道这种对应或类似远远不只是形式上的), 从而逐渐形成一个被称为黑洞热力学的重要物理分支, 而且其本身以及它同其他学科分支的密切联系使之日益受到重视, 至今仍然是个非常活跃的研究前沿课题. 本节先讲述传统的黑洞热力学, 其他各节将陆续介绍黑洞热力学的后续(包括近期)进展.① 传统的黑洞热力学只涉及稳态黑洞(第二定律除外), 但不限于真空及电磁真空的稳态时空, 特别是可以包含有毛黑洞. 此处应对“稳态时空”这一类术语做一说明. 按照§8.1定义1, 稳态时空是指存在(整体的)类时Killing矢量场的时空. 根据这一定义, 含黑洞的施瓦西时空就不能算是稳态时空, 因为在黑洞外部为类时的Killing场ξ^a在洞内变得类空(而且在黑洞边界上类光), 全时空中并不存在一个处处类时的Killing场. 然而, 鉴于这一类型的“含黑洞的稳态时空”在本章中屡屡涉及, 不妨把(渐近平直的)稳态时空的条件适当放宽: 只要全时空存在一个Killing矢量场而且它在无限远附近类时, 就可称为**稳态时空**, 相应地还可把这个矢量场称为**稳态Killing矢量场**, 并把稳态时空所含的黑洞称为**稳态黑洞**.

我们首先引入传统黑洞热力学的两个重要概念, 即表面引力和角速度, 为此最好先介绍Killing视界.

类光超曲面$\mathscr{K}$称为**Killing视界**, 若时空中有Killing矢量场K^a, 而且$K^a|_{\mathscr{K}}$正交于$\mathscr{K}$. 图9-13(a)的N_1, N_2以及图6-43的两条45°线的每一条所代表的类光超曲面分别都是Killing视界. 可以证明, 只要度规和物质场满足某些不苛刻条件, 渐近平直稳态时空中的任一黑洞的事件视界$\mathscr{E}$就一定是Killing视界[见Wald(1994)P.140, Wald(2000)]. 以下默认所遇到的稳态黑洞都满足这些条件, 因而它们的事件视界都是Killing视界. 设$\mathscr{K}$是Killing视界(不一定是某黑洞的事件视界), 相应的Killing场为K^a, 则$\mathscr{K}$的类光性保证$\mathscr{K}$上有$K^aK_a = 0$. 令$f \equiv K^aK_a$, 则$\nabla_a f = 2K^b\nabla_a K_b$. 对$p \in \mathscr{K}$存在两种可能: ① $\nabla_a f|_p \neq 0$; ② $\nabla_a f|_p = 0$. [以图9-13(a)的N_1为例, 当p位于由$U=V=0$的“点”所代表的S^2上时K^a(即ξ^a)$=0$,

① 后续进展主要是指对非稳态黑洞的研究, 由于小节16.7.7所讲的原因, 非稳态黑洞的定律从“黑洞热力学定律”改称“黑洞力学定律”.

故$\nabla_a f|_p=0$.] 令

$$\mathscr{K}_1 \equiv \{p\in\mathscr{K} \mid \nabla_a f|_p \neq 0\} \subset \mathscr{K},$$

则$\nabla^a f|_{\mathscr{K}_1}$是$\mathscr{K}_1$的法矢场, 因而与法矢场$K^a$只能差到一个函数乘子, 即$\mathscr{K}_1$上有函数$\kappa$满足

$$\nabla^a f = -2\kappa K^a .$$

再令$\mathscr{K}_0 \equiv \mathscr{K} - \mathscr{K}_1$, 则$\nabla^a f|_{\mathscr{K}_0} = 0 = K^a|_{\mathscr{K}_0}$, 这时$\nabla^a f = -2\kappa K^a$也成立, 但$\kappa|_{\mathscr{K}_0}$变得不确定. 选读 16-1-1 将说明有办法定义$\kappa^2|_{\mathscr{K}_0}$的值. 记住这点后, 不妨仍写

$$\nabla^a(K^b K_b) = -2\kappa K^a . \quad (\text{在}\ \mathscr{K}\ \text{上}) \qquad (16\text{-}1\text{-}1)$$

这样定义的κ称为 Killing 视界$\mathscr{K}$的**表面引力**(surface gravity), 在黑洞热力学中有重要意义. 由上式得

$$-2\kappa K_a = 2K^b\nabla_a K_b = -2K^b\nabla_b K_a ,$$

[第二步用到 Killing 方程$\nabla_{(a}K_{b)}=0$.] 于是就有表面引力κ的如下常用公式:

$$(K^b\nabla_b K^a)|_{\mathscr{K}} = \kappa K^a|_{\mathscr{K}} . \qquad (16\text{-}1\text{-}2)$$

设U是含$\mathscr{K}$的 4 维开集, $\bar{\kappa}$是κ从$\mathscr{K}$到U的任一光滑延拓, 则在U上有

$$\nabla^a(K^b K_b) = -2\bar{\kappa}K^a + uF^a ,$$

其中u和F^a分别是U上的某个光滑函数和光滑矢量场, 且$u|_{\mathscr{K}}=0$. 对上式两边沿K^a求李导数分别得

$$\text{右边} = -2K^a\mathscr{L}_K\bar{\kappa} + u\mathscr{L}_K F^a + F^a\mathscr{L}_K u ,$$

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \mathscr{L}_K(\nabla^a f) = K^b\nabla_b(\nabla^a f) - (\nabla^b f)\nabla_b K^a = K_b\nabla^b\nabla^a f - (\nabla_b f)\nabla^b K^a \\ &= K_b\nabla^a\nabla^b f + (\nabla_b f)\nabla^a K^b = \nabla^a(K_b\nabla^b f) = \nabla^a[K_b\nabla^b(K_c K^c)] \\ &= \nabla^a(2K_c K_b\nabla^b K^c) = \nabla^a(2K_{(c}K_{b)}\nabla^{[b}K^{c]}) = 0 ,\end{aligned}$$

[其中第四、八步都用到 Killing 方程.] 故

$$-2K^a\mathscr{L}_K\bar{\kappa} + u\mathscr{L}_K F^a + F^a\mathscr{L}_K u = 0 .$$

把上式在$\mathscr{K}$上取值, 由$u|_{\mathscr{K}}=0$及$K^a|_{\mathscr{K}}$切于$\mathscr{K}$便有$K^a\mathscr{L}_K\kappa=0$, 因而$(\mathscr{L}_K\kappa)|_{\mathscr{K}_1}=0$, 可见$\kappa$在$K^a$的每条积分曲线(指非独点线)上为常数. 还可证明[见 Wald(1984) P.333~334 或 Wald(1994)P.121~122], 只要满足爱因斯坦方程和主能量条件(见中册附录 D), 则κ在含黑洞的稳态时空的事件视界(Killing 视界)上为常数(即各条

积分曲线的常数值κ相同). ① 例如，KN 黑洞的事件视界的表面引力取如下的常数值:

$$\kappa=\frac{(M^2-a^2-Q^2)^{1/2}}{2M[M+(M^2-a^2-Q^2)^{1/2}]-Q^2}. \tag{16-1-3}$$

再介绍事件视界$\mathscr{E}$的角速度. 设(M,g_{ab})是含黑洞的稳态时空，$\mathscr{E}$是事件视界(因而也是 Killing 视界)，ξ^a是满足如下归一化条件的稳态 Killing 场:在趋于$\mathscr{I}^+$时$\xi^a\xi_a\to-1$. 暂时考虑另一流形M'，并设$\phi: M\to M'$是微分同胚. 记$\mathscr{E}'\equiv\phi[\mathscr{E}]$，$g'_{ab}\equiv\phi_* g_{ab}$，则$\mathscr{E}$是$(M,g_{ab})$的事件视界保证$\mathscr{E}'$是$(M',g'_{ab})$的事件视界(见上册小节 8.10.2 的“易地唱戏”). 现在令$M'=M$，以$\phi_t: M\to M$代表由ξ^a产生的单参微分同胚族的任一元，则ξ^a是 Killing 场保证ϕ_t是等度规映射($\phi_{t*}g_{ab}=g_{ab}$)，从而保证$\phi_t[\mathscr{E}]$是(M,g_{ab})的事件视界，即$\phi_t[\mathscr{E}]=\mathscr{E}$，而这又表明$\xi^a$的积分曲线躺在$\mathscr{E}$上，故$\xi^a$切于$\mathscr{E}$. 如果$\xi^a$同时又法于$\mathscr{E}$(施瓦西情况)，则$\xi^a$正比于与$\mathscr{E}$(作为 Killing 视界)相应的 Killing 场K^a；如果ξ^a不法于$\mathscr{E}$(KN 情况)，则可考虑ξ^a与K^a的线性组合，它当然也是 Killing 场，而且在$\mathscr{E}$上也切于$\mathscr{E}$. 可以证明[见 Wald(1984) P.323 第二段(含脚注 5)及其所引文献]，总能找到适当的常数使这一线性组合(记作ψ^a)满足如下要求:

(a) $K^a=\xi^a+\Omega\psi^a$,　$\Omega\in\mathbb{R}$；[对 Kerr 时空就是式(13-5-4)]　　(16-1-4)

(b) ψ^a的积分曲线闭合，周期为2π；

(c) ψ^a与ξ^a对易，即$[\psi,\xi]^a=0$. [(b), (c)保证(M,g_{ab})是稳态轴对称时空]

式(16-1-4)中的常数Ω称为事件视界(Killing 视界)$\mathscr{E}$的**角速度**.

现在就有条件介绍黑洞热力学的其他几个定律并与普通热力学的相应定律逐一比较.

先看第一定律. 考虑只有压强P和温度T这两个独立参量的热力学系统. 设它从某个静态出发经历(无限小的)准静态过程达到新的静态，以δE, δV和δS分别代表系统的能量、体积和熵在过程中的微小改变量，则三者的关系服从熟知的热力学第一定律

$$\delta E=T\delta S-P\delta V. \tag{16-1-5}$$

与此式类似，设稳态轴对称黑洞在经历一个(无限小的)物理过程后重新成为一个稳态轴对称黑洞，以δM, δA和δJ分别代表黑洞的质量M、面积A和和角动量J在过程中的微小改变量[其中M和J的定义见 Wald(1984)P.334-335]，则已经证明

① §16.5 将证明:①在弱孤立视界Δ上也可定义表面引力κ，而且$\kappa|_\Delta$也为常数；②稳态黑洞的事件视界都是弱孤立视界，所以$\kappa|_{\mathscr{E}}$的常数性不证自明. 事实上，$\kappa|_{\mathscr{E}}$为常数的证明与$\kappa|_\Delta$为常数的证明有不少共同部分，而且后者在某种意义上比前者更简单. 这是我们不写出$\kappa|_{\mathscr{E}}$常数性的(颇长)证明的主要原因.

(见注1)三者的关系服从如下公式:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A + \Omega\delta J\,,^{①} \tag{16-1-6}$$

其中κ和Ω分别是事件视界的表面引力和角速度. 由于相对论(配以几何单位制)中的质量就是能量, 以上两式左边完全对应. 既然熵和面积都是不减量, 不妨暂设两者对应并成正比, 即$S = cA$, 其中c为常数. 于是, 为使两式右边第一项完全对应, 应认为T与κ有对应关系$T \leftrightarrow (8\pi c)^{-1}\kappa$. 进一步, 式(16-1-6)右边第二项与式(16-1-5)右边的"做功"项也类似: 事实上, 如果把一个转动物体看作热力学系统, 则式(16-1-5)右边本来就该有这么一个"做功"项$\Omega\delta J$. 为使两式完全对应, 看来应把$(8\pi c)^{-1}\kappa$视作黑洞的温度. 若能如此, 则式(16-1-6)就可名正言顺地被称为黑洞热力学第一定律. 然而, 36年前的相对论学家无法接受这一结论, 因为, 由于黑洞只吸不放的经典特性, 无论从哪条物理判据衡量, 其温度都只能为零. [例如, 假定黑洞外部充满黑体辐射, 则辐射(带着能量)源源不断地穿越事件视界流进洞内, 而黑洞又不能向外发出任何辐射, 能量的这种单向流动性使得全系统无法达到热平衡态, 除非外部的黑体辐射温度为零, 而这就意味着黑洞的热力学温度非零莫属.] 然而由式(16-1-3)易见黑洞的表面引力κ一般非零!于是关于黑洞与热力学系统的类似性的对比链条至此被无奈地斩断, 当时人们曾发出过"好景不长"的慨叹. 有趣的是, 这一问题在1973年竟然戏剧性地出现"柳暗花明又一村"的令人惊喜的局面, 使相对论学家对黑洞温度为零的经典认识彻底改观, 从而导致"黑洞热力学"的最终问世(见稍后).

注1 式(16-1-6)存在着两个在味道上非常不同的版本, 其一是"物理过程版本(physical process version)", 亦称"主动(active)版本"; 其二是"平衡态版本(equilibrium state version)", 亦称"被动(passive)版本". 物理过程版本着眼于一个物理过程[为推导式(16-1-6)所用的是"无限小"过程], 其初态和终态是两个不同的稳态, 如式(16-1-6)前的两行所述. Wald(1994)P.141-142以真空情况为例介绍了该证明, 考虑的是真空黑洞由于落入少量物质而发生的"无限小"物理过程. 平衡态版本的证明则与此非常不同, 它考虑的是两个含有稳态黑洞的不同时空(其度规和物质场都是相关的场方程的解), 两者"无限邻近"(准确含义最好用相空间说明, 可参阅小节16.5.5), 式(16-1-6)中的δM, δA和δJ依次代表这两个黑洞的质量、面积和角动量之差. Bardeen et al.(1973)是历史上最先证明式(16-1-6)的论文, 所用的证明方法就是平衡态版本. 后来Wald等又利用哈氏(或拉氏)形式给出了更为简单、直接和适用面更广的平衡态版本的证明, 可参阅Wald(1994)P.143-145及其所

① 此式适用于Kerr黑洞. 对KN黑洞, 右边还应添加一项$\phi\delta Q$, 其中Q及ϕ分别代表电荷及标势.

引文献.

黑洞物理学与普通热力学的类似性还可延拓至第零和第三定律. 热力学第零定律说: 热平衡具有可传递性, 因而处于平衡态的热力学系统的温度处处为常数; 而刚才已介绍过黑洞物理学的一个重要结论: 稳态黑洞的表面引力 κ 在事件视界上处处为常数. 只要接受 $(8\pi c)^{-1}\kappa$ 可解释为黑洞温度的说法, 就不妨把 κ 在事件视界上的常数性称为黑洞热力学第零定律. 普通热力学第三定律有几种不同的表述方式, 其中之一是: 不可能通过任何物理过程到达绝对零度($T=0$)的状态: 越接近零度就越难向前再走一步. 既然 $(8\pi c)^{-1}\kappa$ 对应于温度 T, 首先看看 $\kappa=0$ 是什么黑洞. 由式(16-1-3)可知 $\kappa=0$ 对应于 $M^2=a^2+Q^2$ 的情况, 即极端 KN 黑洞. Wald (1974) 用计算证明, 一个 KN 黑洞越接近极端时就越难向它再靠近一步. 这与普通热力学第三定律非常类似, 因此不妨就把"无法通过物理过程使一个非极端的黑洞变成极端黑洞"称为黑洞热力学第三定律. 然而普通热力学第三定律的另一版本断言 $T\to 0$ 时熵 $S\to 0$, 而黑洞在 $\kappa\to 0$ 时面积 A 却保持有限[由式(16-1-3)可知极端 KN 黑洞的 $\kappa=0$, 但其视界面积为有限值], 在这一点上就并不类似.

通常的量子场论默认背景时空是闵氏时空. 广义相对论问世后, 人们又逐渐发展出一种以弯曲时空为背景的"弯曲时空量子场论", 其基本出发点是默认时空的背景几何仍为经典几何(虽然弯曲却丝毫未做量子化), 但其上的粒子场则是量子化的场, 因而可看作是尚待建立的量子引力论的某种半经典近似. 1973 年 Hawking 在弯曲时空量子场论的研究中发现从纯经典看来是"一毛不拔"的黑洞竟能向外发射粒子(在 $\mathscr{I}^+$ 上可收到源源不断的粒子流), 而且辐射的谱分布满足黑体辐射定律, 其中充当温度的竟然正是事件视界的表面引力 κ 乘以常数, 准确说就是 $T_{\rm BH}=(2\pi)^{-1}\kappa$ (人们后来把这种辐射称为 **Hawking 辐射**). 于是以前的比例常数 c 从此应取为 $1/4$, 从而理应认为黑洞的熵 $S_{\rm BH}=A/4$. ① 这一发现把此前笼罩在黑洞热力学第一、二定律上空的阴霾——黑洞"只进不出"的特点使 κ 无法被解释为黑洞的物理温度 T, 因而两种热力学只不过是形式类似而已——一扫而空, 使"黑洞可以物理地被看作一个特别的热力学系统"这一美妙结论得以绝处逢生. 从此, 黑洞热力学越来越深入地揭示出广义相对论、量子物理学、统计物理学、数学物理学以及相对论天体物理学之间的交叉性密切关联, 而且对黑洞物理学的深入研究又进一步激发出对相关学科分支的研究热情. 不妨略举二例: ①数值相对论(numerical relativity)的许多课题都来自黑洞研究所提出的问题, 特别是由引力坍缩导致黑洞形成的过程及其有关的临界现象以及黑洞融合过程; ②黑洞研究对量子引力论提出了若干极具挑战性的课题, 成为后者发展的一种强大动力, 其中重要

① 在国际单位制中则为 $S_{\rm BH}=kc^3A/4G\hbar$, 其中 k 为玻尔兹曼常数.

一例就是对黑洞熵的微观机制的探讨. 今天可以说熵与面积的关系式 $S = A/4$ 具有高度的普适性, 不但适用于各种黑洞和黑弦, 也适用于弦理论中的各种新奇怪异的对象, 还适用于各种宇宙事件视界(宇宙事件视界的定义见§J.4). 然而公式 $S = A/4$ 并未说明熵的微观起源, 这类似于19世纪的宏观热力学阶段[只有在统计物理学建立后方才认识到热力学熵的微观实质——某宏观态的熵等于与该态对应的所有微观态的数目的对数(取玻尔兹曼常数为 1)]. 黑洞熵的微观机制问题对量子引力论的各种候选理论都构成非常严酷的挑战. 弦理论工作者在此问题上曾取得令人瞩目的进展, 他们对极端静态黑洞(电荷等于质量)的一个子类的微观态数做过计算并得出与 $S = A/4$ 一致的结果, 可惜真实黑洞(其荷质比小于 10^{-18})与极端黑洞相去甚远, 上述结果尚无法推广至真实黑洞, 更谈不上宇宙事件视界. 圈量子引力论在这方面的进展也许更大[详见 Ashtekar and Lewandowski(2004)], 该理论先是对几何实现了量子化[长度、面积和体积(作为算符)都有分立本征值], 然后通过计算证明了普通天文学意义下的黑洞(远不像极端黑洞那样极端)的孤立视界(isolated horizon, 定义见§16. 5)的微观态数 $N = \exp[(\gamma/\gamma_0)A/4]$, (其中 γ_0 是某个确定的实常数, γ 是圈量子引力论中的一个重要待选参数.) 因而孤立视界的熵为

$$S = \ln N = \frac{A}{4}\frac{\gamma}{\gamma_0}. \tag{16-1-7}$$

上式不但表明 S 正比于 A, 而且只要选 $\gamma = \gamma_0$ 就有 $S = A/4$. 人们对这一选择褒贬不一. 从经典引力论出发构造圈量子引力论时, 得到的不是一个而是一族量子引力论, 而且是一个以 $\gamma \in \mathbb{R}-\{0\}$ 为参数的“单参族”. 到底应在族中选哪一个量子引力论?褒者认为当然应选这样一个, 其经典(或半经典)近似能回到已知的经典(半经典)引力论. 从这一角度看来, 式(16-1-7)提供了一种天然的选择: 当然应选 $\gamma = \gamma_0$. 一旦采用这一选择, 量子引力论就完全确定, 它对各种各样的孤立视界(无论涉及怎样的电荷、角动量、宇宙常数、畸变及毛发)的熵都给出了梦寐以求的 $S = A/4$. 而贬者则认为圈量子引力论只证明了熵与视界面积成正比, 要想得到 $S = A/4$ 还得依赖于对参数的人为选择. 然而, 无论是贬是褒, 都必须承认这是一个重要进展.

[选读 16-1-1]

K^a 有双重性质: ①是 Killing 矢量场; ②正交于 Killing 视界 $\mathscr{K}$. 以 $(\partial/\partial\alpha)^a$ 代表 $K^a|_{\mathscr{K}}$, 则 α (作为 $K^a|_{\mathscr{K}}$ 的积分曲线的参数)称为 **Killing 参数**. 式(16-1-2)表明: ① $K^a|_{\mathscr{K}}$ 的积分曲线在 $\kappa \neq 0$ 时为非仿射参数化的测地线, 可见 Killing 参数不是仿射参数; ② κ 是 Killing 参数 α 偏离仿射参数的程度的某种衡量.

下面的计算有助于弄清“表面引力” κ 的物理意义. 首先, K^a 与超曲面 $\mathscr{K}$ 正交导致(此处只须承认结论, 证明详见命题 16-3-3)

$$K_{[a}\nabla_b K_{c]} = 0\text{，（在 }\mathscr{H}\text{ 上）} \tag{16-1-8}$$

再用 Killing 方程易得

$$K_c \nabla_a K_b = -2K_{[a}\nabla_{b]}K_c\text{.（在 }\mathscr{H}\text{ 上）} \tag{16-1-9}$$

以 $\nabla^a K^b$ 缩并两边便知在 $\mathscr{H}$ 上有

$$\begin{aligned} K_c(\nabla^a K^b)\nabla_a K_b &= -2(K_{[a}\nabla^a K^b)\nabla_{b]}K_c \\ &= -2(K_a \nabla^a K^b)\nabla_b K_c = -2\kappa K^b \nabla_b K_c = -2\kappa^2 K_c, \end{aligned} \tag{16-1-10}$$

其中第二步用到 Killing 方程, 第三、四步用到式(16-1-2). 于是就有 κ^2 的显表达式①

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a K^b)\nabla_a K_b\text{.（在 }\mathscr{H}\text{ 上）} \tag{16-1-11}$$

为了从上式看出 κ 的物理意义, 可先在 M 上定义标量场

$$\Lambda \equiv (K^{[a}\nabla^b K^{c]})(K_{[a}\nabla_b K_{c]}) = (K^a \nabla^b K^c)K_{[a}\nabla_b K_{c]}, \tag{16-1-12}$$

由此式不难求得

$$\begin{aligned} 3\Lambda &= (K^a\nabla^b K^c)(K_a\nabla_b K_c + K_c\nabla_a K_b + K_b\nabla_c K_a) \\ &= K^a K_a(\nabla^b K^c)\nabla_b K_c - (K^a\nabla_a K_b)K_c\nabla^c K^b - (K^b\nabla_b K^c)K^a\nabla_a K_c \\ &= K^a K_a(\nabla^b K^c)\nabla_b K_c - 2(K^b\nabla_b K^c)K^a\nabla_a K_c, \end{aligned} \tag{16-1-13}$$

其中第一、二步都用到 Killing 方程. 令 $\nu \equiv \sqrt{-K^d K_d}$，由

$$K^a\nabla_a \nu^2 = K^a\nabla_a(-K^d K_d) = -2K^{(a}K^{d)}\nabla_{[a}K_{d]} = 0 \quad\text{（第二步用到 Killing 方程）}$$

可知 ν 沿测地线为常数. 以 ν^{-2} 乘式(16-1-13)得

$$3\Lambda\nu^{-2} = -(\nabla^b K^c)\nabla_b K_c - 2\nu^{-2}(K^b\nabla_b K^c)K^a\nabla_a K_c. \tag{16-1-14}$$

$\nu|_{\mathscr{H}}$ 显然为零, 由式(16-1-12)和(16-1-8)又知 $\Lambda|_{\mathscr{H}} = 0$，这导致式(16-1-14)在 $\mathscr{H}$ 上无意义, 但可设法求极限. $\forall p \in \mathscr{H}$，考虑满足以下两条件的任一曲线 $C(t)$：① $C(0) = p$；② $C(t)$ 在 p 点的切矢 X^a 不切于 $\mathscr{H}$（“翘向 $\mathscr{H}$ 外”）. 以 lim 代表当动点沿 $C(t)$ 趋于 p（即 $t \to 0$）时的极限, 则由 l'Hospital(罗必达)法则得

---

① K^a 在 $\mathscr{H}$ 的某些点上可能为零, 对这些点, 由式(16-1-10)得不出式(16-1-11). 但仍可用式(16-1-11)定义这些点的 κ^2，详见选读 16-1-3 .

$$\lim\frac{A}{\nu^2}=\lim\frac{\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\nu^2(t)/\mathrm{d}t}=\frac{\lim[\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}t]}{\lim[\mathrm{d}\nu^2(t)/\mathrm{d}t)]}=\frac{X^e\nabla_e A}{X^f\nabla_f \nu^2}.$$

式(16-1-12)右边两个括号代表的两个因子都在 $\mathscr{H}$ 上为零, 所以 $(\nabla_e A)|_p=0$；而

$$X^f\nabla_f\nu^2=X^f\nabla_f(-K^dK_d)=2\kappa X^fK_f$$

[其中用了式(16-1-1)]在 $\kappa\neq 0$ 时一定非零(因 $X^fK_f\neq 0$), 可见上面的极限为零. 于是由 p 在 $\mathscr{H}$ 上的任意性便知 $A\nu^{-2}$ 在趋近 $\mathscr{H}$ 时趋于零, 因而式(16-1-14)给出

$$[(\nabla^bK^c)\nabla_bK_c]_p=-2\lim[\nu^{-2}(K^b\nabla_bK^c)K^a\nabla_aK_c], \qquad (16\text{-}1\text{-}15)$$

再令 $A^c\equiv\nu^{-2}K^b\nabla_bK^c$, $A\equiv(A^cA_c)^{1/2}$, 把式(16-1-11)代入式(16-1-15)便得

$$\kappa=\lim(\nu A). \qquad (16\text{-}1\text{-}16)$$

现在就可考察 κ 的物理意义. 先看静态黑洞这一简单情况, 这时 $K^a=\xi^a$(静态 Killing 场), 于是 $\nu=\sqrt{-\xi^d\xi_d}$ 正是熟知的红移因子[选读12-7-1(中册)中的 χ]；而 A^c 则是该选读开头的静态观者 G_s 的 4 加速 A^a, 其大小 A 等于 G_s 与自由下落观者 G 之间的相对 3 加速(的大小) a, 故

$$f=ma=mA,\ \text{其中 } m \text{ 是观者 } G_s \text{ 的质量}. \qquad (16\text{-}1\text{-}17)$$

设想 G_s 是从无限远实验室用细绳悬挂下来的一个物体(质点), 它所受到的引力为 f . 为使它保持静止, 实验室应对细绳他端施力 f_∞ . 可以证明(见下一选读) $f_\infty=\nu f=m\nu A$, 其中 ν 是质点所在处的红移因子. 可见 $\kappa=\lim(\nu A)$ 等于无限远实验室为保持单位质量物体静止于视界紧外侧所应施的力, 所以称为表面引力. 然而这一物理解释密切依赖于物体静止的概念(指物体世界线重合于静态 Killing 场 ξ^a 的积分曲线), 而非静态的稳态黑洞(以 Kerr 为例)的事件视界外根本不存在静止观者(见§13.4 注 1), 因此长期以来人们曾以为把这种黑洞的 κ 称为表面引力不过是类比性称谓而无更多物理理由. (但它当然照样很有用, 因为它对应于黑洞的温度.) 然而, Jacobson and Kang(1993)建议用“零角动量测试粒子(zero angular momentum test particle)”代替静态时空的静态观者, 并指出: 若令(单位质量)物体的世界线重合于零角动量粒子的世界线, 则可证明 f_∞ 正好等于 κ, 就是说, κ 等于无限远实验室为使单位质量物体在视界紧外侧保持零角动量所应施的力, 所以也可称为表面引力. 事实上, 零角动量观者就是小节13.3.4 的局域无转动观者, 他们在 Kerr 时空中的特殊性在某种意义上对应于静态观者在施瓦西时空中的特殊性.

最后还应指出, 虽然对一般的非稳态黑洞并无表面引力可言, 但对于存在(弱)孤立视界的非稳态黑洞仍可定义表面引力, 而且它在该视界上也是常数. 这正是弱孤立视界的第零定律, 详见§16. 5 .　**[选读 16-1-1 完]**

[选读 16-1-2]

本选读旨在证明上一选读曾用到的一个结论①：为使物体静止于静态黑洞外某处，无限远实验室对细绳应施的力 f_∞ 等于物体所受的引力 f 乘以该处的红移因子 ν，即 $f_\infty = \nu f$．仅以施瓦西黑洞为例给出证明．

根据§9.1，物体在自由下落时保持不变(守恒)的能量是 $E \equiv -mU^a\xi_a$，其中 m 和 U^a 分别是物体的(静)质量和 4 速，ξ^a 是静态 Killing 矢量场．E 之所以守恒，是因为它代表物体的总能量(包括引力势能)，因此也被称为守恒能量．Penrose 过程(见§13.5)中用以从黑洞提取能量的物体的能量指的正是这个守恒能量．由 U^a 与 ξ^a 平行(物体静止)可得 $\xi^a = \nu U^a$ [式(9-1-7)]，故 $E = m\nu$．想像物体从原有位置经过无限小位移后静止于新位置，以 $\mathrm{d}r$ 代表两位置的径向坐标差，则两点的固有距离 $\mathrm{d}l$ 可借施瓦西线元在等 t 面的诱导线元

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$$

求得为

$$\mathrm{d}l = (1-2M/r)^{-1/2}\mathrm{d}r = \nu^{-1}\mathrm{d}r\,. \tag{16-1-18}$$

这一位移导致物体的守恒能量 $E = m\nu$ 有一相应改变量 $\mathrm{d}E = m\mathrm{d}\nu$．根据能量守恒律，这一改变量应等于 f_∞ 的功 $f_\infty\mathrm{d}l$，其中 $\mathrm{d}l$ 本是无限远实验室的绳端的固有位移，但因细绳固有长度不变，它也等于物体的固有位移 $\mathrm{d}l = \nu^{-1}\mathrm{d}r$ [见式(16-1-18)]，于是

$$m\mathrm{d}\nu = f_\infty\mathrm{d}l = f_\infty\nu^{-1}\mathrm{d}r\,.$$

把 $\mathrm{d}\nu$ 和 $\mathrm{d}r$ 看作 1 形式场，则上式可改写为

$$m(\mathrm{d}\nu)_a = f_\infty\nu^{-1}(\mathrm{d}r)_a\,. \tag{16-1-19}$$

另一方面，由第 8 章习题3(b)可知静止物体的 4 加速 $A^a = \nu^{-1}\nabla^a\nu$，令 $A \equiv \sqrt{g^{ab}A_aA_b}$，则由式(16-1-17)得

$$f = mA = m\sqrt{g^{ab}A_aA_b} = m\nu^{-1}\sqrt{g^{ab}(\nabla_a\nu)\nabla_b\nu} = m\nu^{-1}\sqrt{g^{ab}(\mathrm{d}\nu)_a(\mathrm{d}\nu)_b}\,.$$

而　$$g^{ab}(\mathrm{d}\nu)_a(\mathrm{d}\nu)_b = m^{-2}f_\infty^{\ 2}\nu^{-2}g^{ab}(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b = m^{-2}f_\infty^{\ 2}\nu^{-2}(1-2M/r) = m^{-2}f_\infty^{\ 2},$$

[其中第一步用到式(16-1-19)．] 代入式(16-1-22)便证明了 $f_\infty = \nu f$．

[选读 16-1-2 完]

[选读 16-1-3]

① 这是 Wald(1984) 第 6 章习题 4b 的待证结论，适用于任何渐近平直稳态时空，只要其中存在坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 使 g_{ab} 的分量在 $r\to\infty$ 时趋于 $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$，其中 $r\equiv(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$．

前已述及稳态黑洞事件视界的 κ 为常数, 其证明因较长等缘故而被省略. 然而, 如果讨论的是时空的延拓产物(其黑洞区不是坍缩而成的黑洞), 例如施瓦西或 KN 的最大延拓时空, 证明就简单得多. 以上册图 9-13(a) 为例. 图中的 $N_1 \cup N_2$ 由于有 "分叉" 而被称为分支 Killing 视界, "分叉点" ($V=U=0$)在 4 维时空中其实是一个半径 $r=2M$ 的 2 维球面, 称为**分支球面**(亦称喉, 见上册 350 页), 记作 S. 两个分支 N_1 和 N_2 都是 Killing 视界, 而且相应的 Killing 场 K^a 都是§9.3 的静态 Killing 场 ξ^a,① 其表达式(9-4-40)现在为

$$K^a = \frac{1}{4M}\left[V\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^a - U\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^a\right] . \tag{16-1-20}$$

上式表明 $K^a|_p = 0\ \forall p \in S$, 所以对这些点不能从式(16-1-10)得出 κ^2 的显表达式(16-1-11). 但因每点 $p \in S$ 可看作 $N_1 \cup N_2$ 上某一类光测地母线的极限点, 自然就把该母线的常数值 κ^2 定义为该点的 κ^2 值. {请注意一个微妙之处: p 总是两条母线[其一在 N_1^+(或 N_2^+)上, 另一在 N_2^-(或 N_1^-)上]的共同极限点, 而 N_1 和 N_2 的 κ 值差一负号(理由见稍后), 故用极限点只能定义 p 点的 κ^2 值.} 下面证明 κ^2 在 $N_1 \cup N_2$ 上为常数, 而为此只须证明 κ^2 在 S 上为常数. 这很容易, 以 s^a 代表切于 S 的任一矢量, 则

$$\begin{aligned} s^c\nabla_c\kappa^2 &= -\frac{1}{2}s^c\nabla_c[(\nabla^a K^b)\nabla_a K_b] \\ &= -s^c(\nabla^a K^b)\nabla_c\nabla_a K_b = s^c R_{abc}{}^d K_d \nabla^a K^b = 0 , \end{aligned}$$

[第一步用到式(16-1-11), 第三步用到第 4 章习题14(a), 第四步是因为 $K^d|_S = 0$.] 可见 κ^2 在 S(因而在 $N_1 \cup N_2$)上为常数.

下面说明 $\kappa|_{N_1} > 0$, $\kappa|_{N_2} < 0$ 的原因. 在 N_1 和 N_2 上分别有 $U=0$ 和 $V=0$, 故由式(16-1-20)得

$$K^a|_{N_1} = \frac{V}{4M}\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^a , \qquad K^a|_{N_2} = -\frac{U}{4M}\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^a . \tag{16-1-21}$$

在 $N_1 \cup N_2$ 上定义矢量场 L^a 和函数 F 为

$$L^a|_{N_1} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^a , \quad L^a|_{N_2} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^a , \quad F|_{N_1} \equiv \frac{V}{4M} , \quad F|_{N_2} \equiv -\frac{U}{4M} , \tag{16-1-22}$$

---

① 一般地说, 两个类光超曲面 N_1 和 N_2 的并集称为一个**分支 Killing 视界**(bifurcate Killing horizon), 若 N_1 和 N_2 都是关于同一 Killing 场 K^a 的 Killing 视界, 而且两者交于一个类空 2 维面 S (~~称为~~**分支面**). 交面 S 的存在使得 $N_1 \cup N_2$ 不再是流形(因而不再是超曲面), 所以严格说来分支 Killing 视界不是 Killing 视界.

则在 $N_1 \cup N_2$ 上有 $K^a = FL^a$. 注意到 V 和 U 分别是 N_1 和 N_2 上的类光测地线的仿射参数[见第9章习题8(1)], 便知 $L^b\nabla_b L^a = 0$, ① 于是由式(16-1-2)得

$$\kappa K^a = K^b\nabla_b K^a = K^a L^b\nabla_b F = K^a K^b F^{-1}\nabla_b F = K^a K^b \nabla_b \ln|F|, \quad (16\text{-}1\text{-}23)$$

因而

$$\kappa = K^b\nabla_b \ln|F| = \begin{cases} \dfrac{V}{4M}\dfrac{\partial \ln|V|}{\partial V} = \dfrac{1}{4M}, & \text{在 } N_1, \\ -\dfrac{U}{4M}\dfrac{\partial \ln|U|}{\partial U} = -\dfrac{1}{4M}, & \text{在 } N_2. \end{cases} \quad (16\text{-}1\text{-}24)$$

可见① $\kappa|_{N_1} > 0$, $\kappa|_{N_2} < 0$; ② $\kappa^2|_{N_1\cup N_2} = (4M)^{-2}$ 为常数.

注2 计算 $\kappa|_{N_1}$ 的上述方法之所以简便, 关键在于通过做习题(第9章习题8)早已知道 V 是 N_1 上类光测地线的仿射参数. 但为做该题就要计算某些 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$, 工作量较大. 下面提供一种不必借用该题(不必计算 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$)的捷径. 令

$$f \equiv K^a K_a = g_{ab}\xi^a\xi^b,$$

则由式(16-1-1)得

$$(\mathrm{d}f)_a|_{N_1} = -2(\kappa g_{ab}K^b)|_{N_1}. \quad (16\text{-}1\text{-}25)$$

上式两边可分别借式(9-4-26)及(9-4-40)求得为

$$\text{左边} = (\mathrm{d}f)_a|_{N_1} = [\mathrm{d}_a(2Mr^{-1}VU\mathrm{e}^{-r/2M})]_{N_1} = 2M[r^{-1}\mathrm{e}^{-r/2M}V(\mathrm{d}U)_a]_{N_1} = \mathrm{e}^{-1}[V(\mathrm{d}U)_a]_{N_1},$$

$$\begin{aligned}\text{右边} &= -2(\kappa g_{ab}K^b)|_{N_1} \\ &= \{-2\kappa(-16M^3)r^{-1}\mathrm{e}^{-r/2M}[(\mathrm{d}V)_a(\mathrm{d}U)_b + (\mathrm{d}U)_a(\mathrm{d}V)_b](4M)^{-1}[V(\partial/\partial V)^b]\}|_{N_1} \\ &= 4M\mathrm{e}^{-1}[\kappa V(\mathrm{d}U)_a]_{N_1},\end{aligned}$$

对比左右两边便得 $\kappa|_{N_1} = (4M)^{-1}$.

注3 如果只想判断 κ 在 $N_1 \cup N_2$ 上的正负, 则还有如下简法, 而且可推广至 RN 和 KN 时空[例如适用于图13-14(a)的I-II-I-II区之间的分支Killing视界]. 在 $N_1^+, N_1^-, N_2^+, N_2^-$ 上各取一点, 在每点各取一个指向未来的类时矢量 Y^a, 以 Y^a 缩并式(16-1-1)得标量等式

$$P = -2\kappa Q, \qquad \text{其中 } P \equiv Y_a\nabla^a(K^bK_b),\ Q \equiv Y_aK^a.$$

注意到 K^bK_b 在 A, A′, B, W 四区上的正负性以及在 $N_1 \cup N_2$ 上为零, 便知对 N_1^+ 有

① 由此不难证明 K^a 在 N_1 上的积分曲线的 Killing 参数 α 与仿射参数 V 的关系为 $V = \mathrm{e}^{\alpha/4M}$.

$P > 0$ (因 $K^b K_b$ 从零变正). 另一方面, 因 Y^a 和 K^a 都指向未来, 由命题11-1-1(1) 可知对 N_1^+ 有 $Q < 0$. 于是由 $P = -2\kappa Q$ 便得 $\kappa > 0$. 对其他三点仿此讨论, 结果如表16-1.

[选读 16-1-3 完]

表 16-1　κ 在 $N_1^+, N_1^-, N_2^+, N_2^-$ 上的正负

	P	Q	κ
N_1^+	+	−	+
N_1^-	−	+	+
N_2^+	+	+	−
N_2^-	−	−	−

16.1.2　广义热力学第二定律

Bekenstein(1973) 指出: 若某物体带着自己的熵落入黑洞, 则洞外物质的总熵变小, 如果把全宇宙看作一个热力学系统, 宇宙总熵岂非不增反减? 这岂非成为热力学第二定律的反例? 以下是原文该句的译文: "洞外观者无法用直接测量证实全宇宙的总熵在过程中并无减少, 在这个意义上热力学第二定律似乎被超越了" (is transcended). 针对这一问题, Bekenstein(1973,1974) 提出重要建议: 黑洞也有熵, 其值 S_{BH} 定义为 $S_{BH} \equiv A/4$ (其中 A 为事件视界的面积). 把洞外物质及黑洞一起看作一个热力学系统, 其总熵(广义熵) S 定义为洞外物质熵 S_M 与黑洞熵 S_{BH} 之和: $S \equiv S_M + S_{BH}$, 并且认为(猜想)如下的广义热力学第二定律(generalized second law of thermodynamics)成立: 广义熵 S 在任何物理过程中都不减小. 乍看起来这一定律存在反例: 用细绳悬挂静能为 E_0、熵为 S_0 的重物使其缓慢靠近施瓦西黑洞的事件视界, 再在离视界不远处将绳切断使重物自由落入黑洞, 则后果为: ①洞外物质的熵 S_M 由于失去重物而减少了 S_0, 即 $\Delta S_M = -S_0$; ②黑洞获得能量, 导致视界面积(因而黑洞熵 S_{BH})增加. 设 S_{BH} 的增量为 ΔS_{BH}, 则广义熵的变化量

$$\Delta S = \Delta S_M + \Delta S_{BH} = \Delta S_{BH} - S_0. \tag{16-1-26}$$

如果没有细绳, 物体在黑洞引力作用下自由下落(世界线为测地线), 其守恒能量 $E \equiv -E_0 U^a \xi_a$ 将保持不变. 然而, 由于细绳的约束, 落体在引力作用下企图加速时要对绳施力并在绳的他端对实验室做功, 于是落体的守恒能量 E 不断减小. 直至绳断后落体方可自由下落, E 从此才真正守恒(不再减小). 由于缓慢下落, 物体在绳断前的每一时刻可近似看作静止, 其4速 U^a 平行于洞外静态 Killing 场 ξ^a. 以 χ 代表红移因子(即上小节的 ν), 则 $U^a = \chi^{-1}\xi^a$ [式(9-1-7)]. 以 ε 代表绳断时的 E 值,

即 $\varepsilon \equiv E|_{断}$，则

$$\varepsilon = -E_0(U^a\xi_a)|_{断} = -E_0(\chi U^a U_a)|_{断} = \chi|_{断} E_0 .$$

质量为 M 的黑洞由于"吃进"带着能量 ε 的落体而增大面积，故黑洞熵获得如下增量：

$$\Delta S_{\rm BH} = \frac{\Delta A}{4} = \frac{\Delta(16\pi M^2)}{4} = 4\pi[(M+\varepsilon)^2 - M^2] \cong 8\pi\varepsilon M , \qquad (16\text{-}1\text{-}27)$$

其中第二步是因为 $A = 4\pi \times (视界半径\ r_{\mathscr{E}})^2 = 4\pi \times (2M)^2 = 16\pi M^2$. 另一方面，前面简介 Hawking 辐射时曾说过黑洞的温度 $T_{\rm BH} = (2\pi)^{-1}\kappa$. 把施瓦西黑洞看作 KN 黑洞在 $a = Q = 0$ 时的特例，由式(16-1-3)得 $\kappa = (4M)^{-1}$，故 $T_{\rm BH} = (8\pi M)^{-1}$. 代入式(16-1-27)便得

$$\Delta S_{\rm BH} = \frac{\varepsilon}{T_{\rm BH}} . \qquad (16\text{-}1\text{-}28)$$

注意到视界上 $r = 2M$，由上式便知只要令绳断时落体离视界足够近，$\Delta S_{\rm BH}$ 就能要多小有多小，故总可做到 $\Delta S_{\rm BH} < S_0$，因而由式(16-1-26)便得 $\Delta S < 0$. 这就构成广义热力学第二定律的反例.

Bekenstein(1973,1974,1981)对这一反例曾给出过自圆其说的解释. 考虑到落体的量子特性，他假设任何落体的熵 S_0 与其静能 E_0 之比存在一个上限，其值只同其线度有关. 设落体是半径为 R 的球体，则这一上限为 $2\pi R$，即 $S_0 / E_0 \leqslant 2\pi R$. 这一假设使绳断时落体中心与视界的距离无法小到足以保证 $\Delta S_{\rm BH} < S_0$ 的程度，从而反例不再成立. 虽然 Bekenstein(1981) 给出了支持这一假设的许多论据，但仍有不少学者对此存疑. Unruh and Wald(1982) 在对这一假设从多种角度提出质疑后给出了自己对反例的满意解释. 这一解释不依赖于 Bekenstein 假设，却充分考虑了黑洞自身的量子效应. 简介如下.

根据弯曲时空量子场论，施瓦西黑洞外部的静态观者会感到(测得)洞外充满"辐射"(不是 Hawking 辐射)，而且是一种温度为

$$T_{\rm R} = \frac{T_{\rm BH}}{\chi} \qquad (16\text{-}1\text{-}29)$$

的热辐射，其中 χ 是观者所在处的红移因子.① 设落体为长方体，当它缓慢下落(每一时刻可近似看作静止)时，其下底面处的辐射温度略高于上底面处的温度(因 χ 值下小上大)，所以热辐射对下底面的压力(压强乘面积)略大于对上底面的压力，于

① 我们只讨论黑洞质量足够大以至其 Hawking 辐射可忽略的情况. 不可忽略时结论不变(见原文).

是落体受到一个来自辐射的浮力，称为**辐射浮力**(buoyancy force). 考虑到浮力的存在，落体缓慢下落时绳子他端对实验室所做的功将减小，故黑洞获得的能量(因而 ΔS_{BH})将增加. 可见浮力使整个反例出现转机. 计算表明(见原文)，考虑浮力后落体通过绳子对实验室的功减少了 $(\chi p)|_{断} V$，其中 V 是落体体积，p 是辐射压强. 既然不考虑浮力时黑洞获得的能量为 $\varepsilon = \chi|_{断} E_0$，考虑浮力后就应为

$$\varepsilon' = (\chi E_0 + \chi pV)|_{断} = [\chi(E_0 + pV)]_{断} . \tag{16-1-30}$$

落体从远方开始下落时，浮力远小于引力，ε' 不断变小，直至到达视界外某处时浮力与引力平衡. 如果在平衡点切断绳子，ε' 将取最小值. 因此，如能对这种最不利的情况证明仍能保证 $\Delta S \geqslant 0$ (后来发现此时恰好有 $\Delta S = 0$)，则当落体在洞外任何地点切断绳子都不会有 $\Delta S < 0$. 根据阿基米德原理(原文就所论情况对此原理重新做了证明)，浮力与引力平衡时被排开的热辐射的静能等于落体的静能 E_0 . 以 e_R 代表被排开的热辐射的静能密度，便有 $e_R V = E_0$，代入式(16-1-30)得

$$\varepsilon' \doteq [\chi(e_R + p)V]_{断} .$$

由热力学可知热辐射的静能密度 e_R 、熵密度 s_R 、温度 T_R 和压强 p 之间有如下关系：$e_R + p = s_R T_R$，故

$$\varepsilon' = (\chi T_R s_R V)|_{断} = T_{BH} S_R , \tag{16-1-31}$$

其中 $S_R \equiv s_R V$ 是被排开的热辐射的熵，第二步用到式(16-1-29). 以 $\Delta S'_{BH}$ 代表考虑浮力后黑洞熵的增量，则由式(16-1-28)及(16-1-31)得 $\Delta S'_{BH} = S_R$. 根据热力学，如果在容积相同的许多盒子里分别放入各种物质或辐射的分布并使各盒中的能量相等，则熵值最高的那种分布一定是热辐射. 既然被排开的辐射是热辐射而落体内的物质未必为热辐射，就有 $S_R \geqslant S_1$，因而 $\Delta S'_{BH} \geqslant S_1$，于是 $\Delta S \geqslant 0$. 可见广义热力学第二定律对本例仍然成立，落体问题不再构成反例. 以上只是对原文有关部分的一个非常粗略的简介，旨在显示考虑浮力后何以能使“反例不反”，其中略去了许多详细道理、讨论和推证. (我们所给的道理有些只是直观思辨，并非严格证明.) 欲知准确详情必须阅读原文(至少是有关部分).

16.1.3 事件视界的局限性及其带来的问题

上两小节介绍的传统黑洞热力学的适用范围是稳态黑洞以及对稳态的微小偏离. [第二定律例外，它适用于任意时空(可以非常之动态)的黑洞.] 虽然“事件视界是理所当然的黑洞边界”这一传统认识曾对黑洞研究立下过许多功劳，但事件视界的某些特点却给后来的进一步研究带来诸多不便和制约. 下面略举数例.

(1)黑洞热力学第二定律虽能断言视界面积不减，但这只是定性结论，并未对物理过程中视界面积的增长情况提供任何定量公式. 第一定律[式(16-1-6)]虽然涉

及面积增量 δA，而且把三个增量 δM, δJ 和 δA 联系在一起，但只适用于黑洞从一个平衡态到(无限)邻近平衡态的短暂过程，我们更想找到的是式(16-1-6)的某种积分形式，以便定量地描述黑洞从某初态到末态的完全动态演化过程中的面积增量与经边界流入的能量、角动量之间的联系. 然而如果坚持黑洞的边界就是事件视界，这是没有指望的，因为事件视界甚至可以在时空的一个平直区域中形成并演化，图 16-2 就是一例. 该图是大质量薄球壳晚期坍缩成黑洞的时空图，事件视界先是在球壳内形成($\mathscr{E}_1$ 段)，然后穿出壳外成为 $\mathscr{E}_2$ 段. 球壳内部有平直度规，所以并无任何穿越 $\mathscr{E}_1$ 的能流及角动量流，但 $\mathscr{E}_1$ 的面积照样增长. 上述讨论分明是在暗示我们应该寻找可以代替事件视界的某种其他视界作为动态黑洞(在某种意义上)的边界. 后来果然找到，这就是动力学视界，详见§16.7.

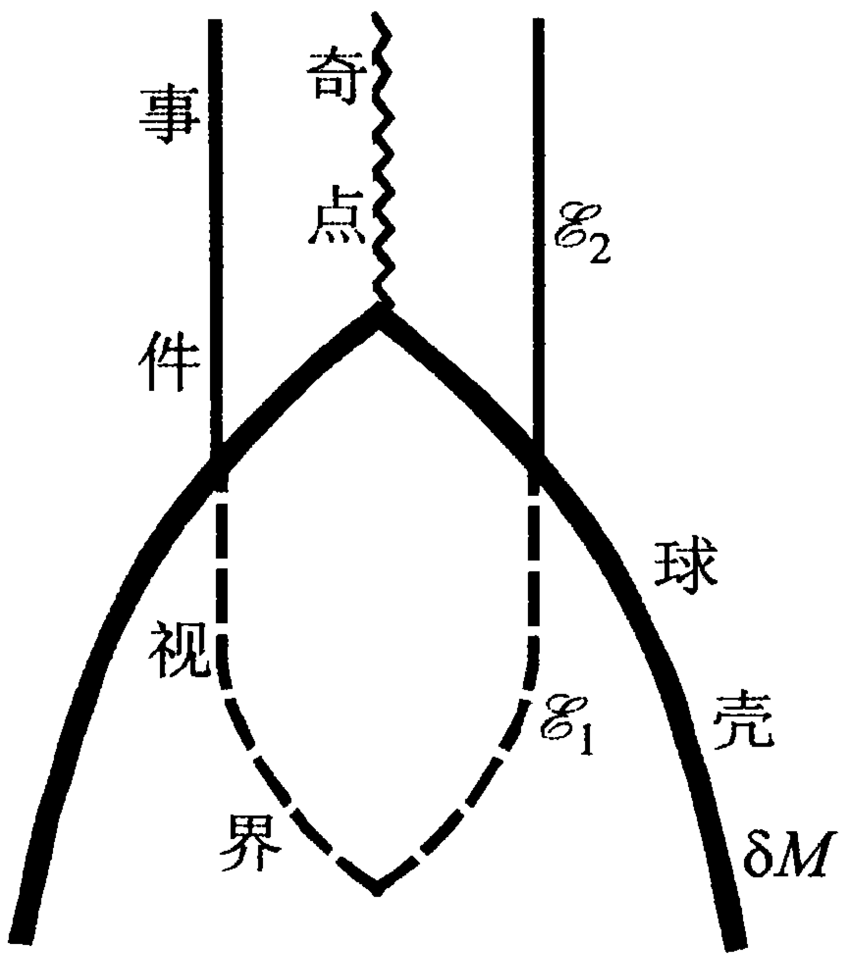


图 16-2　质量为 δM 的球壳坍缩成黑洞. 壳外是质量为 δM 的施瓦西度规，壳内是平直度规

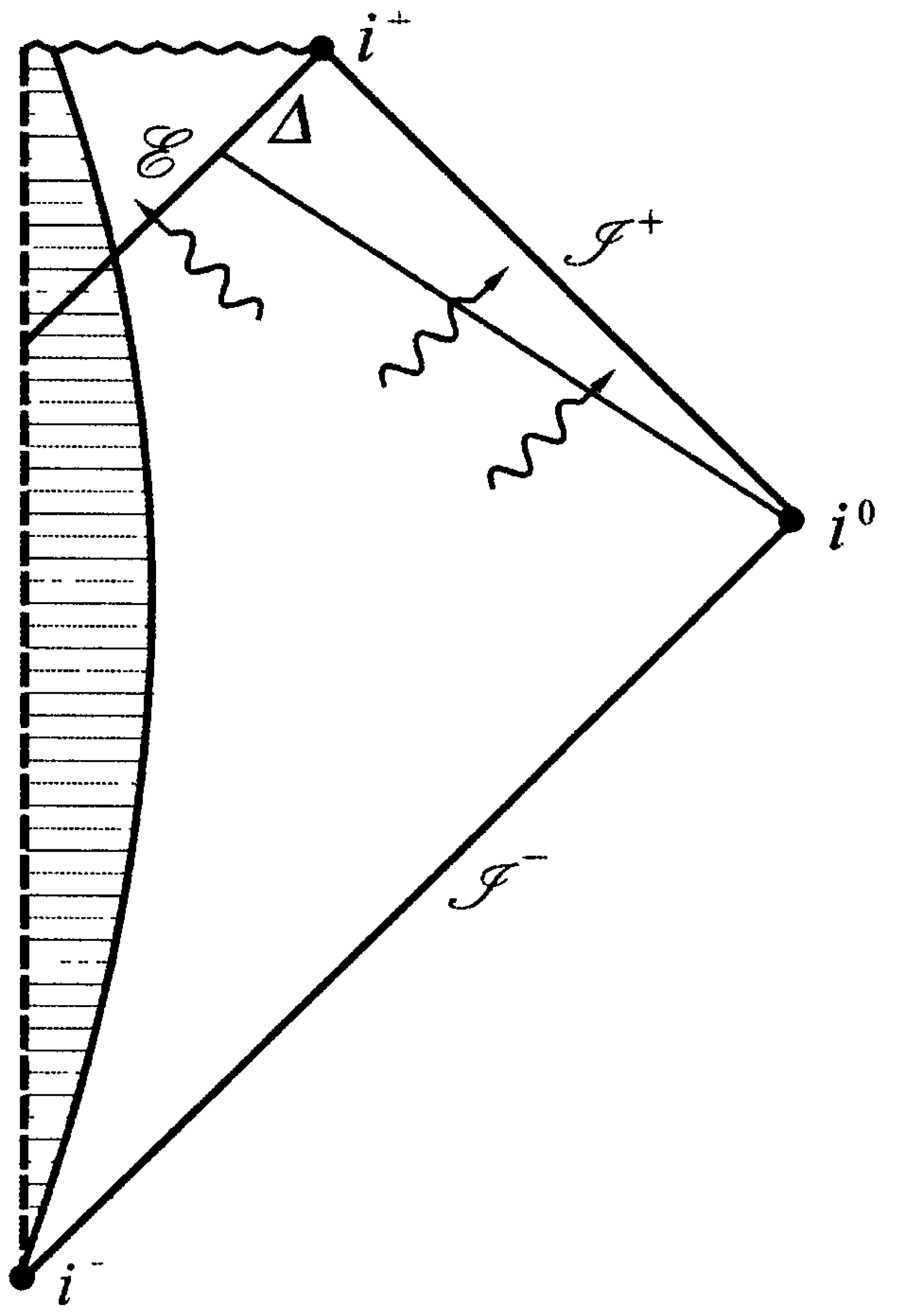


图 16-3　$\Delta \subset \mathscr{E}$ 上引力波可忽略，故 Δ 所代表的黑洞处于平衡态

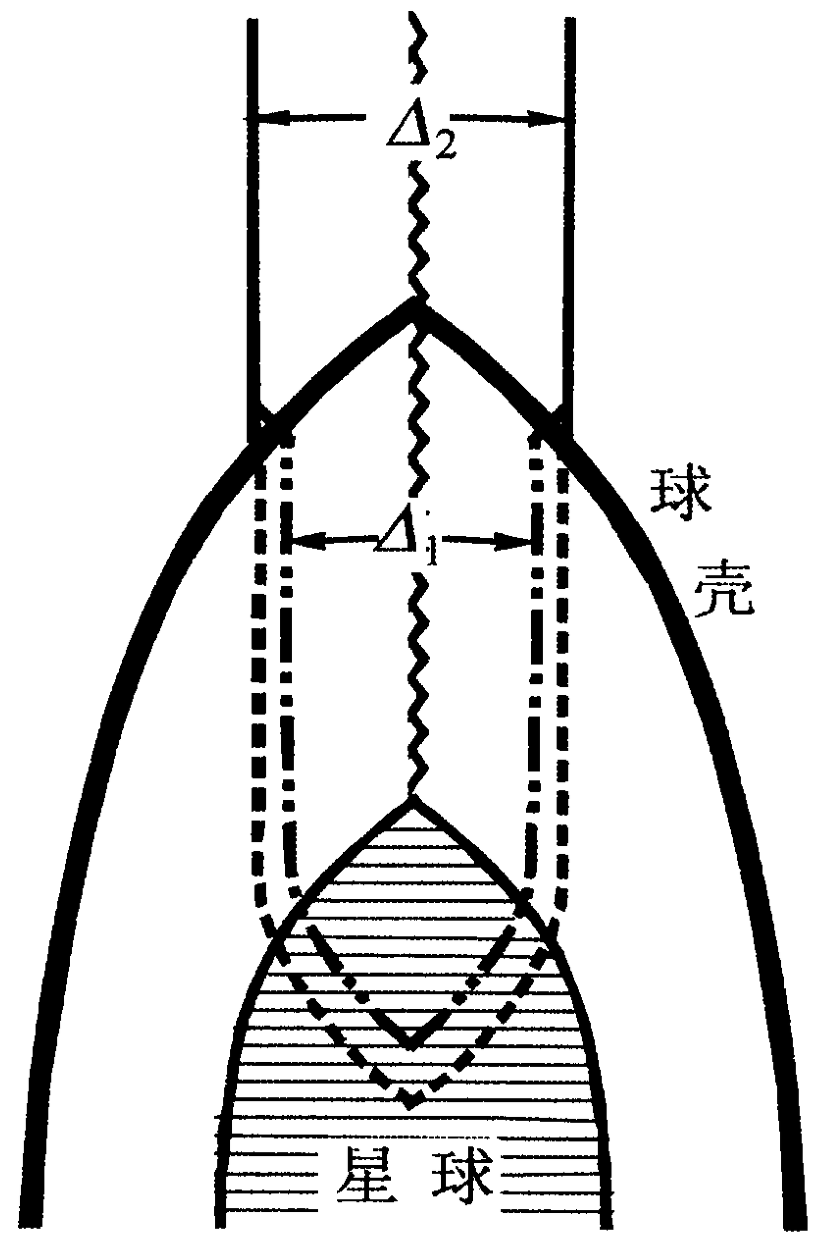


图 16-4　坍缩球壳使 Δ_2 取代 Δ_1 而成为事件视界

(2)与普通热力学第零和第一定律类似，黑洞热力学第零和第一定律的适用对象应当是处于平衡态(以及对平衡态的微小偏离)的黑洞，因而应该关心“孤立黑洞”. 然而什么黑洞才算孤立?按照传统做法，这是指稳态时空的黑洞，即稳态黑洞. 然而这种做法的限制性过强，与普通热力学对应得不好. 例如，把室内的静止汽缸及缸内气体看作一个热力学系统，虽然汽缸以外的世界在千变万化，但只要系统满足适当条件就可认为它处于平衡态，因此第零定律适用. 如果对这一平衡态略施微扰(例如让活塞经历准静态过程对汽缸做功)，则第一定律也适用，虽然外部世界在不断变化中. 可见黑洞热力学第零和第一定律的适用条件应当相应地放宽. 图16-3是某种实际星体晚期坍缩成黑洞的 Penrose 图. 星体坍缩时会发射引力波，它又因与时空几何相互作用而被散射，其中的反向散射波又穿过事件视界 $\mathscr{E}$ 进入黑洞，说明 $\mathscr{E}$ 外不是稳态时空(有引力波及散射波). 借用小节16.1.1开头的3维黑洞概念

可以更“物理地”讨论这一问题. 在事件视界 $\mathscr{E}$ 形成后的初期和中期的每一时刻,引力波都穿越视界 $\mathscr{E}$ 流入黑洞 $\mathscr{B}$,其所带的能流使黑洞的面积不断增加,黑洞处于非平衡态. 然而直观考虑使我们相信,反向散射波在 $\mathscr{E}$ 的“后期阶段” $\Delta \subset \mathscr{E}$ 将微乎其微(这也已被数值模拟所肯定),因此可以认为 Δ 段(而不是整个 $\mathscr{E}$)中穿越每个时刻 t 的黑洞边界 $\Sigma_t \cap \Delta$ 的引力波可以忽略,于是黑洞就被孤立出来,就可被称为孤立黑洞,因而就可合理地把 Δ 称为孤立视界(准确定义见§16.5). 黑洞热力学第零和第一定律对这种孤立视界仍应适用.

(3)在黑洞热力学第一定律[式(16-1-6)]所涉及的各量中,质量 M 和角动量 J 必须在无限远定义,而表面引力 κ 和角速度 Ω 却是在视界上定义的,这就带来诸多不便甚至困扰. 例如,设某星球外(很远处)罩着一个球状物质壳,星球先坍缩成奇点并藏在某“事件视界” Δ_1 内,然后(很久之后)外球壳再坍缩成黑洞,其事件视界是图16-4 中的 Δ_2 以及向下延伸的虚线部分,这表明 Δ_1 其实不是事件视界. 如无球壳,热力学第一定律自然适用于 Δ_1,这时 κ 和 Ω 在 Δ_1 上局域定义而 M 和 J 在无限远定义. 在有球壳时,从物理上也希望第一定律对 Δ_1 仍然成立,然而,球壳的存在导致由无限远求得的 M 和 J 发生改变,但 κ 和 Ω 却由于在 Δ_1 上局域定义而不变,这又如何理解和接受?

(4)事件视界 $\mathscr{E}$ 的一个突出特点是它的整体(全局)性:根据定义,要决定 $\mathscr{E}$ 必先决定 $\mathscr{I}^+$. 这就给动态黑洞的研究带来许多难题. 例如,在对黑洞融合现象做数值模拟(数值相对论的重要课题)时,人们从某种代表两个远离的黑洞的指定初态(3维)出发让系统按爱因斯坦方程演化,并企图算出它们融合而得的结果. 然而这一“初态”本身已涉及黑洞,如果坚持黑洞的边界是事件视界,则为确定黑洞必先确定 $\mathscr{I}^+$,而 $\mathscr{I}^+$ 又取决于演化而得的整体时空几何(它是演化的最终产物),又怎能在给定初值时知道什么是黑洞,即怎能指定一个含有两个黑洞的初态?这说明在数值相对论中用事件视界来界定黑洞是有原则性困难的. 这一困难的根本起因就是事件视界的过分整体性,在现在的例子中也可说是它的过分“前瞻性”:① 为了给定初态还得先知道后来演化出来的整个时空,而这当然是根本做不到的. 由于这一研究十分必要(“不可不为”),数值相对论研究者们便只好明知不可为而为之,准确地说就是放弃“黑洞边界是事件视界”的成见而改用较为局域的表观视界(定义见小节16.4.2)来界定黑洞并且特别关心表观视界的演化,由此取得许多成果. 自然要问:在涉及黑洞的其他研究中是否也可用表观视界代替事件视界?遗憾的是至今尚无法用表观视界导出黑洞力学定律,但用更新的概念——孤立视界和动力

① Ashtekar 等的多篇原文的提法是“the notion (of the event horizon) is teleological”,而 teleological 在英华大词典的译法是“目的论的”. 在查阅 Oxford Dictionary of Philosophy 后,本书作者以为改用“前瞻性”或“遥盼性”一类词汇似乎更为贴切.

学视界——则可以，这两个新视界都是准局域(quasi-local)概念. 反之，表观视界虽然“在时间方面是局域的”，但总体看来还是很整体的(因其定义依赖于一个类空3维面，详见小节16.4.2)，因而难以对所有研究领域都有用. 我们再举“明知不可为而为之”的另一常见例子. 在研究动态黑洞的许多论文中，人们从某个代表动态度规的线元(通常颇复杂)出发研究与“事件视界”有关的各种问题(如视界的表面引力、熵及辐射). 由于手中只有一个线元(非常局域，类似于当年只知道施瓦西线元而不知何为Kruskal延拓)，本来无从确定事件视界，但是人们往往根据稳态黑洞事件视界的某些局域特征(例如，是局域类光超曲面，而且局域存在Killing场，它在视界面上的值与该面正交)来认定某3维面就是事件视界，进而对其种种性质进行研究. 这些研究成果固然重要，但要彻底弄清问题就应通过进一步的研究来确定这些视界到底是不是满足整体定义的事件视界，如果不是，又是什么视界？Killing视界？表观视界？孤立视界？动力学视界？而且还要弄清讨论什么问题时应该使用什么视界. 以上只是事件视界的“前瞻性”所带来的种种问题以及应对措施的某些例子.

(5)事件视界的整体性在量子引力中也造成困难. 要决定事件视界必先知道由全时空整体因果结构决定的$\mathscr{I}^+$，而在量子引力论中某些时空的整体因果结构存在含糊性. 例如，如果越出半经典近似的范畴(放弃弯曲时空量子场论)而从完全量子引力论的角度重新审视Hawking辐射问题，就应认为“奇点”其实是把经典广义相对论用到其适用范围之外的结果，在量子引力论中(至少是在圈量子引力论中)代之而存在的是个很小的“Planck小区”(见§15.8末)，在此小区内的量子引力效应明显到不可忽略的地步，这里的几何是量子几何，不能用任何连续的度规描述. 小区内不再可谈及光锥和因果关系，因而$\mathscr{I}^+$的编时过去[即$I^-(\mathscr{I}^+)$]就变得意义含糊. 于是，虽然经典广义相对论基本上仍适用于除Planck小区外的整个时空，但事件视界的概念已失去明确意义. 这时还怎能侈谈“Hawking辐射是由事件视界发出的”等类似问题呢?可见，在用完全的量子引力论讨论Hawking辐射时也该用别的什么视界来取代事件视界.

综上所述，看来很有必要引入某些不像事件视界那样“过分”整体而又能反映人们对黑洞的直观观念的关于黑洞“边界”的其他视界，Hawking and Ellis(1973)早就注意到这一问题并提出了表观视界的概念. 可惜，后续的研究表明，虽然表观视界在某些领域(例如数值相对论)中很有用处，但仍不足以代替事件视界以进一步发展黑洞力学. 后来终于发现能担此重任的是弱孤立视界和动力学视界. 学习这些新视界需要具备本书尚未讲过的若干基础知识，我们单辟下面两节详加讲授.

§16.2 类光测地线汇及其Raychaudhuri方程

本节讨论4维时空(M,g_{ab})的开子集U上的类光测地线汇，这对面积定理和

奇性定理的证明、黑洞热力学及其近期发展等多方面问题都非常重要. 类光与类时曲线的一大区别是前者没有固有时概念, 不能像后者那样选固有时为参数并对其归一化. 类光测地线的仿射参数没有一个是特殊的, 只能任选其一(记作 λ), 相应的测地线汇记作 $\{\gamma(\lambda)\}$. 为了打好基础, 有必要先了解类时与类光测地线汇的异同点.

先看类时测地线汇 $\{\gamma(\tau)\}$, 其单位切矢为 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$. 由式(4-4-4)知道其分离矢量 η^a 可做如下的正交分解: $\eta^a = \eta_\perp{}^a + \eta_\parallel{}^a$, 其中 $\eta_\perp{}^a \equiv h^a{}_b\eta^b$ 和 $\eta_\parallel{}^a \equiv -Z^a(Z_b\eta^b)$ 分别代表正交于和平行于 Z^a 的分量, 而且这样的分解是唯一的. 又因为 $\eta_\parallel{}^a$ 是从 $\gamma(\tau)$ 指向自身的矢量(不对应于任何分离), 所以 $\eta_\perp{}^a = \eta^a - \eta_\parallel{}^a$ 与 η^a 描述同样的分离情况, 因而等价. 这是我们对 $\eta_\parallel{}^a$ 不感兴趣、因而以 $\eta_\perp{}^a$ (以前记作 w^a)代替 η^a 的根本原因. 此外, §7.6 曾证明过 $Z^b\nabla_b(\eta^a Z_a) = 0$, 它保证 $Z^b\nabla_b\eta_\parallel{}^a = 0$, 即 $\eta_\parallel{}^a$ 沿测地线不变, 通常也说这是对 $\eta_\parallel{}^a$ 不感兴趣的另一原因. ①

再看类光测地线汇 $\{\gamma(\lambda)\}$, 其切矢记作 $k^a \equiv (\partial/\partial\lambda)^a$. 这时的分离矢量 η^a 无法分解为正交于和平行于 k^a 的两个分量, 因为 k^a 的类光性导致平行于 k^a 必定也正交于 k^a. 然而仍可把 η^a 表为两个矢量之和, 第一个正交于 k^a (仍记作 $\eta_\perp{}^a$), 第二个非正交于 k^a, 记作 $\eta_{非}{}^a$, 于是便有 $\eta^a = \eta_\perp{}^a + \eta_{非}{}^a$. 为便于陈述, 暂时把这种分解称为“正非”分解. 不过这种分法很不唯一. 例如, 设 ς^a 是正交于 k^a 的任一矢量(不妨就取 $\varsigma^a = k^a$), 则 $\eta'_\perp{}^a \equiv \eta_\perp{}^a + \varsigma^a$ 及 $\eta'_{非}{}^a \equiv \eta_{非}{}^a - \varsigma^a$ 也分别正交于及非正交于 k^a, 所以 $\eta^a = \eta'_\perp{}^a + \eta'_{非}{}^a$ 就是另一种“正非”分解.

为便于后面的讲解, 可在线汇的定义域 U 上引入正交归一标架场 $\{(e_\mu)^a\}$ (简写为 $\{e^a_\mu\}$), 要求它满足 $k^a = (e^a_0 + e^a_3)/\sqrt{2}$. 再令 $l^a \equiv (e^a_0 - e^a_3)/\sqrt{2}$, $x^a \equiv e^a_1, y^a \equiv e^a_2$, 则 $\{x^a, y^a, l^a, k^a\}$ 是 U 上的另一标架场, ② 满足

$$\begin{gathered} g_{ab}x^a x^b = g_{ab}y^a y^b = 1, \qquad g_{ab}k^a l^b = -1, \\ g_{ab}l^a l^b = g_{ab}k^a k^b = g_{ab}x^a y^b = g_{ab}x^a l^b = g_{ab}x^a k^b = g_{ab}y^a l^b = g_{ab}y^a k^b = 0. \end{gathered} \tag{16-2-1}$$

我们称 $\{x^a, y^a, l^a, k^a\}$ 为**伪(pseudo)正交归一标架场**, 并以 $\{E^a_\mu\}$ 简记之, 即

$$E^a_1 \equiv x^a, \quad E^a_2 \equiv y^a, \quad E^a_3 \equiv l^a, \quad E^a_4 \equiv k^a. \tag{16-2-2}$$

此标架场的对偶标架场 $\{E^\mu_a\}$ 则为

① 然而笔者认为“$\eta_\parallel{}^a$ 从测地线指向自身”是对 $\eta_\parallel{}^a$ 不感兴趣的唯一原因, 所以对这种“另一原因说”不敢苟同. 事实上, 当测地线为非仿射参数化时 $Z^b\nabla_b\eta_\parallel{}^a \neq 0$, 但 $\eta_\parallel{}^a$ 仍然不会引起我们的任何兴趣, 详见选读 16-2-1.

② 令 $m^a \equiv (x^a - \mathrm{i}y^a)/\sqrt{2}$, 则 $\{m^a, \bar{m}^a, l^a, k^a\}$ 便是上册§8.7 的 NP 类光标架.

$$E^1_a \equiv x_a,\quad E^2_a \equiv y_a,\quad E^3_a \equiv -k_a,\quad E^4_a \equiv -l_a,\ (\text{其中}\ x_a \equiv g_{ab}x^b,\ \text{等等}) \tag{16-2-3}$$

将η^a用$\{E^a_\mu\}$展开为

$$\eta^a = (\eta^1 x^a + \eta^2 y^a + \eta^4 k^a) + \eta^3 l^a, \tag{16-2-4}$$

则由式(16-2-1)知$k_a(\eta^1 x^a + \eta^2 y^a + \eta^4 k^a) = 0$，$k_a(\eta^3 l^a) = -\eta^3$ (一般非零), 所以可取

$$\eta_\perp{}^a = \eta^1 x^a + \eta^2 y^a + \eta^4 k^a, \qquad \eta_{非}{}^a = \eta^3 l^a, \tag{16-2-5}$$

可见式(16-2-4)是对η^a的一种“正非”分解. 然而满足$k^a = (e^a_0 + e^a_3)/\sqrt{2}$的正交归一标架场$\{(e_\mu)^a\}$有无限多个, 设$\{(e'_\mu)^a\}$是另一个, 则$l'^a \equiv (e'^a_0 - e'^a_3)/\sqrt{2}$便可不同于$l^a$, 因而借助于$\{(e'_\mu)^a\}$又可对$\eta^a$做另一种“正非”分解. 这再次说明“正非”分解的非常不唯一性. 这种不唯一性是类光与类时情况的重要区别之一.

现在来看第二个区别. 刚才讲过, 在类时情况下对$\eta_\parallel{}^a$不感兴趣的根本原因是它从每条测地线指向自身, 因而不代表测地线的分离. 然而, 在类光情况下$\eta_{非}{}^a = \eta^3 l^a$, 而$l^a$从每条测地线指向另一相邻测地线, 所以$\eta_{非}{}^a$也描述分离. 幸好现在同样可以证明$k^b\nabla_b(\eta^a k_a) = 0$, 即$\eta^3 = -\eta^a k_a$沿线不变, 只要在选标架场时再附带要求$l^a$沿测地线平移(这总可做到), 便有$k^b\nabla_b \eta_{非}{}^a = 0$, 因而$\eta_{非}{}^a$也沿线不变. 通常据此就说“我们对$\eta_{非}{}^a$不感兴趣”, 从而在类光情况下人们也只关心$\eta_\perp{}^a$, 并默认$\eta_\perp{}^a$就是$\eta^a$(笔者的看法见选读 16-2-1).

虽然都只关心$\eta_\perp{}^a$, 但两种情况下的$\eta_\perp{}^a$有一重要不同(第三个区别). 类时情况的$\eta_\perp{}^a$是空间矢量, 要用三个数刻画. 类光情况的$\eta_\perp{}^a$虽然也有三个分量(η^1, η^2, η^4), 但$\eta^4 k^a$代表从测地线指向自身的矢量, 不代表任何分离, 所以$\eta_\perp{}^a$实质上只由两个分量η^1和η^2决定. 下面设法用一个 2 维矢量代表$\eta_\perp{}^a$. 线汇定义域U的一点p的切空间V_p有 3 维子空间

$$\tilde{V}_p \equiv \{\tilde{v}^a \in V_p \mid \tilde{v}^a k_a|_p = 0\}.\ (\text{分离矢量}\ \eta_\perp{}^a|_p\ \text{可看作}\ \tilde{V}_p\ \text{的元素}) \tag{16-2-6}$$

由$k^a k_a = 0$可知$k^a|_p \in \tilde{V}_p$, 故可在$\tilde{V}_p$中定义等价类: $\tilde{v}^a, \tilde{v}'^a \in \tilde{V}_p$称为等价的(记作$\tilde{v}^a \sim \tilde{v}'^a$), 若$\exists \alpha \in \mathbb{R}$使$\tilde{v}'^a = \tilde{v}^a + \alpha k^a|_p$. 以$\hat{v}^a$代表$\tilde{v}^a$所在的等价类, 以每一等价类作为一个元素便构成一个抽象的 2 维矢量空间, 记作$\hat{V}_p$, 即

$$\hat{V}_p \equiv \{\hat{v}^a \mid \hat{v}^a\ \text{是}\ \tilde{V}_p\ \text{中的一个等价类}\},\ (\text{请注意}\ \hat{V}_p\ \text{并非}\ \tilde{V}_p\ \text{的子空间}) \tag{16-2-7}$$

便有投影(到上)映射$\pi_1 : \tilde{V}_p \to \hat{V}_p$满足$\pi_1(\tilde{v}^a) = \hat{v}^a$(即$\tilde{v}^a$所在的等价类). 易证:

①π_1是线性映射;　　②$\hat{k}^a|_p = 0 \in \hat{V}_p$;

③$\tilde{v}^a \sim k^a|_p \Leftrightarrow \tilde{v}^a = \alpha k^a|_p$;　　④$\tilde{v}'^a - \tilde{v}^a = \alpha k^a|_p \Leftrightarrow \hat{v}'^a = \hat{v}^a$.

在V_p的对偶空间$V_p{}^*$中取子集

$$(V_p{}^*\tilde{)} \equiv \{\tilde{\omega}_a \in V_p{}^* \mid \tilde{\omega}_a \tilde{v}^a = \tilde{\omega}_a \tilde{v}'^a, \ \forall \tilde{v}^a \in \tilde{V}_p \text{ 及 } \tilde{v}'^a \sim \tilde{v}^a\}, \tag{16-2-8}$$

则不难证明：

①$(V_p{}^*\tilde{)}$是$V_p{}^*$的一个3维子空间；

②
$$(V_p{}^*\tilde{)} \equiv \{\tilde{\omega}_a \in V_p{}^* \mid \tilde{\omega}_a k^a|_p = 0\}. \tag{16-2-8'}$$

上式保证$(V_p{}^*\tilde{)}$的每一元素都在$\hat{V}_p$的对偶空间$(\hat{V}_p)^*$中诱导出一个元素$\hat{\omega}_a \in (\hat{V}_p)^*$，定义为

$$\hat{\omega}_a \hat{v}^a := \tilde{\omega}_a \tilde{v}^a, \quad \forall \hat{v}^a \in \hat{V}_p. \tag{16-2-9}$$

[其中$\tilde{v}^a$是$\tilde{V}_p$的、满足$\pi_1(\tilde{v}^a) = \hat{v}^a$的任一元素.]

由上式可知$\tilde{\omega}_a$与$\tilde{\omega}_a + \alpha k_a|_p$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$给出同一个$\hat{\omega}_a$，所以说$\tilde{\omega}_a$等价于$\tilde{\omega}_a + \alpha k_a|_p$，并记作$\tilde{\omega}_a \sim \tilde{\omega}_a + \alpha k_a|_p$，而且可把$\hat{\omega}_a$看作$\tilde{\omega}_a$所在的那个等价类. 可见$(V_p{}^*\tilde{)}$中等价类的集合(也是个矢量空间)与$(\hat{V}_p)^*$有同构对应，存在投影映射$\pi_2: (V_p{}^*\tilde{)} \to (\hat{V}_p)^*$满足$\pi_2(\tilde{\omega}_a) = \hat{\omega}_a$. 易证：

①π_2是线性映射；　　②$\hat{k}_a|_p = 0 \in (\hat{V}_p)^*$；

③$\tilde{\omega}_a \sim k_a|_p \Leftrightarrow \tilde{\omega}_a = \alpha k_a|_p, \alpha \in \mathbb{R}$；④$\tilde{\omega}'_a - \tilde{\omega}_a = \alpha k_a|_p \Leftrightarrow \hat{\omega}'_a = \hat{\omega}_a$.

下面进一步讨论张量. 为缩短公式长度，凡不涉及指标升降时都可把张量$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$写成$T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$. V_p上的张量T(按定义)将V_p和$V_p{}^*$的若干个元素映射为一个实数. 把T的作用范围限制在$\tilde{V}_p$和$(V_p{}^*\tilde{)}$，如果作用对象$\tilde{v}^a$和$\tilde{\omega}_a$换成等价的$\tilde{v}'^a$和$\tilde{\omega}'_a$后所得实数一样，就可定义把$\tilde{V}_p$和$(V_p{}^*\tilde{)}$的等价类(即$\hat{v}^a$和$\hat{\omega}_a$)变为实数的线性映射$\hat{T}$，它其实就是$\hat{V}_p$上的张量$\hat{T}$. 于是有

定义1　V_p上的(k,l)型$(k+l>1)$张量$T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$称为**可加^的**，若$\hat{V}_p$上存在张量$\hat{T}^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$，满足

$$\begin{gathered}\hat{T}^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\hat{v}_1^{b_1}\cdots\hat{v}_l^{b_l}\hat{\omega}^1_{a_1}\cdots\hat{\omega}^k_{a_k} = T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\tilde{v}_1^{b_1}\cdots\tilde{v}_l^{b_l}\tilde{\omega}^1_{a_1}\cdots\tilde{\omega}^k_{a_k}, \\ \forall \hat{v}_1^{b_1}\cdots\hat{v}_l^{b_l} \in \hat{V}_p, \ \hat{\omega}^1_{a_1}\cdots\hat{\omega}^k_{a_k} \in \hat{V}_p{}^*,\end{gathered} \tag{16-2-9'}$$

其中$\tilde{v}_i^{b_i}$ $(i=1,\cdots,l) \in \tilde{V}_p$和$\tilde{\omega}^j_{a_j}$ $(j=1,\cdots,k) \in (V_p{}^*\tilde{)}$要满足$\pi_1(\tilde{v}_i^{b_i}) = \hat{v}_i^{b_i}, \pi_2(\tilde{\omega}^j_{a_j}) = \hat{\omega}^j_{a_j}$. 式(16-2-9)是式(16-2-9')的特例. 此外，把标量T看作V_p上的$(0,0)$型张量，规定它总可加^，而且$\hat{T} = T$.

注1　由定义1易见加^操作有线性性(即保持加法和数乘)，亦即

$$(\alpha T^{\cdots}_{\cdots} + \beta S^{\cdots}_{\cdots})\hat{} = \alpha \hat{T}^{\cdots}_{\cdots} + \hat{\beta S}^{\cdots}_{\cdots}.$$

命题 16-2-1　V_p上的(k,l)型($k+l>1$)张量$T^{\cdots}_{\cdots}$可加^的充要条件是$T^{\cdots}_{\cdots}$经以下两步缩并所得标量为零:①先将任一指标缩并k(上标缩k_a下标缩k^b);②再将其他每一上标缩并任一$\tilde{\omega}_a \in (V_p{}^*)\tilde{}$及每一下标缩并任一$\tilde{v}^b \in \tilde{V}_p$. 例如, T^a_{bc}可加^的充要条件是以下三点成立:

(a) $T^a_{bc} k_a \tilde{v}^b \tilde{u}^c = 0,\ \forall \tilde{v}^b, \tilde{u}^c \in \tilde{V}_p$,

(b) $T^a_{bc} \tilde{\omega}_a k^b \tilde{v}^c = 0,\quad \forall \tilde{\omega}_a \in (V_p{}^*)\tilde{},\ \tilde{v}^c \in \tilde{V}_p$,

(c) $T^a_{bc} \tilde{\omega}_a \tilde{v}^b k^c = 0,\ \forall \tilde{\omega}_a \in (V_p{}^*)\tilde{}, \tilde{v}^b \in \tilde{V}_p$.

证明[选读]　若$T^{\cdots}_{\cdots}$可加^, 则$\forall \tilde{\omega}^1_a, \tilde{\omega}^2_a, \cdots \in (V_p{}^*)\tilde{}$及$\tilde{v}^a_1, \tilde{v}^a_2, \cdots \in \tilde{V}_p$有

$$T^{a_1 a_2 \cdots}_{b_1 b_2 \cdots} \tilde{\omega}^1_{a_1} \tilde{\omega}^2_{a_2} \cdots \tilde{v}^{b_1}_1 \tilde{v}^{b_2}_2 \cdots = T^{a_1 a_2 \cdots}_{b_1 b_2 \cdots} \tilde{\omega}^1_{a_1} \tilde{\omega}^2_{a_2} \cdots (\tilde{v}^{b_1}_1 + \alpha k^{b_1}) \tilde{v}^{b_2}_2 \cdots, \tag{16-2-10}$$

因而

$$T^{a_1 a_2 \cdots}_{b_1 b_2 \cdots} \tilde{\omega}^1_{a_1} \tilde{\omega}^2_{a_2} \cdots k^{b_1} \tilde{v}^{b_2}_2 \cdots = 0. \tag{16-2-11}$$

上式说明, 若把作用对象中的$\tilde{v}^{b_1}_1$换为k^{b_1}, 作用结果就为零. 同理可知, 把作用对象之任一换为k^b或k_a, 作用结果都为零. 可见题设条件确为必要条件. 用式(16-2-10)和(16-2-11)不难证明它也是充分条件. □

$v^a \in V_p$及$\omega_a \in V_p{}^*$都可看作V_p上的张量, 借助于上述命题便知:

① k^a和k_a都可加^, 且$\hat{k}^a = 0$, $\hat{k}_a = 0$;

② $v^a \in V_p$可加^ $\Leftrightarrow v^a k_a = 0$;

③ $\omega_a \in V_p{}^*$可加^ $\Leftrightarrow \omega_a k^a = 0$.

再设$\{x^a, y^a, l^a, k^a\}$是p点的一个伪正交归一标架, 则x^a, y^a和k^a显然都可加^, 而且$\{x^a, y^a\}$的线性独立性保证$\{\hat{x}^a, \hat{y}^a\}$的线性独立性, 故后者构成$\hat{V}_p$的一个基底, 其对偶基底为$\{\hat{x}_a, \hat{y}_a\}$(其中$\hat{x}_a, \hat{y}_a$分别是x_a, y_a的加^产物). 设$T_b{}^a$可加^, 则

$$\hat{T}_b{}^a = T_1{}^1 \hat{x}^a \hat{x}_b + T_2{}^1 \hat{x}^a \hat{y}_b + T_1{}^2 \hat{y}^a \hat{x}_b + T_2{}^2 \hat{y}^a \hat{y}_b,$$

其中$T_1{}^1$等是$T_b{}^a$在$\{x^a, y^a, l^a, k^a\}$及其对偶基的分量, $T_b{}^a$的沾3或4的所有分量在$\hat{T}_b{}^a$中都不复存在.

命题 16-2-2　设T_{ab}是4维时空(M, g_{ab})上的(0,2)型张量场, 则

(1) T_{ab}可加^的充要条件是M上有张量场P_{ab}, V_a, U_b使

$$T_{ab} = P_{ab} + k_a U_b + V_a k_b, \tag{16-2-12}$$

其中 P_{ab} 满足 $P_{ab}k^a = 0,\ P_{ab}k^b = 0$；

(2) T_{ab} 可加 ^ $\Rightarrow k^c\nabla_c T_{ab}$ 可加 ^.

证明[选读]

(1)设 T_{ab} 满足式(16-2-12), 则容易验证 T_{ab} 满足命题16-2-1的条件, 故 T_{ab} 可加 ^. 反之, 设 T_{ab} 可加 ^, 用伪正交归一对偶标架 $\{E^\mu_a\}$ 把 T_{ab} 展开为(其中 i, j 都从1到2取和)

$$\begin{aligned}T_{ab} &= T_{ij}E^i_aE^j_b + T_{i3}E^i_aE^3_b + T_{i4}E^i_aE^4_b + T_{3i}E^3_aE^i_b + T_{4i}E^4_aE^i_b + T_{34}E^3_aE^4_b + T_{43}E^4_aE^3_b \\ &= T_{ij}E^i_aE^j_b - T_{i3}E^i_ak_b - T_{i4}E^i_al_b - T_{3i}k_aE^i_b - T_{4i}l_aE^i_b + T_{34}k_al_b + T_{43}l_ak_b\ .\end{aligned} \tag{16-2-13}$$

由命题16-2-1又知 T_{ab} 可加 ^ $\Rightarrow 0 = T_{ab}k^aE^b_i = T_{ab}E^a_4E^b_i = T_{4i}$ 及 $0 = T_{i4}$, 故式(16-2-13)简化为

$$T_{ab} = T_{ij}E^i_aE^j_b + k_a(T_{34}l_b - T_{3i}E^i_b) + (T_{43}l_a - T_{i3}E^i_a)k_b\ .$$

令 $P_{ab} \equiv T_{ij}E^i_aE^j_b,\ U_b \equiv T_{34}l_b - T_{3i}E^i_b,\ V_a \equiv T_{43}l_a - T_{i3}E^i_a$, 便有式(16-2-12).

(2)借助于式(16-2-12)可把 $k^c\nabla_c T_{ab}$ 表为

$$k^c\nabla_c T_{ab} = P'_{ab} + k_aU'_b + V'_ak_b\ , \quad 其中\ P'_{ab} \equiv k^c\nabla_c P_{ab},\ U'_b \equiv k^c\nabla_c U_b,\ V'_a \equiv k^c\nabla_c V_a\ .$$

再由 $P_{ab}k^a = 0,\ P_{ab}k^b = 0$ 易证 $P'_{ab}k^a = 0,\ P'_{ab}k^b = 0$, 故本命题之(1)保证 $k^c\nabla_c T_{ab}$ 可加 ^. □

命题 16-2-3 若 V_p 上的张量 $T^{\cdots}_{\cdots}$ 和 $S^{\cdots}_{\cdots}$ 可加 ^, 则张量积 $T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots}$ (无指标缩并)也可加 ^, 且 $(T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots})^\wedge = \hat{T}^{\cdots}_{\cdots}\hat{S}^{\cdots}_{\cdots}$.

证明 不难从式(16-2-9′)出发证明, 练习. □

然而, 如果 $T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots}$ 中包含某些指标缩并, $(T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots})^\wedge$ 还等于 $\hat{T}^{\cdots}_{\cdots}\hat{S}^{\cdots}_{\cdots}$ 吗?这其实就是缩并与加 ^ 可否交换的问题. 下面的命题对此给出答案.

命题 16-2-4 设 k, l 为正整数, $T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$ 是 V_p 上可加 ^ 的 (k,l) 型张量.

(1)(可交换充要条件)令 $T^3_3 \equiv T^{3a_2\cdots a_k}_{3b_2\cdots b_l},\ T^4_4 \equiv T^{4a_2\cdots a_k}_{4b_2\cdots b_l}$, 则 C^1_1T (T 的第一上、下标的缩并结果)可加 ^ 且 $(C^1_1T)^\wedge = C^1_1\hat{T}$ (缩并与加 ^ 可交换)的充要条件为 $T^3_3 + T^4_4$ 可加 ^ 且 $(T^3_3 + T^4_4)^\wedge = 0$.

(2)(可交换充分条件)以 CT 代表 $T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$ 中若干对上下标缩并的结果, 若参与缩并的每一指标与 k^b (或 k_a)缩并为零, 则 CT 可加 ^ 且 $(CT)^\wedge = C\hat{T}$.

证明[选读]

(1)令 $S \equiv C^1_1T$, 即 $S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots} \equiv T^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}$, 则 $\forall \tilde{\omega}_{a_2}, \cdots \in (V_p{}^*\tilde{)},\ \tilde{v}^{b_2}, \cdots \in \tilde{V}_p$ 有

$$
\begin{aligned}
S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots &= T^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots=(T^{1a_2\cdots}_{1b_2\cdots}+T^{2a_2\cdots}_{2b_2\cdots}+T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots\\
&=(T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}E^1_a E^b_1+T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}E^2_a E^b_2+T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots\\
&=(\hat{T}^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}\hat{E}^1_a\hat{E}^b_1+\hat{T}^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}\hat{E}^2_a\hat{E}^b_2)\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots+(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots\\
&=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots+(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots.
\end{aligned}
\qquad (16\text{-}2\text{-}14)
$$

[其中第四步用到 $T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$ 可加 ^ 及式(16-2-9′), 第五步与第二步理由相同(只不过第五步处理的张量是 2 维的), 都用到缩并定义, 即上册式 (2-4-5) 的抽象指标表述.]下面利用式(16-2-14)来证明可交换的充要条件.

先证条件的必要性. 设 $C^1_1 T$ 可加 ^ 且 $(C^1_1 T)^\wedge = C^1_1\hat{T}$, 则 $S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\equiv T^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}$ 给出

$$
\hat{S}^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots(\text{其中 }\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\text{ 代表 }C^1_1\hat{T}); \qquad (16\text{-}2\text{-}15a)
$$

而由式(16-2-9)及(16-2-14)又有

$$
\hat{S}^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots=S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots+(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots, \qquad (16\text{-}2\text{-}15b)
$$

于是式(16-2-15a)和(16-2-15b)联合逼出

$$
(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots=0. \qquad (16\text{-}2\text{-}16)
$$

根据式(16-2-9), 欲证 $T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots}$ 可加 ^ 只须找到满足下式的张量 $(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})^\wedge$:

$$
(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})^\wedge\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots=(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots.
$$

而由式(16-2-16)看出这一待找张量就是零张量, 即 $(T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots})^\wedge=0$. 再注意到 $T^3_3+T^4_4\equiv T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}+T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots}$, 便得结论: $T^3_3+T^4_4$ 可加 ^ 且 $(T^3_3+T^4_4)^\wedge=0$.

再证条件的充分性. 设 $T^3_3+T^4_4$ 可加 ^ 且 $(T^3{}_3+T^4{}_4)^\wedge=0$ [因而式(16-2-16)]成立, 则式(16-2-14)给出 $S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\tilde{\omega}_{a_2}\tilde{v}^{b_2}\cdots=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots$, 表明 $S^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}$ 可加 ^ 且 $\hat{S}^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}$, 即 $(C^1_1 T)^\wedge=C^1_1\hat{T}$.

(2)只须对“第一对指标缩并”的情况做证明(“若干对指标缩并”的情况仿此得证). 这时已知 $T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}k_a=0$ 及 $T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}k^b=0$, 求证 CT (即 $C^1_1 T$) 可加 ^ 且 $(CT)^\wedge=C\hat{T}$. 因

$$
T^{3a_2\cdots}_{3b_2\cdots}=T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}E^3_a E^b_3=-T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}k_a l^b=0, (\text{末步用到已知条件 }T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}k_a=0)
$$

$$
T^{4a_2\cdots}_{4b_2\cdots}=T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}E^4_a E^b_4=-T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}l_a k^b=0, (\text{末步用到已知条件 }T^{aa_2\cdots}_{bb_2\cdots}k^b=0)
$$

代入式[16-2-14(b)]得 $\hat{S}^{a_2\cdots}_{b_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots=\hat{T}^{aa_2\cdots}_{ab_2\cdots}\hat{\omega}_{a_2}\hat{v}^{b_2}\cdots$, 由此便知 S (即 CT)可加 ^ 且

$(CT)^{\wedge} = C\hat{T}$. □

由式(16-2-1) ~ (16-2-3)知道时空度规 g_{ab} 可以表为

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b - k_a l_b - l_a k_b, \tag{16-2-17}$$

上式右边各项都因满足命题16-2-1的条件而可加 ^. 利用 $\hat{k}_a = 0$ 、加 ^ 操作的线性性以及命题 16-2-3 便得

$$\hat{g}_{ab} = \hat{x}_a \hat{x}_b + \hat{y}_a \hat{y}_b . \tag{16-2-18a}$$

上式表明 $\{\hat{x}^a, \hat{y}^a\}$ 以 $\hat{g}_{ab}$ 衡量是正交归一基, 号差为 $(+,+)$. g_{ab} 之逆

$$g^{ab} = x^a x^b + y^a y^b - k^a l^b - l^a k^b \tag{16-2-19}$$

显然也可加 ^, 而且易见

$$\hat{g}^{ab} = \hat{x}^a \hat{x}^b + \hat{y}^a \hat{y}^b . \tag{16-2-18b}$$

由式(16-2-18a)及(16-2-18b)又得

$$\hat{g}^{ab}\hat{g}_{bc} = \hat{x}^a \hat{x}_c + \hat{y}^a \hat{y}_c .$$

不难验证上式右边正是从 $\hat{V}_p$ 到 $\hat{V}_p$ 的恒等映射(不妨记作 $\hat{\delta}^a_c$), 可见 $\hat{g}^{ab}$ 就是 $\hat{g}_{ab}$ 的逆度规.

仿照中册式(14-1-37)对类光测地线汇定义

$$B_{ab} := \nabla_b k_a , \tag{16-2-20}$$

则 B_{ab} 由于满足 $k^a B_{ab} = 0, k^b B_{ab} = 0$ 而可加 ^, 即 $\hat{B}_{ab}$ 有意义. 令

$$\text{(a)}\ \hat{\theta} \equiv \hat{g}^{ab}\hat{B}_{ab}, \quad \text{(b)}\ \hat{\sigma}_{ab} \equiv \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\hat{\theta}\hat{g}_{ab}, \quad \text{(c)}\ \hat{\omega}_{ab} \equiv \hat{B}_{[ab]}, \tag{16-2-21}$$

则

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\hat{\theta}\hat{g}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab} . \tag{16-2-22}$$

作为 $(\hat{V}_p, \hat{g}^{ab})$ 上的张量, $\hat{B}_{ab}$ 当然可用 $\hat{g}^{ab}$ 升指标, 例如 $\hat{B}^c{}_b \equiv \hat{g}^{ca}\hat{B}_{ab}$. 然而符号 $\hat{B}^c{}_b$ 又可有另一含义, 即 $(g^{ca}B_{ab})^{\wedge}$. 好在这两种含义其实一样, 即 $\hat{g}^{ca}\hat{B}_{ab} = (g^{ca}B_{ab})^{\wedge}$, 证明如下. 由式(16-2-19)及 $k^a B_{ab} = 0$ 得 $g^{ca}B_{ab} = (x^c x^a + y^c y^a)B_{ab} - k^c l^a B_{ab}$, 容易验证此式右边的三项都满足命题 16-2-1 的条件, 故都可加 ^, 因而

$$(g^{ca}B_{ab})^{\wedge} = [(x^c x^a + y^c y^a)B_{ab}]^{\wedge} - (k^c l^a B_{ab})^{\wedge} .$$

上式右边第一项满足命题 16-2-4(2)的条件, 因而等于 $(x^c x^a + y^c y^a)^{\wedge}\hat{B}_{ab}$; 右边第二

项的 k^c 与 $l^a B_{ab}$ 之间无缩并，故由命题 16-2-3 得 $(k^c l^a B_{ab})^\wedge = \hat{k}^c (l^a B_{ab})^\wedge = 0$. 于是

$$(g^{ca}B_{ab})^\wedge = (x^c x^a + y^c y^a)^\wedge \hat{B}_{ab} = (\hat{x}^c \hat{x}^a + \hat{y}^c \hat{y}^a)\hat{B}_{ab} = \hat{g}^{ca}\hat{B}_{ab},$$

结论得证. 这一结论还可推广成如下的方便命题，后面多处用到.

命题 16-2-5　设 $T^{\cdots}_{\cdots}$ 是 V_p 上可加 ^ 的 (k,l) 型张量.

(1)若 $k^a T^{\cdots}_{\cdots a\cdots} = 0$ (其中 a 是 T 的某一特定下标)，则 $g^{ab}T^{\cdots}_{\cdots a\cdots}$ ($T^{\cdots}_{\cdots}$ 不含指标 b)可加 ^，且

$$(g^{ab}T^{\cdots}_{\cdots a\cdots})^\wedge = \hat{g}^{ab}\hat{T}^{\cdots}_{\cdots a\cdots};$$

(2)若 $k^a T^{\cdots}_{\cdots a\cdots b\cdots} = 0$ 和 $k^b T^{\cdots}_{\cdots a\cdots b\cdots} = 0$，则 $g^{ab}T^{\cdots}_{\cdots a\cdots b\cdots}$ 可加 ^，且

$$(g^{ab}T^{\cdots}_{\cdots a\cdots b\cdots})^\wedge = \hat{g}^{ab}\hat{T}^{\cdots}_{\cdots a\cdots b\cdots};$$

(3)，(4)分别与(1)，(2)类似，只是上下标对调，例如(4)的结论为

$$(g_{ab}T^{\cdots a\cdots b\cdots}_{\cdots})^\wedge = \hat{g}_{ab}\hat{T}^{\cdots a\cdots b\cdots}_{\cdots}.$$

证明　练习.　□

例 1　令 $\theta \equiv g^{ab}B_{ab}$，则 $\theta = (g^{ab}B_{ab})^\wedge = \hat{g}^{ab}\hat{B}_{ab} = \hat{\theta}$. [其中第一步是因为 θ 为标量，第二步用到命题 16-2-5(2).] 因此可把 $\hat{\theta}$ 简写为 θ. 请注意，若讨论非仿射参数化的类光测地线汇(见本节末段)，则不满足命题16-2-5(2) 的条件，结果是 $\hat{\theta} \neq \theta$，见式(16-2-39).

本节的主要任务是推导 $\theta, \hat{\sigma}_{ab}$ 和 $\hat{\omega}_{ab}$ 沿测地线的变化率，即 $k^c\nabla_c\theta$，$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}$ 和 $k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}$. 为此可先求变化率 $k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$. 这一"变化率" $k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$ 在概念上存在一个问题：按照§3.1 定义 1，流形 M 上的导数算符 ∇_a 是把 M 上的 (k,l) 型张量场变为 M 上的 $(k,l+1)$ 型张量场的映射，即 $\nabla_a: \mathscr{F}_M(k,l) \to \mathscr{F}_M(k,l+1)$. 而所谓"$T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 是 M 上的张量场"是指 $\forall p \in M$，$T^{a\cdots}{}_{b\cdots}|_p$ 是矢量空间 V_p 上的张量. 根据这一定义，$\hat{B}_{ab}$ 不是 M 上的张量场，因为 $\hat{B}_{ab}|_p$ 是矢量空间 $\hat{V}_p$ (而不是 V_p)上的张量. 于是 $\hat{B}_{ab}$ 不是 ∇_a 的作用对象，亦即 $\nabla_c\hat{B}_{ab}$ 及 $k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$ 并无意义. 然而我们当然很关心 $\hat{B}_{ab}$ 沿着以 k^a 为切矢的类光测地线的变化情况，因此有必要对这一"变化率"赋予恰当意义. 一个自然的定义是从有意义的变化率 $k^c\nabla_c B_{ab}$ 出发. 根据命题16-2-2(2)，B_{ab} 可加 ^ 保证 $k^c\nabla_c B_{ab}$ 可加 ^，于是就可把 $k^c\nabla_c B_{ab}$ 的加 ^ 产物定义为 $k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$，即

$$k^c\nabla_c\hat{B}_{ab} := (k^c\nabla_c B_{ab})^\wedge. \qquad (16\text{-}2\text{-}23)$$

$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}$ 和 $k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}, \cdots$ 等也可仿此定义.

仿照式(14-1-38)的推导(以 k^a 取代 Z^a)得

$$k^c\nabla_c B_{ab} = -B_{ac}B^c{}_b + R_{cbad}k^c k^d . \tag{16-2-24}$$

记$T_{ab} \equiv R_{cbad}k^c k^d$，则$k^a T_{ab}=0,\ k^b T_{ab}=0$，故$T_{ab}$可加 ^，即$(R_{cbad}k^c k^d)^\wedge$有意义. 对式(16-2-24)加 ^ 后得

$$k^c\nabla_c \hat{B}_{ab} = -(B_{ac}B^c{}_b)^\wedge + (R_{cbad}k^c k^d)^\wedge . \tag{16-2-25}$$

再令$S_{ab} \equiv -B_{ac}B^c{}_b$，则$S_{ab}k^a=0$及$S_{ab}k^b=0$保证$S_{ab}$可加 ^，而$B_{ac}k^c=0$，$B^c{}_b k_c=0$则保证$\hat{S}_{ab}=-\hat{B}_{ac}\hat{B}^c{}_b$. 于是式(16-2-25)又可写为

$$k^c\nabla_c \hat{B}_{ab} = -\hat{B}_{ac}\hat{B}^c{}_b + (R_{cbad}k^c k^d)^\wedge . \tag{16-2-25'}$$

以$\hat{g}^{ab}$缩并式(16-2-25′), 左边为

$$\begin{aligned}\hat{g}^{ab}k^c\nabla_c\hat{B}_{ab} &\equiv \hat{g}^{ab}(k^c\nabla_c B_{ab})^\wedge = (g^{ab}k^c\nabla_c B_{ab})^\wedge \\ &= [k^c\nabla_c(g^{ab}B_{ab})]^\wedge = (k^c\nabla_c\theta)^\wedge = k^c\nabla_c\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} .\end{aligned} \tag{16-2-26}$$

其中第二步用到命题 16-2-5(2).

$$\hat{g}^{ab}\text{缩并式(16-2-25′)右一项} = -\hat{B}_{ac}\hat{B}^{ca} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} , \tag{16-2-27}$$

其中第二步用到式(16-2-22)、$\hat{\theta}=\theta$, $\mathrm{tr}\hat{\sigma}_{ac}=0=\mathrm{tr}\hat{\omega}_{ac}$ 及 $\hat{\sigma}_{ac}=\hat{\sigma}_{(ac)}$, $\hat{\omega}_{ac}=\hat{\omega}_{[ac]}$.

$$\hat{g}^{ab}\text{缩并式(16-2-25′)右二项} = (g^{ab}R_{cbad}k^c k^d)^\wedge \hat{=} g^{ab}R_{cbad}k^c k^d = -R_{cd}k^c k^d , \tag{16-2-28}$$

其中第一步用到命题 16-2-5(2). 于是$\hat{g}^{ab}$缩并式(16-2-25′)的结果为

$$k^c\nabla_c\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{cd}k^c k^d . \tag{16-2-29}$$

不妨称上式为类光测地线汇的 Raychaudhuri 方程.

下面推导$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}$. 由式(16-2-21b)得

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab} = k^c\nabla_c(\hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\hat{g}_{ab}) = k^c\nabla_c\hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\hat{g}_{ab}k^c\nabla_c\theta , \tag{16-2-30}$$

[其中第二步是因为$k^c\nabla_c(\theta\hat{g}_{ab}) \equiv [k^c\nabla_c(\theta g_{ab})]^\wedge = (g_{ab}k^c\nabla_c\theta)^\wedge = \hat{g}_{ab}k^c\nabla_c\theta$.] 由式(16-2-25′)可知上式右边第一项为

$$k^c\nabla_c\hat{B}_{(ab)} = -\hat{B}^c{}_{(b}\hat{B}_{a)c} + (R_{c(ba)d}k^c k^d)^\wedge . \tag{16-2-31}$$

利用R_{cbad}的若干对称性质可证$R_{c(ba)d}k^c k^d = R_{cbad}k^c k^d$，再从式(16-2-22)出发求得

$\hat{B}^c{}_{(b}\hat{B}_{a)c}$ 的表达式，代入式(16-2-31)得 $k^c\nabla_c\hat{B}_{(ab)}$ 的表达式，与式(16-2-29)一同代入(16-2-30)便得

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}=-\theta\hat{\sigma}_{ab}-[\hat{\sigma}^c{}_b\hat{\sigma}_{ac}+\hat{\omega}^c{}_b\hat{\omega}_{ac}-\frac{1}{2}\hat{g}_{ab}(\hat{\sigma}^{cd}\hat{\sigma}_{cd}-\hat{\omega}^{cd}\hat{\omega}_{cd})]$$

$$+(R_{cbad}k^ck^d)^\wedge+\frac{1}{2}\hat{g}_{ab}R_{cd}k^ck^d\,. \tag{16-2-32}$$

借用 $\mathrm{tr}\hat{\sigma}_{ab}=0,\ \hat{\sigma}_{ab}=\hat{\sigma}_{(ab)},\ \hat{\omega}_{ab}=\hat{\omega}_{[ab]}$ 以及伪正交归一基底可证上式右边第二项(方括号项)为零. 再用式(3-4-14)又得

$$R_{cbad}k^ck^d=C_{cbad}k^ck^d+(R_{db}k_ak^d-g_{ab}R_{cd}k^ck^d+\frac{1}{2}R_{ac}k^ck_b)-\frac{1}{6}Rk_ak_b\,, \tag{16-2-33}$$

由此可证

$$(R_{cbad}k^ck^d)^\wedge=(C_{cbad}k^ck^d)^\wedge-\frac{1}{2}\hat{g}_{ab}R_{cd}k^ck^d\,, \tag{16-2-34}$$

代入式(16-2-32)便得 $k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}$ 的最终表达式

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}=-\theta\hat{\sigma}_{ab}+(C_{cbad}k^ck^d)^\wedge\,. \tag{16-2-35}$$

最后来推导 $k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}$. 注意到 $\hat{B}_{[ab]}=\hat{\omega}_{ab}$, 取式(16-2-25′)的反称部分得

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}=-\hat{B}^c{}_{[b}\hat{B}_{a]c}+(R_{c[ba]d}k^ck^d)^\wedge=-\hat{B}^c{}_{[b}\hat{B}_{a]c}\,, \tag{16-2-36}$$

(其中第二步是因为借 R_{cbad} 的对称性质可证 $R_{c[ba]d}k^ck^d=0$.) 再用

$$\hat{B}_{ac}=\frac{1}{2}\theta\hat{g}_{ac}+\hat{\sigma}_{ac}+\hat{\omega}_{ac}$$

计算式(16-2-36)右边便得

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}=-\theta\hat{\omega}_{ab}-2\hat{\sigma}^c{}_{[b}\hat{\omega}_{a]c}\,. \tag{16-2-37}$$

令 $Y_{ab}\equiv\hat{\sigma}^c{}_{[b}\hat{\omega}_{a]c}$, 则它在正交归一基底 $\{\hat{x}^a,\hat{y}^a\}$ 的分量只有一个独立, 可取为 Y_{12}. 利用 $\hat{\omega}_{ab}$ 的反称性及 $\hat{\sigma}_{ab}$ 的无迹性易证 $Y_{12}=0$, 故最终结果为

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}=-\theta\hat{\omega}_{ab}\,. \tag{16-2-38}$$

为方便起见，不妨把式(16-2-29)、(16-2-35)和(16-2-38)合称为类光测地线汇的 Raychaudhuri 方程组，只适用于仿射参数化的类光测地线汇. 若改为非仿射参数化(后面要用)，则 $k^c\nabla_ck_a=\kappa k_a\neq 0$, 其中 κ 是线汇定义域上的函数. 仍按式(16-2-20)定义 B_{ab}, 再按式(16-2-21)定义 $\hat{\theta},\hat{\sigma}_{ab},\hat{\omega}_{ab}$, 用类似方法可以证明其相应方程组的每

个方程右边都将多出与κ有关的一项,① 具体地就是

$$k^c\nabla_c\hat{\theta}=\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{1}{2}\hat{\theta}^2-\hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab}+\hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab}-R_{cd}k^ck^d+\kappa\hat{\theta}, \qquad (16\text{-}2\text{-}29^*)$$

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}=-\hat{\theta}\hat{\sigma}_{ab}+(C_{cbad}k^ck^d)^{\wedge}+\kappa\hat{\sigma}_{ab}, \qquad (16\text{-}2\text{-}35^*)$$

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}=-\hat{\theta}\hat{\omega}_{ab}+\kappa\hat{\omega}_{ab}. \qquad (16\text{-}2\text{-}38^*)$$

还应注意以上三式中的$\hat{\theta}$不再等于θ,因为可以证明(习题1)

$$\hat{\theta}=g^{ab}\nabla_ak_b-\kappa. \qquad (16\text{-}2\text{-}39)$$

[选读 16-2-1]

本节开头讲过,由于$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a=0$,人们对$\eta_{非}{}^a$不感兴趣,并认为$\eta^a=\eta_{\perp}{}^a$. 如果追问:为什么沿线不变就对它不感兴趣?这其实是个应该质疑的问题. 更有甚者,$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a=0$的导出依赖于三个前提:①借用伪正交归一标架场而且选择$\eta_{非}{}^a\equiv\eta^3l^a=-\eta^bk_bl^a$;②把该标架场的$l^a$选得沿测地线平移;③默认$k^b\nabla_bk^a=0$(而这只对仿射参数化的类光测地线汇成立). 如果满足①和②而不满足③,则$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a=0$不再成立. 然而本选读前在介绍非仿射参数化的类光测地线汇时对$\eta_{非}{}^a$仍然置之不理(仍只关心2维张量$\hat{B}_{ab}$),这又如何解释?进一步说,不用标架场也可做"正非"分解,而且,即使开始时选择分解使$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a=0$,也可以利用本节开头的手法引进$\eta'_{\perp}{}^a\equiv\eta_{\perp}{}^a+\varsigma^a$及$\eta'_{非}{}^a\equiv\eta_{非}{}^a-\varsigma^a$,而且容易找到不满足$k^b\nabla_b\varsigma^a=0$的$\varsigma^a$,于是$k^b\nabla_b\eta'_{非}{}^a\neq0$. 可见,这里存在着两个有待回答的疑难问题:(a)为什么当$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a=0$时就对$\eta_{非}{}^a$不感兴趣?(b)为什么当$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a\neq0$时仍然对$\eta_{非}{}^a$置之不理?由于我们所看到的、涉及这一问题的文献都未提出和回答这一问题,下面只能简介笔者的肤浅看法,仅供参考.

我们认为,对$\eta_{非}{}^a$是否应感兴趣取决于你所关心的物理问题. 举例来说,类光测地线汇的两个重要物理应用是面积定理的证明(用仿射参数化测地线)和弱孤立视界的讨论. (见§16.5,其有关数学基础首先出现在小节16.3.3,允许测地线为非仿射参数化.) 两者的共同特点是只关心某个类光超曲面$\varDelta$上的(3维)类光测地线族,$\varDelta$以外未给定任何测地线. (为了借用本节的结果,也可把测地线族延拓出$\varDelta$之

---

① $\kappa\neq0$时若干问题变得微妙,须加小心. 例如,$\kappa=0$时B_{ab}的可加^性由$k^aB_{ab}=0, k^bB_{ab}=0$保证,但$\kappa\neq0$时$k^bB_{ab}=k^b\nabla_bk_a=\kappa k_a\neq0$. 幸好$\tilde{v}^ak^bB_{ab}=\kappa\tilde{v}^ak_a=0$,因而$B_{ab}$仍可加^. 又如,$\kappa=0$时$k^c\nabla_cB_{ab}$的可加^性由命题16-2-2保证,如果该命题在$\kappa\neq0$时失效,$k^c\nabla_cB_{ab}$可加^与否就会成问题,幸好不难证明该命题在$\kappa\neq0$时照样成立.

外以获得一个4维线汇，但所得到的关于Δ上的线族的结论与延拓无关.）由于$\eta_{非}{}^a$代表从Δ上的测地线指向Δ外的测地线，Δ上的3维线族中的任一单参族的分离矢量当然都有$\eta_{非}{}^a=0$，自然不必对它感兴趣(自然有$\eta^a=\eta_{\perp}{}^a$). 类光测地线汇的另一重要物理应用体现在某些奇性定理的证明中[见Wald(1984)定理9.5.3]. 定理的大意是：只要时空满足某些条件，它就必然含有不完备的(仿射参数化的)类光测地线，因而存在时空奇性. 定理证明过程的逻辑链中涉及若干个预备定理，还特别用到与一个类空闭合面共轭的共轭点概念. 设S是2维类空闭合面，γ是发自S并正交于S的外向类光测地线族中的一条线，$p\in\gamma$称为沿γ共轭于S的共轭点，若γ上存在一个不恒为零的雅可比场η^a(满足该线族的测地偏离方程的场)，它在p点为零. 而$\eta^a|_p=0$导致$\eta^3|_p=0$，与$k^b\nabla_b\eta^3=0$结合便得$\eta^3|_\gamma=0$，即$\eta_{非}{}^a=0$，自然对$\eta_{非}{}^a$不感兴趣(自然有$\eta^a=\eta_{\perp}{}^a$). 或者，也可更简单地说：发自S并正交于S的所有外向类光测地线铺成一个(3维)类光面(整个问题根本不涉及4维类光测地线汇，与前面的两个应用一样)，自然也就有$\eta_{非}{}^a=0$.

以上只是笔者视野内的几个例子. 然而，原则上不排斥这样的物理问题，其中的$\eta_{非}{}^a$及其导数$k^b\nabla_b\eta_{非}{}^a$非要考虑不可. 下面是笔者对这种一般性问题的肤浅看法. 首先请注意一点：无论对类时还是类光线汇，讨论开始时都强调分离矢量η^a，但不久就都把注意力完全集中于B_{ab}(对类光情况则是$\hat{B}_{ab}$)及其沿测地线的变化率(Raychaudhuri方程组)，从引入B_{ab}开始就再也看不见η^a的踪影. 两者到底有何联系？为何后来一直只关心B_{ab}(或$\hat{B}_{ab}$)？我们的看法如下. 对类时测地线汇最应关心的物理问题是从基准观者看来邻居如何运动. 分离矢量η^a描述邻居的位置(充当位矢)，但更应关心的是邻居的3速$u^a\equiv Z^b\nabla_b\eta^a$和(特别是)3加速$a^a\equiv Z^b\nabla_b u^a$(见小节14.1.1). 又因

$$\begin{aligned}u^a&\equiv Z^b\nabla_b\eta^a=\eta^b\nabla_b Z^a=B^a{}_b\eta^b=B^a{}_b(w^b+\alpha Z^b)\\&=B^a{}_b w^b+\alpha B^a{}_b Z^b=B^a{}_b w^b+\alpha Z^b\nabla_b Z^a=B^a{}_b w^b,\end{aligned}\tag{16-2-40}$$

[其中第四步用到η^a的正交分解(w^b就是$\eta_{\perp}{}^b$).] 所以B_{ab}是决定u^a的关键量，而要决定a^a则还要知道$Z^c\nabla_c B_{ab}$.(这正是Raychaudhuri方程组的重要性的来源，这些方程决定着基准观者测得的邻居的膨胀θ、剪切σ_{ab}和扭转ω_{ab}的时间变化率.) 在类时情况下可认为$\eta^a=\eta_{\perp}{}^a$(即小节14.1.1的w^a)，根本不必考虑$\eta_{\parallel}{}^a$. 然而类光情况就要复杂许多，关键是分解式$\eta^a=\eta_{\perp}{}^a+\eta_{非}{}^a$中的$\eta_{非}{}^a$不能随便舍弃(不应以“不感兴趣”为由而置之不理)，所以与式(16-2-40)对应的应是

$$u^a\equiv k^b\nabla_b\eta^a=\eta^b\nabla_b k^a=B^a{}_b\eta^b=\hat{B}^a{}_b\eta_{\perp}{}^b+B^a{}_b\eta_{非}{}^b.\tag{16-2-41}$$

可见，只掌握 $\hat{B}_{ab}$ 及 $k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$ 还不足以决定 u^a 和 a^a，从原则上说还应针对具体物理问题对 $B^a{}_b\eta_{非}{}^b$ 及其沿线的协变导数做进一步的计算. **[选读 16-2-1 完]**

§16.3　类光超曲面上的 Raychaudhuri 方程

16.3.1　超曲面的某些数学知识

为了给本章以下各节打好基础，特补充本小节.

设 X 是集合，$A\subset X$. 映射 $i: A\to X$ 称为**包含映射**(inclusion map)，若 $\forall x\in A$ 有 $i(x)=x\in X$. 例如，设 (M,g_{ab}) 是广义黎曼空间，$\phi: S\to M$ 是超曲面(未必类空、类时或类光)，记 $\Delta\equiv\phi[S]$，则 $i:\Delta\to M$ [定义为 $i(p)\equiv p\in M\ \ \forall p\in\Delta$]就是个包含映射. "超曲面 $\Delta\subset M$ 上的张量场"一词有两种可能含义，学习以下各节时尤应明确区分.

以下(本自然段)仅为陈述方便而设 $\dim M=4$，且只讲 $(0,l)$ 型张量场. 若 $p\in\Delta\subset M$，则 p 有切于 M 的 4 维切空间 V_p 和切于 Δ 的 3 维切空间 W_p (当 Δ 类光时又专记作 $\tilde{V}_p$，见§16. 2). "Δ 上的 $(0,l)$ 型张量场 $\mu_{ab\cdots}$" 在 p 的值既可能是 V_p 上的张量又可能是 W_p 上的张量(分别是把 V_p 或 W_p 的 l 个元素变为一个实数的映射)，我们把前、后者分别称为"不切于" Δ 和"切于" Δ 的张量(见§5.2 末). 对"不切于" Δ 的 $\mu_{ab\cdots}$，总可通过把它的作用范围(对每点 p 而言)限制在 $W_p\subset V_p$ 而得到一个"切于" Δ 的张量场，§5.2 末曾记作 $\tilde{\mu}_{ab\cdots}$，并称之为 $\mu_{ab\cdots}$ 的**限制**. 现在看到它其实就是 $\mu_{ab\cdots}$ 在包含映射 $i:\Delta\to M$ 的拉回映射 i^* 下的像，即 $\tilde{\mu}_{ab\cdots}=i^*\mu_{ab\cdots}$，因此许多文献称 $\tilde{\mu}_{ab\cdots}$ 为 $\mu_{ab\cdots}$ 的**拉回**. 例如，若 M 上有度规场 g_{ab}，则 Δ 上的诱导"度规" h_{ab} 就是 g_{ab} 的拉回，即 $h_{ab}=i^*g_{ab}$. 请注意 g_{ab} 是 4 维张量而 $h_{ab}\equiv i^*g_{ab}$ 是 3 维张量.①

包含映射 $i:\Delta\to M$ 的原像 Δ 同时又是 M 的子集($\Delta\subset M$)的这一特点使某些问题变得微妙. 例如，以下两点值得指出：

(1)设 S 和 M 是两个独立的流形(互不包含)，$\phi: S\to M$ 定义了超曲面，则任一 $p\in S$ 的像 $q\equiv\phi(p)$ 是另一流形 $\phi[S]\subset M$ 的点，因而 p 点的任一矢量 v^a 与其像矢量 ϕ_*v^a 是两个不同矢量空间的元素，两者无从(也不必)直接比较. 然而，对包含映

---

① 若 Δ 是类空或类时超曲面，n^a 是其单位法矢，则又常写 $h_{ab}=g_{ab}\mp n_an_b$ [式(4-4-2)]. 此式是把 h_{ab} 定义为 4 维张量. 为何 h_{ab} 有时指 3 维有时指 4 维?关键在于 3 维与 4 维 h_{ab} 之间有个自然的一一对应，详见选读 4-4-3. 类似地，选读 12-7-2 在讨论 3 维超曲面 K 上的张量场 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$ 时也指出有"切于"与"不切于" K 之分，并说只当 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$ 的每一指标与法矢(或法余矢)指标缩并为零时才"切于" K. 这也分明是把 $\bar{T}^{\cdots}{}_{\cdots}$ 看作 4 维张量(否则与法矢缩并无意义). 对此也可参阅选读 14-4-3.

射 $i: \Delta \to M$ 有 $i[\Delta] = \Delta \subset M$，故任一 $p \in \Delta$ 的像点 $i(p)$ 就是 p 自身，于是任一 $w^a \in W_p$ 的像矢量 $i_* w^a \in W_p \subset V_p$ 是同一矢量空间 W_p 的元素，两者不但可以直接比较，而且比较的结果是 $i_* w^a = w^a$ (请自证).

(2)设 $i: \Delta \to M$ 是包含映射，X^a 是 $\Delta \subset M$ 上切于 Δ 的矢量场，则矢量场 $i_* X^a$ 的定义域只是 Δ 而不是 M (理由见上册§4.1 注 1)，而且不难证明

$$i_* X^a = X^a, \quad 即\, i_*(X^a|_p) = (i_* X^a)|_p = X^a|_p, \ \forall p \in \Delta. \tag{16-3-1}$$

再设 $\bar{X}^a$ 是 X^a 在 M 上的任一延拓，(含义：① $\bar{X}^a$ 是 M 上的矢量场；② $\bar{X}^a|_\Delta = X^a$.) 则由式(16-3-1)得

$$i_* X^a = \bar{X}^a|_\Delta, \quad 即\, (i_* X^a)|_p = \bar{X}^a|_p, \forall p \in \Delta. \tag{16-3-2}$$

命题 16-3-1　设 $i: \Delta \to M$ 是任意超曲面，μ 是 M 上的 l 形式场. 则

$$\mathrm{d}(i^* \mu) = i^*(\mathrm{d}\mu), \quad 即\ \mathrm{d} \circ i^* = i^* \circ \mathrm{d}. \tag{16-3-3}$$

证明[选读]　当 $l = 0$ 时 μ 是标量场，改记作 F，则应证明

$$\mathrm{d}(i^* F)_a = i^*(\mathrm{d}F)_a, \tag{16-3-4}$$

而这已在§15.7 注 5 后的定理 1 中给出(只须强调该定理证明中的 v 现在是点 $p \in \Delta$ 的、切于 Δ 的矢量). 以此为基础不难证明命题对 $l \geqslant 1$ 的一般情况成立：借助于 M 上的局域坐标系 $\{x^\mu\}$ 把 μ 表为

$$\mu = \sum_{\mathrm{C}} \mu_{\nu_1 \cdots \nu_l} \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_l}. \ [此即式(5\text{-}1\text{-}8)] \tag{16-3-5}$$

则

$$\mathrm{d}\mu = \sum_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\mu_{\nu_1 \cdots \nu_l} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_l}, \tag{16-3-6}$$

于是

$$i^* \mathrm{d}\mu = \sum_{\mathrm{C}} (i^* \mathrm{d}\mu_{\nu_1 \cdots \nu_l}) \wedge (i^* \mathrm{d}x^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge (i^* \mathrm{d}x^{\nu_l}) = \sum_{\mathrm{C}} \mathrm{d}(i^* \mu_{\nu_1 \cdots \nu_l}) \wedge \mathrm{d}(i^* x^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(i^* x^{\nu_l}), \tag{16-3-7}$$

[其中第一步用到式(4-1-8)，第二步用到式(16-3-4).] 从式(16-3-5)又得

$$i^* \mu = \sum_{\mathrm{C}} (i^* \mu_{\nu_1 \cdots \nu_l}) i^* \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge i^* \mathrm{d}x^{\nu_l} = \sum_{\mathrm{C}} (i^* \mu_{\nu_1 \cdots \nu_l}) \mathrm{d}(i^* x^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(i^* \mathrm{d}x^{\nu_l}), \tag{16-3-8}$$

对上式取外微分得

$$\mathrm{d}(i^* \mathrm{d}\mu) = \sum_{\mathrm{C}} \mathrm{d}(i^* \mu_{\nu_1 \cdots \nu_l}) \wedge \mathrm{d}(i^* x^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(i^* x^{\nu_l}), \tag{16-3-9}$$

与式(16-3-7)比较便得 $\mathrm{d}(i^*\mu)=i^*(\mathrm{d}\mu)$. □

命题 16-3-2　设 $i:\Delta\to M$ 是任意超曲面, X^a 是切于 Δ 的矢量场, $\mu_{\dots}$ 是 M 上的 $(0,l)$ 型张量场, 则

$$\mathscr{L}_X(i^*\mu_{\dots})=i^*(\mathscr{L}_{\bar{X}}\mu_{\dots}),\tag{16-3-10}$$

其中 $\mathscr{L}_X$ 代表把 Δ 看作独立流形时 Δ 上沿 X^a 的李导数, $\bar{X}^a$ 是 X^a 在 M 上的任意延拓.

证明[选读]　李导数有线性性且满足莱布尼茨律, 故只须对 $l=0$ 和 $l=1$ 的情形做证明.

(A)设 $l=0$, 即 μ 是 M 上的标量场, 则

$$\mathscr{L}_{\bar{X}}\mu=\bar{X}^a\nabla_a\mu=\bar{X}^a(\mathrm{d}\mu)_a.\tag{16-3-11}$$

类似地有

$$\mathscr{L}_X(i^*\mu)=X^a[\mathrm{d}(i^*\mu)]_a=X^a(i^*\mathrm{d}\mu)_a,\tag{16-3-12}$$

[其中第二步用到 $\mathrm{d}\circ i^*=i^*\circ\mathrm{d}$, 即式(16-3-3).] 式(16-3-12)右边又可表为

$$X^a(i^*\mathrm{d}\mu)_a=(i_*X^a)(\mathrm{d}\mu)_a|_\Delta=[\bar{X}^a(\mathrm{d}\mu)_a]_\Delta,\tag{16-3-13}$$

其中第二步用到式(16-3-2). 令 $F\equiv\bar{X}^a(\mathrm{d}\mu)_a$, $f\equiv F|_\Delta=[\bar{X}^a(\mathrm{d}\mu)_a]_\Delta$, 则 F 和 f 分别是 M 和 Δ 上的标量场, 而且 $f=i^*F$, 于是式(16-3-13)又可表为

$$X^a(i^*\mathrm{d}\mu)_a=f=i^*F=i^*[\bar{X}^a(\mathrm{d}\mu)_a]=i^*(\mathscr{L}_{\bar{X}}\mu).$$

上式与式(16-3-12)结合便得 $\mathscr{L}_X(i^*\mu)=i^*(\mathscr{L}_{\bar{X}}\mu)$. 可见命题对 $l=0$ 成立.

(B)设 $l=1$. 李导数的性质(线性性且满足莱布尼茨律)使我们只须对 $\mu_a=(\mathrm{d}F)_a$ (F 是 M 上的任意函数)的情形做证明. 此时有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X(i^*\mu)&=\mathscr{L}_X[i^*(\mathrm{d}F)]=\mathscr{L}_X[\mathrm{d}(i^*F)]=\mathrm{d}[\mathscr{L}_X(i^*F)]\\&=\mathrm{d}[i^*(\mathscr{L}_{\bar{X}}F)]=i^*[\mathrm{d}(\mathscr{L}_{\bar{X}}F)]=i^*[\mathscr{L}_{\bar{X}}(\mathrm{d}F)]=i^*(\mathscr{L}_{\bar{X}}\mu),\end{aligned}$$

其中第二、五步用到式(16-3-3), 第三、六步用到第5章习题6(b), 第四步用到本证明(A)的结论. □

✿ 命题 16-3-3　设 $i:\Delta\to M$ 是 (M,g_{ab}) 的任意超曲面, M 上矢量场 K^a 与 Δ 正交, $K_a\equiv g_{ab}K^b$, 则

$$K_{[a}\nabla_bK_{c]}|_\Delta=0,\ \text{其中}\ \nabla_b\ \text{是任一无挠导数算符}.\tag{16-3-14}$$

注 1　乍看起来, 上述命题无非是中册定理F-4 (Frobenius 定理的推论)的必然结论, 其实不然. 定理F-4的前提条件为"v^a 是超曲面正交的", 这意味着 $\forall p\in M$ 存

在过 p 且处处与 v^a 正交的超曲面(上册§8.1定义2),然而现在的 K^a 只同一张超曲面 Δ 正交,不能充当定理F-4的 v^a. [定理F-4的证明用到定理F-3,仔细研究定理F-3的证明便可理解" K^a 在任一 $p\in M$ 都与某张超曲面正交"这一条件的必要性.] 不过,下述证明的确使用了与证明定理F-3类似的某些手法.

证明 只须证明 $\forall p\in\Delta$ 有 $K_{[a}\nabla_b K_{c]}|_p=0$. 若 $K^a|_p=0$, 此式显然成立, 故以下假定 $K^a|_p\neq 0$. 取4维基底场 $\{e_\mu^a\}$, 其定义域含 p, 其对偶基底场 $\{e^\mu_a\}$ 满足 $e^0_a=K_a$. 把2形式 $(\mathrm{d}K)_{ab}$ 按式(5-1-6′)展开为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(\mathrm{d}K)_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{e}^\nu=(\mathrm{d}K)_{0i}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^i+\frac{1}{2}(\mathrm{d}K)_{ij}\boldsymbol{e}^i\wedge\boldsymbol{e}^j,\quad i,j=1,2,3,\qquad(16\text{-}3\text{-}15)$$

利用式(4-1-8)便得

$$i^*\mathrm{d}\boldsymbol{K}|_p=(\mathrm{d}K)_{0i}(i^*\boldsymbol{e}^0)\wedge(i^*\boldsymbol{e}^i)|_p+\frac{1}{2}(\mathrm{d}K)_{ij}(i^*\boldsymbol{e}^i)\wedge(i^*\boldsymbol{e}^j)|_p.\qquad(16\text{-}3\text{-}16)$$

因为 $\forall$ 切于 Δ 的 X^a 有

$$X^a(i^*K)_a|_p=[(i_*X)^aK_a]_p=X^aK_a|_p=0,\qquad(16\text{-}3\text{-}17)$$

[其中第二步用到式(16-3-1), 第三步用到 K^a 正交于 Δ.] 所以

$$i^*K_a=0,\qquad(16\text{-}3\text{-}18)$$

即 $i^*\boldsymbol{e}^0=0$, 故

$$i^*\mathrm{d}\boldsymbol{K}|_p=\frac{1}{2}(\mathrm{d}K)_{ij}|_\Delta(i^*\boldsymbol{e}^i)\wedge(i^*\boldsymbol{e}^j)|_p.\qquad(16\text{-}3\text{-}19)$$

由 $\mathrm{d}\circ i^*=i^*\circ\mathrm{d}$ 又有 $i^*\mathrm{d}\boldsymbol{K}=\mathrm{d}(i^*\boldsymbol{K})=0$, 与上式对比得 $(\mathrm{d}K)_{ij}|_p=0$ (因为不难证明 $\{i^*\boldsymbol{e}^i\}$ 线性独立), 因而式(16-3-15)给出 $\mathrm{d}\boldsymbol{K}|_p=(\mathrm{d}K)_{0i}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^i|_p=\boldsymbol{K}\wedge(\mathrm{d}K)_{0i}\boldsymbol{e}^i|_p$, 于是 $\boldsymbol{K}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{K}|_p=0$, 说明式(16-3-14)成立. □

16.3.2 类光超曲面上的类光法矢场

设 Δ 是4维时空 (M,g_{ab}) 中的类光超曲面, k^a 是 Δ 上的一个指向未来、处处非零的类光法矢场(此后不加声明时类光法矢场一律处处非零且指向未来), 则 k^a 乘以 Δ 上任一正定函数所得 k'^a 也是 Δ 上的类光法矢场(由 k^a 通过"重新标度化"而得). 设含 Δ 的某开集 $U\subset M$ 上有函数 f 满足① $f|_\Delta=0$, ② $\nabla_a f|_p\neq 0\ \forall p\in\Delta$, 则 $\nabla_a f|_\Delta$ 是 Δ 上的法余矢场. 注意到 $k_a=g_{ab}|_\Delta k^b$ 也是法余矢场, 可知 Δ 上有函数 α 使 $k_a=\alpha\nabla_a f|_\Delta$. 由 k^a 处处非零可知 α 处处非零. 把 α 延拓可得 $U\subset M$ 上的处处非零函数 $\bar{\alpha}$.

令

$$(\mathrm{a})\,\bar{k}_a \equiv \bar{\alpha}\nabla_a f,\quad (\mathrm{b})\,\bar{k}^a \equiv g^{ab}\bar{k}_b,\quad (\mathrm{c})\,\phi \equiv \frac{1}{2}\bar{k}^a\bar{k}_a, \tag{16-3-20}$$

则 $\phi|_\Delta = 0$，故 Δ 上有函数 κ_0 使

$$\nabla_a\phi|_\Delta = \kappa_0 k_a. \tag{16-3-21}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\nabla_a\phi &= \bar{k}^b\nabla_a\bar{k}_b = \bar{k}^b\nabla_a(\bar{\alpha}\nabla_b f) = \bar{\alpha}\bar{k}^b\nabla_a\nabla_b f + \bar{k}^b(\nabla_b f)\nabla_a\bar{\alpha}\\ &= \bar{\alpha}\bar{k}^b\nabla_b\nabla_a f + \bar{k}^b(\nabla_b f)\nabla_a\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\bar{k}^b\nabla_b(\bar{\alpha}^{-1}\bar{k}_a) + \bar{k}^b\bar{k}_b\nabla_a \ln|\bar{\alpha}|\\ &= (\bar{k}^b\nabla_b\bar{k}_a - \bar{k}_a\bar{k}^b\nabla_b \ln|\bar{\alpha}|) + \bar{k}^b\bar{k}_b\nabla_a\ln|\bar{\alpha}|\\ &\triangleq k^b\nabla_b k_a - k_a k^b\nabla_b \ln|\alpha|,\quad (\triangleq \text{代表“在}\Delta\text{上等于”})\end{aligned} \tag{16-3-22}$$

其中第一步用到式(16-3-20c)，第二、五步用到式(16-3-20a)，第四步用到 ∇_a 的无挠性. 上式同 $\nabla_a\phi \triangleq \kappa_0 k_a$ 结合得 $k^b\nabla_b k_a = (\kappa_0 + k^b\nabla_b \ln|\alpha|)k_a$. 令

$$\kappa_{(k)} \equiv \kappa_0 + k^b\nabla_b \ln|\alpha| = \kappa_0 + \mathscr{L}_k \ln|\alpha|, \tag{16-3-23}$$

便有

$$k^b\nabla_b k_a = \kappa_{(k)} k_a. \tag{16-3-24}$$

上式表明 Δ 上的类光法矢场 k^a 的积分曲线是测地线(当 $\kappa_{(k)} \neq 0$ 时为非仿射参数化). 当 Δ 为 Killing 视界时式(16-3-24)就具体化为式(16-1-2). 既然式(16-1-2)中的 κ 代表 Killing 视界的表面引力，不妨也将现在的 $\kappa_{(k)}$ 称为类光超曲面 (Δ, k^a) 的表面引力. 事实上，后面将看到，当 Δ 满足弱孤立视界的条件时 $\kappa_{(k)}$ 的确有表面引力的物理意义.

16.3.3　类光超曲面上的 Raychaudhuri 方程

学习孤立视界时要涉及类光超曲面 Δ 及其类光法矢场 k^a 的 Raychaudhuri 方程组. 作为推导这一方程组的第一步，似乎可以仿照式(16-2-20)在 Δ 上定义张量场 $B_{ab} \equiv \nabla_b k_a$. 然而，由于 k_a 只在 Δ (而不是 4 维开集 $U \supset \Delta$)上定义，$\nabla_b k_a$ 并无意义. 克服这一困难的办法之一是改用下式定义 B_{ab}：

$$B_{ab} := (\nabla_b\bar{k}_a)|_\Delta, \tag{16-3-25}$$

其中 $\bar{k}_a \equiv g_{ab}\bar{k}^b$，而 $\bar{k}^b$ 是 k^b 在 U 上的一个“类光测地延拓”，其准确定义如下.

定义 1　$\bar{k}^a$ 称为 k^a 在 U 上的**类光测地延拓**，若① $\bar{k}^a$ 是 k^a 的光滑延拓；② $\bar{k}^a$ 是类光矢量场；③ U 上有函数 $\bar{\kappa}_{(\bar{k})}$ 使 $\bar{k}^b\nabla_b\bar{k}^a = \bar{\kappa}_{(\bar{k})}\bar{k}^a$.

设$\bar{k}^a$是k^a在U上的一个类光测地延拓，则$\bar{k}^a$(而不是k^a)相当于§16.2 的k^a，该节末段关于(非仿射参数化的)k^a的一切操作和结论都适用于现在的$\bar{k}^a$，只是有关各量上方都要加横杠. 例如，式(16-2-20)(即$B_{ab}\equiv\nabla_b k_a$)现在应写成

$$(a)\ \bar{B}_{ab}\equiv\nabla_b\bar{k}_a,\qquad 与式(16\text{-}3\text{-}25)结合得\ (b)\ B_{ab}=\bar{B}_{ab}|_\Delta. \tag{16-3-26}$$

又如，由式(16-2-29*)上一段可知$\bar{B}_{ab}$也可以加^，即$\hat{\bar{B}}_{ab}$有意义，而且式(16-2-21)、(16-2-22)现在应分别写成

$$(a)\ \hat{\bar{\theta}}\equiv\hat{g}^{ab}\hat{\bar{B}}_{ab},\quad (b)\ \hat{\bar{\sigma}}_{ab}\equiv\hat{\bar{B}}_{(ab)}-\frac{1}{2}\hat{\bar{\theta}}\hat{g}_{ab},\quad (c)\ \hat{\bar{\omega}}_{ab}\equiv\hat{\bar{B}}_{[ab]}, \tag{16-3-27}$$

$$\hat{\bar{B}}_{ab}=\frac{1}{2}\hat{\bar{\theta}}\hat{g}_{ab}+\hat{\bar{\sigma}}_{ab}+\hat{\bar{\omega}}_{ab}, \tag{16-3-28}$$

而式(16-2-29*)、(16-2-35*)及(16-2-38*)(即 Raychaudhuri 方程组)则应依次写成

$$\bar{k}^c\nabla_c\hat{\bar{\theta}}=-\frac{1}{2}\hat{\bar{\theta}}^2-\hat{\bar{\sigma}}_{ab}\hat{\bar{\sigma}}^{ab}+\hat{\bar{\omega}}_{ab}\hat{\bar{\omega}}^{ab}-R_{cd}\bar{k}^c\bar{k}^d+\kappa_{(\bar{k})}\hat{\bar{\theta}}, \tag{16-3-29}$$

$$\bar{k}^c\nabla_c\hat{\bar{\sigma}}_{ab}=-\hat{\bar{\theta}}\hat{\bar{\sigma}}_{ab}+(C_{cbad}\bar{k}^c\bar{k}^d)^\wedge+\kappa_{(\bar{k})}\hat{\bar{\sigma}}_{ab}, \tag{16-3-30}$$

$$\bar{k}^c\nabla_c\hat{\bar{\omega}}_{ab}=-\hat{\bar{\theta}}\hat{\bar{\omega}}_{ab}+\kappa_{(\bar{k})}\hat{\bar{\omega}}_{ab}, \tag{16-3-31}$$

其中

$$\hat{\bar{\sigma}}^{ab}\equiv\hat{g}^{ac}\hat{g}^{bd}\hat{\bar{\sigma}}_{cd},\qquad \hat{\bar{\omega}}^{ab}\equiv\hat{g}^{ac}\hat{g}^{bd}\hat{\bar{\omega}}_{cd}. \tag{16-3-32}$$

注 2 加^操作按定义总是关于某个类光矢量场而言的(§16.2 定义 1 的加^是关于k^a的)，而本节将与不止一个类光矢量场打交道，因此谈及加^时应该明确是“关于哪个类光矢量场的”(十分明显的情况除外). $\hat{\bar{B}}_{ab}$自然是$\bar{B}_{ab}$关于$\bar{k}^a$的加^产物. 对于Δ上的场，加^时既可以是关于k^a的，也可以是关于任一延拓$\bar{k}^a$的，结果都一样.

设$\bar{k}'^a$是k^a的另一个类光测地延拓，则$\bar{B}'_{ab}\equiv\nabla_b\bar{k}'_a$关于$\bar{k}'^a$的加^产物$\hat{\bar{B}}'_{ab}$一般不等于$\hat{\bar{B}}_{ab}$，即$\hat{\bar{B}}_{ab}$与延拓有关. 好在不难证明$\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta$与延拓无关，请看如下命题.

命题 16-3-4 $\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta$与类光测地延拓$\bar{k}^a$的选择无关.

证明 设$\bar{k}^a$和$\bar{k}'^a$是k^a的任意两个类光测地延拓，则$\forall p\in\Delta$, $\hat{v}^a,\hat{u}^b\in\hat{V}_p$有

$$\hat{v}^a\hat{u}^b(\hat{\bar{B}}'_{ab}-\hat{\bar{B}}_{ab})|_p=\tilde{v}^a\tilde{u}^b(\bar{B}'_{ab}-\bar{B}_{ab})|_p=\tilde{v}^a\tilde{u}^b[\nabla_b(\bar{k}'_a-\bar{k}_a)]_p=\tilde{v}^a[\tilde{u}^b\nabla_b(k_a-k_a)]_p=0,$$

其中第一步用到式(16-2-9′)，[$\tilde{v}^a,\tilde{u}^b\in\tilde{V}_p$要满足$\pi_1(\tilde{v}^a)=\hat{v}^a$, $\pi_1(\tilde{u}^b)=\hat{u}^b$，而$\pi_1$的含

义见式(16-2-7)下一行.] 第三步是因为 $\tilde{u}^b\nabla_b$ 代表沿 Δ 切向求导. 于是上式给出

$$(\hat{\bar{B}}'_{ab}-\hat{\bar{B}}_{ab})|_p=0,\quad \forall p\in\Delta,$$

即 $\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta$ 与延拓无关. □

上述命题使我们可以在 Δ 上定义张量场 $\hat{B}_{ab}$：

$$\hat{B}_{ab}:=\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta=(\nabla_b\bar{k}_a)^\wedge|_\Delta,\ \text{其中}\ \bar{k}^a\ \text{是}\ k^a\ \text{的任一类光测地延拓.}\tag{16-3-33}$$

注意到 $(\nabla_b\bar{k}_a)^\wedge|_\Delta=[(\nabla_b\bar{k}_a)|_\Delta]^\wedge$ (因为每点的加 ^ 操作只涉及代数运算), 可知由上式定义的 $\hat{B}_{ab}$ 其实就是由式(16-3-25)定义的 B_{ab} 的加 ^ 产物.

再以 $\hat{\theta},\hat{\sigma}_{ab}$ 和 $\hat{\omega}_{ab}$ 依次代表 $\hat{B}_{ab}$ 的迹、对称无迹部分和反称部分, 则

$$\hat{B}_{ab}=\frac{1}{2}\hat{\theta}\hat{g}_{ab}|_\Delta+\hat{\sigma}_{ab}+\hat{\omega}_{ab},\tag{16-3-34}$$

式(16-3-28)在 Δ 上取值后与上式对比便得

$$\hat{\theta}=\hat{\bar{\theta}}|_\Delta,\quad \hat{\sigma}_{ab}=\hat{\bar{\sigma}}_{ab}|_\Delta,\quad \hat{\omega}_{ab}=\hat{\bar{\omega}}_{ab}|_\Delta.\tag{16-3-35}$$

所谓 Δ 上的 Raychaudhuri 方程组, 就是以上三个量 $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}_{ab}$, $\hat{\omega}_{ab}$ 沿 k^c 的变化率的表达式. 导出这三个方程的基本思路很简单: 把§16.2 末关于(4 维)类光测地线汇的三个 Raychaudhuri 方程[即式(16-2-29*)、(16-2-35*)及(16-2-38*)]的有关各量加上横杠[即写成式(16-3-29)、(16-3-30)及(16-3-31)]后在 Δ 上取值便得所要的方程组(细节及证明见选读 16-3-1), 结果为

$$k^c\nabla_c\hat{\theta}=-\frac{1}{2}\hat{\theta}^2-\hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab}-R_{cd}k^ck^d+\kappa_{(k)}\hat{\theta},\tag{16-3-36}$$

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}=-\hat{\theta}\hat{\sigma}_{ab}+(C_{cbad}k^ck^d)^\wedge+\kappa_{(k)}\hat{\sigma}_{ab},\tag{16-3-37}$$

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}=0,\tag{16-3-38}$$

其中 R_{cd} 和 C_{cbad} 分别是里奇张量和外尔张量在 Δ 上的值, 即 $R_{cd}|_\Delta$ 和 $C_{cbad}|_\Delta$ 的简写.

除 $\hat{B}_{ab}$ 外, 本小节还经常涉及 $i^*\bar{B}_{ab}$, 其中 $i:\Delta\to M$ 是包含映射. $i^*\bar{B}_{ab}$ 和 $\hat{B}_{ab}$ 都只在 Δ 上有定义, 但互不相同: $\forall p\in\Delta$, $i^*\bar{B}_{ab}|_p$ 是把 $\tilde{V}_p$ 的两个元素变为一个实数的映射(是 $\tilde{V}_p$ 上的张量), 而 $\hat{B}_{ab}|_p$ 则是把 $\hat{V}_p$ 的两个元素变为一个实数的映射(是 $\hat{V}_p$ 上的张量). 然而下面将证明存在一个从 $\hat{V}_p$ 上的张量到 $\tilde{V}_p$ 上的张量的一一映射(但非到上), 它把 $\hat{B}_{ab}|_p$ 映为 $i^*\bar{B}_{ab}|_p$, 因而这两个张量在这个意义上可被认同. 这一结论

还可推广至$(0,l)$型张量，请看如下命题.

命题 16-3-5 设$T_{a_1\cdots a_l}$是$\varDelta$的某邻域上的$(0,l)$型张量场且$T_{a_1\cdots a_l}|_\varDelta$可加^，则可做如下认同：

$$\hat{T}_{a_1\cdots a_l}|_\varDelta \mapsto i^* T_{a_1\cdots a_l}. \tag{16-3-39}$$

特别地，当$T_{a_1\cdots a_l}$是$\bar{B}_{ab}$时有

$$\hat{B}_{ab} \mapsto i^* \bar{B}_{ab}. \tag{16-3-40}$$

证明 $l=0$时命题显然成立. 当$l=1$时$T_{a_1\cdots a_l}$简化为T_a. 请注意$\forall p\in\varDelta$有$T_a|_p \in V_p{}^*$，$\hat{T}_a|_p \in (\hat{V}_p)^*$而$i^*T_a|_p \in (\tilde{V}_p)^*$. 为证明$\hat{T}_a|_p$可认同于$i^*T_a|_p$，先要说明$\hat{T}_a|_p$也可看成$(\tilde{V}_p)^*$的元素，而为此只须用下式定义$\hat{T}_a|_p$对任一$\tilde{v}^a\in\tilde{V}_p$的作用：

$$\hat{T}_a\tilde{v}^a := \hat{T}_a\hat{v}^a,\ \text{其中}\ \hat{v}^a \equiv \pi_1(\tilde{v}^a).\ [\pi_1\text{的含义见式(16-2-7)下一行}] \tag{16-3-41}$$

另一方面，由式(16-2-9)又有

$$\hat{T}_a\hat{v}^a = T_a\tilde{v}^a = T_a(i_*\tilde{v})^a = (i^*T)_a\tilde{v}^a, \tag{16-3-42}$$

[其中第二步用到式(16-3-1).] 与式(16-3-41)对比得

$$\hat{T}_a\tilde{v}^a = (i^*T)_a\tilde{v}^a, \quad \forall\tilde{v}^a\in\tilde{V}_p,$$

故$\hat{T}_a|_p \mapsto i^*T_a|_p$. 以此为基础便可证明$(\hat{V}_p)^*$与$(\tilde{V}_p)^*$(3维空间)的一个2维子空间同构. 仿此不难证明命题对$l\geqslant 2$也成立. □

命题 16-3-6

$$\hat{\omega}_{ab} = 0 \tag{16-3-43}$$

证明 $\hat{\omega}_{ab} \equiv \hat{B}_{[ab]} \mapsto i^*\bar{B}_{[ab]} = i^*\nabla_{[b}\bar{k}_{a]} = \frac{1}{2}i^*(\mathrm{d}\bar{k})_{ba} = \frac{1}{2}\mathrm{d}_b(i^*\bar{k}_a) = 0$，

其中第一、二步依次用到式(16-3-32c)和(16-3-40)，末步用到$i^*\bar{k}_a=0$[式(16-3-18)]. □

上述命题表明$\hat{B}_{ab}$只有膨胀和剪切部分，故式(16-3-34)简化为

$$\hat{B}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} = \frac{1}{2}\hat{\theta}\hat{g}_{ab}|_\varDelta + \hat{\sigma}_{ab}. \tag{16-3-44}$$

[选读 16-3-1]

本选读要证明方程(16-3-36)～(16-3-38)，首先要给出$k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$等的定义. 这对§16.2很简单，只须将$k^c\nabla_c\hat{B}_{ab}$定义为$(k^c\nabla_c B_{ab})^\wedge$. 然而现在的$k^c$和$\hat{B}_{ab}$都只定义在3维子集$\varDelta$上，应该小心行事. 一劳永逸地选定$k^a$在$U\supset\varDelta$上的某个类光测地延拓

$\bar{k}^a$. 设 $\bar{T}_{ab}$ 是 U 上(关于 $\bar{k}^a$)可加 ^ 的张量场, 则 $T_{ab} \equiv \bar{T}_{ab}|_\Delta$ 是 Δ 上(关于 k^c)可加 ^ 的张量场. 因 $k^c\nabla_c$ 代表沿 Δ 的切向求导, 故 $k^c\nabla_c T_{ab}$ 有意义, 而且可借下式求得:

$$k^c\nabla_c T_{ab} = (\bar{k}^c\nabla_c \bar{T}_{ab})|_\Delta, \tag{16-3-45}$$

因为 T_{ab} 可加 ^, 由命题16-2-2(2) 知 $k^c\nabla_c T_{ab}$ 也可加 ^, 因而可用 $(k^c\nabla_c T_{ab})^\wedge$ 作为 $k^c\nabla_c \hat{T}_{ab}$ 的定义, 即

$$k^c\nabla_c \hat{T}_{ab} := (k^c\nabla_c T_{ab})^\wedge. \tag{16-3-46}$$

利用式(16-3-46)和(16-3-45)又得

$$k^c\nabla_c \hat{T}_{ab} = [(\bar{k}^c\nabla_c \bar{T}_{ab})|_\Delta]^\wedge = (\bar{k}^c\nabla_c \bar{T}_{ab})^\wedge|_\Delta. \tag{16-3-47}$$

把 $\bar{B}_{ab} \equiv \nabla_b \bar{k}_a$ 看作 $\bar{T}_{ab}$ 的特例, 则 $\hat{B}_{ab}$ 就是 $\hat{T}_{ab}$ 的特例, 所以 $k^c\nabla_c \hat{B}_{ab}$ (因而 $k^c\nabla_c\hat{\theta}$, $k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab}$ 及 $k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab}$)有明确意义. 取 $\hat{T}_{ab} = \hat{\omega}_{ab}$, 则式(16-3-46)给出

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab} = (k^c\nabla_c\omega_{ab})^\wedge = 0, \quad (\text{因 } \hat{\omega}_{ab} = 0 \Rightarrow \omega_{ab} = 0)$$

此即待证的式(16-3-38). 把式(16-3-29)在 Δ 上取值, 注意到式(16-3-35)及 $\hat{\omega}_{ab} = 0$, 便得

$$k^c\nabla_c\hat{\theta} = -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} - R_{cd}|_\Delta k^c k^d + \kappa_{(k)}\hat{\theta},$$

此即待证的式(16-3-36). 最后, 把 $\hat{\sigma}_{ab}$ 看作式(16-3-47)的 $\hat{T}_{ab}$, 则该式给出

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab} = (\bar{k}^c\nabla_c\bar{\sigma}_{ab})^\wedge|_\Delta = (\bar{k}^c\nabla_c\hat{\bar{\sigma}}_{ab})|_\Delta, \tag{16-3-48}$$

其中第二步用到 $\bar{k}^c\nabla_c\hat{\bar{\sigma}}_{ab}$ 的定义, 实质上就是式(16-2-23)(先注意该式的 k^c 和 B_{ab} 现在应分别改为 $\bar{k}^c$ 和 $\bar{B}_{ab}$, 再把 $\bar{B}_{ab}$ 改为 $\bar{\sigma}_{ab}$). 再把式(16-3-30)在 Δ 上取值, 利用式(16-3-48)便得

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab} = -\hat{\theta}\hat{\sigma}_{ab} + (C_{cbad}k^c k^d)^\wedge|_\Delta + \kappa_{(k)}\hat{\sigma}_{ab},$$

此即待证的式(16-3-37).　**[选读 16-3-1 完]**

§16.4　陷俘面与表观视界

16.4.1　陷俘面

中册附录E 的§E.1 曾对陷俘面做过较详细的定性介绍, 此处先做简要回顾, 然

后给出准确定义.

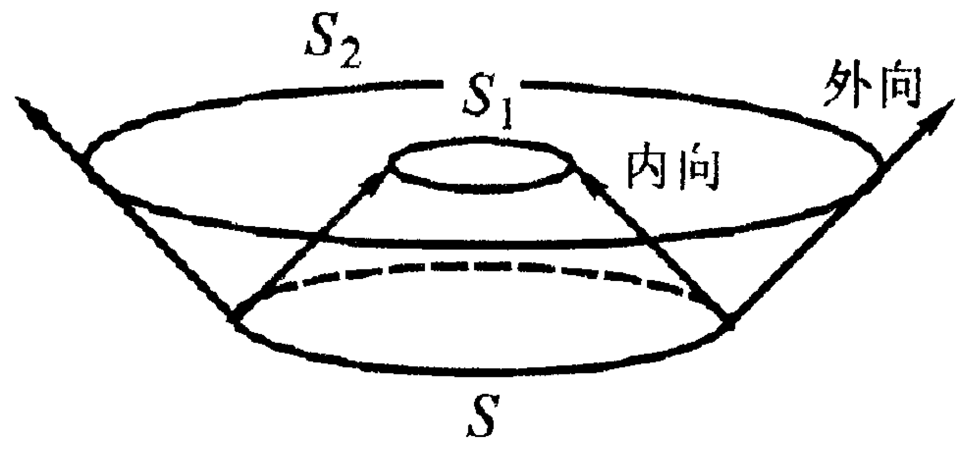
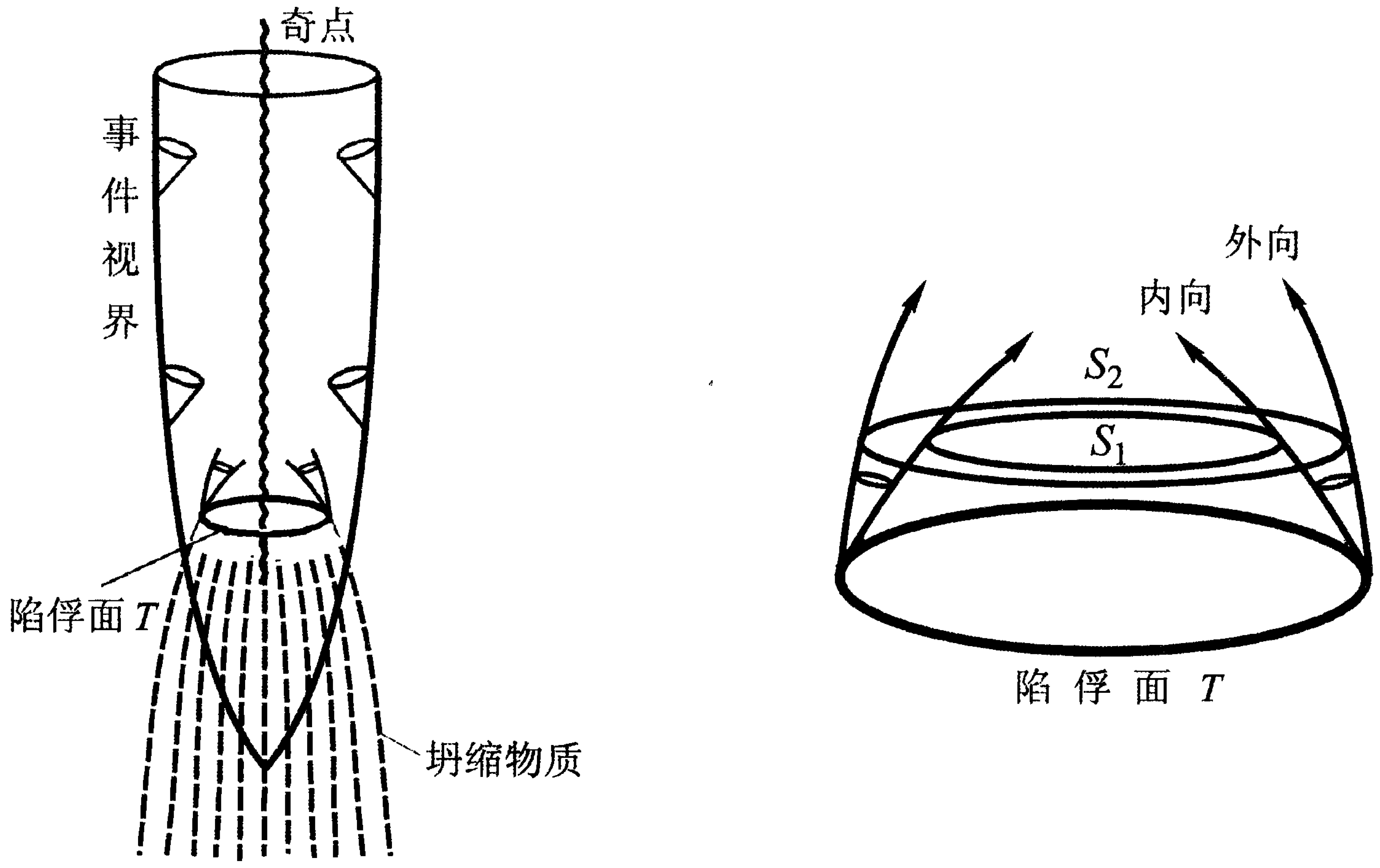


图 16-5　闵氏时空的 2 维球面 S 不是陷俘面

设 Σ 是 4 维闵氏时空中某惯性系的同时面，$S\subset\Sigma$ 是 2 维球面光源(图 16-5)，它发出的内向测地线族处处会聚而外向测地线族处处发散. 一小段时间后，内外向光子分别到达球面(波前) S_1 和 S_2，其面积分别小于和大于 S 的面积. 这样的 S 当然再正常不过. 然而，由球对称星体坍缩形成的黑洞内部的 2 维类空闭合面 T (图 16-6)的表现却非常不同. 由于黑洞内引力异常强大，从 T 发出的两族类光测地线中不但内向测地线会聚，就连 “外向” 测地线也会聚[它虽企图向外(逃离黑洞)，但强大的引力迫使它不得不向内(指向奇点)]. 于是两族测地线在下一时刻到达的球面 S_1 和 S_2 的面积都比 T 的面积小[图 16-6(b)]. 要找到陷俘面的准确定义就要找出代表“内(外)向测地线都会聚”的量. 设 S 是 4 维时空 (M,g_{ab}) 中的任一 2 维类空闭合面，$\varDelta$ 是由 S 发出且正交于 S 的、指向未来的内(或外)向类光测地线所铺成的子集[例如图 16-5 的 “火锅” 的内(或外)壁]，则可以证明 $\varDelta$ 是类光超曲面. 所谓两族测地线都会聚，是指两者的膨胀 $\hat\theta$ 都为负(这里的 $\hat\theta$ 是指小节 16. 3. 3 中类光超曲面 $\varDelta$ 上的膨胀). 下面给出陷俘面的准确定义.



(a) 2 维球面 T 是陷俘面

(b) 陷俘面 T 及其类光测地线汇的放大，S_1 和 S_2 的面积都小于 T 的面积

图 16-6　Oppenheimer-Snyder 坍缩均匀密度尘埃球的陷俘面

定义 1　设 S 是时空 (M,g_{ab}) 中的光滑、闭合①、连通、2 维、定向的类空子流形，k^a 和 l^a 分别是从 S 发出的两族与 S 正交的指向未来类光测地线的切矢，$\hat\theta_{(k)}$

① 闭合是指紧致而且无边界.

和 $\hat{\theta}_{(l)}$ 分别是它们的膨胀, 则

(a) S 称为**陷俘面**(trapped surface), 若 $\hat{\theta}_{(k)}<0, \hat{\theta}_{(l)}<0$;

(b) S 称为**临界**(marginally)**陷俘面**, 若 $\hat{\theta}_{(k)}=0, \hat{\theta}_{(l)}<0$ 或 $\hat{\theta}_{(k)}<0, \hat{\theta}_{(l)}=0$.

由陷俘面的上述定义出发可以准确地陈述并证明在定义 1 之前的直观描述中涉及的“面积变小”结论, 见如下命题.

命题 16-4-1　设 S_0 是时空 (M, g_{ab}) 中的任一 2 维闭合类空面, $\varDelta$ 是由 S_0 发出的、指向未来的正交类光测地线族(两族中之任一)铺成的类光超曲面, ϕ_λ : $\varDelta \to \varDelta$ 是由 $\varDelta$ 的法矢场 $k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$ 产生的单参微分同胚族的一元, $S(\lambda)\equiv\phi_\lambda[S_0]$, 则 $S(\lambda)$ 的面积 $A(\lambda)$ 的变化率

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\int_{S(\lambda)}\hat{\theta}\varepsilon_{ab}(\lambda), \tag{16-4-1}$$

其中 $\hat{\theta}$ 是 k^a 的膨胀(见小节 16. 3. 3), $\varepsilon_{ab}(\lambda)$ 是 $S(\lambda)$ 上的适配面元.

注 1　式(16-4-1)表明 $|\hat{\theta}|$ 代表 $\mathrm{d}A(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ 的“大小”, 而 $\hat{\theta}$ 的正或负则反映面积的增或减. 若 S_0 为陷俘面, 由 $\hat{\theta}<0$ 便知“面积变小”.

证明　以 i : $\varDelta \to M$ 代表包含映射, 则 $h_{ab}\equiv i^* g_{ab}$ 作为 $\varDelta$ 上的张量场是退化的, 但 h_{ab} 在 $S(\lambda)\subset\varDelta$ 上的限制却非退化. 也可这样理解: 把 $S(\lambda)$ 看作包含映射 $i_{S(\lambda)}$: $S(\lambda)\to\varDelta$ 的像, 则 $q_{ab}(\lambda)\equiv i_{S(\lambda)}{}^* h_{ab}$ (即 h_{ab} 的限制)可充当 g_{ab} 在 $S(\lambda)$ 上的 2 维诱导度规, 而式(16-4-1)中的 $\varepsilon_{ab}(\lambda)$ 则代表与 $q_{ab}(\lambda)$ 适配的面元. 在 S_0 上选局部坐标 θ, φ 并用 k^a 携带出去可得 $\varDelta$ 上的局部坐标系 $\{x^0\equiv\lambda, x^2\equiv\theta, x^3\equiv\varphi\}$, 而且是 k^a 的适配系. 以 $q(\lambda,\theta,\varphi)$ 代表 $q_{ab}(\lambda)$ 在 $\{\theta,\varphi\}$ 系的行列式, 则适配面元

$$\varepsilon_{ab}(\lambda)=\sqrt{q(\lambda,\theta,\varphi)}\,(\mathrm{d}\theta)_a\wedge(\mathrm{d}\varphi)_b,$$

故面积

$$A(\lambda)=\int_{S(\lambda)}\varepsilon_{ab}(\lambda)=\iint\sqrt{q(\lambda,\theta,\varphi)}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{16-4-2}$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{1}{2}\iint\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_{S(\lambda)}\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\varepsilon_{ab}(\lambda). \tag{16-4-3}$$

可见, 欲证式(16-4-1)只须证明

$$2\hat{\theta}=\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial\lambda}. \tag{16-4-4}$$

设 $\varDelta_1$ 是 $\varDelta$ 的某个开覆盖的元素($\varDelta$ 的开子集), $S_p(\lambda)$ 是过任一点 $p\in\varDelta_1$ 的分

层面, x^a, y^a 是 Δ_1 上切于每张分层面并满足下式的矢量场:

$$q_{ab}x^a x^a = q_{ab}y^a y^a = 1, \qquad q_{ab}x^a y^a = 0,$$

即 $\{x^a, y^a\}$ 是 q_{ab} 的正交归一基. 再令 $x_a \equiv q_{ab}x^b$, $y_a \equiv q_{ab}y^b$, 则 $\{x_a, y_a\}$ 是 $\{x^a, y^a\}$ 的对偶基, 因而 $q_{ab}(\lambda) = x_a x_b + y_a y_b$. 在 Δ 上定义张量场

$$h^{ab} \equiv x^a x^b + y^a y^b. \tag{16-4-5}$$

请注意 h^{ab} 不是 h_{ab} 的逆, 因为 h_{ab} 无逆. 然而, $\forall q \in S_p(\lambda) \cap \Delta_1$ 有

$$(h^{ab}q_{bc})|_q = [(x^a x^b + y^a y^b)(x_b x_c + y_b y_c)]|_q = (x^a x_c + y^a y_c)|_q,$$

而上式右边是 q 的 2 维切空间上的恒等映射, 可见 $h^{ab}|_q$ (看作 2 维张量)是 $q_{ab}|_q$ 的逆, 故可写 $h^{ab}|_q = q^{ab}|_q$. 此式及 $q_{ab}(\lambda) \equiv i_{S(\lambda)}{}^* h_{ab}$ 导致 q^{ab} 及 q_{ab} 在 2 维坐标系 $\{x^i\} \equiv \{x^2 \equiv \theta, x^3 \equiv \varphi\}$ 的分量为 $q^{ij} = h^{ij}$ 及 $q_{ij} = h_{ij}$ (i, j 可取 2, 3), 于是

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial \lambda} = \frac{1}{q}\left(h_{22}\frac{\partial h_{33}}{\partial \lambda} + h_{33}\frac{\partial h_{22}}{\partial \lambda} - 2h_{23}\frac{\partial h_{23}}{\partial \lambda}\right) = \sum_{i,j=2}^{3} q^{ij}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \lambda} = \sum_{i,j=2}^{3} h^{ij}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \lambda}, \tag{16-4-6}$$

其中第一步用到 $q = h_{22}h_{33} - h_{23}{}^2$, 第二步用到矩阵 (q^{ij}) 与 $(h_{ij}) = (q_{ij})$ 互逆. 另一方面, 仿照小节 16.3.3, 以 $\hat{g}^{ab}$ 和 $\hat{\bar{B}}_{ab}$ 分别代表 g^{ab} 和 $\bar{B}_{ab} \equiv \nabla_b \bar{k}_a$ 的加 ^ 产物, 则在 Δ 上有

$$\hat{\theta} = \hat{g}^{ab}\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta = (\hat{x}^a\hat{x}^b + \hat{y}^a\hat{y}^b)\hat{\bar{B}}_{ab}|_\Delta = (x^a x^b + y^a y^b)\bar{B}_{ab}|_\Delta = h^{ab}\nabla_a \bar{k}_b|_\Delta = h^{ab}\, i^*(\nabla_a \bar{k}_b), \tag{16-4-7}$$

其中前三步依次用到式(16-2-21a)、(16-2-18b)和(16-2-9′), 第五步用到限制的定义(上册§5.2 定义 5). 另一方面,

$$\mathscr{L}_k h_{ab} = \mathscr{L}_k(i^* g_{ab}) = i^*(\mathscr{L}_k g_{ab}) = 2i^*(\nabla_{(a}\bar{k}_{b)}), \tag{16-4-8}$$

[其中第二步用到式(16-3-10), 第三步与 Killing 方程(4-3-1)的证法类似.] 与式(16-4-7)结合便给出

$$2\hat{\theta} = h^{ab}\mathscr{L}_k h_{ab} = \sum_{\alpha,\beta} h^{\alpha\beta}(\mathscr{L}_k h)_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} h^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \lambda},$$

其中 $h_{\alpha\beta}$ 和 $h^{\alpha\beta}$ 分别是 h_{ab} 和 h^{ab} 在坐标系 $\{x^\alpha\} \equiv \{x^0 \equiv \lambda, x^2 \equiv \theta, x^3 \equiv \varphi\}$ 的分量, 取和时 α, β 跑遍 0, 2, 3. 再由 $h_{\alpha\beta} = h_{ab}(\partial/\partial x^\alpha)^a(\partial/\partial x^\beta)^b$ 及 $h_{ab}k^a = 0$ 又得 $h_{0\beta} = 0$, 所以

$$2\hat{\theta} = \sum_{i,j=2}^{3} h^{ij}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \lambda}.$$

与式(16-4-6)对比便得待证等式(16-4-4). □

16.4.2　表观视界

与事件视界和 Killing 视界不同, 表观视界从一开始就定义为一张柯西面[①](3 维面)Σ 的 2 维子集. 在数值相对论中, 表观视界是指 Σ 上最外围的临界陷俘面. 这虽然与 Hawking and Ellis(1973) 的原始定义(见选读16-4-1)略有区别, 但 Hawking and Ellis(1973)所证明的下述结论仍成立: 只要在某时刻 Σ_t 存在表观视界, 它就位于该时刻的某个黑洞以内. 因此, 当事件视界无法把握时不妨认为表观视界在某种意义上代表该时刻的黑洞边界. 在用数值相对论计算黑洞的形成和融合时就是这样做的. 对某一 Σ_t, 为判断表观视界存在与否(以及在何处)只须计算 Σ_t 内 2 维闭面的膨胀, 这一计算只取决于局域几何, 不会像涉及事件视界的计算那样遇到全局(整体)性问题. 具体说, 在数值相对论中, 只要知道演化至某一时刻 t 时相应的 Σ_t 的内禀度规 h_{ab} 和外曲率 K_{ab}, 便可对 Σ_t 中任一 2 维闭面求得其膨胀并判断它是否临界陷俘面, 从而就可求得 Σ_t 的表观视界. 应该再次强调: 表观视界从定义起就是类空 3 维面的 2 维子集. (是"天生 2 维"的, 而事件视界 $\mathscr{E}$ 则是"天生 3 维"的, 只当用某 3 维面 Σ 与之相截才得到 2 维事件视界 E.) 在数值相对论中, 时空被一族 3 维类空面 $\{\Sigma_t\}$ 分层, 人们关心表观视界如何随时间演化, 亦即想知道在初值面 Σ_0 的表观视界 $A_0 \subset \Sigma_0$ 给定后各层 Σ_t 的表观视界 $A_t \subset \Sigma_t$ 的位置, 也就是想知道作为所有这些 A_t 的并集的那个 3 维超曲面 $\mathscr{A}$. 有些文献称此 $\mathscr{A}$ 为 time-evolved apparent horizon, 不妨简译作**演化表观视界**. 不难相信, 如果对最大延拓施瓦西时空(图 9-13)用无数水平面分层, 则所得的演化表观视界 $\mathscr{A}$ 与事件视界 $\mathscr{E}$ 重合, 因而 $\mathscr{A}$ 是类光超曲面. 然而, 对于一般黑洞, 尤其是动态黑洞, 演化表观视界既可能类光, 也很可能类空, 还可能在某些阶段类光而其他阶段类空. 而且, 粗略地说, 其类空部分对应于远离"平衡态"(准确提法见§16.7 的动力学视界).[②] 所以应该特别提醒: (演化)表观视界很可以不是类光的. 现在出现一个问题: 虽然时空中任一 2 维闭面是否为陷俘面与它位于什么 3 维面 Σ 无关(可以根本没有 3 维面), 但"最外围的临界陷俘面"却依赖于 Σ 的选取, 因而表观视界 A_t 天生就是依赖于 3 维面 Σ_t 的. 如果对时空做不同于分层 $\{\Sigma_t\}$ 的另一分层 $\{\Sigma'_t\}$, 则演化表观视界 $\mathscr{A}'$ 很可能不同于 $\mathscr{A}$. 一个有趣的例子是: Wald 等竟然能在引力坍缩形成施瓦西黑洞的时空

① Σ 也可放宽为**部分柯西面**(partial Cauchy surface), 这是指任一无边缘的 3 维非编时子集. 与柯西面不同, 任一时空 (M, g_{ab}) 都有无数部分柯西面, 设 Σ 是其一, 则 $(D(\Sigma), g_{ab})$ 构成 (M, g_{ab}) 的一个整体双曲子时空, Σ 就成为该子时空的柯西面.

② 在 2 维时空图中用无数类空曲线(代表 4 维时空中的 3 维类空面)把时空分层, 在每层 Σ_t 上以某个特殊的点代表该层的表观视界 A_t, 则各层的 A_t 点所组成的曲线 $\mathscr{A}$ 就代表演化表观视界, 其中的类空段的"演化 3 速"会超光速. 这当然允许, 因为每个点 A_t 代表的是 2 维表观视界而不是粒子, "演化 3 速"不过是从粒子世界线借用的术语而已.

中(图 9-17)找到一族由类空柯西面组成的分层, 其中每层都不含陷俘面(因而没有表观视界)[准确提法及证明见 Wald and Iyer(1991)]. 这个例子从颇为极端的角度揭示了由表观视界对 3 维面 Σ_t 的高度敏感性所导致的演化表观视界 $\mathscr{A}$ 对分层 $\{\Sigma_t\}$ 的密切依赖性. 这就引出另一问题:既然 $\mathscr{A}$ 如此依赖于分层, 把它作为边界所得到的黑洞岂非也分层依赖?对某些极端的分层岂非就没有黑洞?如此一来, 用表观视界充当黑洞边界的可信性岂非大打折扣?对此问题的粗略回答是:在数值相对论中用表观视界作为黑洞边界只是一种暂时措施, 这对于指定初值尤其非常必要. 有了初值就可由计算机求得它演化而成的整个时空, 然后就可用所有这些全局性数据反过来求得事件视界, 从而最终确定黑洞.

表观视界虽然比事件视界要局域得多, 但也只是"在时间上局域", 或说"只局域到 Σ_t", 而为取得这种局域性所付出的代价则是把所关心的临界陷俘面限制在 Σ_t 以内, 从而造成表观视界对 Σ_t 的天生敏感性. 正是这种敏感性使得人们原先有过的、用表观视界代替事件视界以推广黑洞热力学的希望遭遇障碍. 为了摆脱这种对分层的依赖性以便推广黑洞热力学定律, Hayward 在 20 世纪 90 年代初期就率先提出了**未来外陷俘视界**(future, outer, trapping horizon, 简记作 FOTH)的概念, 主旨是用 4 维陷俘区代替 Hawking 的 3 维陷俘区, 其边界自然是 3 维面, 这就是 trapping horizon(陷俘边界), 而且(粗略地说)可被临界陷俘面分层. 这一定义的最大特点是无须引入 3 维类空面, 由此带来不少新的研究成果. 这一新视界虽然与演化表观视界有不少相似之处, 但最重要区别是 FOTH 天生就不是分层依赖的. 可以证明, FOTH 不是类光就是类空, 当它为类光时也就是下节将要详述的非涨视界. 直观地可以说, FOTH 在时空的动态区域是类空的(那时有引力辐射和物质场的能动量流穿越这一视界); 在时空逐渐接近平衡态时渐趋类光. FOTH 与事件视界和表观视界相较具有明显优势:它既不像事件视界那样依赖于 $\mathscr{I}^+$ (是准局域的), 又不像表观视界那样依赖于一张类空面 Σ_t. 出于某些考虑, Ashtekar 等对 FOTH 的定义又提出了某些改进(主要是去掉一个条件), 从而成为 Ashtekar 等的动力学视界. 虽然 FOTH 与动力学视界两个定义互不蕴涵, 但两者密切相关. 后来发现两者各有优点, 例如, 后者更有利于研究黑洞动力学.

[选读 16-4-1]

本选读介绍 Hawking and Ellis(1973) 对表观视界的定义.

定义 2 时空中的光滑、闭合、连通、2 维类空子流形 S 称为**外**(outer)**陷俘面**, 若其外向类光法矢场(记作 k^a)有 $\theta_{(k)} \leqslant 0$.

定义 3 部分柯西面 Σ_t 的 3 维子集 X 称为**陷俘区**(trapped region), 若 $\forall p \in X$ 有外陷俘面 S 使 $p \in S \subset \Sigma_t$. 陷俘区可以是个非连通子集, 其每一连通分支的外边界称为一个**表观视界**(apparent horizon).

为了给出表观视界的一个直观例子，我们把图 16-4 的细节画成图 16-7. 这是质量为 M 的星球及质量为 δM 的同心球壳先后坍缩且最后形成黑洞的时空图，其中虚线代表事件视界 $\mathscr{E}$，是 4 维黑洞区 $\mathscr{B}$ 的边界. Σ_{t_1}，Σ_{t_2} 代表先后两个时刻，它们分别与 $\mathscr{E}$ 及 $\mathscr{B}$ 的 4 个交集

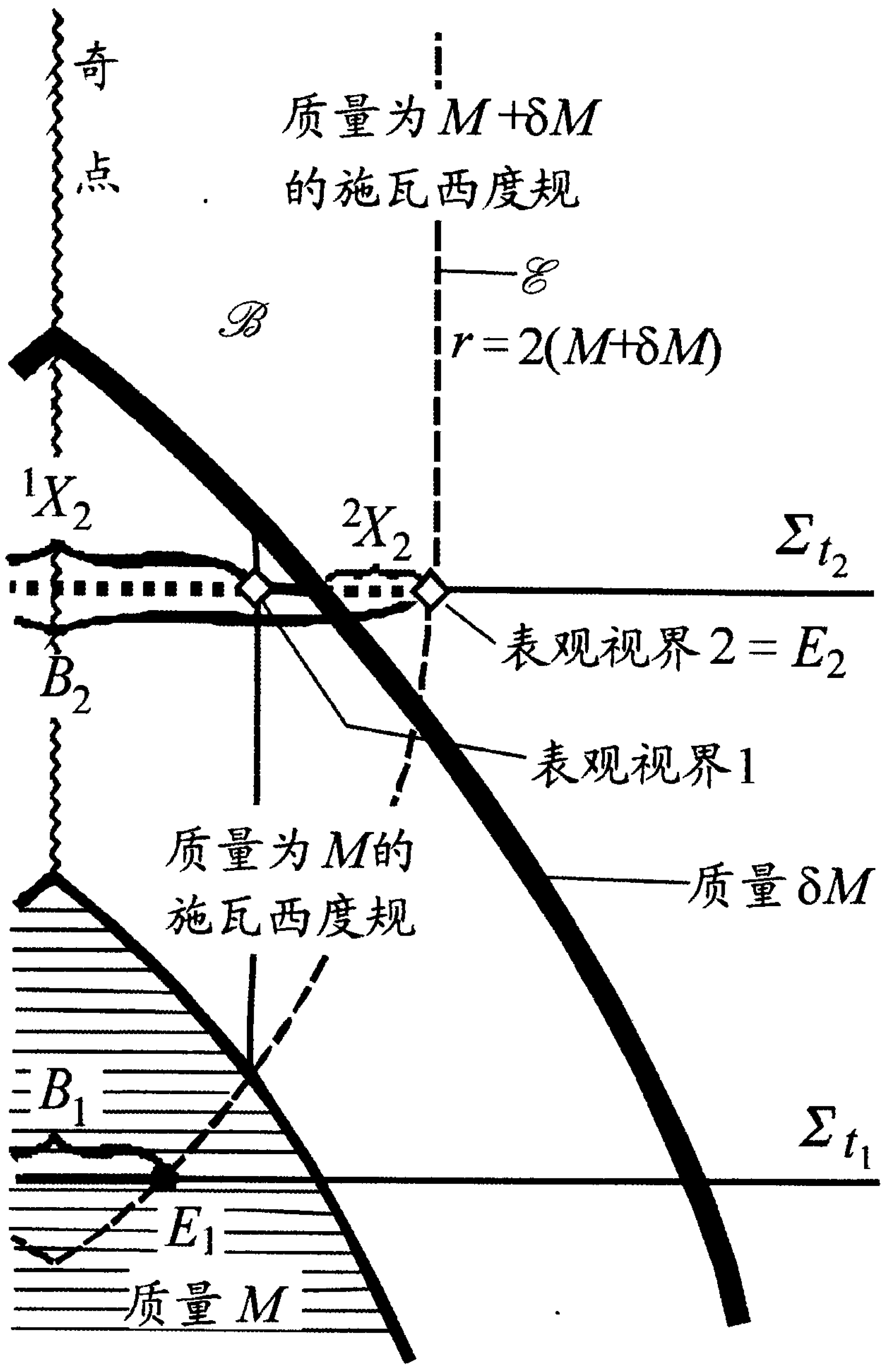


图 16-7　质量为 M 的星球及质量为 δM 的球壳先后坍缩. 时刻 t_1 有黑洞 B_1 而无表观视界，时刻 t_2 既有黑洞 B_2 又有表观视界(因有两个陷俘区 ${}^1X_2 \cup {}^2X_2$)，都含于黑洞区内. 壳与星之间是质量为 M 的施瓦西度规，壳外是质量为 δM 的施瓦西度规

$$E_1 \equiv \mathscr{E} \cap \Sigma_{t_1}, \quad B_1 \equiv \mathscr{B} \cap \Sigma_{t_1}, \quad E_2 \equiv \mathscr{E} \cap \Sigma_{t_2}, \quad B_2 \equiv \mathscr{B} \cap \Sigma_{t_2}$$

就是这两个时刻的视界和黑洞区. 与 Σ_{t_1} 不同，Σ_{t_2} 还有陷俘区 $X_2 = {}^1X_2 \cup {}^2X_2$，它由两个连通分支 ${}^1X_2$ 和 ${}^2X_2$ 组成，每个的外边界就是一个表观视界，所以时刻 t_2 有两个表观视界. (一个位于事件视界 E_2 之内，另一个与 E_2 重合.) 图 16-7 只是一个简单特例. 一般地可以证明[见 Hawking and Ellis(1973) 命题 9.2.1]，从 $\mathscr{I}^+$ 不能看见任何陷俘面(陷俘面所发的光不能到达 $\mathscr{I}^+$). 于是，只要在某时刻 Σ_t 存在表观视界，它就一定位于该时刻的某个黑洞内，该黑洞的事件视界(可能只是该时刻的事件视界的一个连通分支)既可能位于表观视界以外(如图 16-7 的表观视界 1)，也可能与之重合(如图 16-7 的表观视界 2). 因此，表观视界至少在某种意义上代表黑洞的边界.

[选读 16-4-1 完]

§16.5　弱孤立视界及其第零、第一定律

事件视界和Killing视界虽然在传统黑洞热力学中立过许多功劳，然而事件视界的“过分”全局性给非稳态黑洞研究带来诸多不便和制约，Killing视界则由于必须存在满足条件的Killing场而不适用于非稳态黑洞，因此有必要寻找新的视界概念. 从本节起将陆续介绍在非稳态黑洞力学中起关键性作用的弱孤立视界和动力学视界，它们的存在不以时空有Killing矢量场为前提，而且其(准)局域定义性又使它们得以避免由事件视界的“过分”全局性所带来的问题. 本节首先讨论弱孤立视界的定义及其一系列几何性质，然后介绍第零和第一定律. 弱孤立视界(及孤立视界)是满足某些条件的类光超曲面，我们将首先介绍一般类光超曲面的某些性质，然后循序渐进地增加条件使之成为弱孤立视界，具体说就是先讨论条件较低的非涨视界，再介绍弱孤立视界和孤立视界.

16.5.1　非涨视界

定义1　时空(M,g_{ab})的类光超曲面Δ称为**非涨视界**(non-expanding horizon)，若

(a) Δ的拓扑为$S^2\times\mathbb{R}$(即Δ在拓扑上同胚于$S^2\times\mathbb{R}$)；

(b) Δ的每一类光法矢场k^a的膨胀$\hat\theta_{(k)}=0$[此处的$\hat\theta_{(k)}$就是式(16-3-35)的$\hat\theta$]；

(c)所有运动方程(即爱因斯坦方程及有关物质场的运动方程)都在Δ上成立，而且，设k^a是Δ上的任一指向未来类光法矢场，T_{ab}是物质场的能动张量，则$-T^a{}_b k^b$是指向未来的因果矢量(试与中册附录D的主能量条件对比).

与每一不可延类光测地线相交且只交一次的2维类空面$S\subset\Delta$称为非涨视界Δ的**截面**.

注1　先说明定义1的三个条件的引入动机. 条件(a)只为讨论的方便和明确而引入，其实多数几何结论都与Δ的拓扑无关，而在多数物理情况下Δ的拓扑都是$S^2\times\mathbb{R}$. 其次，物理上感兴趣的所有经典物质场都满足条件(c)，而且，只要有一个k^a满足条件(c)中的因果性要求，则重标度后的k'^a也满足. 所以定义1的关键性条件是(b)，它与条件(a)相结合保证Δ的每一截面都是临界陷俘面，而这又导致许多重要结果，下面将展开讨论.

设$k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$是$\Delta$的任一指向未来的类光法矢场，只要约定在某一截面上$\lambda$取零值，则每个等$\lambda$面都是截面，且截面族$\{S_\lambda\}$构成$\Delta$的一个分层. 注意到$\hat\theta_{(k)}=0$[条件(b)]，借助于命题16-4-1便知该族的每一截面有相同面积(暂记作A). 把λ看作某种推迟“时间”(因而k^a代表“时间”的流逝方向)，便可说截面积不随

时间而变，可见非涨视界至少具备稳态时空的事件(Killing)视界“面积不变”的重要特征. (Hawking 的面积定理断言事件视界面积不减，即不变或增大，而后者只对非稳态才可能.) 设 $k'^a=(\partial/\partial\lambda')^a$ 是 Δ 的另一类光法矢场，截面族 $\{S_{\lambda'}\}$ 中的每一截面当然也有相同面积(暂记作 A')，而且不难证明(见 §16.6 注 6) $A'=A$，因而非涨视界 Δ 的任一截面都有相同面积，不妨就称之为**非涨视界 Δ 的面积**，记作 A_Δ，并把

$$R_\Delta \equiv \sqrt{\frac{A_\Delta}{4\pi}} \tag{16-5-1}$$

称为非涨视界 Δ 的**面积半径**(areal radius).

把类光面上的 Raychaudhuri 方程(16-3-36)用于非涨视界 Δ 的任一类光法矢场 k^a，注意到 $\hat\theta_{(k)}=0$，便得

$$\hat\sigma_{ab}\hat\sigma^{ab}+R_{ab}k^a k^b=0\,. \tag{16-5-2}$$

非涨视界条件(c)要求 $-T^a{}_b k^b$ 是指向未来的因果矢量，与中册的命题11-1-1 结合得 $T_{ab}k^b k^a \geqslant 0$，再由爱因斯坦方程便有 $R_{ab}k^a k^b=8\pi T_{ab}k^a k^b \geqslant 0$. 另一方面，$\forall p\in\Delta$，借 $\hat V_p$ 的正交归一标架 $\{\hat E_1^a,\hat E_2^a\}$ 易见

$$\hat\sigma_{ab}\hat\sigma^{ab} \triangleq \hat\sigma_{11}{}^2+2\hat\sigma_{12}{}^2+\hat\sigma_{22}{}^2 \geqslant 0\,,$$

故式(16-5-2)导致 $R_{ab}k^a k^b=0$(因而 $T_{ab}k^a k^b=0$)及 $\hat\sigma_{ab}\hat\sigma^{ab}=0$. 注意到 $-T^a{}_b k^b$ 的物理意义(参见上册 §6.4 并把 k^a 看作 $W^a\equiv -T^a{}_b Z^b$ 从类时逼近类光的极限)，就可把 $T_{ab}k^a k^b=0$ 解释为没有能量和动量流过非涨视界；而 $\hat\sigma_{ab}\hat\sigma^{ab}=0$ 则给出 $\hat\sigma_{ab}=0$，与 $\hat B_{ab}=\hat\theta_{(k)}\hat g_{ab}/2+\hat\sigma_{ab}$ [式(16-3-44)]及 $\hat\theta_{(k)}=0$ 结合又表明非涨视界的每一类光法矢场 k^a 的 $\hat B_{ab}=0$. 另一方面，

$$\hat B_{ab}=\hat B_{(ab)} \mapsto i^*\bar B_{(ab)}=i^*(\nabla_{(a}\bar k_{b)})=\frac{1}{2}i^*(\mathscr{L}_k g_{ab})=\frac{1}{2}\mathscr{L}_k(i^* g_{ab})=\frac{1}{2}\mathscr{L}_k h_{ab}\,, \tag{16-5-3}$$

[其中第一步是因为 $\hat B_{[ab]}=\hat\omega_{ab}=0$，第二步用到式(16-3-40)，第三步用到式(16-3-26a)，第四步的证明与定理 4-3-1(Killing 方程)的证明一样，第五步用到式(16-3-10).] 式(16-5-3)与 $\hat B_{ab}=0$ 结合给出

$$\mathscr{L}_k h_{ab}=0\,. \tag{16-5-4}$$

可见非涨视界 Δ 上的内禀“度规” h_{ab} 不随“时间”而变(h_{ab} 不依赖于时间). 刚才已讲过非涨视界的面积不随时间而变，现在又有 $\mathscr{L}_k h_{ab}=0$，这从两个侧面表明非涨视界具有稳态时空的 Killing 视界的一些重要性质，在这个意义上可以物理地认为非涨视界处于某种平衡态中. 总之，定义 1 的条件虽然比 Killing 视界宽松得多

[Lewandowski(2000) 给出了存在非涨视界的非稳态时空(无 Killing 视界)的例子], 但仍然足以保证非涨视界具有不少与 Killing 视界类似的简单性质.

为简化表达式, Ashtekar, Fairhurst, and Krishnan(2000) 用下标 $\underleftarrow{a}$ 代表对下标 a 的拉回, 例如用 $g_{\underleftarrow{ab}}$ 简记拉回 i^*g_{ab}. 本章以下也用这一记号, 只因下标 ab 的下箭头在本书的排版中不够清晰, 我们把 $g_{\underleftarrow{ab}}$ 改记作 $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$. 于是 $\mathscr{L}_k h_{ab}=0$ 可表为 $\mathscr{L}_k g_{\tilde{a}\tilde{b}}=0$, 而 $\hat{B}_{ab}\mapsto i^*\bar{B}_{ab}=i^*(\nabla_a\bar{k}_b)$ 则可记作 $\hat{B}_{ab}\mapsto\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}_{\tilde{b}}$, 所以非涨视界的性质 $\hat{B}_{ab}=0$ 可以表为 $\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}_{\tilde{b}}=0$ (请记住拉回就是限制).

小结 除了面积不变和 $\mathscr{L}_k h_{ab}\doteq 0$ 外, 非涨视界的定义还保证它有两个好性质:

$$(1)\ R_{ab}k^a k^b=0;\qquad (2)\ \nabla_{\tilde{a}}\bar{k}_{\tilde{b}}=0. \tag{16-5-5}$$

性质(1)表明 $R^a{}_b k^b$ 切于 Δ. 从定义 1 条件(c)又已证明 $R^a{}_b k^b$ 是因果矢量(若非类时就是类光), 而由中册的推论 11-1-2(1) 知道切于类光超曲面的矢量不能类时, 故 $R^a{}_b k^b$ 只能类光, 再由推论 11-1-2(2) 又知类光超曲面上任一点的、切于该面的类光矢量只能是类光法矢, 所以 $R^c{}_b k^b=\beta k^c$ (其中 β 是 Δ 上的实值函数), 以 g_{ac} 缩并便得

$$R_{ab}k^b=\beta k_a. \tag{16-5-6}$$

上式用于任一 $p\in\Delta$ 是 V_p 上的余矢等式, 取下标 a 的限制(拉回)可得 $\tilde{V}_p$ 上的余矢等式 $R_{\tilde{a}b}k^b=\beta k_{\tilde{a}}$, 再用上 $k_{\tilde{a}}=0$ [即式(16-3-18)]又得

$$R_{\tilde{a}b}k^b=0. \tag{16-5-7}$$

上式中带着不伦不类下标的 $R_{\tilde{a}b}$ 是一种特别的张量, 它是双线性映射 $R_{\tilde{a}b}$: $\tilde{V}_p\times V_p\to\mathbb{R}$, 不同于拉回 $i^*R_{ab}:\tilde{V}_p\times\tilde{V}_p\to\mathbb{R}$, 但可用"限制"一词描述: $R_{\tilde{a}b}$ 是把(且仅把) R_{ab} 的第一个下标的作用范围限制在 $\tilde{V}_p\subset V_p$ 的产物. 在 Ashtekar 等的文献(及本章)中经常用到这种"不伦不类"的张量, 例如 $R_{\tilde{a}\tilde{b}c}{}^d$.

在含 Δ 的 4 维开集 U 上建立局域 NP 标架场 $\{m^a,\bar{m}^a,l^a,\bar{k}^a\}$, 其中 m^a, $\bar{m}^a$ 切于 Δ, $\bar{k}^a$ 是 k^a 的任一类光测地延拓(请注意 $\bar{k}^a$ 与 $\bar{m}^a$ 的上横杠含义完全不同), 则利用上册式 (8-7-11) 可把式 (16-5-6) 同 (16-5-7) 的结合用 NP 形式等价地表为(符号 $\triangleq$ 代表"在 Δ 上等于")

$$\Phi_{00}\equiv\frac{1}{2}R_{ab}\bar{k}^a\bar{k}^b\triangleq 0,\qquad \Phi_{10}=\bar{\Phi}_{01}\equiv\frac{1}{2}R_{ab}\bar{k}^a\bar{m}^b\triangleq\frac{1}{2}\beta k_b\bar{m}^b=0. \tag{16-5-8}$$

再看非涨视界性质(2)(即 $\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}_{\tilde{b}}=0$)的结果. 第一个重要结果是它保证 g_{ab} 的适配导数算符 ∇_a 可在 Δ 上诱导出唯一的、与 h_{ab} 适配(指 $\mathscr{D}_a h_{bc}=0$)的无挠导数算符

$$\mathscr{D}_a : \mathscr{T}_\Delta(k,l) \to \mathscr{T}_\Delta(k,l+1),$$

其中$\mathscr{T}_\Delta(k,l)$代表Δ上"切于"Δ的(k,l)型光滑张量场的集合. 定义$\mathscr{D}_a$的基本思路是:先用Δ上的外微分算符d定义Δ上标量场f的导数, 即$\mathscr{D}_a f := (\mathrm{d}f)_a$, 再设法定义$\Delta$上"切于"$\Delta$的矢量场$u^b$和余矢场$\mu_b$的导数, 最后用莱布尼茨律把$\mathscr{D}_a$的作用对象拓展到$\Delta$上"切于"$\Delta$的任意型张量场. 下面依次介绍$\mathscr{D}_a u^b$和$\mathscr{D}_a \mu_b$的定义.

设v^a, u^b是Δ上的、切于Δ的矢量场, 则虽然$\nabla_a u^b$无定义, 但因$v^a\nabla_a$代表沿Δ切向求导, $v^a\nabla_a u^b$有意义. [具体计算时也可以先取u^b和v^a的任意延拓$\bar{u}^b$和$\bar{v}^a$, 求出$(\bar{v}^a\nabla_a \bar{u}^b)|_\Delta$后也就是$v^a\nabla_a u^b$.] 假若$\Delta$只是类光超曲面而不是非涨视界, 则$v^a\nabla_a u^b$虽是$\Delta$上的矢量场, 却未必切于$\Delta$, 这是因为

$$k_b(v^a\nabla_a u^b) = v^a\nabla_a(k_b u^b) - v^a u^b \nabla_a k_b = -v^a u^b \nabla_{\tilde{a}} k_{\tilde{b}}$$

未必为零. 然而非涨视界Δ的好性质$\nabla_{\tilde{a}} k_{\tilde{b}} = 0$恰恰保证上式右边为零, 故$v^a\nabla_a u^b$切于$\Delta$, 于是就可用下式定义$v^a\mathscr{D}_a u^b$:

$$v^a\mathscr{D}_a u^b := v^a\nabla_a u^b = (\bar{v}^a\nabla_a \bar{u}^b)|_\Delta. \tag{16-5-9}$$

虽然上式只定义了$v^a\mathscr{D}_a$(而不是$\mathscr{D}_a$自身)对u^b的作用, 但从$v^a\mathscr{D}_a u^b(\forall v^a)$可以求得$\mathscr{D}_a u^b$, 这是因为$\mathscr{D}_a u^b$是个(1,1)型张量, 它是把矢量变为矢量的映射("张量面面观"), 而$v^a\mathscr{D}_a u^b$正是$\mathscr{D}_a u^b$作用于任一矢量v^a所得的矢量, 所以有了$v^a\mathscr{D}_a u^b(\forall v^a)$便有$\mathscr{D}_a u^b$. 类似地, 欲定义$\mathscr{D}_a$对任意"切于"$\Delta$的余矢场$\mu_b$的作用只须定义$v^b\mathscr{D}_a\mu_b(\forall v^b)$, 而这可借莱布尼茨律自然定义为

$$v^b\mathscr{D}_a\mu_b := \mathscr{D}_a(\mu_b v^b) - \mu_b\mathscr{D}_a v^b, \quad \forall \text{切于}\Delta\text{的} v^b. \tag{16-5-10}$$

现在说明如何把$v^a\mathscr{D}_a u^b$和$v^b\mathscr{D}_a\mu_b$中的v^a甩掉. 由于$\bar{u}^b$是u^b的延拓(定义域从3维的Δ拓展为4维的U), 所以$\forall p\in\Delta$有$u^b|_p\in\tilde{V}_p$, $\bar{u}^b|_p\in V_p$. 但因$\tilde{V}_p\subset V_p$, 也可以说$u^b|_p\in V_p$, 于是可以写出等式$u^b|_p=\bar{u}^b|_p$, 因而有$u^b=\bar{u}^b|_\Delta$. 然而, μ_b的情况却有所不同:以$\bar{\mu}_b$代表满足$i^*\bar{\mu}_b=\mu_b$的余矢场, 则$\mu_b|_p\in(\tilde{V}_p)^*$, $\bar{\mu}_b|_p\in V_p{}^*$, 而$(\tilde{V}_p)^*$与$V_p{}^*$并无包含关系, 所以$\mu_b|_p\neq\bar{\mu}_b|_p$, 只有把$\bar{\mu}_b|_p$拉回后才等于$\mu_b|_p$, 即$\mu_b|_p=(i^*\bar{\mu}_b)|_p$, 于是

$$\mathscr{D}_a\mu_b = \mathscr{D}_a(i^*\bar{\mu}_b) = i^*(\nabla_a\bar{\mu}_b) \equiv \nabla_{\tilde{a}}\bar{\mu}_{\tilde{b}}.$$

[其中第二步用到$\mathscr{D}_a\circ i^* = i^*\circ\nabla_a$(证明见稍后的选读16-5-1).] 这就是$v^b\mathscr{D}_a\mu_b$在甩掉$v^b$后的表达式.

为甩掉$v^a\mathscr{D}_a u^b$中的v^a则还要引入符号$\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b$. $(\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b)|_p$是$p$点的一个特别张量, 它是双线性映射$\tilde{V}_p\times V_p{}^*\to\mathbb{R}$, 其下标的作用范围被限制在$\tilde{V}_p$(而不是全$V_p$),

即只能与切于 Δ 的矢量缩并. 由限制的定义[仿式(5-2-7)]便有

$$v^a\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b=(\bar{v}^a\nabla_a\bar{u}^b)|_\Delta,$$

于是式(16-5-9)可改写为

$$v^a\mathscr{D}_a u^b=v^a\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b,\quad \forall\text{ 切于 }\Delta\text{ 的矢量场 }v^a,$$

从而就可甩掉 v^a 而写成 $\mathscr{D}_a u^b=\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b$. 以上两个结果可统一写成下式[见 Ashtekar, Fairhurst and Krishnan(2000)]:

$$\text{(a) }\mathscr{D}_a u^b=\nabla_{\tilde{a}}\bar{u}^b,\qquad \text{(b) }\mathscr{D}_a\mu_b=\nabla_{\tilde{a}}\bar{\mu}_{\tilde{b}}.\tag{16-5-11}$$

再者, 由 $\mathscr{D}_a h_{bc}=\mathscr{D}_a(i^*g_{bc})=i^*(\nabla_a g_{bc})=0$ 可知 $\mathscr{D}_a$ 的确与 h_{ab} 相适配. 最后, $\mathscr{D}_a$ 无挠性的证明留做习题(有提示).

非涨视界性质(2)的第二个重要结果是可在 Δ 上定义一个很有用的余矢场. 由 $\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}_{\tilde{b}}=0$ 得

$$u^b v^a\nabla_a k_b=u^b v^a\nabla_{\tilde{a}}k_{\tilde{b}}=0,\quad \forall\text{切于 }\Delta\text{ 的矢量场 }v^a,u^b,$$

表明 $v^a\nabla_a k_b$ 正交于 Δ 的任一切矢场, 故与 k_b 只能差到一个函数因子, 于是 Δ 上有标量场 $\varsigma_{(v)}$ 使

$$v^a\nabla_a k_b=\varsigma_{(v)}k_b.\tag{16-5-12}$$

既然给定一个 v^a 就有一个 $\varsigma_{(v)}$, 便存在把矢量场 v^a 变为标量场 $\varsigma_{(v)}$ 的映射 $\omega: v\mapsto\varsigma_{(v)}$, 而且它在 Δ 的每点都有线性性, 故 ω 是 Δ 上的"切于" Δ 的余矢场, 应记作 ω_a, 满足

$$v^a\omega_a=\varsigma_{(v)}.\tag{16-5-13}$$

于是

$$v^a\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}^b=v^a\nabla_a k^b=\varsigma_{(v)}k^b=v^a\omega_a k^b.\tag{16-5-14}$$

又因上式对切于 Δ 的任一 v^a 都成立, 故

$$\nabla_{\tilde{a}}\bar{k}^b=\omega_a k^b.\tag{16-5-15}$$

借助于式(16-5-11a)又可改写上式为

$$\mathscr{D}_a k^b=\omega_a k^b.\tag{16-5-16}$$

请注意 ω_a 天生就是对 Δ 上的某一选定类光法矢场 k^a 定义的, 换一 k^a 原则上就有另一 ω_a, 只因 ω_a 带着抽象下标 a 而不便再加下标(k). 不难证明当 k^a 重标度为

$k'^a = \alpha k^a$ 时 ω_a 服从

$$\omega_a \mapsto \omega'_a = \omega_a + \mathrm{d}_a \ln\alpha . \quad (\mathrm{d}_a\text{是}\,\Delta\,\text{上的外微分算符}) \tag{16-5-17}$$

式(16-5-15)同(16-3-24)结合还给出表面引力 $\kappa_{(k)}$ 用 ω_a 的简单表达式

$$\kappa_{(k)} = k^a \omega_a . \tag{16-5-18}$$

(M, g_{ab}) 的黎曼张量 $R_{abc}{}^d$ 可分为有迹部分 R_{ab} 和无迹部分 $C_{abc}{}^d$ (外尔张量). R_{ab} 在 Δ 上诱导出 $R_{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv i^* R_{ab}$，满足 $R_{\tilde{a}\tilde{b}} k^b = R_{\tilde{a}b} k^b = 0$ [式(16-5-7)]；$C_{abc}{}^d$ 在 Δ 上诱导出 $C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}{}^d$，与 Δ 上的 $\mathscr{D}_a$ 及 ω_a 有如下密切关系：

命题 16-5-1 $$2k^c \mathscr{D}_{[a}\omega_{b]} = -C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c k^d . \tag{16-5-19}$$

证明 任取切于 Δ 的矢量场 v^a, u^b，以 $\bar{v}^a, \bar{u}^b$ 及 $\bar{k}^a$ 分别代表 v^a, u^b 及 k^a 的任意延拓，则由莱布尼茨律得

$$v^a u^b (\mathscr{D}_a \mathscr{D}_b k^c) = v^a \mathscr{D}_a (u^b \mathscr{D}_b k^c) - (v^a \mathscr{D}_a u^b) \mathscr{D}_b k^c . \tag{16-5-20}$$

令 $w^c \equiv u^b \mathscr{D}_b k^c$，则

$$v^a \mathscr{D}_a (u^b \mathscr{D}_b k^c) = v^a \mathscr{D}_a w^c = (\bar{v}^a \nabla_a \bar{w}^c)|_\Delta , \tag{16-5-21}$$

其中第二步用到式(16-5-9). 由式(16-5-9)又知 $(\bar{u}^b \nabla_b \bar{k}^c)|_\Delta = u^b \mathscr{D}_b k^c = w^c$，可见 $\bar{u}^b \nabla_b \bar{k}^c$ 是 w^c 的一个延拓，可充当式(16-5-21)中的 $\bar{w}^c$，代入式(16-5-21)便知式(16-5-20)右边第一项可表为

$$v^a \mathscr{D}_a (u^b \mathscr{D}_b k^c) = [\bar{v}^a \nabla_a (\bar{u}^b \nabla_b \bar{k}^c)]_\Delta . \tag{16-5-22}$$

再令 $z^b \equiv v^a \mathscr{D}_a u^b$，则容易验证 $\bar{v}^a \nabla_a \bar{u}^b$ 是 z^b 的延拓，记作 $\bar{z}^b$ 后便可把式(16-5-20)右边第二项表为

$$-(v^a \mathscr{D}_a u^b) \mathscr{D}_b k^c = -z^b \mathscr{D}_b k^c = -(\bar{z}^b \nabla_b \bar{k}^c)|_\Delta = -[(\bar{v}^a \nabla_a \bar{u}^b) \nabla_b \bar{k}^c]_\Delta , \tag{16-5-23}$$

其中第二步用到式(16-5-9). 将式(16-5-22)和(16-5-23)代入(16-5-20)得

$$v^a u^b (\mathscr{D}_a \mathscr{D}_b k^c) = [\bar{v}^a \nabla_a (\bar{u}^b \nabla_b \bar{k}^c) - \bar{v}^a (\nabla_a \bar{u}^b) \nabla_b \bar{k}^c]_\Delta = (\bar{v}^a \bar{u}^b \nabla_a \nabla_b \bar{k}^c)|_\Delta ,$$

于是

$$\begin{aligned} 2v^a u^b (\mathscr{D}_{[a} \mathscr{D}_{b]} k^c) &= 2(\bar{v}^a \bar{u}^b \nabla_{[a} \nabla_{b]} \bar{k}^c)|_\Delta = -(\bar{v}^a \bar{u}^b R_{abd}{}^c \bar{k}^d)|_\Delta = -(\bar{v}^a \bar{u}^b g^{ce} R_{abde} \bar{k}^d)|_\Delta \\ &= -[\bar{v}^a \bar{u}^b g^{ce} C_{abde} \bar{k}^d + \bar{v}^a \bar{u}^b g^{ce} (g_{a[d} R_{e]b} - g_{b[d} R_{e]a} - \frac{1}{3} R g_{a[d} g_{e]b}) \bar{k}^d]_\Delta \\ &= -(\bar{v}^a \bar{u}^b g^{ce} C_{abde} \bar{k}^d)|_\Delta = -v^a u^b C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c k^d , \end{aligned} \tag{16-5-24}$$

[其中第四步用到 C_{abde} 的定义式(3-4-14)，第五步是因为第四个等号后的长式中圆括号内的三项分别为零，证明为零时屡屡用到 $R_{db}|_\Delta k^d = \beta k_b$，$v^a k_a = 0$ 及 $u^a k_a = 0$.] 鉴于 v^a 和 u^b 的任意性，便有

$$2\mathscr{D}_{[a}\mathscr{D}_{b]}k^c = -C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c k^d . \tag{16-5-25}$$

而由 $\mathscr{D}_b k^c = \nabla_{\tilde{b}} \tilde{k}^c = \omega_b k^c$ 得

$$\mathscr{D}_a \mathscr{D}_b k^c = \mathscr{D}_a(\omega_b k^c) = \omega_b \mathscr{D}_a k^c + k^c \mathscr{D}_a \omega_b = \omega_b \omega_a k^c + k^c \mathscr{D}_a \omega_b ,$$

故 $-C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c k^d = 2\mathscr{D}_{[a}\mathscr{D}_{b]}k^c = 2k^c \mathscr{D}_{[a}\omega_{b]}$. □

设 v^a 是切于 Δ 的任一矢量场，则用 $v_c \equiv g_{ac}v^a$ 缩并式(16-5-19)易得

$$C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c v_c k^d = 0 . \tag{16-5-26}$$

下面要涉及外尔张量在NP标架的前4个分量，它们由式(8-7-10)定义：

$$\Psi_0 \equiv C_{abcd}\bar{k}^a m^b \bar{k}^c m^d , \quad \Psi_1 \equiv C_{abcd}\bar{k}^a l^b \bar{k}^c m^d , \quad \Psi_3 \equiv C_{abcd} l^a \bar{k}^b l^c \bar{m}^d , \tag{16-5-27}$$

$$\Psi_2 \equiv \frac{1}{2} C_{abcd}(\bar{k}^a l^b \bar{k}^c l^d - \bar{k}^a l^b m^c \bar{m}^d) . \tag{16-5-28}$$

由式(16-5-27)得

$$\Psi_0 = \bar{k}^a m^b C_{abdc} m^c \bar{k}^d \triangleq k^a m^b C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c m_c k^d = 0 ,$$

[其中最末一步是把 m_c 看作式(16-5-26)的 v_c .] 利用 C_{abcd} 的无迹性

$$0 = g^{bc} C_{abcd} = (m^b \bar{m}^c + \bar{m}^b m^c - \bar{k}^b l^c - l^b \bar{k}^c) C_{abcd} \tag{16-5-29}$$

则可把 Ψ_1 化为

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= C_{abcd}\bar{k}^a m^d (m^b \bar{m}^c + \bar{m}^b m^c - \bar{k}^b l^c) = C_{abcd}\bar{k}^a m^b \bar{m}^c m^d \\ &= C_{abdc}\bar{m}^a m^b m^c \bar{k}^d \triangleq \bar{m}^a m^b C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d}}{}^c m_c k^d = 0 ,\end{aligned}$$

[其中第二、三步用到 $C_{abcd} = -C_{abdc} = -C_{bacd} = C_{cdab}$，最末一步用到式(16-5-26).] 于是

$$\text{(a)}\,\Psi_0 \triangleq 0 , \qquad \text{(b)}\,\Psi_1 \triangleq 0 . \tag{16-5-30}$$

再用 C_{abcd} 的无迹性和 $C_{abcd} = -C_{abdc} = -C_{bacd} = C_{cdab}$ 及 $C_{[abc]d} = 0$ 又可把 Ψ_2 改写为

$$\Psi_2 = C_{abcd}\bar{k}^a m^b \bar{m}^c l^d . \tag{16-5-31}$$

如前所述，“h_{ab} 不变”和“面积不变”是反映非涨视界处于平衡态的两个侧面. “h_{ab} 不变”的微分表达式是 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$ [式(16-5-4)]. 虽然 h_{ab} 作为 Δ 上的张量场是退化的，但它在任一截面 S 的限制却是 g_{ab} 在 S 上的诱导度规(为明确起见记作

q_{ab}), 描述 S 上的 2 维黎曼几何. 由 $k^a = (\partial/\partial\lambda)^a$ 所决定的截面族 $\{S_\lambda\}$ 构成 Δ 的一个分层, $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$ 表明各层的度规 q_{ab} 不随 λ ("时间")而变. 至于"面积不变", 命题16-4-1只给出一个积分表达式(16-4-1), 而且证明时用的是坐标语言. 其实"面积不变"的结论也可表为一个与 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$ 非常类似的微分几何表达式, 即 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0$, 其中 ε_{ab} 是 Δ 上的(3 维) 2 形式场, 而命题16-4-1中的 $\varepsilon_{ab}(\lambda)$ 则是现在这个 ε_{ab} 在截面 S_λ 上的限制. 设 $\{m^a, \bar{m}^a, l^a, \bar{k}^a\}$ 是本节一直在用的 NP 标架场, 则后面[见命题 16-6-1 和 16-6-2(2)]将证明

$$\varepsilon_{ab} = \mathrm{i}\,\bar{m}_{\tilde{a}} \wedge m_{\tilde{b}} \tag{16-5-32}$$

的确满足 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0$, 而且在 Δ 的任一截面 (S, q_{ab}) 上的限制正是与 q_{ab} 适配的面元. 利用这个 ε_{ab} 就可证明对推广黑洞热力学第零定律至关紧要的如下命题:

命题 16-5-2
$$(\mathrm{d}\omega)_{ab} = -2\,\mathrm{Im}(\Psi_2\,|_\Delta)\varepsilon_{ab}\,. \tag{16-5-33}$$

证明　以 l_c 缩并式(16-5-19), 注意到 $k^a l_a = -1$, 得

$$2\mathscr{D}_{[a}\omega_{b]} = C_{\tilde{a}\tilde{b}d}{}^c k^d l_c = C_{\tilde{a}\tilde{b}cd} k^c l^d\,. \tag{16-5-34}$$

令 $Y_{ab} \equiv C_{abcd}\bar{k}^c l^d$, 则 $Y_{\tilde{a}\tilde{b}} = C_{\tilde{a}\tilde{b}cd} k^c l^d$ 是"切于" Δ 的 2 形式场. 4 标架场 $\{m^a, \bar{m}^a, l^a, \bar{k}^a\}$ 在 Δ 上诱导出切于 Δ 的 3 标架场

$$\{\varepsilon_1^a \equiv m^a\,|_\Delta\,,\ \varepsilon_2^a \equiv \bar{m}^a\,|_\Delta\,,\ \varepsilon_4^a \equiv k^a\}\,, \tag{16-5-35}$$

利用 $l_{\tilde{a}} k^a = l_a k^a = -1$ 及 $k_{\tilde{a}} \equiv i^* k_a = 0$ [式(16-3-18)]不难验证其对偶标架场为

$$\{\varepsilon_{\tilde{a}}^1 \equiv \bar{m}_{\tilde{a}}\,,\ \varepsilon_{\tilde{a}}^2 \equiv m_{\tilde{a}}\,,\ \varepsilon_{\tilde{a}}^4 \equiv -\,l_{\tilde{a}}\}\,, \tag{16-5-36}$$

将 $Y_{\tilde{a}\tilde{b}}$ 用此对偶标架场按上册式(5-1-6)展开为

$$\begin{aligned} Y_{\tilde{a}\tilde{b}} &= Y_{12}\,|_\Delta\, \varepsilon_{\tilde{a}}^1 \wedge \varepsilon_{\tilde{b}}^2 + Y_{14}\,|_\Delta\, \varepsilon_{\tilde{a}}^1 \wedge \varepsilon_{\tilde{b}}^4 + Y_{24}\,|_\Delta\, \varepsilon_{\tilde{a}}^2 \wedge \varepsilon_{\tilde{b}}^4 \\ &= 2(Y_{12}\,|_\Delta\, \bar{m}_{[\tilde{a}} m_{\tilde{b}]} - Y_{14}\,|_\Delta\, \bar{m}_{[\tilde{a}} l_{\tilde{b}]} - Y_{24}\,|_\Delta\, m_{[\tilde{a}} l_{\tilde{b}]})\,, \end{aligned} \tag{16-5-37}$$

利用 C_{abcd} 的对称性易得 $Y_{14} = -\Psi_1$, $Y_{24} = -\bar{\Psi}_1$, 故由式(16-5-30b)得 $Y_{14}\,|_\Delta = Y_{24}\,|_\Delta = 0$. 再用式(16-5-28)又可证明 $Y_{12} = -\,2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\Psi_2)$, 于是

$$C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} k^c l^d = Y_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\,4\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\Psi_2\,|_\Delta)\bar{m}_{[\tilde{a}} m_{\tilde{b}]} = -\,2\,\mathrm{Im}(\Psi_2\,|_\Delta)\,\varepsilon_{ab}\,, \tag{16-5-38}$$

与式(16-5-34)结合便得 $2\mathscr{D}_{[a}\omega_{b]} = -\,2\,\mathrm{Im}(\Psi_2\,|_\Delta)\,\varepsilon_{ab}$, 此即待证的式(16-5-33). □

注 2　式(16-5-33)中的 $\Psi_2\,|_\Delta$ 依赖于标架. 从原则上说, 换一标架就有另一 $\Psi_2'\,|_\Delta$, 试问式(16-5-33)又如何能成立?答案是: $\Psi_2\,|_\Delta$ 在标架变换下有不变性(规范不变性), 即 $\Psi_2'\,|_\Delta = \Psi_2\,|_\Delta$. 为证此结论, 首先注意 NP 标架的、保持 k^a 方向(或使 k^a 反

向)的最一般变换式为[见 Kramer et al. (1980)式(3. 18)]

$$\bar{k}'^a = f\bar{k}^a,\quad m'^a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(m^a + f\bar{a}\bar{k}^a),\quad \bar{m}'^a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(\bar{m}^a + fa\bar{k}^a),$$
$$l'^a = am^a + \bar{a}\bar{m}^a + f^{-1}l^a + f|a|^2\,\bar{k}^a, \tag{16-5-39}$$

其中 f 和 θ 是标架定义域 U 上的实函数，a 是 U 上的复函数. 利用 C_{abcd} 的对称性及无迹性不难证明 Ψ_2 在上述标架变换下按下式变换：

$$\Psi_2' = \Psi_2 + f^2a^2\Psi_0 + 2fa\Psi_1. \tag{16-5-40}$$

再由 $\Psi_0 \triangleq 0 \triangleq \Psi_1$ 便得 $\Psi_2' \triangleq \Psi_2$.

注 3 满足 $\mathrm{Im}(\Psi_2)\triangleq 0$ 的视界称为**无转动(non-rotating)视界**.

[选读 16-5-1]

命题 16-5-3 设 $\tilde{\mu}_{b_1\cdots b_l}$ 及 $\mu_{b_1\cdots b_l}$ 为非涨视界 Δ 的某邻域 U 上的 $(0,l)$ 型张量场，$\tilde{\mu}_{b_1\cdots b_l} = i^*\mu_{b_1\cdots b_l}$ (其中 $i:\Delta\to M$ 是包含映射), 则

$$\mathscr{D}_a\tilde{\mu}_{b_1\cdots b_l} = i^*(\nabla_a\mu_{b_1\cdots b_l}),\quad 即\ \mathscr{D}_a\circ i^* = i^*\circ\nabla_a. \tag{16-5-41}$$

证明 当 $l=0$ 时显然. 下面先证明 $l=1$ 时成立, 即证明 $\mathscr{D}_a\tilde{\mu}_b = i^*(\nabla_a\mu_b)$. 设 v^a, u^b 是 Δ 上切于 Δ 的矢量场, $\bar{v}^a, \bar{u}^b$ 分别是它们在 U 上的延拓, 则

$$u^bv^a\mathscr{D}_a\tilde{\mu}_b = v^a\mathscr{D}_a(u^b\tilde{\mu}_b) - \tilde{\mu}_bv^a\mathscr{D}_au^b = [\bar{v}^a\nabla_a(\bar{u}^b\mu_b) - \mu_b\bar{v}^a\nabla_a\bar{u}^b]_\Delta$$
$$= (\bar{u}^b\bar{v}^a\nabla_a\mu_b)|_\Delta = (i_*u^b)(i_*v)^a\nabla_a\mu_b = u^bv^ai^*(\nabla_a\mu_b),$$

其中第一、三步用到莱布尼茨律, 第二步用到式(16-5-9), 即 $v^a\mathscr{D}_au^b = (\bar{v}^a\nabla_a\bar{u}^b)|_\Delta$. 注意到 v^a, u^b 的任意性, 便知 $\mathscr{D}_a\tilde{\mu}_b = i^*(\nabla_a\mu_b)$. $l>1$ 的证明与 $l=1$ 的情况类似, 只是第一个等号后的第二项换成 l 项之和. □

[选读 16-5-1 完]

16.5.2 弱孤立视界和孤立视界

非涨视界 Δ 的重要特征是 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$. 为了得到第零和第一定律, 还要对联络 $\mathscr{D}_a$ 追加额外条件 $\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a k^b = 0$ (其意义将在稍后阐明). 满足此条件的非涨视界称为弱孤立视界. 为给出准确定义还应注意一点：类光面 Δ 上虽有无数类光法矢场 k^a (差到一个函数因子), 但只要有一个满足 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$, 其他 k^a 也必定满足. [证明留做习题. 提示：①仿照式(16-5-3)后几步的推导得 $\mathscr{L}_{\alpha k}h_{ab} = 2i^*[\nabla_{(a}(\bar{\alpha}\bar{k}_{b)})]$ (适用于任意类光面, 其中 $\bar{\alpha}$ 是 α 的任意延拓)；② $i^*\bar{k}_b = 0$.] 然而并非所有 k^a 都能满足额外条件 $\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a k^b = 0$ 的, 因此谈及弱孤立视界时还要指明用哪一个 k^a. 不过, 只要某 k^a 满足 $\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a k^b = 0$, 则 $k'^a = ck^a$ (其中 c 为常数)也满足, 所以不如把与 k^a 只差到一个

常数正因子c的所有法矢场称为一个等价类，记作$[k]$，并说弱孤立视界是指一个非涨视界Δ以及其上某个等价类$[k]$的二元组$(\Delta,[k])$.

由于$\mathscr{L}_k k^b=0$，额外条件$\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a k^b=0$等价于

$$(\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a-\mathscr{D}_a\mathscr{L}_k)k^b=0\,. \tag{16-5-42}$$

把上式的k^b放宽为切于Δ的任意矢量场v^b得

$$(\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a-\mathscr{D}_a\mathscr{L}_k)v^b=0,\quad \forall\text{切于}\Delta\text{的矢量场}v^b\,. \tag{16-5-43}$$

满足这一加强条件的弱孤立视界就称为孤立视界. 为了理解以上两式的物理含义，先讨论任意时空(M,g_{ab})的Killing场ξ^a. 设ξ^a产生的单参等度规族为$\{\phi_t: M\to M\}$，注意到$\phi_t{}^*g_{ab}=g_{ab}$，由式(8-10-15)得

$$\nabla_a(\phi_t{}^*T)=\phi_t{}^*(\nabla_a T),\quad \forall\text{张量场}T\,. \tag{16-5-44}$$

令T为任一矢量场v^a，则由李导数定义不难看出上式等价于

$$(\mathscr{L}_\xi\nabla_a-\nabla_a\mathscr{L}_\xi)v^b=0,\quad \forall\text{矢量场}v^b, \tag{16-5-45}$$

也可以说上式是$\nabla_a(\phi_t{}^*v^b)=\phi_t{}^*(\nabla_a v^b)$的微分形式. 式(16-5-44)也可改写为抽象形式$\nabla_a\phi_t{}^*=\phi_t{}^*\nabla_a$，它表明：先沿$\xi^a$的积分曲线移动再求导等效于先求导再移动. 于是，当ξ^a类时(因而其积分曲线可代表某种时间的流逝)时便可说∇_a有时间平移不变性，或说不依赖于时间. 反观式(16-5-43)，发现它很像式(16-5-45)，但有一重要区别：由于Δ上没有度规，虽然k^a像ξ^a，但不能说k^a是Δ上的Killing场. 然而，只要认为类光的k^a的积分曲线也代表某种“推迟时间”的流逝[见式(16-5-1)所在段，借此曾把$\mathscr{L}_k h_{ab}=0$解释为内禀“度规”不依赖于时间]，就可说式(16-5-43)的物理意义是$\mathscr{D}_a$不依赖于时间. 作为式(16-5-43)的弱化形式，式(16-5-42)没有这样清晰的物理解释，但不妨说它代表$\mathscr{D}_a$“沿k^b的分量”不依赖于时间(虽然“$\mathscr{D}_a$的分量”是个很不确切的提法). 在此基础上就有如下的准确定义：

定义2　非涨视界Δ与其上类光法矢场的一个等价类$[k]$的二元组$(\Delta,[k])$称为**弱孤立视界**(weakly isolated horizon)，若$[k]$中的每一k^a满足式(16-5-42)；$(\Delta,[k])$称为**孤立视界**，若$[k]$中的每一k^a满足式(16-5-43).

又因为

$$(\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a-\mathscr{D}_a\mathscr{L}_k)k^b=\mathscr{L}_k\mathscr{D}_a k^b=\mathscr{L}_k(\omega_a k^b)=k^b\mathscr{L}_k\omega_a\,,$$

所以式(16-5-42)在$k^a\neq 0$的点上等价于

$$\mathscr{L}_k\omega_a=0\,, \tag{16-5-42'}$$

而且易见若k^a满足上式则ck^a也满足.

注 4　虽然孤立视界比弱孤立视界要求更强的条件，但所有条件都只涉及 Δ 的内禀几何 $(h_{ab}, \mathscr{D}_a, [k])$ 及物理量(是准局域地定义的)，对不切于 Δ 的任何几何量和物理场都丝毫不做要求，就连 4 维度规 g_{ab} 都不必在 Δ 上与时间无关. 一个好例子是: Robinson-Trautman 解(度规)存在孤立视界，但却不存在稳态 Killing 场(就连在孤立视界的任一小邻域中也不存在). 在这个意义上，孤立视界的条件也是相当弱的，有理由相信涉及引力坍缩和黑洞融合的大量实际情况在足够好的近似下满足这些条件.

注 5　不难证明，每一非涨视界 Δ 都有等价类 $[k]$ 使 $(\Delta,[k])$ 成为弱孤立视界. 不过这种 $[k]$ 远非唯一，事实上，每一非涨视界 Δ 都有无限多个等价类 $[k]$ 满足(16-5-42′)，因而每个非涨视界都可被造就出无限多个不同的弱孤立视界. 然而情况对孤立视界却大不相同. 对一个给定的孤立视界 $(\Delta,[k])$，不存在满足式(16-5-43)的另一等价类 $[k']$ [详见 Ashtekar et al. (2002)]. 因此对孤立视界而言，其类光法矢场 k^a 的自由性最多不过是乘一个常数因子 $c>0$. 这一点与 Killing 场 ξ^a 也很像(所以也说孤立视界比弱孤立视界更像 Killing 视界). KN 时空(族)的事件视界(Killing 视界)配以由式(13-5-4)定义的 K^a 乘以正常数 c 所得的等价类 $[k]$ 就构成该族时空的唯一的孤立视界 $(\Delta,[k])$.

小结　任意类光超曲面 Δ 上都有退化“度规”，但 Δ 上的类光法矢场 k^a 可以“很不像” Killing 场(很可能有 $\mathscr{L}_k h_{ab} \neq 0$)；通过逐渐添加条件可使 Δ 依次成为非涨视界、弱孤立视界和孤立视界，而 k^a 也依次地愈来愈像 Killing 场. 任一 Killing 视界 $\mathscr{K}$ 都是孤立视界(只要其拓扑为 $S^2\times\mathbb{R}$ 而且相应物质场满足定义 1 的能量条件)，即 $\mathscr{K}=(\Delta,[k])$，其中等价类 $[k]$ 的任一元素 k^a 都对应于 M 上的一个 Killing 场 K^a，所谓对应是指 $K^a|_{\mathscr{K}}=k^a$.

16.5.3　弱孤立视界第零定律

传统黑洞热力学的第零定律是指稳态黑洞事件视界的表面引力在全视界上为常数. 这虽然对应于普通热力学第零定律(表面引力 ↔ 温度)，但这一对应其实并不工整：前者对系统外部环境的要求太过苛刻. 具体说，传统黑洞热力学第零定律要求黑洞处于稳态时空(存在全局的、在无限远为类时的 Killing 场). 只要视界以外(甚至离视界很“远”处)存在引力波，就不是稳态时空，就不敢说第零定律适用. 反之，普通热力学第零定律适用于孤立的系统，只要系统自身处于平衡态，外部世界完全可以千变万化. 弱孤立视界就是为克服这一重大缺陷而引入的，它可能只是黑洞区的部分边界(例如图16-3)，是从一个不一定稳态的时空中孤立出来的、可被近似看作处于平衡态(例如流过它的能量、动量和角动量为零)的这么一段边界. 如果它存在一个可被称为表面引力的量[回到稳态黑洞时应回到事件视界(Killing 视界)

的表面引力 κ], 而且该量在整个弱孤立视界上为常数, 我们就有了一个适用于处在平衡态的视界的黑洞热力学第零定律. 小节 16.3.2 引入的 $\kappa_{(k)}$ 正是这个量[满足式(16-3-24)]. 如果 Δ 只是非涨视界, 虽然也可在其上定义 $\kappa_{(k)}$, 但由于 k^a 可用任意正定函数 α 重新标度, $\kappa_{(k)}$ 在 Δ 上未必为常数. 然而, 下面将证明弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的任一 k^a 的 $\kappa_{(k)}$ 在 Δ 上为常数, 这就是弱孤立视界的第零定律.

命题 16-5-4(弱孤立视界第零定律)　设 $(\Delta,[k])$ 为弱孤立视界, 则 $[k]$ 的任一代表元 k^a 的表面引力 $\kappa_{(k)}$ 在 Δ 上为常数.

证明　以 d_a 代表 Δ 上的外微分算符, 由 $\kappa_{(k)}=k^b\omega_b$ [式(16-5-18)]得

$$\mathrm{d}_a\kappa_{(k)}=\mathrm{d}_a(k^b\omega_b)=\mathscr{L}_k\omega_a-(\mathrm{d}\omega)_{ba}k^b=-2\,\mathrm{Im}(\Psi_2)\varepsilon_{ba}k^b=-2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\Psi_2)k^b\bar{m}_{\tilde{b}}\wedge m_{\tilde{a}}=0\,,$$

其中第二步用到第 5 章习题 6(a), 第三步用到 $\mathscr{L}_k\omega_a=0$ [式(16-5-42′)]及式(16-5-33), 第四步用到 $\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\,\bar{m}_{\tilde{a}}\wedge m_{\tilde{b}}$ [式(16-5-32)]. 注意到 Δ 是连通流形, 便知 $\kappa_{(k)}$ 在 Δ 上为常数.　□

注 6　命题 16-5-4 正是关于弱孤立视界的第零定律. 这是个并非寻常的结论: 它的成立只要求视界处于平衡态(只要是弱孤立的)而无须有任何对称性, 即无须有 Killing 场, 连只在其 2 维截面上定义的 Killing 场(用诱导度规衡量)也不必要. 反之, 推广前的第零定律的成立条件却强很多: 它只适用于稳态时空, 而这当然意味着存在 Killing 场.

注 7　$\kappa_{(k)}=0$ 的(弱)孤立视界称为**极端(extremal)(弱)孤立视界**.

注 8　弱孤立视界的表面引力 $\kappa_{(k)}$ 的定义[仍用式(16-3-24)]与 Killing 视界的表面引力 κ [见式(16-1-2)]非常类似. 事实上, 拓扑为 $S^2\times\mathbb{R}$ (而且相应物质场满足定义 1 的能量条件)的 Killing 视界 $\mathscr{K}$ 也是弱孤立视界, 即 $\mathscr{K}=(\Delta,[K])$, 其中等价类 $[K]$ 的任一元素 K^a 都是某 Killing 场在 Δ 上的值. 这样就会出现一个问题: 设 K^a 和 cK^a 是 $[K]$ 的两个元素, 则由 $K'^a\nabla_aK'^b=\kappa_{(K')}K'^b$ 得 $c^2K^a\nabla_aK^b=\kappa_{(K')}cK^b$, 与 $K^a\nabla_aK^b=\kappa_{(K)}K^b$ 对比可知 $\kappa_{(K')}=c\kappa_{(K)}$, 为什么小节 16.1.1 讲 Killing 视界的表面引力时只有一个 κ? 这是因为该小节关心的是渐近平直的、存在全局 Killing 场 K^a 的情况, 那时早已通过要求 K^aK_a 在 $\mathscr{I}^+$ 为 -1 而在 $[K]$ 中挑出了唯一的 K^a. 然而, 在只有弱孤立视界而无 Killing 场的情况下却无法采用这一措施, 因此只好保留这种对 k^a 重新标度的自由性. 这时 $[k]$ 的每一元素 k^a 有自己的 $\kappa_{(k)}$, 而且对 $k'^a=ck^a$ 有 $\kappa_{(k')}=c\kappa_{(k)}$. 可见严格说来“弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的表面引力”一词也存在可重新标度的自由性, 就是说, 表面引力一般不是弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的内禀性质, 一个(非极端)弱孤立视界可以有很多不同的表面引力. 不过, “表面引力在弱孤立视界

上为常数”的结论总是对的. 如果必要, 也可对 $\kappa_{(k)}$ 做“规范固定”, 例如选定 $\kappa_{(k)} \equiv \dfrac{1}{2R_\Delta}$, 其中 R_Δ 是 Δ 的面积半径, 由 $A_\Delta = 4\pi R_\Delta{}^2$ 定义[见式(16-5-1)], 而 A_Δ 是视界任一截面的面积(纯内禀几何量).

注 9 我们一直把(弱)孤立视界 $(\Delta,[k])$ 看作一个处于平衡态的热力学系统, 并说它的表面引力 $\kappa_{(k)}$ 正比于系统的温度, 所以 $\kappa_{(k)}$ 在 Δ 上为常数正好表明这个系统满足热力学第零定律. 然而, 注 8 明明指出(弱)孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的表面引力 $\kappa_{(k)}$ 依赖于等价类 $[k]$ 的代表元 k^a 的选择, 于是出现如下问题: 这个热力学系统的温度到底是多少?“系统的温度有规范自由性(指依赖于 k^a 的选取)”这样的提法像话吗!? 我们的看法是: 恐怕应该认为(弱)孤立视界 $(\Delta,[k])$ 是一族处于平衡态的热力学系统, 只当选定代表元 $k^a \in [k]$ 后, (Δ,k^a) 才是其中的一个系统. 设 $k'^a = ck^a \neq k^a$, 则 (Δ,k'^a) 就是另一个热力学系统, 两者有不同的温度就是很自然的事情. 这一看法也可从施瓦西事件视界得到印证. 施瓦西黑洞的表面引力 $\kappa = (4M)^{-1}$, 质量各为 M 和 $M' \neq M$ 的施瓦西黑洞当然被看作两个不同的黑洞, 亦即有不同温度的两个热力学系统. 然而我们早已知道施瓦西事件视界 $\mathscr{E}$ 是孤立视界的特例, 现在自然要问: 质量各为 M 和 $M' \neq M$ 的两个事件视界是一个还是两个孤立视界?把施瓦西事件视界看作孤立视界时, 这个孤立视界的 k^a 就是静态 Killing 场 ξ^a 在视界 $\mathscr{E}$ 上的值, 即 $k^a = \xi^a|_{\mathscr{E}}$. 若取图 9-13(a) 的 N_1 (两个类光分支之一)为 $\mathscr{E}$, 则由式(9-4-40) 得

$$\xi^a|_{\mathscr{E}} = (4M)^{-1} V(\partial/\partial V)^a,$$

可见 M 值(因而 κ 值)的改变相当于 k^a 的重新标度化, 因而应该说不同质量的所有施瓦西事件视界合起来才是一个孤立视界 $(\Delta,[k])$, 这与本节注 5 最末一句话一致.

16.5.4 弱孤立视界和孤立视界的对称性

如中册 §12.5 开头所述, 广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 上的每一等度规映射 $\phi: M \to M$ 称为一个对称性, 因为保度规就是保几何. 然而, (弱)孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的退化“度规” h_{ab} 不完全决定几何, 所以只保 h_{ab} 还不算是对称性. 从定义 2 可知, 弱孤立视界和孤立视界的几何各由三个要素决定, 对前、后者分别是 $h_{ab}, \omega_a, [k]$ 和 $h_{ab}, \mathscr{D}_a, [k]$, 只有同时保持这三个要素的变换才够资格充当对称性. 于是有以下定义.

定义 3 微分同胚 $\rho: \Delta \to \Delta$ 称为弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的一个**对称性**, 若

$$(\text{a})\rho^* h_{ab} = h_{ab},\quad (\text{b})\rho^*\omega_a = \omega_a,\quad (\text{c})\rho_* k^a = ck^a,\quad \text{其中 } c \text{ 为非零常数}. \qquad (16\text{-}5\text{-}46)$$

上式的(c)不应改为 $\rho_* k^a = k^a$, 因为被保的对象是等价类 $[k]$ 而不是其中的哪一个元素 k^a.

对孤立视界，由于第二个被保对象是 $\mathscr{D}_a$，所以式(16-5-46)的条件(b)应改为 $\rho^*(\mathscr{D}_a T)=\mathscr{D}_a(\rho^* T)$，其中 T 代表 Δ 上"切于" Δ 的任一张量场(略去抽象指标). 于是有

定义 4 微分同胚 $\rho:\Delta\to\Delta$ 称为孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的一个**对称性**，若

$$(\mathrm{a})\rho^* h_{ab}=h_{ab},\ (\mathrm{b})\rho^*(\mathscr{D}_a T)=\mathscr{D}_a(\rho^* T),\ (\mathrm{c})\rho_* k^a=ck^a,\ c\text{为非零常数}. \quad (16\text{-}5\text{-}47)$$

假设 $\{\rho_\lambda:\Delta\to\Delta\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ 是由 k^a 产生的单参微分同胚群，我们自然猜想每个 ρ_λ 都是一个对称性，因为至少由 $\mathscr{L}_k h_{ab}=0$ [式(16-5-4)]及李导数定义可知 $\rho_\lambda{}^* h_{ab}=h_{ab}$. 下面的命题将对这一猜想做出肯定. 然而并非所有弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的 k^a 都能产生单参微分同胚群的. 如果 k^a 是 Δ 上的不完备矢量场(其积分曲线的参数取值不能遍及全 $\mathbb{R}$，例如图16-3)，则它产生的映射 $\rho_\lambda:\Delta\to\Delta$ 除 $\lambda=0$ 的那个之外都不是微分同胚，因为只要 $\lambda\neq 0$，Δ 上就总有这样的点，它被 ρ_λ 映射到 Δ"以外". 可见，只当 k^a 是完备矢量场时方可产生单参微分同胚群.

命题 16-5-5 设 $\{\rho_\lambda:\Delta\to\Delta\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ 是由弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的 k^a 产生的单参微分同胚群(这已意味着 k^a 完备)，则每一群元 ρ_λ 都是一个对称性.

证明 第一，由 $\mathscr{L}_k h_{ab}=0$ 及李导数定义得 $\rho_\lambda{}^* h_{ab}=h_{ab}$. 第二，因为

$$\mathscr{L}_k\omega_a=\mathrm{d}_a(k^b\omega_b)+(\mathrm{d}\omega)_{ab}k^b=\mathrm{d}_a\kappa_{(k)}-2\,\mathrm{Im}(\Psi_2\,|_\Delta)\varepsilon_{ab}k^b=0\,,$$

[其中第一步用到第 5 章习题 6(a)，第二步用到式(16-5-18)(即 $\kappa_{(k)}=k^b\omega_b$)及式(16-5-33)，第三步用到第零定律及 $\varepsilon_{ab}k^b=0$.] 所以由李导数定义便有 $\rho_\lambda{}^*\omega_a=\omega_a$. 第三，由

$$0=\mathscr{L}_k k^a\equiv\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{-\lambda}(\rho_{-\lambda}{}^* k^a-k^a)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{-\lambda}(\rho_{\lambda *}k^a-k^a)$$

得 $\rho_{\lambda *}k^a=k^a$. 于是 ρ_λ 满足定义 3. □

注 10 上述命题的结论也适用于孤立视界.

由于 ρ_λ 把 Δ 的点变为同一母线的点，所以称 ρ_λ 为**保母线对称性**(generator-preserving symmtry). 此外当然还可能有其他对称性，它们都同 Δ 的截面有关(准确含义见小节16.6.3). Δ 的每一截面都是拓扑 2 球面，而且其上存在由 g_{ab} 诱导的度规场 q_{ab}. 若以 N 代表 (S,q_{ab}) 上的独立 Killing 矢量场的个数，则只有以下三种可能：① $N=3$ (S 有球对称性)；② $N=1$ (S 有轴对称性)；③ $N=0$ (S 无对称性)，见 Ashtekar et al. (2001). 于是(弱)孤立视界可依上述次序分为 Ⅰ 型、Ⅱ 型和Ⅲ型. 施瓦西时空和 Kerr 时空的事件视界分别是Ⅰ型和Ⅱ型孤立视界的简单例子.

注 11 Ashtekar 等的文献对(弱)孤立视界的分类曾先后给出过两种不同的定义[分别以 Ashtekar et al. (2001)和 Ashtekar and Krishnan(2004)为代表]，我们把它

们依次称为定义①和②. 刚才介绍的 I 型、II 型和 III 型是定义②的分类方式(按截面的对称性分类), 小节 16. 6. 3 将详细讲述定义①的分类方式. 后面(小节 16. 6. 4)在推证弱孤立视界的角动量公式时, 某些地方要用到定义①的条件(强于定义②的条件), 因此我们明确约定, 以后谈到任何一种类型的(弱)孤立视界时, 分类方式都以定义①为准. 由于 II 型视界最为常用, 本书只讨论这种视界. 根据定义①, II 型视界的截面 (S,q_{ab}) 既可能是轴对称的也可能是球对称的(详见小节 16. 6. 3), 而球对称蕴涵轴对称, 所以 II 型视界一定存在反映轴对称性的矢量场, 借此就可给视界定义角动量, 详见下一小节.

16.5.5 弱孤立视界第一定律

本书只讨论无物质场情况下的 II 型弱孤立视界, 仿此不难讨论无物质场的 I 型视界. 向有物质场的各型视界的推广可参见 Ashtekar and Krishnan(2004) 所引文献.

下面要推导弱孤立视界 Δ 的第一定律, 即该视界的质量 M_Δ 、面积 A_Δ 和角动量 J_Δ 的微小增量的关系式, 为此应先介绍 Ashtekar 等借用哈氏形式所找到的 M_Δ 和 J_Δ 的定义. 通常的哈氏理论(见 §15.4)关心共轭对 (q,π) 的时间演化, 其中 q 是 3 维场位形, π 是动量密度, 定义为 $\pi \equiv \partial \mathscr{L} / \partial \dot{q}$, 所以哈氏理论的使用前提是对时空选定了一个 $3+1$ 分解. (满足适当条件的)全体共轭对组成相空间 $\Gamma \equiv \{(q,\pi)\}$, 其上自然存在辛形式 Ω_{AB} (见 §15.7). 然而 Ashtekar 等在讨论孤立视界时所用的相空间与此略有不同, 它由场方程满足边界条件的全体解(未经 $3+1$ 分解的 4 维场位形) ψ 组成, 简记作 $\Gamma \equiv \{\psi\}$. 因为我们仅讨论含 II 型弱孤立视界而且无物质场的时空, 所谓场方程就是真空爱因斯坦方程, 相空间的一点就是一个满足真空爱因斯坦方程的时空. (若讨论有物质场的时空, 则还应包括物质场的场方程.) 由于未做 $3+1$ 分解, 这种相空间称为**协变**(covariant)相空间, 而通常的 $\Gamma \equiv \{(q,\pi)\}$ 则称为**正则**(canonical)**相空间**. 正则相空间自然存在辛形式, 而协变相空间则不然. Lee and Wald(1990)对协变相空间(虽然未用此称谓)做过开创性研究, 证明它自然存在闭的 2 形式 Ω_{AB} , 但可能退化(退化方向对应于规范自由性), 并称之为**预辛形式** (pre-symplectic form). 孤立视界可用上述两种相空间之任一来讨论, 结果相同. 仿照 Ashtekar , 本章也使用协变相空间. 由小节15.7.1 可知: ①若 Ω_{AB} 非退化(是真正的辛形式), 则对 Γ 上的任一函数 F 可定义其哈氏矢量场 $X_F{}^A \equiv \Omega^{AB} \nabla_B F$, 等价地, $\Omega_{AB} X_F{}^B = \nabla_A F$; ② Γ 上满足 $\mathscr{L}_X \Omega_{AB} = 0$ 的矢量场 X^A 称为无限小对称性, 由 X^A 产生的微分同胚 $\Gamma \to \Gamma$ 称为正则变换; ③局域地说, X^A 是无限小对称性当且仅当它是某函数的哈氏矢量场. 预辛形式 Ω_{AB} 的退化性导致无逆, 哈氏矢量场的上述定义失效, 但可改用其等价形式定义, 即: Γ 上任一矢量场 X^A 称为**哈氏矢量场**, 若

Γ 上有函数 F 使 $\Omega_{AB}X_F{}^B=\nabla_A F$. 于是对辛形式成立的命题15-7-1可推广为

命题 16-5-6　设 Ω_{AB} 是预辛形式，则 X^A 是哈氏矢量场当且仅当 $\mathscr{L}_X\Omega_{AB}=0$.

证明　由第5章习题6(a)得

$$\mathscr{L}_X\Omega_{AB}=\mathrm{d}_A(\Omega_{CB}X^C)+X^C\mathrm{d}_C\Omega_{AB}=-\mathrm{d}_A(\Omega_{BC}X^C),$$

(其中末步用到 Ω_{AB} 为闭，即 $\mathrm{d}\Omega=0$.) 若 X^A 是哈氏矢量场，则有函数 F 使

$$\Omega_{BC}X^C=\nabla_B F=\mathrm{d}_B F,$$

故 $\mathscr{L}_X\Omega_{AB}=-\mathrm{d}_A(\mathrm{d}_B F)=0$. 反之，若 $\mathscr{L}_X\Omega_{AB}=0$ ，则 $\mathrm{d}_A(\Omega_{BC}X^C)=0$. 而 Γ 有平凡拓扑[见 Ashtekar and Krishnan(2004)P.33~34]，故 Γ 上有函数 F 使

$$\Omega_{BC}X^C=\mathrm{d}_B F=\nabla_B F,$$

因而 X^A 是哈氏矢量场. □

以 Γ 上任一矢量场 δ^A 缩并 $\Omega_{AB}X_F{}^B=\nabla_A F$ 得

$$\Omega_{AB}\delta^A X^B=\delta^A\nabla_A F\equiv\delta F, \tag{16-5-48}$$

其中 δF 应理解为矢量场 δ^A 作用于函数 F 的产物，即 $\delta(F)$. 综合以上结果得

$$X^A\text{ 为哈氏场}\Leftrightarrow\mathscr{L}_X\Omega_{AB}=0\Leftrightarrow\exists F\text{ 使 }\Omega_{AB}X^B=\nabla_A F\Leftrightarrow\exists F\text{ 使 }\Omega_{AB}\delta^A X^B=\delta F\ \forall\delta^A. \tag{16-5-49}$$

下面要用哈氏形式讨论能量和角动量问题. 首先说明两点.

第一，弯曲时空的能量来自物质场和引力场的贡献，而引力能量的非定域性(中册小节12.6.3)使任何(有限的)3维空间区域内的“引力能量”(因而“3维空间内总能量”)一词失去意义，只能谈及渐近平直时空在任一时刻的“全空间”(类空柯西面)的总能量，即ADM能量. 这种非定域性使得连“施瓦西时空的质量位于黑洞内部还是分居于内部和外部?”这种常被问及的问题都不许问(因为“能量位于何处”一词无意义，只能说施瓦西时空的总能量是 M)，从而带来诸多不便. 有鉴于此，长期以来有许多学者致力于准局域能量的研究. Hawking(1968)提出的能(质)量定义(后来被称为 **Hawking 质量**)也许是最早的准局域能量定义，粗略地说，它是指某2维类空面 S 所包围的3维区域内的准局域能量，定义为

$$E_{\text{Hawking}}(S)\equiv\sqrt{\frac{A(S)}{16\pi}}\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_S\hat{\theta}_k\hat{\theta}_l\right), \tag{16-5-50}$$

其中 $A(S)$ 是 S 的面积，$\hat{\theta}_l$ 和 $\hat{\theta}_k$ 是由 S 发出的两族类光测地线的膨胀. 若 S 是施瓦西黑洞的视界截面(图9-20中不交于坍缩星的任一水平面与视界的交面)，则由 $\hat{\theta}_k=0$ 得 $E_{\text{Hawking}}(S)=M$ (该黑洞的质量参数)，与人们关于“施瓦西时空的能量位于

视界以内"的直观想法一致(但这"能量"只能理解为准局域能量). 然而应注意 Kerr 视界内的 Hawking 质量并不等于 Kerr 度规的质量参数 M 而等于其不可减质量 $\hat{M}$ [定义见中册式(13-5-8)], 所以人们不愿把 Hawking 质量定义为 Kerr 黑洞内的准局域能量. 结论的不同源于两种时空的关键区别: Kerr 时空有角动量而施瓦西时空没有. 本小节关心的则是(弱)孤立视界 Δ 的截面 S 以内(3 维黑洞区内)的准局域能量, 但仿照 Ashtekar 等的文献而简称为"S 的能量". 类似地, "S 的角动量"是指 S 面以内的准局域角动量(引入动机与准局域能量相同).

第二, 在相对论中谈及能量时应先选定一个类时矢量场, 能量是关于该矢量场而言的. 例如, 给定闵氏时空中物质场的 T_{ab} 后, 为定义其能量就应先选定一个类时 Killing 场. 用不同的 Killing 场定义的能量一般不等(见中册小节 12.6.2 关于电磁场能量的讨论). 类似地, 为定义角动量应先指定一个反映空间转动对称性的 Killing 场. 能量和角动量都是闵氏时空的守恒量, 守恒性来自时空的对称性[这也是 Noether 定理的结论(见附录 H)], 所以定义时要选 Killing 场. 这一精神原则上可推广到弯曲时空.

设 (M,g_{ab}) 是含 II 型弱孤立视界 Δ 的时空, 我们来寻求 Δ 的截面 S 的能量和角动量的定义. 先从较容易的角动量入手. 虽然现在的 (M,g_{ab}) 可能根本没有 Killing 场, 但至少有以下两方面的对称性可资利用: ①由于渐近平直, 空间无限远 i^0 有由 SPI 群(见中册第 12 章)代表的对称性; ② II 型视界总有反映轴对称性的"转动"矢量场, 记作 φ^a, 它的积分曲线闭合并铺成 Δ 的一个截面 S. 考虑 M 的开子集 $\mathscr{M} \subset M$, 其边界由以下四部分组成(图 16-8): 一、二是类空面 Σ_1 和 Σ_2; 三是弱孤立视界 Δ; 四是空间无限远 i^0 的切空间 V_{i^0} 中的类时超曲面 τ_∞. (即图 12-14 及图 12-22 的 K. 本章的 K 太多, 故改记作 τ_∞.) Δ 和 τ_∞ 分别称为 $\mathscr{M}$ 的**内边界**和**无限远边界**. 图 16-8 中还选了一张柯西面 Σ, 它与 Δ 及 τ_∞ 之交依次为截面 S 和 S_∞ (后者即图 12-22 的 C), 两者共同组成 Σ 的边界, 即 $\partial\Sigma = S \cup S_\infty$.

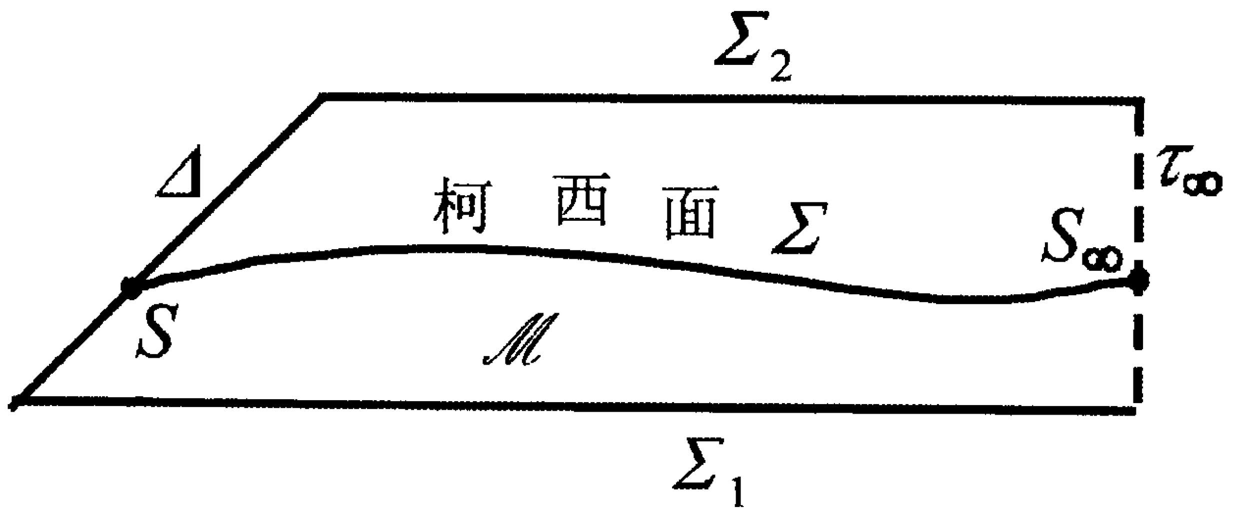


图 16-8　4 维开集 $\mathscr{M}$ 由 4 部分边界 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Delta, \tau_\infty$ 围成. 柯西面 Σ 与 Δ, τ_∞ 分别交于截面 S 和 S_∞

设 ϕ^a 是 $\mathscr{M}$ 上的矢量场, 它在 Δ 上重合于 φ^a, 在 τ_∞ 上重合于某个指定的转动对称性(渐近 Killing 场). 由于只讨论无物质场的情况, M 上的物理场 ψ 就只有度规场 g_{ab}, 其场方程(真空爱因斯坦方程)由 Hilbert 作用量 $S = \int R\varepsilon$ 导出(见小节 15.1.3). 每一满足场方程的 ψ 可看作相空间 Γ 的一点. 以 $\{f_\lambda : M \to M\}$ 代表由 ϕ^a

产生的单参微分同胚族，则 $f_\lambda{}^*$ 对 ψ 的作用结果 $\psi_\lambda \equiv f_\lambda{}^*\psi$ 是 M 上的另一个场. 因为里奇张量等对度规的依赖关系有微分同胚不变性，即对任意微分同胚 f 有 $f_*(R_{ab}[g]) = R_{ab}[f_* g]$ [上册式(8-10-13)]，所以作用量也有这种不变性，因而 ψ_λ 也满足场方程，也可看作 Γ 的一点. 当 λ 连续变动时 ψ_λ 就是 Γ 上以 λ 为参数的一条曲线. 以 $X^A_{(\phi)}$ 代表此线在 ψ 点的切矢，现在的关键问题是：$X^A_{(\phi)}$ 是否为哈氏矢量场？等价地，它产生的微分同胚 $\Gamma \to \Gamma$ 是否为正则变换？根据式(16-5-49)或(16-5-48)，这也等价于：Γ 上是否有函数 $J^{(\phi)}$ 满足

$$\delta J^{(\phi)} = \Omega_{AB}\delta^A X^B_{(\phi)}, \quad \forall\,(\text{代表变分的})\text{矢量场}\,\delta^A\,? \tag{16-5-51}$$

计算表明[见 Ashtekar et al. (2001)]下式成立：

$$\Omega_{AB}\delta^A X^B_{(\phi)} = \delta\left(-\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi^a \omega_a\right) - \delta J^{(\phi)}_{\text{ADM}}, \tag{16-5-52}$$

这已表明满足式(16-5-51)的函数 $J^{(\phi)}$ 的确存在，它就是

$$J^{(\phi)} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi^a \omega_a - J^{(\phi)}_{\text{ADM}}. \tag{16-5-53}$$

上式包含两个边界项，其一为视界截面项，其二是无限远截面项，也就是时空的 ADM 角动量.① 物理学中的角动量本应是矢量，只当谈到其某一分量时才是标量. 标量 $J^{(\phi)}_{\text{ADM}}$ 右上角的 ϕ 标明它是 ADM 角动量关于所选的渐近 Killing 场(时空渐近无限小轴对称性) ϕ^a 的那个特定分量，于是式(16-5-53)右边第一项自然应被解释为(定义为)视界 Δ (关于无限小轴对称性 $\varphi^a = \phi^a|_\Delta$)的角动量，因而应记作 $J^{(\phi)}_\Delta$，即

$$J^{(\phi)}_\Delta \equiv -\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi^a \omega_a\,. \tag{16-5-54}$$

注 12　上式的积分域 S 是 Δ 的一个截面，取法非常任意. 如果另取截面 S'，积分仍一样吗？后面(见小节16.6.4)将证明：任选一个截面族(记作族1)对 Δ 分层，则各层的积分 $\int_S \varphi^a \omega_a$ 相等；改用另一截面族(族2)分层，则各层的积分不但相等，而且还等于族1的积分. 因此，把2维截面 S 上的积分 $\int_S \varphi^a \omega_a$ 称为3维 Δ 的角动量(并记作 $J^{(\phi)}_\Delta$)是合理的.

式(16-5-54)表明视界角动量 $J^{(\phi)}_\Delta$ 完全由(准)局域几何量决定. 只要知道Ⅱ型视界上的局域几何就可用此式计算 $J^{(\phi)}_\Delta$. 由于 ω_a 与外尔张量 $C_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}{}^d$ 有密切联系(见命题 16-5-1)，我们期望 $J^{(\phi)}_\Delta$ 也可借外尔张量的适当分量表出. 这是可以做到的，后面

---

① 式(16-5-52)只能把 $J^{(\phi)}$ 确定到差一个常数的程度. 再考虑到如下自然要求：静态轴对称时空的角动量 $J^{(\phi)}$ 为零，才有式(16-5-53).

(命题 16-6-12)将证明式(16-5-54)也可等价地表述为

$$J_{\Delta}^{(\phi)} = \frac{1}{4\pi}\int_S f\,\mathrm{Im}(\Psi_2),\tag{16-5-55}$$

式中Ψ_2是外尔张量在 NP 标架的第 2 分量[见式(16-5-31)], f 是 Δ 上的函数, 定义为 $\mathscr{D}_a f \equiv \varepsilon_{ba}\varphi^b$, 其中 ε_{ba} 是 S 上的适配"面元"[f 的存在唯一性见命题 16-6-11(2)].

由式(16-5-53)及(16-5-54)得

$$J^{(\phi)} = J_{\text{ADM}}^{(\phi)} - J_{\Delta}^{(\phi)}.\tag{16-5-56}$$

既然 $J_{\Delta}^{(\phi)}$ 代表视界 Δ 以内(黑洞内)的准局域角动量, 而 $J_{\text{ADM}}^{(\phi)}$ 是全时空的角动量, 自然应把 $-J^{(\phi)}$ 解释为介于 Δ 和无限远之间(黑洞外)的时空区域 $\mathscr{M}$ 内的准局域角动量.

以上讨论只要求视界是 II 型的, 即 Δ 上存在反映轴对称性的矢量场 φ^a, 并不要求时空存在任何 Killing 场, 甚至也不要求含 Δ 的任何 4 维开集上有 Killing 场. 然而, 如果含 Δ 的某个 4 维开集上有 Killing 矢量场 ϕ^a (满足 $\phi^a|_{\Delta} = \varphi^a$), 则还可把 $J_{\Delta}^{(\phi)}$ 表为如下的 Komar 积分: [尽管 Komar 原文只涉及时空质量和动量(而无角动量)的表达式, 人们仍把下式也称为 Komar 积分.]

$$J_{\Delta}^{(\phi)} = \frac{1}{16\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d,\tag{16-5-57}$$

详见命题 16-6-13.

进一步说, 如果时空整体存在反映轴对称性的 Killing 矢量场 ϕ^a (满足 $\phi^a|_{\Delta} = \varphi^a$), 则 $J_{\Delta}^{(\phi)}$ 等于 $J_{\text{ADM}}^{(\phi)}$ 并且都等于式(16-5-57)的 Komar 积分(KN 时空就是一例). 这时式(16-5-56)给出 $J^{(\phi)} = 0$, 说明时空域 $\mathscr{M}$ 中(即黑洞外)的准局域角动量为零.

下面再寻找视界能量的定义. 与 J_{Δ} 的定义手法类似, 先在时空中选定一个代表"时间平移对称性"的矢量场 t^a, 准确说就是要求 t^a 满足如下边界条件: ①在 τ_∞ 上要重合于某个时间平移渐近 Killing 场; ②在 Δ 上应是 II 型视界的一个对称性, 即是两个对称性 k^a 和 φ^a 的线性组合:

$$t^a \triangleq b_{(k,t)}k^a - \Omega_{(t)}\varphi^a,\tag{16-5-58}$$

其中 $b_{(k,t)}$ 和 $\Omega_{(t)}$ 都是常数. (但对不同时空可有不同常数值, 例如, 从物理角度考虑, $\Omega_{(t)}$ 对施瓦西时空应该为零而对 Kerr 时空则应非零.) 仿照角动量的讨论, 以 t^a 及 $X_{(t)}^A$ 代替 ϕ^a 及 $X_{(\phi)}^A$, 则现在的问题是: $X_{(t)}^A$ 是否为哈氏矢量场?等价地, Γ 上是否有函数 $E^{(t)}$ 满足

$$\delta E^{(t)} = \Omega_{AB}\delta^A X^B_{(t)}, \quad \forall \delta^A ? \tag{16-5-59}$$

从式(16-5-58)出发的计算给出[见 Ashtekar, Fairhurst, and Krishnan(2000)][①]

$$\Omega_{AB}\delta^A X^B_{(t)} = -\frac{1}{8\pi}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta - \Omega_{(t)}\delta J_\Delta + \delta E^{(t)}_{\rm ADM}, \tag{16-5-60}$$

式中 $A_\Delta \equiv \int_S \varepsilon_{ab}$ 是视界面积，$E^{(t)}_{\rm ADM}$ 是用 t^a 定义的 ADM 能量，$\kappa_{(t)} \equiv bk^a\omega_a$ (其中 b 是 $b_{(k,t)}$ 的简写). 暂令 $K^a \equiv bk^a$，则

$$K^b\nabla_b K^a = b^2 k^b \nabla_{\tilde{b}} k^a = b^2 k^b \omega_b k^a = (bk^b\omega_b)K^a = \kappa_{(t)}K^a.$$

因 K^a 与 b 有关而 b (实为 $b_{(k,t)}$)依赖于 $t^a|_\Delta$，故也把 $\kappa_{(t)}$ 称为伴随于 $t^a|_\Delta$ 的表面引力. 现在寻找函数 $E^{(t)}$ 存在的充要条件. 首先，如果存在函数 $E^{(t)}$ 满足式(16-5-59)，就可令

$$E^{(t)}_\Delta \equiv -E^{(t)} + E^{(t)}_{\rm ADM},$$

与式(16-5-59)、(16-5-60)结合乃得

$$\delta E^{(t)}_\Delta = \frac{1}{8\pi}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t)}\delta J_\Delta, \tag{16-5-61}$$

上式表明 $(8\pi)^{-1}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t)}\delta J_\Delta$ 是恰当变分. 反之，如果 $(8\pi)^{-1}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t)}\delta J_\Delta$ 是恰当变分，便存在函数 $E^{(t)}_\Delta$ 满足式(16-5-61)，从而存在函数满足式(16-5-59). 可见

$$\exists E^{(t)} \text{ 满足式(16-5-59)} \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t)}\delta J_\Delta \text{是恰当变分}. \tag{16-5-62}$$

Γ 的每点代表一个时空度规，而不同时空可有不同的 $\Omega_{(t)}$，$\kappa_{(t)}$ 和 $E^{(t)}_\Delta$ (如果存在)，所以这三个量都可看作 Γ 上的函数. 作为无限维相空间，Γ 的一点有无限多个坐标，但式(16-5-61)说明 $\Omega_{(t)}$，$\kappa_{(t)}$，$E^{(t)}_\Delta$ 只取决于 A_Δ 和 J_Δ 这两个坐标. 所以在这一问题上 Γ 类似于 2 维流形. 仿照恰当微分的充要条件(见上册推论 5-1-6)可知：$(8\pi)^{-1}\kappa_{(t)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t)}\delta J_\Delta$ 是恰当变分当且仅当

$$\frac{\partial \kappa_{(t)}}{\partial J_\Delta} = 8\pi \frac{\partial \Omega_{(t)}}{\partial A_\Delta}. \tag{16-5-63}$$

因为 $\kappa_{(t)}$ 及 $\Omega_{(t)}$ 都由 $t^a|_\Delta$ 决定，所以上式是对 $t^a|_\Delta$ 提出的要求. 满足上式(因而存在 $E^{(t)}_\Delta$)的 t^a 称为**允许的**(permissible)**时间演化矢量场**. 请注意式(16-5-61)无非就是 Δ 上的第一定律，可见第一定律正是 t^a 为允许时间演化场的充要条件！

---

① 该文的计算默认角动量为零，但不难推广至角动量非零的情况.

现在的关键问题是如何求得允许时间演化场 t^a，下面介绍 Ashtekar and Krishnan(2004) 所建议的方法. 式(16-5-62)后几行说明每对 (A_Δ,J_Δ) 决定一个 $\kappa_{(t)}$，所以 $\kappa_{(t)}$ 可看作 A_Δ 和 J_Δ 的二元函数，记作 $\kappa_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$. 相当任意地指定这个二元函数的函数关系，便有映射 $(A_\Delta,J_\Delta)\mapsto\kappa_{(t)}$，再由 $\kappa_{(t)}\equiv b_{(k,t)}k^a\omega_a$ 便求得 $b_{(k,t)}$（因 $k^a\omega_a$ 已知），可见又有 $(A_\Delta,J_\Delta)\mapsto b_{(k,t)}$. 另一方面，由函数关系 $\kappa_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$ 求出偏导函数 $\partial\kappa_{(t)}/\partial J_\Delta$，代入式(16-5-63)便得到关于待求函数 $\Omega_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$ 的偏微分方程. 适当选取此方程的一个解 $\Omega_{(t)}$，把它及刚才求得的 $b_{(k,t)}$ 一同代入式(16-5-58)便可求得一个允许时间演化场 t^a. 由于从一开始选定二元函数 $\kappa_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$ 时就有很大任意性，按上述思路可求得无限多个允许时间演化场. 自然要问：其中有没有一个是与众不同的、因而是值得偏爱的？考虑到：①真空稳态黑洞的事件视界应作为特例包括在讨论中；（提醒：我们已约定只讨论 II 型弱孤立视界，而且其上没有物质场，故言真空.）②真空稳态黑洞只能是 Kerr 黑洞，就可找到对 t^a 的唯一的自然选择（专记作 t_0^a），具体做法如下.

取二元函数 $\kappa_0(A_\Delta,J_\Delta)$，要求其函数关系与 Kerr 时空的表面引力 κ_{Kerr}（作为 Kerr 视界面积 A 和角动量 J 的函数）的函数关系相同，后者则可推导如下：Kerr 质量 M 与事件视界的坐标半径 r_+ 的关系为 $r_+=M+\sqrt{M^2-(J/M)^2}$ [式(13-3-1)]，而由式(13-2-1)可推得事件视界的面积为 $A=4\pi[r_+{}^2+(J/M)^2]$，故其面积半径 R 满足 $R^2=r_+{}^2+(J/M)^2$，两式结合得

$$M=\frac{\sqrt{R^4+4J^2}}{2R}, \tag{16-5-64}$$

再与 κ_{Kerr} 的表达式(16-1-3)联立，经过烦而不难的计算便得

$$\kappa_{\text{Kerr}}(A,J)=\frac{R^4-4J^2}{2R^3\sqrt{R^4+4J^2}}, \tag{16-5-65}$$

于是取

$$\kappa_0(A_\Delta,J_\Delta)=\frac{R_\Delta{}^4-4J_\Delta{}^2}{2R_\Delta{}^3\sqrt{R_\Delta{}^4+4J_\Delta{}^2}}. \tag{16-5-66}$$

以此 $\kappa_0(A_\Delta,J_\Delta)$ 充当式(16-5-63)左边的函数 $\kappa_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$，通过求解方程(16-5-63)得到的 $\Omega_{(t_0)}$ 为[①]

① 式(16-5-63)是个关于二元函数 $\Omega_{(t)}(A_\Delta,J_\Delta)$ 的偏微分方程，其通解可表为式(16-5-67)右边加上一个 J_Δ 的任意函数 $C(J_\Delta)$. 为何取 $C(J_\Delta)$ 为零？Ashtekar and Krishnan(2004)未做任何说明.

$$\Omega_{(t_0)} = \frac{2J_\Delta}{R_\Delta\sqrt{{R_\Delta}^4 + 4{J_\Delta}^2}} . \tag{16-5-67}$$

[把 R_Δ, J_Δ 取为 Kerr 的 R, J，代入上式所得的 $\Omega_{(t_0)}$ 正好等于 Kerr 视界的角速度，满足式(13-5-3)]. 最后求得的视界能量为

$$E_\Delta^{(t_0)} = \frac{\sqrt{{R_\Delta}^4 + 4{J_\Delta}^2}}{2R_\Delta}, \quad \text{其中 } R_\Delta \text{ 是 } \Delta \text{ 的面积半径.} \tag{16-5-68}$$

上式的 $E_\Delta^{(t_0)}$ 又专称为**正则视界能量**(canonical horizon energy)，亦称**视界质量**(horizon mass)，并记作 $M_\Delta \equiv E_\Delta^{(t_0)}$. 把式(16-5-61)的全部 t 取为 t_0 便得

$$\delta E_\Delta^{(t_0)} = \frac{1}{8\pi}\kappa_{(t_0)}\delta A_\Delta + \Omega_{(t_0)}\delta J_\Delta , \tag{16-5-69}$$

这就是**弱孤立视界**(在选 $t^a = t_0^a$ 时)**的第一定律**. 式中各量都在视界上(准)局域地定义，从而克服了传统第一定律中 A 和 Ω 在视界上定义而 M 和 J 在无限远定义的重大缺陷.

§16.6　弱孤立视界的进一步讨论[选读]

小节 16.5.4 给出了弱孤立视界的角动量 $J_\Delta^{(\phi)}$ 的三个表达式，本节拟对其中的后两个[即式(16-5-55)和(16-5-57)]给出详细证明. 弱孤立视界首先是类光超曲面，类光面上的几何与只涉及正定度规的黎曼几何既有某些共性更有许多非常不同的性质(姑且称之为反常性质)，后者特别值得引起注意. 可以说，类光面 Δ 的种种反常性质的总根源是时空度规 g_{ab} 在 Δ 上的诱导"度规" h_{ab} 的退化性. 利用 g_{ab} 在 NP 标架 $\{m^a, \bar{m}^a, l^a, \bar{k}^a\}$ (其中 $\bar{k}^a$ 是 k^a 的延拓)的表达式

$$g_{ab} = \bar{m}_a m_b + m_a \bar{m}_b - \bar{k}_a l_b - l_a \bar{k}_b \tag{16-6-1}$$

得

$$h_{ab} \equiv i^* g_{ab} = \bar{m}_{\tilde{a}} m_{\tilde{b}} + m_{\tilde{a}} \bar{m}_{\tilde{b}} , \tag{16-6-2}$$

其中 $i: \Delta \to M$ 是包含映射，$m_{\tilde{a}} \equiv i^* m_a$. 作为 3 维流形 Δ 上的张量场，h_{ab} 竟然可以只由两个独立的对偶矢量场($\bar{m}_{\tilde{a}}$ 和 $m_{\tilde{b}}$)的张量积表出，这正是 h_{ab} 退化性的明显表现. 虽然§16.3 对类光面的某些反常性质有过介绍，但是，为了证明上述两个角动量表达式，同时也为帮助初学者更深入确切地了解类光面的反常性，我们专辟两小节(16.6.1 和 16.6.2)对此做补充讨论. 要证明 $J_\Delta^{(\phi)}$ 的表达式还应对弱孤立视界的对称性有进一步的认识，小节 16.6.3 专门为此而设. 有了以上基础，就可在小节 16.6.4 中详细介绍 $J_\Delta^{(\phi)}$ 的两个表达式的证明.

16.6.1 类光超曲面上的适配“面元”

证明弱孤立视界第零定律(命题16-5-4)的关键量是$\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\,\bar{m}_{\tilde{a}}\wedge m_{\tilde{b}}$，它是3维流形$\Delta$上“切于”$\Delta$的2形式场，满足$\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=0$，而且在$\Delta$的任一截面$(S,q_{ab})$上的限制正是与$q_{ab}$适配的面元. ε_{ab}的这些性质早在命题16-5-2之前就已给出，本小节补充其证明.

命题 16-6-1 设Δ是时空(M,g_{ab})中的任意类光超曲面(不一定是非涨视界)，k^a是Δ上的任一(处处非零的)类光法矢场，S是Δ的任一截面①(相应的包含映射为$i_S:S\to\Delta$)，q_{ab}是g_{ab}在S上的诱导度规，则Δ上存在唯一的2形式场ε_{ab}，满足

(a) $k^a\varepsilon_{ab}=0$；

(b) $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ (即ε_{ab}在S上的限制)是与q_{ab}适配的面元.

证明 本证明要借用标架场，但标架场的定义域一般不能覆盖整个Δ，所以我们先局域寻找ε_{ab}，再“拼成”定义在Δ上的(全局的)ε_{ab}场. 设$\{\Delta_\alpha\}$是Δ的一个开覆盖，在每一Δ_α的某4维邻域上可定义NP标架场$\{m^a,\bar{m}^a,l^a,\bar{k}^a\}$，则$\Delta_\alpha$上的2形式场

$$\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\bar{m}_{\tilde{a}}\wedge m_{\tilde{b}} \tag{16-6-3}$$

显然满足条件(a). 下面验证它也满足条件(b). 记$S_\alpha\equiv S\cap\Delta_\alpha$，设$\{x^a,y^a\}$是$(S_\alpha,q_{ab})$上的正交归一标架场，则$x^a,y^a$因为切于$S$而切于$\Delta$. 考虑到$m^a,\bar{m}^a$虽然切于$\Delta$却未必切于$S$，可知$x^a$和$y^a$的NP标架展开式应各含三项：

$$x^a=am^a|_{S_\alpha}+\bar{a}\bar{m}^a|_{S_\alpha}+Ak^a|_{S_\alpha}\,,\quad y^a=bm^a|_{S_\alpha}+\bar{b}\bar{m}^a|_{S_\alpha}+Bk^a|_{S_\alpha}\,, \tag{16-6-4}$$

其中a,b是S_α上的复标量场，A,B是S_α上的实标量场. 由正交归一性

$$g_{ab}|_{S_\alpha}x^ax^b=g_{ab}|_{S_\alpha}y^ay^b=1,\quad g_{ab}|_{S_\alpha}x^ay^b=0$$

得

$$|a|=|b|=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad a\bar{b}+\bar{a}b=0\,, \tag{16-6-5}$$

其通解为

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad b=\pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \theta\in\mathbb{R}\,. \tag{16-6-6}$$

---

① Δ的截面仍定义为Δ上与每一类光测地线相交且只交一次的2维类空曲面.(这种相交一定不会相切，否则曲面的类空性会导致测地线为类空这一矛盾.) 为避免可能出现的微妙情况，我们要求Δ的拓扑为$M^2\times\mathbb{R}$，其中M^2代表任一2维流形. 以下凡涉及类光超曲面时都适用此脚注.

为验证面元 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ 与 q_{ab} 适配，只须证明 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ 在 $\{x^a,y^a\}$ 的唯一独立非零分量 $(i_S{}^*\varepsilon)_{ab}x^a y^b=\pm1$. [见式(5-4-1)，正负号取决于所选 $\{x^a,y^a\}$ 与 S_α 上的诱导定向的关系.]

$$(i_S{}^*\varepsilon)_{ab}x^a y^b=\varepsilon_{ab}x^a y^b=\mathrm{i}(\bar{m}_{\tilde a}m_{\tilde b}-m_{\tilde a}\bar{m}_{\tilde b})x^a y^b=\mathrm{i}(\bar{m}_a m_b-m_a\bar{m}_b)x^a y^b,$$

其中第一步是因为 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ 是 ε_{ab} 在 S 上的限制(即拉回)及 x^a, y^a 切于 S，第三步是因为 $\bar{m}_{\tilde a}m_{\tilde b}\equiv i^*(\bar{m}_a m_b)$ 是 $\bar{m}_a m_b$ 在 Δ 上的限制及 x^a, y^a 切于 Δ. 把式(16-6-4)代入上式并利用式(16-6-6)便得

$$(i_S{}^*\varepsilon)_{ab}x^a y^b=\mathrm{i}(a\bar{b}-\bar{a}b)=\pm1. \tag{16-6-7}$$

可见 $\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\bar{m}_{\tilde a}\wedge m_{\tilde b}$ 的确是 Δ_α 上满足条件(a), (b)的2形式场.

为了证明这样局域找到的 ε_{ab} 可“拼成”一个定义在 Δ 上的 ε_{ab} 场，只须证明如下结论：$\forall p\in\Delta$，设 p 属于 $\{\Delta_\alpha\}$ 的若干元素(Δ 的开集)的交集 $\hat{\Delta}$，则这些开集在 p 点给出的 ε_{ab} 都相同. 这些开集上的4标架场 $\{m^a,\bar{m}^a,l^a,k^a\}$ 在 $\hat{\Delta}$ 上诱导出3标架场 $\{m^a,\bar{m}^a,k^a\}$，其对偶标架场为 $\{\bar{m}_{\tilde a},m_{\tilde a},-l_{\tilde a}\}$，无论用哪个开集找出的 ε_{ab} 都可借此展开为

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{12}\bar{m}_{\tilde a}\wedge m_{\tilde b}-\varepsilon_{23}m_{\tilde a}\wedge l_{\tilde b}-\varepsilon_{31}l_{\tilde a}\wedge\bar{m}_{\tilde b}. \quad (\text{在 }\hat{\Delta}\text{ 上})$$

ε_{ab} 满足条件(a)导致 $0=k^a\varepsilon_{ab}=-\varepsilon_{23}m_{\tilde b}+\varepsilon_{31}\bar{m}_{\tilde b}$，由此得 $\varepsilon_{23}=\varepsilon_{31}=0$，从而有

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{12}\bar{m}_{\tilde a}\wedge m_{\tilde b}. \tag{16-6-8}$$

ε_{ab} 满足条件(b)则导致 $(i_S{}^*\varepsilon)_{ab}x^a y^b=\pm1$，仿照式(16-6-7)的推导过程得

$$\pm1=(i_S{}^*\varepsilon)_{ab}x^a y^b=\varepsilon_{ab}x^a y^b=\varepsilon_{12}(a\bar{b}-\bar{a}b)=\mp\mathrm{i}\varepsilon_{12},$$

其中末步用到式(16-6-6). 上式给出 $\varepsilon_{12}=\mathrm{i}$，代入式(16-6-8)便得

$$\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\bar{m}_{\tilde a}\wedge m_{\tilde b}.$$

用任一开集找出的 ε_{ab} 都可表为上式，因而在 $\hat{\Delta}$ 上相等. 这样就在整个 Δ 上拼成一个满足条件(a), (b)的2形式场 ε_{ab}. 而且由这一论证易见这个 ε_{ab} 是唯一的. □

注1　作为3维流形，Δ 上有很多体元(3形式场). 但因 Δ 上的“度规”h_{ab} 退化，无法从众多的体元中挑出偏爱的一个. 然而用 h_{ab} (和 k^a)却可在众多的2形式场中挑出特殊的一个，这就是上面的 ε_{ab}，它在任一截面上的限制正是该截面的适配面元，所以不妨把它称为 Δ 上的适配“面元”. 存在适配“面元”是类光面的反常性的一个重要表现.

命题16-6-2　以下三个结论对满足命题16-6-1的 $\Delta, k^a, \varepsilon_{ab}$ 成立：

(1)设v^a是切于Δ的矢量场，则$\varepsilon_{ab}v^b=0$的充要条件是Δ上有函数ς使

$$v^a=\varsigma k^a .$$

(2)
$$\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=\hat{\theta}_{(k)}\varepsilon_{ab} . \tag{16-6-9}$$

(3)
$$\hat{\theta}_{(k)}=0 \Leftrightarrow (\mathrm{d}\varepsilon)_{abc}=0 .$$

证明

(1)条件的充分性是显然的，下面证明必要性. 用反证法，设$\varepsilon_{ab}v^b=0$但v^a不能写成ςk^a的形式，则$\exists p\in\Delta$使$v^a|_p\neq\varsigma k^a|_p\ \forall\varsigma\in\mathbb{R}$.(特别地，这保证$v^a|_p\neq 0$.) 于是由推论11-1-2(中册§11.1)可知$v^a|_p$类空，故有$i_S: S\to\Delta$使$v^a|_p$切于截面S，从而对p点的、切于S的任一矢量X^b有

$$v^a|_p X^b i_S{}^*\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{ab}(i_{S*}v^a|_p)\, i_{S*}X^b=\varepsilon_{ab}v^a|_p X^b=0 ,$$

再由X^b的任意性便得

$$u^a\hat{\varepsilon}_{ab}=0 ,\quad 其中 u^a\equiv v^a|_p ,\ \hat{\varepsilon}_{ab}\equiv i_S{}^*\varepsilon_{ab} . \tag{16-6-10}$$

因u^a切于S，且$\hat{\varepsilon}_{ab}$也“切于”S，故上式实质上是个2维问题. 注意到$q_{ab}\equiv i_S{}^*h_{ab}$，可知$u_a\equiv q_{ab}u^b$是$p$点切于$S$的2维切空间上的1形式，其对偶形式按式(5-6-1)应为$({}^*u)_b=u^a\hat{\varepsilon}_{ab}$，故

$$式(16\text{-}6\text{-}10)\Rightarrow({}^*u)_b=0\Rightarrow u_a=0\Rightarrow v^a|_p=0 ,$$

与$v^a|_p\neq 0$矛盾.

(2)设$U\supset\Delta$是M的开集，$\{m^a,\bar{m}^a,l^a,\bar{k}^a\}$是$U$上的局域NP标架场，其中$\bar{k}^a$是$k^a$的类光测地延拓，则4维体元$\varepsilon_{abcd}$在此标架的非零分量

$$\varepsilon_{1234}=\varepsilon_{abcd}m^a\bar{m}^b l^c\bar{k}^d=\varepsilon_{abcd}(\mathrm{i}e_1^a e_2^b e_0^c e_3^d)=\mathrm{i} , \tag{16-6-11}$$

其中第二步用到NP标架与正交归一标架$\{e_0^a,e_1^a,e_2^a,e_3^a\}$的关系，即式(8-7-1). 由式(16-6-11)得

$$\varepsilon_{abcd}=\varepsilon_{1234}\bar{m}_a\wedge m_b\wedge(-\bar{k}_c)\wedge(-l_d)=\mathrm{i}\,\bar{m}_a\wedge m_b\wedge\bar{k}_c\wedge l_d , \tag{16-6-12}$$

故

$$\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d=\mathrm{i}\,[(\bar{m}_a\wedge m_b)\wedge(\bar{k}_c\wedge l_d)]l^c\bar{k}^d=\mathrm{i}\,\bar{m}_a\wedge m_b , \tag{16-6-13}$$

与$\varepsilon_{ab}=\mathrm{i}\bar{m}_{\tilde{a}}\wedge m_{\tilde{b}}$[式(16-6-3)]联立得

$$\varepsilon_{ab}=i^*(\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d) . \tag{16-6-14}$$

上式是Δ上的张量场等式，沿k^a求李导数给出

$$\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=\mathscr{L}_k[i^*(\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d)]=i^*\mathscr{L}_{\bar{k}}(\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d)=i^*[(\mathscr{L}_{\bar{k}}\varepsilon_{abcd})l^c\bar{k}^d+\varepsilon_{abcd}(\mathscr{L}_{\bar{k}}l^c)\bar{k}^d],\tag{16-6-15}$$

其中第二步用到 $\mathscr{L}_k\circ i^*=i^*\circ\mathscr{L}_{\bar{k}}$ [式(16-3-10)], 第三步用到 $\mathscr{L}_{\bar{k}}\bar{k}^d=0$.

对 U 上的 4 维标量场等式 $g_{ab}\bar{k}^a l^b=-1$ 两边沿 $\bar{k}^a$ 求李导数又有

$$0=(\mathscr{L}_{\bar{k}}g_{ab})\bar{k}^a l^b+g_{ab}\bar{k}^a\mathscr{L}_{\bar{k}}l^b=(\nabla_b\bar{k}_a+\nabla_a\bar{k}_b)\bar{k}^a l^b+\bar{k}_b\mathscr{L}_{\bar{k}}l^b=-\kappa_{(\bar{k})}+\bar{k}_b\mathscr{L}_{\bar{k}}l^b,\tag{16-6-16}$$

[其中第三步用到 $\bar{k}^a l^b\nabla_b\bar{k}_a=l^b\nabla_b(\bar{k}^a\bar{k}_a)/2=0$ 以及 $\bar{k}^a\nabla_a\bar{k}_b=\kappa_{(\bar{k})}\bar{k}_b$.] 令 $L^b\equiv\mathscr{L}_{\bar{k}}l^b$, 则由式(16-6-16)得

$$\kappa_{(\bar{k})}=\bar{k}_b L^b=\bar{k}_b(L^1m^b+L^2\bar{m}^b+L^3l^b+L^4\bar{k}^b)=-L^3,$$

故

$$\mathscr{L}_{\bar{k}}l^b\equiv L^b=L^1m^b+L^2\bar{m}^b-\kappa_{(\bar{k})}l^b+L^4\bar{k}^b.\tag{16-6-17}$$

不难证明(练习) $\mathscr{L}_{\bar{k}}\varepsilon_{abcd}=(\nabla_e\bar{k}^e)\varepsilon_{abcd}$, 把此式及上式在 Δ 上取值再代入式(16-6-15)得

$$\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=[(\nabla_e\bar{k}^e)|_\Delta-\kappa_{(k)}]\,i^*(\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d)+L^1|_\Delta\, i^*(\varepsilon_{abcd}m^c\bar{k}^d)+L^2|_\Delta\, i^*(\varepsilon_{abcd}\bar{m}^c\bar{k}^d).\tag{16-6-18}$$

仿照式(16-6-13)的推导又可得 $\varepsilon_{abcd}m^c\bar{k}^d=-\mathrm{i}(m_a\bar{k}_b-\bar{k}_a m_b)$, 再利用 $i^*\bar{k}_a=0$ 便有 $i^*(\varepsilon_{abcd}m^c\bar{k}^d)=0$, 故式(16-6-18)右边第二项为零, 同理可证第三项也为零. 于是

$$\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=[(\nabla_e\bar{k}^e)|_\Delta-\kappa_{(k)}]\,i^*(\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d)=[(g^{ef}\bar{B}_{ef})|_\Delta-\kappa_{(k)}]\,\varepsilon_{ab}=\hat{\theta}_{(\bar{k})}|_\Delta\,\varepsilon_{ab}=\hat{\theta}_{(k)}\varepsilon_{ab},$$

其中第二步用到 $\bar{B}_{ef}\equiv\nabla_f\bar{k}_e$ 及式(16-6-14), 第三、四步依次用到式(16-2-39)和(16-3-35).

(3)证明留做习题. 提示: 由第 5 章习题 6(a) 得 $\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=k^c(\mathrm{d}\varepsilon)_{cab}$, 再由本命题之(2) 又得 $\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=0\Leftrightarrow\hat{\theta}_{(k)}=0$, 故欲完成本习题只须证明

$$k^c(\mathrm{d}\varepsilon)_{cab}=0\ \Leftrightarrow\ (\mathrm{d}\varepsilon)_{abc}=0,$$

其中 $\Leftarrow$ 是显然的, 而 $\Rightarrow$ 则可借 Δ 上的局域标架场 $\{e_0^a\equiv k^a, e_1^a, e_2^a\}$ 证实. □

以上两个命题对任意类光超曲面 Δ 成立. 如果 Δ 为非涨视界, 则 $\hat{\theta}_{(k)}=0$, 由命题 16-6-2(2)便可得出 $\mathscr{L}_k\varepsilon_{ab}=0$(面积不变)的结论. 此外, 当 Δ 为非涨视界时还可在其上定义适配导数算符 $\mathscr{D}_a$, 下述命题说明 $\mathscr{D}_c\varepsilon_{ab}$ 必定为零.

命题 16-6-3　非涨视界 Δ 上的适配"面元" ε_{ab} 满足

$$\mathscr{D}_c\varepsilon_{ab}=0.\tag{16-6-19}$$

证明　设 $\{e_0^a\equiv k^a, e_1^a, e_2^a\}$ 是 Δ 上切于 Δ 的局域标架场, 满足

$$g_{ab}e_1^a e_1^b = g_{ab}e_2^a e_2^b = 1, \quad g_{ab}e_1^a e_2^b = 0, \tag{16-6-20}$$

则 ε_{ab} 可用对偶标架场 $\{e_a^0, e_a^1, e_a^2\}$ 展开为

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{01}e_a^0 \wedge e_b^1 + \varepsilon_{02}e_a^0 \wedge e_b^2 + \varepsilon_{12}e_a^1 \wedge e_b^2 = \varepsilon_{12}e_a^1 \wedge e_b^2, \tag{16-6-21}$$

其中第二步是因为 $k^a\varepsilon_{ab}=0$ 导致 $\varepsilon_{01}=\varepsilon_{02}=0$. $\forall p\in\Delta$, 令 S 为含 p 且与 $e_1^a|_p$, $e_2^a|_p$ 相切的截面, 则 $\{e_1^a|_p, e_2^a|_p\}$ 构成 S 在 p 点的切空间的正交归一基, 其对偶基为 $\{i_S{}^*e_a^1|_p, i_S{}^*e_a^2|_p\}$, 故由命题 16-6-1(b)可知 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}|_p = i_S{}^*(e_a^1\wedge e_b^2)|_p$ (适当安排 e_1^a, e_2^a 的顺序总可消除等号右边原有的 ± 号), 与式(16-6-21)结合便知 $\varepsilon_{12}|_p=1$. 再由 p 的任意性便得

$$\varepsilon_{ab} = e_a^1 \wedge e_b^2. \tag{16-6-22}$$

从 $e_0^a \equiv k^a$ 出发, 利用式(16-5-16)又有

$$\mathscr{D}_b e_0^a = \mathscr{D}_b k^a = \omega_b k^a = \omega_b e_0^a, \tag{16-6-23}$$

下面要用到 $\mathscr{D}_b e_a^\alpha$ $(\alpha=0,1,2)$ 的表达式, 它包含三个 (0,2) 型张量场 $\mathscr{D}_b e_a^0$, $\mathscr{D}_b e_a^1$, $\mathscr{D}_b e_a^2$, 统一记作 T_{ba}^α, 即 $T_{ba}^\alpha \equiv \mathscr{D}_b e_a^\alpha$, 可用 $\{e_a^0, e_a^1, e_a^2\}$ 展开为

$$\mathscr{D}_b e_a^\alpha \equiv T_{ba}^\alpha = T_{\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_a^\gamma = \Omega_{\gamma b}^\alpha e_a^\gamma, \quad 其中\ \Omega_{\gamma b}^\alpha \equiv T_{\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta. \tag{16-6-24}$$

用 $\mathscr{D}_b$ 作用于 $e_c^\alpha e_\beta^c = \delta_\beta^\alpha$, 利用式(16-6-24)得一等式, 再缩并 e_α^a 便给出

$$\mathscr{D}_b e_\beta^a = -\Omega_{\beta b}^\alpha e_\alpha^a. \tag{16-6-25}$$

[从上式可以看出 $\Omega_{\beta b}^\alpha$ 其实就是$(\Delta, \mathscr{D}_a)$上的联络 1 形式, 即§5.7 的 $\omega_\beta{}^\alpha{}_b$, 因为由式(5-7-3) 和 (5-7-4) 可推出 $\nabla_b(e_\beta)^a = -\omega_\beta{}^\alpha{}_b e_\alpha^a$.] 取式(16-6-25)中的 β 为 0 并与式(16-6-23)比较又得

$$\Omega_{0b}^0 = -\omega_b, \qquad \Omega_{0b}^i = 0, \ i=1,2,$$

代入式(16-6-24)便有

$$\mathscr{D}_b e_a^0 = -\omega_b e_a^0 + \Omega_{jb}^0 e_a^j, \qquad \mathscr{D}_b e_a^i = \Omega_{jb}^i e_a^j. \tag{16-6-26}$$

由式(16-6-2)可以证明(习题)

$$h_{ab} = \delta_{ij}e_a^i e_b^j, \tag{16-6-27}$$

代入 $\mathscr{D}_c h_{ab}=0$ ($\mathscr{D}_c$ 与 h_{ab} 适配)得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{D}_c(\delta_{ij}e_a^i e_b^j) = \delta_{ij}(\mathscr{D}_c e_a^i)e_b^j + \delta_{ij}e_a^i \mathscr{D}_c e_b^j \\ &= \delta_{ij}\Omega_{kc}^i e_a^k e_b^j + \delta_{ij}e_a^i \Omega_{kc}^j e_b^k = (\delta_{jk}\Omega_{ic}^k + \delta_{ik}\Omega_{jc}^k)e_a^i e_b^j, \end{aligned}$$

故 $\delta_{jk}\Omega^k_{ic}+\delta_{ik}\Omega^k_{jc}=0$. 依次令 $i=j=1$ 及 $i=j=2$ 给出

$$\Omega^1_{1c}=0, \quad \Omega^2_{2c}=0. \tag{16-6-28}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_c\varepsilon_{ab}&=2\mathscr{D}_c(e^1_{[a}e^2_{b]})=2(\mathscr{D}_c e^1_{[a})e^2_{b]}+2e^1_{[a}\mathscr{D}_{|c|}e^2_{b]}\\&=2\Omega^1_{jc}e^j_{[a}e^2_{b]}+2e^1_{[a}\Omega^2_{j|c|}e^j_{b]}=2(\Omega^1_{1c}+\Omega^2_{2c})e^1_{[a}e^2_{b]}=0,\end{aligned}$$

其中第一、三、五步依次用到式(16-6-22)、(16-6-26)、(16-6-28). □

在结束本小节前先证明一个非常有用的引理.

引理 16-6-4 设 Δ 是时空 (M,g_{ab}) 中的类光超曲面, $k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$ 是任一类光法矢场, 选 λ 的零值使所有等 λ 面的集合 $\{S(\lambda)\}$ 构成 Δ 的一个分层,① 则对 Δ 上的任一2形式场 μ_{ab} 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_{S(\lambda)}\mu_{ab}=\int_{S(\lambda)}\mathscr{L}_k\mu_{ab}. \tag{16-6-29}$$

证明 设 $\{\rho_\lambda:\Delta\to\Delta\}$ 是 $k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$ 产生的单参微分同胚族, 如能证明

$$\int_{S(\lambda+\Delta\lambda)}\mu_{ab}=\int_{S(\lambda)}\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mu_{ab}, \tag{16-6-30}$$

则从下式可知本引理证毕:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_{S(\lambda)}\mu_{ab}&\equiv\lim_{\Delta\lambda\to0}\frac{1}{\Delta\lambda}\left(\int_{S(\lambda+\Delta\lambda)}\mu_{ab}-\int_{S(\lambda)}\mu_{ab}\right)=\lim_{\Delta\lambda\to0}\frac{1}{\Delta\lambda}\int_{S(\lambda)}(\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mu_{ab}-\mu_{ab})\\&=\int_{S(\lambda)}\lim_{\Delta\lambda\to0}\frac{1}{\Delta\lambda}(\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mu_{ab}-\mu_{ab})=\int_{S(\lambda)}\mathscr{L}_k\mu_{ab}.\end{aligned}$$

所以余下的任务就是补证式(16-6-30). 在某层上选局域坐标 θ,φ 并用类光母线携带至 Δ 上, 则 $\{x^0\equiv\lambda, x^1\equiv\theta, x^2\equiv\varphi\}$ 是 Δ 上的局域坐标系, 而且任一 $S(\lambda)$ 上的 $(\partial/\partial\theta)^a$ 和 $(\partial/\partial\varphi)^a$ 都切于 $S(\lambda)$. 把 $\mu\equiv\mu_{ab}$ 用此系的对偶基矢展开得

$$\mu=f\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\lambda\wedge\alpha,\quad 其中 f\equiv\mu_{12},\ \alpha\equiv\mu_{01}\mathrm{d}\theta+\mu_{02}\mathrm{d}\varphi.$$

由于 $\mathrm{d}\lambda$ [作为等 λ 面 $S(\lambda)$ 的法余矢]在 $S(\lambda)$ 上的限制为零, 所以 $\int_{S(\lambda)}\mathrm{d}\lambda\wedge\alpha=0$, 因而 $\int_{S(\lambda)}\mu=\int_{S(\lambda)}f\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$. 此式的 $S(\lambda)$ 改为 $S(\lambda+\Delta\lambda)$ 当然也成立, 于是欲证式(16-6-30)只须证明

---

① 此分层还应满足: (a)所有 $S(\lambda)$ 都同胚于某个紧致的2维流形; (b) k^a 的每一不可延积分曲线与每一 $S(\lambda)$ 有且仅有一个交点; (c) k^a 不切于任一 $S(\lambda)$.

$$\int_{S(\lambda+\Delta\lambda)} f\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi=\int_{S(\lambda)}[\rho_{\Delta\lambda}{}^*(f\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi)+\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda\wedge\alpha)]\,. \qquad (16\text{-}6\text{-}31)$$

上式右边的 $\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda\wedge\alpha)$ 可借式(4-1-8)改写为 $\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda)\wedge\rho_{\Delta\lambda}{}^*\alpha$，而

$$\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda)=\mathrm{d}(\rho_{\Delta\lambda}{}^*\lambda)=\mathrm{d}(\lambda+\Delta\lambda)=\mathrm{d}\lambda\,,$$

[第一步用到式(15-7-7)，即对 $\psi: N\to M$ 及 M 上函数 F 有 $\mathrm{d}(\psi^*F)=\psi^*(\mathrm{d}F)$；末步是因为 $\Delta\lambda$ 是常数.] 故

$$\int_{S(\lambda)}\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda\wedge\alpha)=\int_{S(\lambda)}\rho_{\Delta\lambda}{}^*(\mathrm{d}\lambda)\wedge\rho_{\Delta\lambda}{}^*\alpha=\int_{S(\lambda)}\mathrm{d}\lambda\wedge\rho_{\Delta\lambda}{}^*\alpha=0\,,$$

其中末步仍是因为 $\mathrm{d}\lambda$ 在 $S(\lambda)$ 上的限制为零. 可见欲证式(16-6-31)只须证明

$$\int_{S(\lambda+\Delta\lambda)} f\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi=\int_{S(\lambda)}\rho_{\Delta\lambda}{}^*(f\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi)\,. \qquad (16\text{-}6\text{-}31')$$

上式左边的 f 是3元函数 $f(\lambda,\theta,\varphi)$ 在自变量取值为 $\lambda+\Delta\lambda,\ \theta,\ \varphi$ 时的值，故由形式场的积分定义可知

$$(16\text{-}6\text{-}31')\text{左}=\int\mathrm{d}\theta\int f(\lambda+\Delta\lambda,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$(16\text{-}6\text{-}31')\text{右}=\int_{S(\lambda)}(\rho_{\Delta\lambda}{}^*f)(\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mathrm{d}\theta)\wedge(\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mathrm{d}\varphi)$$

$$=\int_{S(\lambda)}(\rho_{\Delta\lambda}{}^*f)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi=\int\mathrm{d}\theta\int f(\lambda+\Delta\lambda,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

其中第一步用到上册式(4-1-8)；第二步用到式(15-7-7)以及 $\rho_{\Delta\lambda}{}^*\theta=\theta$，$\rho_{\Delta\lambda}{}^*\varphi=\varphi$；第三步是因为

$$(\rho_{\Delta\lambda}{}^*f)|_p=f|_{\rho_{\Delta\lambda}(p)}\,,\quad \forall p\in S(\lambda)\,.$$

于是式(16-6-31′)[因而式(16-6-30)]得证. □

注 2　取 μ_{ab} 为 ε_{ab}，则式(16-6-29)同(16-6-9)结合立即给出式(16-4-1). 这可看作命题 16-4-1 的另一(基于李导数的)证明.

16.6.2　“度规”和适配“面元”的广义逆

本小节介绍 h_{ab} 和 ε_{ab} 的广义“逆”. 这一知识虽然在下面并不直接用到(因而急于往下阅读的读者可以跳过)，但对于理解类光面的反常性质却有裨益.

$h_{ab}\equiv i^*g_{ab}\equiv g_{\tilde{a}\tilde{b}}$ 和 ε_{ab} 都是 $\varDelta$ 上的张量场. h_{ab} 由于退化而无逆，但不妨把 $\varDelta$ 上满足

$$h_{ac}h_{bd}h^{cd}=h_{ab} \qquad (16\text{-}6\text{-}32)$$

的 h^{ab} 称为 h_{ab} 的**广义逆**. 此逆很不唯一, 因为如果 h^{ab} 是广义逆,

则

$$h'^{ab} \equiv h^{ab} + v^{(a}k^{b)} \quad (\text{其中 } v^a \text{ 是切于 } \Delta \text{ 的任一矢量场})$$

也是. 在 Ashtekar and Krishnan(2004) 中, k^a 的膨胀 $\hat{\theta}_{(k)}$ 就是用 h^{ab} 按下式定义的:

$$\hat{\theta}_{(k)} := h^{ab}\nabla_a k_b . \quad (\text{选任一广义逆都得同一 } \hat{\theta}_{(k)}) \tag{16-6-33}$$

此定义与本书小节 16. 3. 3 借用延拓的定义一致.

设 v^a 是切于类光面 Δ 的矢量场, 用 h_{ab} 降指标得 $v_a \equiv h_{ab}v^b$. 如果 h_{ab} 是度规(不退化), 自然有 $v^a = h^{ab}v_b$, 其中 h^{ab} 是 h_{ab} 之逆. 然而, 由于 h_{ab} 退化, 其广义逆 h^{ab} 有无限多个, 故 $v^a = h^{ab}v_b$ 一般不对, 代之而成立的公式见如下命题.

命题 16-6-5　设 h^{ab} 是 h_{ab} 的广义逆, 则对切于 Δ 的任一矢量场 v^a 有 Δ 上的标量场 μ 使

$$v^a = h^{ab}v_b + \mu k^a, \quad \text{其中 } v_b \equiv h_{ab}v^a . \tag{16-6-34}$$

证明　习题. □

注 3　对符号 v_b 应该小心, 因为它既可能代表 $h_{ab}v^a$ (如上式)又可能代表 $g_{ab}v^a$, 两者不等. 作为一个极端的例子, 我们来看 $v^a \equiv k^a$ 的情况. 这时显然 $g_{ab}k^a \neq 0$, 但由式(16-6-27)却有

$$h_{ab}k^a = 0 . \tag{16-6-35}$$

再讨论适配"面元" ε_{ab} . 仿照式(16-6-32), 我们把满足

$$\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\varepsilon^{cd} = \varepsilon_{ab} \tag{16-6-36}$$

的 ε^{ab} 称为 ε_{ab} 的**广义"逆"**. 广义"逆" ε^{ab} 不但存在, 而且很多. 下述命题描写多到什么程度.

命题 16-6-6　若 ε^{ab} 是 ε_{ab} 的广义"逆", 则 ε'^{ab} 是 ε_{ab} 的广义"逆"的充要条件是 Δ 上有切矢场 v^a 使

$$\varepsilon'^{ab} = \varepsilon^{ab} + v^{[a}k^{b]} . \tag{16-6-37}$$

证明

(A)充分性. 由式(16-6-37)及 $k^d\varepsilon_{bd} = 0$ 得

$$\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\varepsilon'^{cd} = \varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\varepsilon^{cd} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}(v^c k^d - k^c v^d) = \varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\varepsilon^{cd} = \varepsilon_{ab} ,$$

可见 ε'^{ab} 也是广义"逆".

(B)必要性. 设ε'^{ab}也是广义"逆", 令$\beta^{ab} \equiv \varepsilon'^{ab} - \varepsilon^{ab}$, 则$\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\beta^{cd} = 0$. 取$\Delta$上的局域标架场$\{k^a, x^a, y^a\}$(要求$x^a, y^a$切于$\Delta$且$g_{ab}x^a x^b = g_{ab}y^a y^b = 1$, $g_{ab}x^a y^b = 0$), 仿照式(5-1-6)可把β^{ab}展开为

$$\beta^{ab} = C_1 x^{[a}k^{b]} + C_2 y^{[a}k^{b]} + C_3 x^{[a}y^{b]},$$

代入$\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}\beta^{cd} = 0$并利用$k^d\varepsilon_{bd} = 0$得$C_3\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}x^{[c}y^{d]} = 0$. 再利用

$$\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}x^{[c}y^{d]}|_p \neq 0, \quad \forall p \in \Delta \quad (稍后将补证) \tag{16-6-38}$$

便得$C_3 = 0$, 因而$\beta^{ab} = v^{[a}k^{b]}$, 其中$v^a \equiv C_1 x^a + C_2 y^a$.

最后补证式(16-6-38). $\forall p \in \Delta$令$A_a \equiv \varepsilon_{ac}x^c|_p$, $B_b \equiv \varepsilon_{bd}y^d|_p$, 则

$$2(\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}x^{[c}y^{d]})|_p = A_a \wedge B_b .$$

如能证明$A_a, B_a, l_{\tilde{a}}|_p$三者线性无关, 则$\{A_a, B_a, l_{\tilde{a}}|_p\}$构成$p$点的一个对偶基底, 于是$A_a \wedge B_b$[作为$p$点的(0,2)型张量组成的空间的一个基矢]必定非零, 从而式(16-6-38)成立. 为证$A_a, B_a, l_{\tilde{a}}|_p$线性无关, 可设$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$使$\alpha A_a + \beta B_a + \gamma l_{\tilde{a}}|_p = 0$, 以$k^a|_p$缩并得$\gamma = 0$, 故$\alpha A_a + \beta B_a = 0$, 即$\varepsilon_{ac}(\alpha x^c + \beta y^c)|_p = 0$, 于是命题 16-6-2(1)保证$\exists \varsigma \in \mathbb{R}$使

$$\alpha x^a|_p + \beta y^a|_p = \varsigma k^a|_p ,$$

再由$x^a|_p, y^a|_p, k^a|_p$的线性无关性就有$\alpha = \beta = 0$. 这就证明了$A_a, B_a, l_{\tilde{a}}|_p$线性无关.

□

命题 16-6-7　设ε^{ab}是ε_{ab}的广义"逆", 则对Δ的切矢场v^a有Δ上的标量场ς使

$$v^a = \varepsilon^{ab}\alpha_b + \varsigma k^a, \quad 其中\ \alpha_b \equiv \varepsilon_{ab}v^a . \tag{16-6-39}$$

证明　习题. 提示: 利用命题 16-6-2(1).　□

16.6.3　弱孤立视界上的无限小对称性

本小节拟在小节 16.5.4 简介对称性的基础上做进一步研究.

任一广义黎曼空间(M, g_{ab})上的全体对称性构成群, 此即等度规群. 等度规群G的李代数$\mathscr{G}$称为等度规李代数, 其每一元素都是(M, g_{ab})上的 Killing 矢量场. 虽然弱孤立视界$(\Delta, [k])$由于"度规"退化而谈不上 Killing 矢量场, 但其k^a很像 Killing 矢量场[当k^a完备时, 它产生的单参微分同胚群的每一群元都是一个对称性(见命题 16.5.5)], 因而可被称为$(\Delta, [k])$上的一个无限小对称性. 一般地

说, $(\Delta,[k])$ 上的无限小对称性可定义如下:

定义 1　弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 上的矢量场 ξ^a 称为一个**无限小对称性**, 若它产生的单参微分同胚族 $\{\rho_t\}$ 的每一元素 ρ_t 都满足如下的"三保"条件[见式(16-5-46)]:

$$(a)\rho_t^* h_{ab} = h_{ab}, \quad (b)\rho_t^* \omega_a = \omega_a, \quad (c)\rho_{t*} k^a = c(t) k^a, \tag{16-6-40}$$

其中 $c(t)$ 为 Δ 上的非零常数, 但可因 t 而异.

由李导数的定义自然有

$$\rho_t^* h_{ab} = h_{ab} \Rightarrow \mathscr{L}_\xi h_{ab} = 0, \quad \rho_t^* \omega_a = \omega_a \Rightarrow \mathscr{L}_\xi \omega_a = 0, \tag{16-6-41}$$

而且上两式在 $\Rightarrow$ 改为 $\Leftarrow$ 后也成立(请读者自证). 然而 $\mathscr{L}_\xi k^a$ 是否为零的问题却要复杂一些. 首先证明如下命题:

命题 16-6-8　设 ξ^a 产生的单参微分同胚族 $\{\rho_t\}$ 的每一元素 ρ_t 都满足式(16-6-40), 则 $\exists B_\xi \in \mathbb{R}$ 使

$$(a)\ \mathscr{L}_\xi k^a = B_\xi k^a, \quad (b)\rho_{t*} k^a = e^{-B_\xi t} k^a. \tag{16-6-42}$$

证明　由 ρ_t 是对称性可知 $\rho_{t*} k^a = c(t) k^a$, 即

$$\rho_{t*}(k^a|_{\rho_t^{-1}(p)}) = c(t) k^a|_p, \quad \forall p \in \Delta. \tag{16-6-43}$$

从上式得

$$\rho_{t+s*}(k^a|_{\rho_{t+s}^{-1}(p)}) = c(t+s) k^a|_p. \tag{16-6-44}$$

令 $p' \equiv \rho_t^{-1}(p)$, 则

$$\rho_{t+s}^{-1}(p) = (\rho_t \circ \rho_s)^{-1}(p) = (\rho_s^{-1} \circ \rho_t^{-1})(p) = \rho_s^{-1}(\rho_t^{-1}(p)) = \rho_s^{-1}(p'),$$

将式(16-6-43)的 t 及 p 分别改为 s 及 p' 便有

$$\rho_{s*}(k^a|_{\rho_{t+s}^{-1}(p)}) = c(s) k^a|_{\rho_t^{-1}(p)}. \tag{16-6-45}$$

再以 ρ_{t*} 作用于上式两边, 注意到 $\rho_{t*} \circ \rho_{s*} = (\rho_t \circ \rho_s)_* = \rho_{t+s*}$ 及式(16-6-43), 又得

$$\rho_{t+s*}(k^a|_{\rho_{t+s}^{-1}(p)}) = c(s)\rho_{t*}(k^a|_{\rho_t^{-1}(p)}) = c(s)c(t) k^a|_p, \tag{16-6-46}$$

与式(16-6-44)对比可知

$c(t+s) = c(t)c(s)$ 对参数取值范围内的任意 t, s 成立.

上式是二元函数等式, 在 $s=0$ 处对 s 求偏导数给出 $c'(t) = -B_\xi c(t)$, 其中 $B_\xi \equiv -c'(0)$. 由 $\rho_{t*} k^a = c(t) k^a$ 不难看出 $c(0) = 1$, 再以此为初值求解常微分方程 $c'(t) = -B_\xi c(t)$ 得 $c(t) = e^{-B_\xi t}$, 由此便得式(16-6-42b). 注意到 $\rho_t^* = \rho_{-t*}$, 由李导数定义又得式

(16-6-42a). □

基于上述讨论, 我们找到弱孤立视界上无限小对称性的等价定义:

定义 2 弱孤立视界$(\varDelta,[k])$上的矢量场ξ^a称为一个**无限小对称性**, 若

(a) $\mathscr{L}_\xi h_{ab}=0$， (b) $\mathscr{L}_\xi \omega_a=0$， (c) $\mathscr{L}_\xi k^a=B_\xi k^a$，其中$B_\xi$为$\varDelta$上的常数. (16-6-47)

k^a显然是一个无限小对称性, 因为式(16-5-4)及(16-5-42′)分别给出$\mathscr{L}_k h_{ab}=0$及$\mathscr{L}_k \omega_a=0$, 而$\mathscr{L}_k k^a=0$则表明k^a也满足式(16-6-47c). 事实上, k^a是无限小对称性的最简单、最重要的例子.

不难证明(习题)$(\varDelta,[k])$上的全体无限小对称性ξ^a的集合是矢量空间, 再以矢量场对易子为李括号便成为李代数, 称为$(\varDelta,[k])$的**对称性李代数**, 记作$\mathscr{S}$. 因为不少弱孤立视界的k^a都不是完备矢量场(其类光母线的参数取值范围不能遍及全$\mathbb{R}$, 例如图16-3), 所以要注意区分k^a完备和k^a不完备这两种情况. 这时有必要回忆广义黎曼空间(M,g_{ab})的对称性的有关结论. 仍以G和$\mathscr{G}$分别代表(M,g_{ab})的等度规群和等度规李代数, 以$\mathscr{K}$代表(M,g_{ab})上全体Killing场的集合, 则由定理G-7-1(中册附录G)可知: 当每一Killing场都是完备矢量场时$\mathscr{G}=\mathscr{K}$(李代数同构), 故

$$\dim G=\dim\mathscr{G}=\dim\mathscr{K}\ ; \tag{16-6-48}$$

当Killing场不都完备时$\mathscr{G}\subset\mathscr{K}$, $\mathscr{G}\neq\mathscr{K}$ ($\mathscr{G}$是$\mathscr{K}$的真子代数), 故

$$\dim G=\dim\mathscr{G}<\dim\mathscr{K}\ . \tag{16-6-49}$$

类似地, 若以$G_\varDelta$代表由$(\varDelta,[k])$的全体对称性构成的李群, 则当k^a不完备时也有$\dim G_\varDelta<\dim\mathscr{S}$. 以下只讨论$\dim\mathscr{S}$.

$\xi^a\in\mathscr{S}$称为**保母线无限小对称性**, 若ξ^a的积分曲线与母线重合. 以$\mathscr{S}_1\subset\mathscr{S}$代表全体保母线无限小对称性的集合, 则当$c$为常数时显然有$ck^a\in\mathscr{S}_1$. 但是$\mathscr{S}_1$的元素未必都可表为$ck^a$, 因为也可能在$\varDelta$上存在函数$f$使$fk^a$是无限小对称性, 从而有$fk^a\in\mathscr{S}_1$; 又由于$\mathscr{S}_1$的元素必取$fk^a$的形式, 所以$\mathscr{S}_1=\{fk^a\in\mathscr{S}\}$. $\mathscr{S}_1$显然是$\mathscr{S}$的子代数, 更有甚者, $\mathscr{S}_1$其实还是$\mathscr{S}$的理想, 因为下式表明它满足理想的定义(见§G.3定义4):

$$[\xi,fk]^a=\mathscr{L}_\xi(fk^a)=f\mathscr{L}_\xi k^a+k^a\mathscr{L}_\xi f=(B_\xi f+\mathscr{L}_\xi f)k^a\in\mathscr{S}_1,\quad \forall\xi^a\in\mathscr{S}, fk^a\in\mathscr{S}_1.$$

其中第三步用到式(16-6-47c).

利用理想$\mathscr{S}_1\subset\mathscr{S}$就可构造商代数(见定理G-3-4)$\hat{\mathscr{S}}\equiv\mathscr{S}/\mathscr{S}_1$. 注意到

$$\dim\mathscr{S}=\dim\mathscr{S}_1+\dim\hat{\mathscr{S}},$$

为求$\dim\mathscr{S}$只须分别求得$\dim\mathscr{S}_1$和$\dim\hat{\mathscr{S}}$. 先看$\mathscr{S}_1$, 首先要弄清当函数f满足什

么条件时才有 $fk^a \in \mathscr{S}_1$. 由于 $fk^a \in \mathscr{S}_1$ 的充要条件是式(16-6-47), 即

(a) $\mathscr{L}_{fk} h_{ab} = 0$,　(b) $\mathscr{L}_{fk}\omega_a = 0$,　(c) $\mathscr{L}_{fk} k^a = B_{fk} k^a$, 其中 B_{fk} 为 Δ 上的常数, (16-6-50)

所以只须逐一查明上式的三个式子对 f 各给出什么限制. 式(16-6-50a)不提供任何限制, 因为由下式可知 $\mathscr{L}_{fk} h_{ab}$ 自动为零:

$$\mathscr{L}_{fk} h_{ab} = 2h_{c(b}\mathscr{D}_{a)}(fk^c) = 2f h_{c(b}\mathscr{D}_{a)}k^c + 2k^c h_{c(b}\mathscr{D}_{a)}f = 2f h_{c(b}k^c\omega_{a)} = 0\,,$$

其中第一步用到 $\mathscr{D}_c h_{ab} = 0$, 第三、四步都用到 $k^c h_{cb} = 0$ [式(16-6-35)]. 再看式(16-6-50c). 由该式得 $B_{fk}k^a = -\mathscr{L}_k(fk^a) = -k^a\mathscr{L}_k f$, 故

$$\mathscr{L}_k f = -B_{fk} = \text{常数}. \tag{16-6-51}$$

这就是式(16-6-50c)对 f 给出的限制. 最后, 式(16-6-50b)导致

$$0 = \mathscr{L}_{fk}\omega_a = \mathrm{d}_a(fk^b\omega_b) + (\mathrm{d}\omega)_{ba}k^b f = \mathrm{d}_a(f\kappa_{(k)}) = \kappa_{(k)}\mathscr{D}_a f\,, \tag{16-6-52}$$

其中第二步用到第 5 章习题 6(a), 第三步首先用到 $k^b\omega_b = \kappa_{(k)}$ [式(16-5-18)], 然后用到式(16-5-33)及 $k^b\varepsilon_{ab} = 0$, 第四步用到第零定律.

对非极端的弱孤立视界有 $\kappa_{(k)} \neq 0$, 故式(16-6-52)要求 $\mathscr{D}_a f = 0$, 即 f 在 Δ 上为常数, 于是 $\mathscr{S}_1 = \{ck^a \mid c \in \mathbb{R}\}$, 因而 $\dim\mathscr{S}_1 = 1$. 然而极端弱孤立视界的 $\kappa_{(k)} = 0$, 使式(16-6-52)成为恒等式, 因而式(16-6-50b)对 f 并不给出任何限制, 于是式(16-6-50)对 f 的唯一限制表现为式(16-6-51). 作为 Δ 上的函数, f 在每条母线 $\gamma(\lambda)$ 上诱导出一元函数 $f(\lambda)$, 其导函数

$$\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a \mathscr{D}_a f = k^a\mathscr{D}_a f = -B_{fk}\,, \quad [\text{末步用到式(16-6-51)}]$$

故

$$f(\lambda) = -B_{fk}\lambda + Y\,, \tag{16-6-53}$$

其中 Y 在整条母线上是任意常数($\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\lambda = 0$), 不同母线的 Y 值可以任选. 可见 Y 的自由性相当于在某截面 S 上任选(光滑)函数. S 上全体(光滑)函数构成无限维矢量(线性)空间, 其每一基矢所决定的 f 与 k^a 之积都是 $\mathscr{S}_1$ 的基矢, 所以 $\kappa_{(k)} = 0$ 时 $\dim\mathscr{S}_1 = \infty$.

在讨论 $\dim\hat{\mathscr{S}}$ 之前, 有必要给出弱孤立视界上的无限小轴对称性的定义.

定义 3　弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 上的切矢场 φ^a 称为一个**无限小轴对称性**, 若

(a) φ^a 是无限小对称性;

(b) Δ 有且仅有两条类光母线使 φ^a 在这两条母线上为零(两者与任一截面的交点就是该截面的两“极”), 在这两条母线以外类空;

(c) φ^a 产生的单参微分同胚群 $\{\rho_t : \Delta \to \Delta | t \in \mathbb{R}\}$ 满足: ① $\rho_{2\pi} = \rho_0$; ②不存在 $T \in (0, 2\pi)$ 使 $\rho_T = \rho_0$.

现在就可讨论 $\dim \hat{\mathscr{S}}$. 以 $\hat{\Delta}$ 代表把 Δ 的每条类光母线看作一个元素所构成的集合, 便有投影映射 $\hat{\pi} : \Delta \to \hat{\Delta}$. 用下法给 $\hat{\Delta}$ 定义拓扑: $\hat{O} \subset \hat{\Delta}$ 称为开子集当且仅当 $\hat{\pi}^{-1}[O]$ 是 Δ 的开子集, 则 $\hat{\Delta}$ 成为拓扑空间, 而且同胚于 Δ 的任一截面 S. 设 $i_S : S \to \Delta$ 是定义 S 的包含映射, 记 $\psi \equiv \hat{\pi} \circ i_S$, 则 $\psi : S \to \hat{\Delta}$ 是个同胚, 它把 S 的微分结构带给 $\hat{\Delta}$, 使 $\hat{\Delta}$ 成为 2 维流形(拓扑 2 球面), 而且 $\psi : S \to \hat{\Delta}$ 是微分同胚. 可以证明 $\hat{\Delta}$ 由此获得的微分结构与 S 的选择无关, 还可证明以下两个结论:

结论 1　Δ 上的切矢场 X^a 在 $\hat{\Delta}$ 上自然诱导一个矢量场 $\hat{X}^a$ 当且仅当 Δ 上有函数 σ 使 $\mathscr{L}_k X^a = \sigma k^a$; [证明提示: 参考命题 12-5-8(中册)的证明并利用 $\hat{\pi}_* k^a = 0$.]

结论 2　Δ 上的 $(0,l)$ 型张量场 $T_{a_1 \cdots a_l}$ 在 $\hat{\Delta}$ 上自然诱导一个张量场 $\hat{T}_{a_1 \cdots a_l}$ (满足 $T_{a_1 \cdots a_l} = \pi^* \hat{T}_{a_1 \cdots a_l}$)当且仅当(a) $\mathscr{L}_k T_{a_1 \cdots a_l} = 0$; (b) $T_{a_1 \cdots a_l}$ 的任一指标与 k^a 的缩并为零. (读者不妨把证明当作一个有挑战性的练习.)

下面是结论 2 的两个重要应用例子.

(1)因为 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$, $k^a h_{ab} = 0$, $k^b h_{ab} = 0$, 所以 $\hat{\Delta}$ 上有张量场 $\hat{h}_{ab}$ 使 $h_{ab} = \pi^* \hat{h}_{ab}$. 这个 $\hat{h}_{ab}$ 可充当 $\hat{\Delta}$ 上的度规场.

(2)作为 2 维黎曼空间, $(\hat{\Delta}, \hat{h}_{ab})$ 当然有适配面元 $\hat{\varepsilon}_{ab}$. 由结论 2 可知 Δ 上的张量场 $\varepsilon_{ab} \equiv \pi^* \hat{\varepsilon}_{ab}$ 满足 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0$ 及 $k^a \varepsilon_{ab} = 0$. 这其实就是小节 16.6.1 开头所找到的 ε_{ab}.

设 $\xi^a \in \mathscr{S}$, 则式(16-6-47c)保证 ξ^a 在 $\hat{\Delta}$ 上自然诱导矢量场 $\hat{\xi}^a$. 可以证明如下结论:

$$\mathscr{L}_\xi h_{ab} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_{\hat{\xi}} \hat{h}_{ab} = 0. \qquad (16\text{-}6\text{-}54)$$

上式左边正是式(16-6-47a), 可见 $\xi^a \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{L}_{\hat{\xi}} \hat{h}_{ab} = 0$, 即 $\hat{\xi}^a$ 是 $(\hat{\Delta}, \hat{h}_{ab})$ 上的 Killing 矢量场. 以 $\hat{\mathscr{K}}$ 代表 $(\hat{\Delta}, \hat{h}_{ab})$ 上全体 Killing 场的集合, 便有 $\xi^a \in \mathscr{S} \Rightarrow \hat{\xi}^a \in \hat{\mathscr{K}}$. 另一方面, ξ^a 又在 $\mathscr{S}$ 中挑出了它所在的等价类(类中各元素可差到 k^a 的倍数), 故每一 $\xi^a \in \mathscr{S}$ 又给出一个 $[\xi]^a \in \hat{\mathscr{S}}$. 既然 $\xi^a \in \mathscr{S}$ 同时给出 $\hat{\xi}^a$ 和 $[\xi]^a$, 就可把后两者认同, 因而就有

$$\xi^a \in \mathscr{S} \Rightarrow [\xi]^a \in \hat{\mathscr{K}},$$

这表明 $\hat{\mathscr{S}} \subset \hat{\mathscr{K}}$, 即 $\hat{\mathscr{S}}$ 是 $\hat{\mathscr{K}}$ 的子代数. 以上讨论只用到 ξ^a 满足式(16-6-47a), 但 $\xi^a \in \mathscr{S}$ 还满足式(16-6-47b)和(16-6-47c), 而对 $\hat{\mathscr{K}}$ 的元素则并无这两个额外要求,

因此一般来说$\hat{\mathscr{S}} \neq \hat{\mathscr{K}}$. 注意到$\hat{\mathscr{S}} \subset \hat{\mathscr{K}}$, 为了弄清$\dim\hat{\mathscr{S}}$有多少个可能值, 只须弄清$\hat{\mathscr{K}}$的各种可能维数. 带度规的拓扑2球面$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$只能属于以下三种情况之一[见 Ashtekar et al. (2001)]:

1. $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$有最高对称性, 即有球对称性($\hat{\Delta}$是真正的2球面), 这时$\hat{\mathscr{K}}$李代数同构于$\mathscr{SO}(3)$, 因而$\dim\hat{\mathscr{K}}=3$;

2. $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$有轴对称性而无球对称性, $\hat{\mathscr{K}}$李代数同构于$\mathscr{SO}(2)$, 因而$\dim\hat{\mathscr{K}}=1$;

3. $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$无对称性, 即没有任何Killing矢量场(0场除外), 因而$\dim\hat{\mathscr{K}}=0$.

上述三种情况的划分非常便于$\dim\hat{\mathscr{S}}$的讨论. 在情况1中, 作为$\hat{\mathscr{K}}=\mathscr{SO}(3)$的子代数, $\hat{\mathscr{S}}$既可能同构于$\mathscr{SO}(3)$本身, 又可能同构于其子代数$\mathscr{SO}(2)$, 还可能同构于其平凡子代数$\{0\}$, 因而$\dim\hat{\mathscr{S}}$可取3,1,0中之任一; 情况2只有两种可能性, 即$\dim\hat{\mathscr{S}}$既可能为1又可能为0; 情况3则只有$\dim\hat{\mathscr{S}}=0$这一种可能性. 于是弱孤立视界可依$\dim\hat{\mathscr{S}}$之为3, 为1或为0而分成如下的I, II, III等三种类型, 加上前面关于$\dim\mathscr{S}_1$的结论, 便知每种类型的$\dim\mathscr{S}$还取决于视界是否极端, 即$\kappa_{(k)}$是否为零:

I型视界$(\Delta,[k])$的$\hat{\mathscr{S}}=\mathscr{SO}(3)$(等号代表李代数同构, 下同), 故$\dim\hat{\mathscr{S}}=3$. 当$\kappa_{(k)}\neq 0$时$\dim\mathscr{S}=4$; 当$\kappa_{(k)}=0$时$\dim\mathscr{S}=\infty$.

II型视界$(\Delta,[k])$的$\hat{\mathscr{S}}=\mathscr{SO}(2)$, 故$\dim\hat{\mathscr{S}}=1$. 当$\kappa_{(k)}\neq 0$时$\dim\mathscr{S}=2$; 当$\kappa_{(k)}=0$时$\dim\mathscr{S}=\infty$.

III型视界$(\Delta,[k])$的$\hat{\mathscr{S}}=\{0\}$, 故$\dim\hat{\mathscr{S}}=0$. 当$\kappa_{(k)}\neq 0$时$\dim\mathscr{S}=1$; 当$\kappa_{(k)}=0$时$\dim\mathscr{S}=\infty$.

上述结论可简明地由表16-2示出, 该表也适用于孤立视界(证明从略). 由表看出, 孤立视界与弱孤立视界在$\dim\mathscr{S}$上的区别只在于: 无论极端与否, 各型孤立视界的$\mathscr{S}$都没有无限维的情况. 这同如下事实密切相关: 从一个非涨视界Δ只能造出一个孤立视界, 或者说, 孤立视界的类光法矢场k^a的自由性最多不过是乘一个常数因子$c>0$(见§16.5注5).

注4 I型视界的$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$一定属于情况1(但反之不然), 故有球对称性. II型视界的$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$既可能属于情况2也可能属于情况1, 所以既可能有轴对称性也可能有球对称性. [虽然情况1有$\dim\hat{\mathscr{K}}=3$, 但$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$的Killing场未必满足定义2的条件(b)或(c), 因而未必是无限小对称性(未必属于$\mathscr{S}$).] 由于讨论角动量时很关心截面(S,q_{ab})[而不是$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$]的对称性问题, 所以还有必要弄清$(S,q_{ab})$同$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$的关系. 上面已指出存在微分同胚映射$\psi: S\to\hat{\Delta}$, 其实$\psi$还是$(S,q_{ab})$与$(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$之间的等度规映射, 因为

表 16-2 弱孤立视界和孤立视界的对称性李代数 $\mathscr{S}$ 的维数

	弱孤立视界		孤立视界	
	非极端	极端	非极端	极端
I 型	4 维	∞ 维	4 维	4 维
II 型	2 维	∞ 维	2 维	2 维
III 型	1 维	∞ 维	1 维	1 维

$$q_{ab} \equiv i_S{}^* h_{ab} = i_S{}^*(\hat{\pi}^* \hat{h}_{ab}) = (i_S{}^* \circ \hat{\pi}^*)\hat{h}_{ab} = (\hat{\pi} \circ i_S)^* \hat{h}_{ab} = \psi^* \hat{h}_{ab} .$$

可见各型视界的截面 (S,q_{ab}) 与该型视界的 $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$ 有一样多的对称性，因而 I 型视界的截面 (S,q_{ab}) 有球对称性；II 型视界的截面 (S,q_{ab}) 既可能有球对称性也可能只有轴对称性.

注 5 刚才已讲过 $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$ 和 (S,q_{ab}) 的对称性、两者间的对应关系以及如何据此对视界进行分类. 但是我们最关心的毕竟是视界 (Δ,h_{ab}) 本身的对称性，所以还要说明如何从 $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$ 的对称性得出 (Δ,h_{ab}) 的对称性. 略去细节和证明，此处只想简介结论. 设 $\hat{\xi}^a$ 是 $(\hat{\Delta},\hat{h}_{ab})$ 上的一个 Killing 场，则可按如下三步得到 (Δ,h_{ab}) 上的一个无限小对称性.

(1)在 Δ 上任选截面 S_0，利用 k^a 的单参微分同胚族把 S_0 “携带” 至全 Δ 便得到 Δ 的一个截面族(一个分层) $\{S\}$.

(2)对 $\{S\}$ 中的任一截面 S，利用 $\psi^{-1}: \hat{\Delta} \to S$ 可得到 $\hat{\xi}^a$ 的积分曲线族在 S 上的像曲线族，其切矢场 X^a 便是 (S,q_{ab}) 的一个 Killing 场.

(3) $\{S\}$ 中的所有 S 上的 X^a 构成 Δ 上的一个矢量场 ξ^a，它就是待求的、与 $\hat{\xi}^a$ 对应的无限小对称性，所谓对应是指：ξ^a 在 $\hat{\Delta}$ 上自然诱导的矢量场(按前面的结论 1)正是 $\hat{\xi}^a$.

于是，既然 II 型视界的截面 (S,q_{ab}) 可能有球对称性也可能只有轴对称性(见注 4 末)，而球对称性蕴涵轴对称性，所以 II 型视界 Δ 上必定存在无限小轴对称性矢量场 φ^a，它对定义视界角动量有关键性意义.

由式(16-6-42a)可知无限小对称性 $\xi^a \in \mathscr{S}$ 不一定满足 $\mathscr{L}_\xi k^a = 0$. 然而，下面的命题表明，对无限小轴对称性 φ^a 一定有 $\mathscr{L}_\varphi k^a = 0$.

命题 16-6-9 设 φ^a 是弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 上的无限小轴对称性，则

$$\text{(a)}\ \mathscr{L}_\varphi k^a = 0, \qquad \text{(b)}\ \rho_{t*} k^a = k^a . \tag{16-6-55}$$

证明 φ^a 是命题 16-6-8 的 ξ^a 的特例，故只须证明式(16-6-42)中的 $B_\xi = 0$. 取式(16-6-42b)的 t 为 2π 得 $\rho_{2\pi*} k^a = \mathrm{e}^{-2\pi B_\xi} k^a$，而定义 2 条件 (c) 则导致

$$\rho_{2\pi*}k^a = \rho_{0*}k^a = k^a\,,$$

两式结合便给出 $B_\xi = 0$. □

下面进一步证明, 不但轴对称性 φ^a 满足 $\mathscr{L}_\varphi k^a = 0$, 而且非极端弱孤立视界的任一无限小对称性 ξ^a 都满足 $\mathscr{L}_\xi k^a = 0$.

命题 16-6-10　非极端($\kappa_{(k)} \neq 0$)的弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 上的任一对称性 ρ: $\Delta \to \Delta$ 满足 $\rho_* k^a = k^a$ [即把式(16-5-40)的 $c(t)$ 确定为 1], 从而(由命题 16-6-8)任一无限小对称性 ξ^a 满足 $\mathscr{L}_\xi k^a = 0$.

证明　由式(16-6-40)得 $\rho^*\omega_a = \omega_a$, $\rho_* k^a = ck^a$ $(c \neq 0)$. 以 ρ^* 作用于第二个等式又得 $k^a = c\rho^* k^a$, 故 $\rho^* k^a = \frac{1}{c}k^a$, 于是 $\forall p \in \Delta$ 有

$$(\rho^*\omega_a)(\rho^* k^a)|_p = \omega_a|_p \frac{1}{c}k^a|_p = \frac{1}{c}(\omega_a k^a)|_p = \frac{1}{c}\kappa_{(k)}|_p\,, \tag{16-6-56}$$

另一方面, 上式左边又可表为

$$(\rho^*\omega_a)(\rho^* k^a)|_p = \rho^*(\omega_a|_{\rho(p)})\rho^{-1}{}_*(k^a|_{\rho(p)})$$

$$= \omega_a|_{\rho(p)}\,\rho_*\rho^{-1}{}_*(k^a|_{\rho(p)}) = (\omega_a k^a)|_{\rho(p)} = \kappa_{(k)}|_{\rho(p)} = \kappa_{(k)}|_p\,, \tag{16-6-57}$$

其中第一步用到 $\rho^* = \rho^{-1}{}_*$, 第四步用到 $\kappa_{(k)} = \omega_a k^a$ [式(16-5-18)], 最末一步用到第零定律. 对比式(16-6-56)和(16-6-57)得 $\kappa_{(k)} = \kappa_{(k)}/c$, 当 $\kappa_{(k)} \neq 0$ 时便有 $c = 1$, 因而 $\rho_* k^a = k^a$. □

命题 16-6-11　设 u^a 是非涨视界 Δ 上满足 $\mathscr{L}_u h_{ab} = 0$ 的切矢场, 则

(1)
$$\mathscr{L}_u \varepsilon_{ab} = 0\,; \tag{16-6-58}$$

(2) Δ 上有函数 f 使

$$\varepsilon_{ba}u^b = \mathscr{D}_a f\,. \tag{16-6-59}$$

证明

(1)借用命题 16-6-3 证明中的 3 标架场及求和约定, 由式(16-6-22)得

$$\mathscr{L}_u \boldsymbol{\varepsilon} = \mathscr{L}_u(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2) = (\mathscr{L}_u \boldsymbol{e}^1) \wedge \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^1 \wedge \mathscr{L}_u \boldsymbol{e}^2\,. \tag{16-6-60}$$

另一方面, $e^i_a k^a = e^i_a e^a_0 = 0$ 则导致

$$0 = \mathscr{L}_u(e^i_a k^a) = (\mathscr{L}_u e^i_a)k^a + e^i_a \mathscr{L}_u k^a\,. \tag{16-6-61}$$

由式(16-6-2)易见 $h_{ab}k^b = 0$, 与 $\mathscr{L}_u h_{ab} = 0$ 结合得 $h_{ab}\mathscr{L}_u k^b = \mathscr{L}_u(h_{ab}k^b) = 0$, 再用式(16-6-2)就不难证明 Δ 上存在函数 ν 使 $\mathscr{L}_u k^b = \nu k^b$, 代入式(16-6-61)便有

$$(\mathscr{L}_u e^i_a)k^a = 0 \,. \tag{16-6-62}$$

记 $\chi^i_a \equiv \mathscr{L}_u e^i_a$，则式(16-6-62)可改写为

$$\chi^i_a e^a_0 = 0 \,. \tag{16-6-63}$$

把 χ^i_a 用对偶标架展开为 $\chi^i_a = \chi^i_0 e^0_a + \chi^i_j e^j_a$，与 $e^a_0 = k^a$ 缩并给出 $\chi^i_0 = \chi^i_a e^a_0$，与式(16-6-63)结合便有 $\chi^i_0 = 0$，故 $\chi^i_a = \chi^i_j e^j_a$，即

$$\mathscr{L}_u e^i_a = \chi^i_j e^j_a \,. \tag{16-6-64}$$

将式(16-6-27)代入 $\mathscr{L}_u h_{ab} = 0$ 并利用式(16-6-64)又得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{L}_u(\delta_{ij} e^i_a e^j_b) = \delta_{ij}(\mathscr{L}_u e^i_a) e^j_b + \delta_{ij} e^i_a \mathscr{L}_u e^j_b \\ &= \delta_{ij}\chi^i_k e^k_a e^j_b + \delta_{ij} e^i_a \chi^j_k e^k_b = (\delta_{kj}\chi^k_i + \delta_{ik}\chi^k_j) e^i_a e^j_b \,, \end{aligned}$$

故 $\delta_{ik}\chi^k_j + \delta_{kj}\chi^k_i = 0$. 依次令 $i = j = 1$ 及 $i = j = 2$ 给出 $\chi^1_1 = \chi^2_2 = 0$. 把式(16-6-64)代入式(16-6-60)便得

$$\mathscr{L}_u \boldsymbol{\varepsilon} = \chi^1_j \boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^1 \wedge (\chi^2_j \boldsymbol{e}^j) = \chi^1_1 \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \chi^2_2 \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 = 0 \,.$$

(2)式(16-6-58)导致

$$0 = \mathscr{L}_u \varepsilon_{ab} = \mathrm{d}_a(u^c \varepsilon_{ab}) + u^c(\mathrm{d}\varepsilon)_{cab} = \mathrm{d}_a(u^c \varepsilon_{ab}) \,.$$

[其中第二步用到第5章习题6(a)，第三步用到 $\hat{\theta}_{(k)} = 0$ 及命题 16-6-2(3).] 上式表明 $u^c \varepsilon_{ab}$ 是 Δ 上的闭的1形式场. 因 Δ 同胚于 $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$，其上的闭1形式场都恰当(理由略)，故 Δ 上有函数 f 使 $\varepsilon_{ba} u^b = \mathscr{D}_a f$. □

注6　取本命题的 u^a 为 k^a，则式(16-6-58)成为 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0$，就是说从 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$ 出发可直接推出 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0$. 可见，只要 Δ 为非涨视界(因而 h_{ab} “不变”，请注意无须要求它为弱孤立视界)，取引理16-6-4 的 μ_{ab} 为 ε_{ab} 便知面积不变，从而印证了式(16-5-32)所在段的讲法. 所谓面积不变，是指各个等 λ 面有相同面积，其中 λ 满足 $k^a \equiv (\partial/\partial\lambda)^a$. 但是，如果 S 和 S' 是任意两个给定截面，面积各为 A 和 A'，是否也有 $A' = A$? 式(16-5-1)前曾给出肯定的答案却未加证明，而现在很容易补证：把 $k^a \equiv (\partial/\partial\lambda)^a$ 重新标度化为

$$k'^a = (\partial/\partial\lambda')^a = f k^a \,, \quad 其中 f \equiv \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\lambda' \,.$$

总可选函数 f 使 S 和 S' 成为两张等 λ' 面. 利用“ h_{ab} 不变”对任一类光法矢场成立得 $\mathscr{L}_{k'} h_{ab} = 0$，故 $\mathscr{L}_{k'} \varepsilon_{ab} = 0$，从而就有 $A' = A$.

16.6.4 角动量两个公式的证明

小节16.5.5介绍了Ashtekar等利用协变相空间推导弱孤立视界角动量公式的思路并给出了如下结果(本节重新编号):

$$J_\Delta^{(\phi)} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi^c \omega_c \varepsilon_{ab}\,, \tag{16-6-65}$$

其中 S 是 Δ 的任一截面, φ^c 是弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 上的无限小轴对称性, 而 $J_\Delta^{(\phi)}$ 上标的 ϕ^a 则是式(16-5-51)所在段所要求的那个矢量场, 特别地, $\phi^a|_\Delta = \varphi^a$. 此外, 当时还不加证明地指出两点:

(1) 上式也可用外尔张量的NP标架分量 Ψ_2 等价地表为

$$J_\Delta^{(\phi)} = \frac{1}{4\pi}\int_S f\,\mathrm{Im}(\Psi_2)\varepsilon_{ab}\,,$$

其中 f 由 $\mathscr{D}_a f \equiv \varepsilon_{ba}\varphi^b$ 定义. 现在可以清楚地看到, 由于 φ^b (作为无限小对称性)满足 $\mathscr{L}_\varphi h_{ab} = 0$, 命题 16-6-11(2)保证这样的 f 必定存在.

(2) 如果含 Δ 的某个4维开集 U 上有Killing矢量场 ϕ^a (满足 $\phi^a|_\Delta = \varphi^a$), 则 $J_\Delta^{(\phi)}$ 还可表为如下的Komar积分:

$$J_\Delta^{(\phi)} = \frac{1}{16\pi}\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d\,.$$

注 7 上式的成立条件" $\phi^a|_U$ 是Killing场(即 $\nabla_a\phi_b|_U = \nabla_{[a}\phi_{b]}|_U$)"还可弱化为 $\nabla_a\phi_b|_\Delta = \nabla_{[a}\phi_{b]}|_\Delta$, 见式(16-5-33).

本小节要从式(16-6-65)出发给出后两式的详细证明.

命题 16-6-12 弱孤立视界 $(\Delta,[k])$ 的角动量原始表达式(16-6-65)可以改写为

$$J_\Delta^{(\phi)} = \frac{1}{4\pi}\int_S f\,\mathrm{Im}(\Psi_2)\varepsilon_{ab}\,, \tag{16-6-66}$$

其中 S 是 Δ 的任一截面, f 由 $\mathscr{D}_a f \equiv \varepsilon_{ba}\varphi^b$ 定义, Ψ_2 是外尔张量在NP标架的第2分量.

证明 基本思路:先从式(16-6-65)出发证明

$$J_\Delta^{(\phi)} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \omega_a \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb})\,. \tag{16-6-67}$$

(证明较长, 稍后补写.) 以此式为基础, 式(16-6-66)立即得证:

$$J_\Delta^{(\phi)} = -\frac{1}{8\pi}\int_S \omega_a \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb}) = -\frac{1}{8\pi}\int_S \omega_a \wedge \mathscr{D}_b f = \frac{1}{8\pi}\int_S \mathrm{d}_a f \wedge \omega_b$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_S \mathrm{d}_a(f\omega_b)-\frac{1}{8\pi}\int_S f(\mathrm{d}\omega)_{ab}=-\frac{1}{8\pi}\int_S f(\mathrm{d}\omega)_{ab}=\frac{1}{4\pi}\int_S f\,\mathrm{Im}(\Psi_2)\varepsilon_{ab}\,,$$

其中第二步用到 $\mathscr{D}_a f\equiv\varepsilon_{ba}\varphi^b$，第五步利用 Stokes 定理把 $\int_S \mathrm{d}_a(f\omega_b)$ 变为 $\int_{\partial S} f\omega_b=0$ (拓扑球面边界为空集), 第六步用到式(16-5-33).

余下的工作就是补证式(16-6-67).

φ^a 作为 Δ 上的矢量场挑出了一类特殊截面, 记其任一为 S_φ, 特点就在于 $\varphi^a|_p$ 切于 S_φ $\forall p\in S_\varphi$. 为行文方便, 称这类截面为“切 φ^a 截面”. 我们先证明 $S=S_\varphi$ 时的式(16-6-67), 即

$$J_\Delta^{(\phi)}\equiv-\frac{1}{8\pi}\int_{S_\varphi}\omega_a\wedge(\varphi^c\varepsilon_{cb})\,, \tag{16-6-68}$$

再借助于引理 16-6-4 推广至任意截面 S, 即证明式(16-6-67)本身.

不难验证

$$\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})=\varphi^c\omega_c\varepsilon_{ab}-\omega_a\wedge(\varphi^c\varepsilon_{cb})\,,$$

代入 $S=S_\varphi$ 的式(16-6-65)得

$$J_\Delta^{(\phi)}=-\frac{1}{8\pi}\int_{S_\varphi}\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})-\frac{1}{8\pi}\int_{S_\varphi}\omega_a\wedge(\varphi^c\varepsilon_{cb})\,. \tag{16-6-69}$$

为证明式(16-6-68)只须证明上式右边第一项为零. 根据上册§5.2之末, 积分号内的 $\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})$ 应该理解为它在积分域 S_φ 上的限制, 即 $i_{S_\varphi}{}^*[\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})]$，其中 $i_{S_\varphi}:S_\varphi\to\Delta$ 代表包含映射. 所以为了证明式(16-6-69)右边第一项为零只须证明 $i_{S_\varphi}{}^*[\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})]=0$. 又因为对切于 S_φ 的任意矢量场 s^a, t^a 有

$$s^a t^b i_{S_\varphi}{}^*[\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})]=s^a t^b\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})=s^a t^b\varphi^c i_{S_\varphi}{}^*(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})=0\,,$$

[第二步是因为 φ^c 也切于 S_φ，第三步是因为 $i_{S_\varphi}{}^*(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})$ 是 S_φ 上的 3 形式场而 $\dim S_\varphi=2$.] 所以 $i_{S_\varphi}{}^*[\varphi^c(\omega_c\wedge\varepsilon_{ab})]=0$. 于是式(16-6-68)得证.

最后要从式(16-6-68)出发证明式(16-6-67). 设 $k^a\in[k]$, 对指定的两个截面 S 和 S_φ, 总有 Δ 上的标量场 σ 使得由 σk^a 产生的单参微分同胚族 $\{\rho_t:\Delta\to\Delta\}$ 满足 $\rho_1[S_\varphi]=S$，就是说, 总可把 k^a 重参数化为 $\sigma k^a=(\partial/\partial t)^a$ 以保证介于 S 和 S_φ 之间的任一母线的“参数长度” Δt 都为1, 于是引理 16-6-4 适用, 欲从式(16-6-68)证明式(16-6-67)只须证明

$$\int_{S(t)}\mathscr{L}_{\sigma k}\mu_{ab}=0\quad[\text{其中 }\mu_{ab}=\omega_a\wedge(\varphi^c\varepsilon_{cb})] \tag{16-6-70}$$

对参数取值范围内的任一 t 成立.

利用第 5 章习题 6(a) 的公式, 经计算得

$$\mathscr{L}_{\sigma k}\mu_{ab} = \sigma \mathscr{L}_k \mu_{ab} + (\mathscr{D}_a \sigma) \wedge (k^d \mu_{db}) \,. \tag{16-6-71}$$

再用李导数的有关性质又得

$$\mathscr{L}_k \mu_{ab} \equiv \mathscr{L}_k[\omega_a \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb})] = (\mathscr{L}_k \omega_a) \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb}) + \omega_a \wedge (\mathscr{L}_k \varphi^c)\varepsilon_{cb} + \omega_a \wedge (\varphi^c \mathscr{L}_k \varepsilon_{cb}) \,. \tag{16-6-72}$$

因为 k^a 是无限小对称性, 所以可以分别充当式(16-6-47b)和(16-6-58)的 ξ^a 和 u^a, 从而给出 $\mathscr{L}_k \omega_a = 0$ 和 $\mathscr{L}_k \varepsilon_{cb} = 0$, 再由(16-6-55a)又得 $\mathscr{L}_k \varphi^c = 0$, 于是式(16-6-72)导致 $\mathscr{L}_k \mu_{ab} = 0$, 代入式(16-6-71)便有

$$\mathscr{L}_{\sigma k}\mu_{ab} = (\mathscr{D}_a \sigma) \wedge (k^d \mu_{db}) \equiv (\mathscr{D}_a \sigma) \wedge [k^d (\omega_d \wedge \varphi^c \varepsilon_{cb})] \,. \tag{16-6-73}$$

而

$$k^d(\omega_d \wedge \varphi^c \varepsilon_{cb}) = -2k^d \omega_{[d}\varphi^c \varepsilon_{b]c} = -k^d \omega_d \varphi^c \varepsilon_{bc} + k^d \omega_b \varphi^c \varepsilon_{dc} = \kappa_{(k)} \varphi^c \varepsilon_{cb} \,,$$

其中末步用到 $k^d \omega_d = \kappa_{(k)}$ 及 $k^d \varepsilon_{dc} = 0$. 代入式(16-6-73)可知

$$\begin{aligned}\int_{S(t)} \mathscr{L}_{\sigma k}\mu_{ab} &= \int_{S(t)} \kappa_{(k)} (\mathrm{d}\sigma)_a \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb}) = \kappa_{(k)} \int_{S(t)} (\mathrm{d}\sigma)_a \wedge (\varphi^c \varepsilon_{cb}) \\ &= \kappa_{(k)} \int_{S(t)} \mathrm{d}_a(\sigma \varphi^c \varepsilon_{cb}) - \kappa_{(k)} \int_{S(t)} \sigma \mathrm{d}_a (\varphi^c \varepsilon_{cb}) = -\kappa_{(k)} \int_{S(t)} \sigma \mathrm{d}_a \mathrm{d}_b f = 0 \,,\end{aligned}$$

其中第二步用到第零定律, 第四步用到 Stokes 定理[和 $S(t)$ 的边界为空集的事实]以及 $\varphi^c \varepsilon_{cb} = \mathscr{D}_b f = \mathrm{d}_b f$. □

注 8 以上证明的基本思路是先对特殊截面 S_φ 做证明, 再用引理 16-6-4 推广至任一截面 S. 这一证明手法也可用于其他类似场合. 例如, 假定利用哈氏方法对 Δ 的某个特殊截面证明了式(16-6-65), 就不难借用引理 16-6-4 推广至任一截面 S, 为此只须证明 $\mathscr{L}_{\sigma k}(\varphi^c \omega_c \varepsilon_{ab}) = 0$, 而这由式(16-6-71)及

$$\mathscr{L}_k \omega_a = 0, \quad \mathscr{L}_k \varphi^a = 0, \quad \mathscr{L}_k \varepsilon_{ab} = 0, \quad k^d \varepsilon_{db} = 0$$

立即得证.

命题 16-6-13 如果 ϕ^a 满足 $\nabla_a \phi_b |_\Delta = \nabla_{[a}\phi_{b]} |_\Delta$, 则弱孤立视界的角动量原始表达式(16-6-65)还可改写为

$$J_\Delta^{(\phi)} = \frac{1}{16\pi} \int_S \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d \,, \tag{16-6-74}$$

或者, 等价地,

$$J_\Delta^{(\phi)} = \frac{1}{16\pi} \int_S {}^*\mathrm{d}\phi \,, \tag{16-6-74'}$$

其中 S 仍代表 $\varDelta$ 的任一截面.

证明 利用外微分和对偶形式的定义容易验证式(16-6-74)与(16-6-74′)的等价性, 因此只须证明式(16-6-74).

作为 $(\varDelta,[k])$ 上的无限小轴对称性, φ^a 满足 $\mathscr{L}_\varphi k^a = 0$ [见(16-6-55a)], 故

$$0=[\varphi,k]^a=[\phi|_\varDelta,\bar{k}|_\varDelta]^a=[\phi,\bar{k}]^a|_\varDelta=(\phi^b\nabla_b\bar{k}^a-\bar{k}^b\nabla_b\phi^a)|_\varDelta$$

$$=\varphi^b\mathscr{D}_b k^a-(\bar{k}^b\nabla_b\phi^a)|_\varDelta=\varphi^b\omega_b k^a-(\bar{k}^b\nabla_b\phi^a)|_\varDelta, \qquad (16\text{-}6\text{-}75)$$

其中第三步用到一个定理[见 Warner(1983) 命题1.55], 第五步用到 $\mathscr{D}_b$ 的定义[式(16-5-9)], 第六步用到 $\mathscr{D}_b k^a=\omega_b k^a$ [见式(16-5-16)].

令 $\varPhi_{ab}\equiv\nabla_a\phi_b$, 则 $\varPhi_{ab}|_\varDelta=\varPhi_{[ab]}|_\varDelta$. 在含 $\varDelta$ 的开集 $U\subset M$ 上引入局域NP标架场 $\{m^a,\bar{m}^a,l^a,\bar{k}^a\}$, 要求 $m^a|_\varDelta$, $\bar{m}^a|_\varDelta$ 切于 $\varDelta$, 则 $\varPhi_{ab}|_\varDelta$ 的分量

$$\varPhi_{a4}|_\varDelta=(\varPhi_{ab}\bar{k}^b)|_\varDelta=-(\bar{k}^b\nabla_b\phi_a)|_\varDelta=-g_{ac}\varphi^b\omega_b k^c, \qquad (16\text{-}6\text{-}76)$$

其中末步用到式(16-6-75). 由式(16-6-76)得

$$\varPhi_{34}|_\varDelta=(\varPhi_{a4}\varepsilon_3^a)|_\varDelta=\varphi^b\omega_b, \quad \varPhi_{14}|_\varDelta=\varPhi_{24}|_\varDelta=0. \qquad (16\text{-}6\text{-}77)$$

故2形式场 $\varPhi_{ab}|_\varDelta$ 可按上册式(5-1-6)展开为

$$\varPhi_{ab}|_\varDelta=(\varPhi_{12}\varepsilon_a^1\wedge\varepsilon_b^2+\varPhi_{13}\varepsilon_a^1\wedge\varepsilon_b^3+\varPhi_{23}\varepsilon_a^2\wedge\varepsilon_b^3+\varPhi_{34}\varepsilon_a^3\wedge\varepsilon_b^4)|_\varDelta$$
$$=(\varPhi_{12}\bar{m}_a\wedge m_b-\varPhi_{13}\bar{m}_a\wedge\bar{k}_b-\varPhi_{23}m_a\wedge\bar{k}_b+\varphi^e\omega_e\bar{k}_a\wedge l_b)|_\varDelta,$$

因而

$$\varPhi^{cd}|_\varDelta=2(\varPhi_{12}\bar{m}^{[c}m^{d]}-\varPhi_{13}\bar{m}^{[c}\bar{k}^{d]}-\varPhi_{23}m^{[c}\bar{k}^{d]}+\varphi^e\omega_e\bar{k}^{[c}l^{d]})|_\varDelta. \qquad (16\text{-}6\text{-}78)$$

为从原始表达式(16-6-65)证明式(16-6-74), 只须证明

$$i^*(\varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d)=-2\varphi^c\omega_c\varepsilon_{ab}, \qquad (16\text{-}6\text{-}79)$$

而为此应先找出 $(\varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d)|_\varDelta$ 与 $\varphi^c\omega_c$ 的关系. 由式(16-6-78)可知, 对切于 $\varDelta$ 的任意矢量场 v^a, u^b 有

$$(v^a u^b\varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d)|_\varDelta=(v^a u^b\varepsilon_{abcd}\varPhi^{cd})|_\varDelta=(2\varPhi_{12}v^a u^b\varepsilon_{abcd}\bar{m}^c m^d-2\varPhi_{13}v^a u^b\varepsilon_{abcd}\bar{m}^c\bar{k}^d$$
$$-2\varPhi_{23}v^a u^b\varepsilon_{abcd}m^c\bar{k}^d)|_\varDelta-2\varphi^e\omega_e(v^a u^b\varepsilon_{abcd}l^c\bar{k}^d)|_\varDelta.$$

上式右边各项都是 ε_{abcd} 与四个矢量的缩并, 可写成 $\varepsilon_{abcd}X^aY^bZ^cW^d$, 前三项中的四个矢量还都切于 $\varDelta$, 故满足(仅以 X^a 为例) $X^a|_\varDelta=i_*X^a$, 因而 $\forall p\in\varDelta$ 有

$$(\varepsilon_{abcd}X^aY^bZ^cW^d)|_p=[\varepsilon_{abcd}(i_*X^a)(i_*Y^b)(i_*Z^c)(i_*W^d)]_p=[(i^*\varepsilon_{abcd})X^aY^bZ^cW^d]_p=0.$$

[其中末步是因为3维流形 $\varDelta$ 上的4形式场 $i^*\varepsilon_{abcd}$ 只能为零.] 于是

$$(v^a u^b \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d)|_\Delta = -2\varphi^e \omega_e (v^a u^b \varepsilon_{abcd} l^c \bar{k}^d)|_\Delta . \tag{16-6-80}$$

这样就有

$$v^a u^b i^* (\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d) = (v^a u^b \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d)|_\Delta = -2\varphi^e \omega_e (v^a u^b \varepsilon_{abcd} l^c \bar{k}^d)|_\Delta . \tag{16-6-81}$$

上式右端在 $v^a = \bar{k}^a$ 时显然为零，再利用 u^b 的任意性便有

$$k^a i^* (\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d) = 0 . \tag{16-6-82}$$

上式保证 $i^*(\varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d)$ 的标架展开式只含 $\bar{m}_{\tilde{a}} \wedge m_{\tilde{b}}$ 项，即在 Δ 上有函数 Λ 使

$$i^* (\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d) = \Lambda \, \bar{m}_{\tilde{a}} \wedge m_{\tilde{b}} . \tag{16-6-83}$$

以 $(m^a \bar{m}^b)|_\Delta$ 缩并上式，右边给出

$$\Lambda [m^a \bar{m}^b (\bar{m}_a m_b - m_a \bar{m}_b)]_\Delta = \Lambda , \tag{16-6-84a}$$

左边给出[利用式(16-6-81)]

$$m^a \bar{m}^b i^* (\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d) = -2\varphi^e \omega_e (m^a \bar{m}^b \varepsilon_{abcd} l^c \bar{k}^d)|_\Delta = -2\varphi^e \omega_e \varepsilon_{1234} = -2\mathrm{i}\varphi^e \omega_e . \tag{16-6-84b}$$

其中末步用到 $\varepsilon_{1234} = \mathrm{i}$ [见式(16-6-11)]. 用等号连接式(16-6-84a)和(16-6-84b)的右端给出 $\Lambda = -2\mathrm{i}\varphi^c \omega_c$，代入式(16-6-83)并注意到 $\varepsilon_{ab} = \mathrm{i}\bar{m}_{\tilde{a}} \wedge m_{\tilde{b}}$ 便得待证等式(16-6-79).

□

注 9 如果条件 $\nabla_a \phi_b|_\Delta = \nabla_{[a}\phi_{b]}|_\Delta$ 不满足，则式(16-6-74)未必成立. 下面给出有关结果而略去证明细节. 由

$$0 = \mathscr{L}_\varphi h_{ab} = \mathscr{L}_\varphi (i^* g_{ab}) = i^* (\mathscr{L}_\phi g_{ab}) = 2i^* (\nabla_a \phi_b + \nabla_b \phi_a)$$

可知 $U \supset \Delta$ 上有余矢场 χ_a 使 $\nabla_{(a}\phi_{b)}|_\Delta = 2(\bar{k}_{(a}\chi_{b)})|_\Delta$，令 $\Phi_{ab} \equiv \nabla_{[a}\phi_{b]}$，便有

$$\nabla_a \phi_b|_\Delta = (2\bar{k}_{(a}\chi_{b)} + \Phi_{ab})|_\Delta .$$

上式的新添项 $2(\bar{k}_{(a}\chi_{b)})|_\Delta$ 最终导致 $\Lambda = 2[(\bar{k}^e \chi_e)|_\Delta - \varphi^e \omega_e]$，故

$$i^* (\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d) = 2[(\bar{k}^e \chi_e)|_\Delta - \varphi^e \omega_e] \varepsilon_{ab} ,$$

所以只当 $(\bar{k}^e \chi_e)|_\Delta = 0$ 时才有式(16-6-79).

注 10 自然要问：证明命题16-6-13 时是否也可先对特殊截面 S_φ 做证明再用引理 16-6-4 推广至任一截面 S？从原则上说，答案是肯定的，见下面的"另一证明".

命题 16-6-13 的另一证明 对比式(16-6-65)和(16-6-74)，可知只须证明

$$\int_S \varphi^c \omega_c \varepsilon_{ab} = -\frac{1}{2} \int_S \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d . \tag{16-6-85}$$

设 $k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$ 是等价类 $[k]$ 中的一个元素，选 λ 的零值使所有等 λ 面的集合 $\{S(\lambda)\}$ 构成 Δ 的一个分层，并要求 $S(0)$ 是一个"切 φ^a 截面". λ 在 $S(\lambda)$ 上的常数性使 $S(\lambda)$ 可被视为 3 维流形 Δ 中的超曲面，$\mathscr{D}_a\lambda$（处处非零）是法余矢.[①] 因而

$$\text{矢量场 } v^a \text{ 切于 } S(\lambda) \Leftrightarrow v^a\mathscr{D}_a\lambda=0. \tag{16-6-86}$$

设 $\{\rho_\lambda: \Delta\to\Delta\}$ 是 $k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$ 产生的单参微分同胚族. 由 $\mathscr{L}_k\varphi^a=0$ 可知，对于任一容许的 $\Delta\lambda$ 值都有 $\rho_{\Delta\lambda}{}^*\varphi^a=\varphi^a$，而 λ 作为 Δ 上的函数则有 $\rho_{\Delta\lambda}{}^*\lambda=\lambda+\Delta\lambda$. 又因为 $\forall p\in S(\Delta\lambda)[\equiv\rho_{\Delta\lambda}S(0)]$ 有唯一的 $p_0\in S(0)$ 使 $p=\rho_{\Delta\lambda}(p_0)$，所以

$$\varphi^a|_p=(\rho_{\Delta\lambda*}\varphi^a)|_p=\rho_{\Delta\lambda*}(\varphi^a|_{p_0}),$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi^a|_p\,\mathscr{D}_a\lambda&=[\rho_{\Delta\lambda*}(\varphi^a|_{p_0})]\mathscr{D}_a\lambda=\varphi^a|_{p_0}\,\rho_{\Delta\lambda}{}^*\mathscr{D}_a\lambda\\&=\varphi^a|_{p_0}\,\mathscr{D}_a\rho_{\Delta\lambda}{}^*\lambda=\varphi^a|_{p_0}\,\mathscr{D}_a(\lambda+\Delta\lambda)=\varphi^a|_{p_0}\,\mathscr{D}_a\lambda=0,\end{aligned}$$

[其中第三步用到式(15-7-7)，第五步是因为 $\Delta\lambda$ 为常数，末步则是因为 $\varphi^a|_{p_0}$ 切于 $S(0)$，见式(16-6-86).] 再次使用式(16-6-86)便知 $\varphi^a|_p$ 切于 $S(\lambda)$. 可见，$S(0)$ 是"切 φ^a 截面"保证任一 $S(\lambda)$ 也是"切 φ^a 截面"，以下把这样的 $S(\lambda)$ 记作 S_φ.

$U\supset\Delta$ 上的 NP 标架场在 Δ 上诱导出 3 标架场，其对偶标架场为 $\{\bar{m}_{\tilde a}, m_{\tilde a}, -l_{\tilde a}\}$. 只要约定 m^a, $\bar{m}^a$ 切于 $S(\lambda)$，便有 $m^a\mathscr{D}_a\lambda=0=\bar{m}^a\mathscr{D}_a\lambda$，故 $\mathscr{D}_a\lambda$ 用对偶标架的展开式只含 $l_{\tilde a}$ 分量，与 $k^a\mathscr{D}_a\lambda=(\partial/\partial\lambda)^a\mathscr{D}_a\lambda=1$ 结合便得

$$l_{\tilde a}=-\mathscr{D}_a\lambda. \tag{16-6-87}$$

以 $l_{\tilde b}$ 缩并 $\omega_a k^b=\mathscr{D}_a k^b$ [式(16-5-16)]得

$$\omega_a=-l_{\tilde b}\mathscr{D}_a k^b=k^b\mathscr{D}_a l_{\tilde b}=-k^b\mathscr{D}_a\mathscr{D}_b\lambda=-k^b\mathscr{D}_b\mathscr{D}_a\lambda=k^b\mathscr{D}_b l_{\tilde a},$$

其中第四步用到 $\mathscr{D}_a$ 的无挠性. 故

$$\varphi^a\omega_a=\varphi^a k^b\mathscr{D}_b l_{\tilde a}=\varphi^a k^b\nabla_{\tilde b}l_{\tilde a}=\phi^a|_\Delta\,k^b\nabla_b l_a,$$

其中第二步用到式(16-5-11b). 于是

$$\int_{S_\varphi}\varphi^c\omega_c=\int_{S_\varphi}\phi^c k^d\nabla_d l_c=\int_{S_\varphi}k^d\nabla_d(\phi^c l_c)-\int_{S_\varphi}l_c k^d\nabla_d\phi^c=-\int_{S_\varphi}l_c\bar{k}_d\nabla^d\phi^c,$$

---

① 但因 Δ 上无度规，法矢并无意义，所以不能说 $S(\lambda)$ 是类空超曲面. 作为截面，$S(\lambda)$ 当然是类空曲面，不过这时是把它看作 4 维流形 M 的 2 维子集(不是超曲面)，"类空"是指 $S(\lambda)$ 每点的每一切于 $S(\lambda)$ 的矢量用 g_{ab} 衡量都类空.

其中末步用到 $\phi^c l_c|_\Delta = \varphi^c l_{\hat{c}} = -(\varphi^c \mathscr{D}_c \lambda) = 0$ [因 φ^c 切于各 $S(\lambda)$]. 把上式改写成

$$\int_{S_\varphi} \varphi^c \omega_c \varepsilon_{ab} = -\int_{S_\varphi} \varepsilon_{ab} l_c \bar{k}_d \nabla^d \phi^c , \qquad (16\text{-}6\text{-}88)$$

这就是待证式(16-6-85)用于 $S = S_\varphi$ 时左边的表达式. 为求右边, 可用对偶标架把 ε_{abcd} 展开为

$$\varepsilon_{abcd} = \varepsilon_{1234} \bar{m}_a \wedge m_b \wedge (-\bar{k}_c) \wedge (-l_d) = \mathrm{i}\, \bar{m}_a \wedge m_b \wedge \bar{k}_c \wedge l_d .$$

[其中第二步用到式(16-6-11).] 令 $M_{ab} \equiv \bar{m}_a \wedge m_b$, $N_{cd} \equiv \bar{k}_c \wedge l_d$, 易证

$$\bar{m}_a \wedge m_b \wedge \bar{k}_c \wedge l_d = M_{ab} \wedge N_{cd}$$

$$= M_{ab}N_{cd} + M_{ca}N_{bd} + M_{bc}N_{ad} + M_{da}N_{cb} + M_{db}N_{ac} + M_{cd}N_{ab} , \qquad (16\text{-}6\text{-}89)$$

故 $\int_{S_\varphi} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d$ 可表为六项之和. 积分号内的被积形式应理解为 $\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d$ 在 S_φ 上的限制, 也就是从 S_φ 到 M 的包含映射的拉回. 式(16-6-89)的后五项要么含 k_a(或 k_b), 要么含 l_a(或 l_b), 利用 $m^a|_{S_\varphi}$, $\bar{m}^a|_{S_\varphi}$ 切于 S_φ 不难证明这五项的拉回都为零, 因此 $\int_{S_\varphi} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d$ 只含第一项, 即

$$\int_{S_\varphi} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d = \int_{S_\varphi} (\mathrm{i}\, \bar{m}_{\hat{a}} \wedge m_{\hat{b}})(\bar{k}_c \wedge l_d) \nabla^c \phi^d = \int_{S_\varphi} \varepsilon_{ab} (l_c \wedge \bar{k}_d) \nabla^d \phi^c$$

$$= 2\int_{S_\varphi} \varepsilon_{ab} l_{[c} \bar{k}_{d]} \nabla^d \phi^c = 2\int_{S_\varphi} \varepsilon_{ab} l_c \bar{k}_d \nabla^{[d} \phi^{c]} = 2\int_{S_\varphi} \varepsilon_{ab} l_c \bar{k}_d \nabla^d \phi^c , \qquad (16\text{-}6\text{-}90)$$

(其中末步用到条件 $\nabla_a \phi_b|_\Delta = \nabla_{[a} \phi_{b]}|_\Delta$.) 上式与式(16-6-88)对比便得

$$\int_{S_\varphi} \varphi^c \omega_c \varepsilon_{ab} = -\frac{1}{2} \int_{S_\varphi} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d . \qquad (16\text{-}6\text{-}91)$$

此即待证等式(16-6-74)在 $S = S_\varphi$ 的特例. 根据引理16-6-4, 为证该式对任意截面 S 成立, 只须证明 $\mathscr{L}_{\sigma k}[i^*(\varepsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d)] = 0$. 这在原则上当然可以办到, 但似乎未见不复杂的证明方法, 不再详细讨论. □

§16.7 动力学视界及其力学定律

16.7.1 动力学视界

弱孤立视界的引入虽然把黑洞热力学的适用对象在一定程度上推广至非稳态时空, 却仍然只适用于处在平衡态的黑洞. 由于不断“吞食”恒星和星系遗迹以及吸收电磁和引力辐射, 宇宙中的真实黑洞很少是处于平衡态的, 它们大多是动态黑

洞,不断经历着动力学过程. 然而在广义相对论中关于完全动态黑洞的知识仍然颇为贫乏, 可以说, 直至动力学视界理论提出之前的主要成果只有一个, 这就是Hawking的面积定理, 它断言: 只要物质场满足主能量条件, 在任何动态情况下黑洞的总面积都不随时间减少. 这一定理虽然在多方面做出了重大贡献, 但也只是个定性结论, 并未给出关于黑洞面积在物理过程中的增量的任何公式. 关于面积增量δA的公式倒是有一个, 那就是黑洞热力学第一定律, 它描述面积增量与能量、角动量增量的定量关系, 可惜只适用于黑洞从一个平衡态到邻近平衡态的微小改变过程. 人们自然很想知道: 当黑洞从一个状态出发通过动力学过程到达另一"离得很远的"状态时, 是否也能找到把黑洞面积的改变量与流进黑洞的能量及角动量联系起来的关系式?就是说, 能否找到黑洞热力学第一定律的完全动力学的推广版本?然而对此问题稍加思索就会令人沮丧, 因为这一推广首先面临"穿越视界的能流"这一广义相对论的老大难问题. Bondi等老一辈学者通过艰巨努力才建立起一个工作框架, 并借此求得类光无限远$\mathscr{I}^+$处(那里引力场很弱)引力能流的一个规范不变的表达式, 而现在涉及的却是视界附近的超强引力场领域!事实上, 至今尚不存在把Bondi框架向强场的满意推广, 也不存在强场中引力能流的规范不变的满意和准确的表达式(微扰理论只是近似). 不过, 从物理直觉出发考虑, 这一问题仍是有望解决的: 重星坍缩形成黑洞, 这黑洞的能量理应等于穿越边界进入黑洞的总能(包括物质场和引力场的能量), 所以至少穿越边界的总能量应该是有意义的. 再从另一角度考虑: 如果时空的ADM能量与在$\mathscr{I}^+$流走的(Bondi)能量之差非零, 它自然就应等于穿越边界流进黑洞的能量. 这两个角度的物理考虑都说明至少穿越边界流进洞中的总能流应该有意义. 现在的敏感问题是选什么视界作为黑洞边界来计算穿越它的能流和角动量流. 首先想到的自然是事件视界(它是传统看法中理所当然的黑洞边界), 可惜它无法担此重任: 正如小节16.1.3所讲, 事件视界甚至可以存在于时空的平直区域中(例如图16-2), 在此过程中没有任何能流进入而面积照样增长, 试问又怎能有一个推广后的第一定律来适用于这么一段物理过程?其次能想到的就是用表观视界作为黑洞边界. 然而, 正如§16.4所言, 表观视界天生就依赖于用类空面Σ_t对时空的分层, 因而无法用它代替事件视界推广黑洞热力学, 而能够担此重任的是Hayward的未来陷俘视界(FOTH)和Ashtekar等的动力学视界. 我们只介绍动力学视界.

定义1　时空(M, g_{ab})中的光滑类空超曲面$\mathscr{H}$称为**动力学视界**(dynamical horizon), 若它可被临界陷俘面族分层. 每层称为一个**截面**.

注1　已经证明[见Ashtekar and Krishnan(2004)2.2.3及其所引文献93], 如果类空超曲面$\mathscr{H}$可被一族临界陷俘面分层(因而是一个动力学视界), 则它一定不能被另一临界陷俘面族分层. 就是说, $\mathscr{H}$最多只能有一个动力学视界结构.

下面举一个既简单又很有帮助的例子. Vaidya度规是爱因斯坦方程的一个球

对称解, 相应的物质场是纯辐射场. Vaidya 的原始论文用外向 Eddington 坐标 $u \equiv t - r_*, r, \theta, \varphi$ 表出这一度规, 并把相应的纯辐射场解释为一个"发光星"不断发射"光子"的结果, 这些光子(带着能量和动量)都以类光无限远为最终归宿, 见上册小节8.9.1. 但也可反其道而行之, 即考虑下述物理情况: 时空原来是真空而且平直的, 从某一推迟时刻 $v=0$ 开始由过去无限远 $\mathscr{I}^-$ 向时空内部发射纯辐射场, 使时空变得弯曲, 其度规可用内向 Eddington 坐标 $v \equiv t + r_*, r, \theta, \varphi$ 表为

$$g_{ab} = -\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right](\mathrm{d}v)_a(\mathrm{d}v)_b + 2(\mathrm{d}v)_{(a}(\mathrm{d}r)_{b)} + r^2[(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b],$$

(16-7-1)

不妨也称之为 Vaidya 度规, 相应的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2), \qquad (16\text{-}7\text{-}1')$$

其中 $M(v)$ 是 v 的光滑函数, 只要求 $\dot{M} \equiv M(v)/\mathrm{d}v \geqslant 0$. 与此度规相对应的纯辐射场的能动张量为

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi r^2}\dot{M}(v)(\nabla_a v)\nabla_b v. \qquad (16\text{-}7\text{-}2)$$

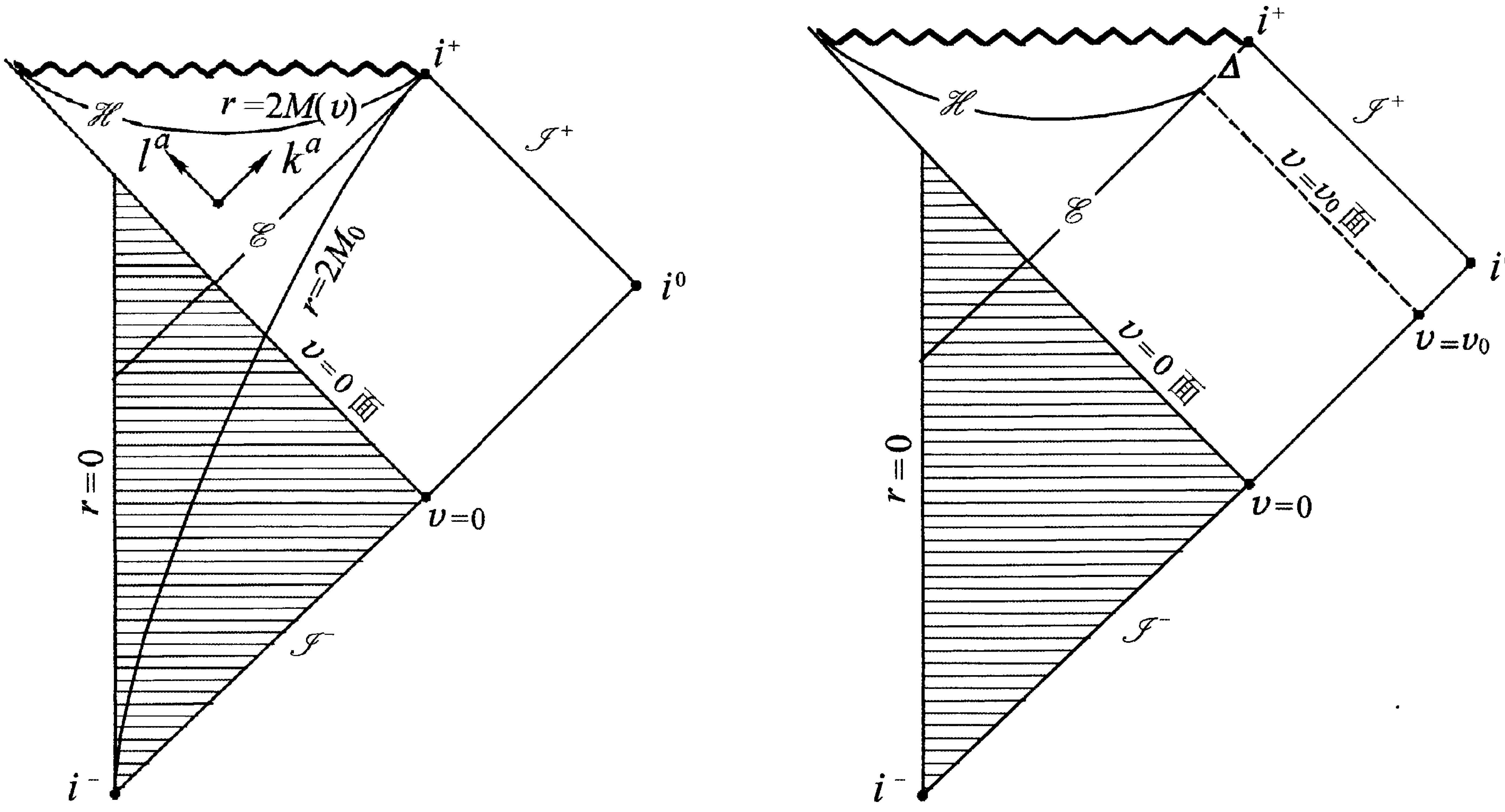
条件 $\dot{M} \geqslant 0$ 保证 T_{ab} 满足主能量条件(见中册附录D). g_{ab} 的逆可以表为

$$\begin{aligned} g^{ab} = {} & 2\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(a}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{b)} + \left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^b \\ & + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^b + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^b\right], \end{aligned} \qquad (16\text{-}7\text{-}3)$$

由此可读出 g^{ab} 的非零分量:

$$g^{01} = g^{10} = 1, \quad g^{11} = 1 - \frac{2M(v)}{r}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \qquad (16\text{-}7\text{-}3')$$

我们讨论下列两个很有帮助的范例, 分别见图16-9 的(a)和(b). 两图的共性是 $M(v)$ 在 $v \leqslant 0$ 时为零, 所以时空在类光超曲面 $v=0$ 的过去区域(阴影区)是平直的. 两图的区别在于: 图(a)在 $v=0$ 面的整个未来区域都有 $\dot{M}>0$, 只在趋于 $\mathscr{I}^+$ 时渐近为零, 而 $M(v)$ 则渐近趋于常数 $M(\infty)$, 简记作 M_0. 在图(b)中, 从 v 取某值 v_0 开始有 $\dot{M}=0$, 从此 M 取常值 $M(v_0)$, 亦简记作 M_0. 于是可把时空分为三个区域: 在 $v=0$ 面的过去区(阴影区)中有平直度规; 在 $v=0$ 面与 $v=v_0$ 面之间有 Vaidya 度规; 在 $v=v_0$ 面的未来区有施瓦西度规, 其质量参数为 M_0. (当然, 平直度规和施瓦



(a) 从 $v=0$ 面起 $\dot{M}>0$，直至趋于 $\mathscr{I}^+$ 时才趋于常值 M_0. 动力学视界 $\mathscr{H}$、事件视界 $\mathscr{E}$ 和类时面 $r=2M_0$ 三者相切于 i^+

(b) $v=0$ 面与 $v=v_0$ 面之间有 $\dot{M}>0$，此后 $M=M_0$ (常数). 在 $v=0$ 面过去有平直度规, 在 $v=v_0$ 面未来有施瓦西度规. 动力学视界 $\mathscr{H}$ 与事件界 $\mathscr{E}$ 相切于 $v=v_0$ 面, $\mathscr{H}$ 从此过渡到孤立视界 $\Delta\subset\mathscr{E}$

图 16-9　两种具体 Vaidya 时空的 Penrose 图. 共性:① $M(v)$ 在 $v\leqslant 0$ 时为零, 故阴影区内平直. ②事件视界 $\mathscr{E}$ 在平直区已出现, 但动力学视界 $\mathscr{H}$ 只存在于 $\mathscr{E}$ 以内的高度弯曲时空区

西度规都可看作 Vaidya 度规的特例.) 为了找出动力学视界, 先看看 v, r 为常数的所有 2 球面在什么条件下是临界陷俘面. 利用式(16-7-3)不难验证以下两个矢量场

$$k^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \quad 及 \quad l^a \equiv -2\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \tag{16-7-4}$$

都类光, 而且都正交于 v, r 为常数的所有 2 球面, 可依次充当每个球面的外向和内向类光法矢场. 请注意 $g_{ab}k^a l^b = -2$ (而不是 -1), 这是本节(§17.6)中约定的标度选择. 虽然 k^a 和 l^a 都类光, 但以它们为切矢的类光测地线却未必是仿射参数化的, 即 $k^b\nabla_b k_a = \kappa_{(k)}k_a$ 及 $l^b\nabla_b l_a = \kappa_{(l)}l_a$ 中的 $\kappa_{(k)}$ 及 $\kappa_{(l)}$ 未必为零, 因而两者的膨胀应为[见式(16-2-39)]

$$\text{(a)}\ \hat{\theta}_{(k)} = g^{ab}\nabla_a k_b - \kappa_{(k)}, \quad 及 \quad \text{(b)}\ \hat{\theta}_{(l)} = g^{ab}\nabla_a l_b - \kappa_{(l)}. \tag{16-7-5}$$

$\hat{\theta}_{(k)}$ 及 $\hat{\theta}_{(l)}$ 的计算涉及协变导数, 但可利用 $\mathscr{L}_k g_{ab} = 2\nabla_{(a}k_{b)}$ 而改为计算李导数, 后者容易得多. 分别以 k^b 及 g^{ab} 缩并此式, 注意到 $k^a\nabla_b k_a = \nabla_b(k^a k_a)/2 = 0$, 得

$$k^b\nabla_b k_a = k^b\mathscr{L}_k g_{ab}, \qquad g^{ab}\nabla_b k_a = \frac{1}{2}g^{ab}\mathscr{L}_k g_{ab}. \tag{16-7-6}$$

利用李导数的线性性、莱布尼茨律以及式(16-7-1)得

$$\mathscr{L}_k g_{ab}=-(\mathrm{d}v)_a(\mathrm{d}v)_b\mathscr{L}_k\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]-2\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right](\mathrm{d}v)_{(b}\mathscr{L}_k(\mathrm{d}v)_{a)}$$
$$+2(\mathrm{d}r)_{(b}\mathscr{L}_k(\mathrm{d}v)_{a)}+2(\mathrm{d}v)_{(b}\mathscr{L}_k(\mathrm{d}r)_{a)}+(\mathscr{L}_k r^2)[(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b].$$

不难证明 $\mathscr{L}_k v=1, \mathscr{L}_k r=[1-2M(v)/r]/2$, 故

$$\mathscr{L}_k(\mathrm{d}v)_a=(\mathrm{d}\mathscr{L}_k v)_a=0,\ \mathscr{L}_k(\mathrm{d}r)_a=(\mathrm{d}\mathscr{L}_k r)_a=-\frac{1}{r}\dot{M}(v)(\mathrm{d}v)_a+r^{-2}M(v)(\mathrm{d}r)_a, \quad (16\text{-}7\text{-}7)$$

[两式的第一步都用到第 5 章习题 6(b).] 所以

$$\mathscr{L}_k g_{ab}=-\frac{1}{r^2}M(v)\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right](\mathrm{d}v)_a(\mathrm{d}v)_b+\frac{2}{r^2}M(v)(\mathrm{d}v)_{(a}(\mathrm{d}r)_{b)}$$
$$+[r-2M(v)][(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b]. \quad (16\text{-}7\text{-}8)$$

代入式(16-7-6)得

$$k^b\nabla_b k_a=-\frac{M(v)}{2r^2}\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right](\mathrm{d}v)_a+\frac{1}{r^2}M(v)(\mathrm{d}r)_a=\frac{1}{r^2}M(v)k_a, \quad (16\text{-}7\text{-}9\text{a})$$

$$g^{ab}\nabla_a k_b=\frac{1}{r^2}M(v)+\frac{1}{r^2}[r-2M(v)]=\frac{1}{r^2}[r-M(v)]. \quad (16\text{-}7\text{-}9\text{b})$$

将式(16-7-9a)与 $k^b\nabla_b k_a=\kappa_{(k)}k_a$ 比较得 $\kappa_{(k)}=r^{-2}M(v)$, 再与式(16-7-9b)一同代入式(16-7-5)便得 $\hat{\theta}_{(k)}=r^{-2}[r-2M(v)]$. 对 l^a 也有类似于式(16-7-6)的公式, 而且 $\mathscr{L}_l g_{ab}$ 的计算更容易, 结果为

$$\mathscr{L}_l g_{ab}=\frac{4}{r^2}M(v)(\mathrm{d}v)_a(\mathrm{d}v)_b-4r[(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)_a(\mathrm{d}\varphi)_b], \quad (16\text{-}7\text{-}10)$$

故

$$(\text{a})\ l^b\nabla_b l_a=l^b\mathscr{L}_l g_{ab}=0, \qquad (\text{b})\ g^{ab}\nabla_a l_b=\frac{1}{2}g^{ab}\mathscr{L}_l g_{ab}=-\frac{4}{r}. \quad (16\text{-}7\text{-}11)$$

[其中(a)末步用到式(16-7-4)第二式.] 由(a)得 $\kappa_{(l)}=0$, 故 $\hat{\theta}_{(l)}=g^{ab}\nabla_b l_a=-4r^{-1}$. 于是

$$\hat{\theta}_{(k)}=\frac{1}{r^2}[r-2M(v)], \qquad \hat{\theta}_{(l)}=-\frac{4}{r}. \quad (16\text{-}7\text{-}12)$$

上式表明: v, r 为常数的 2 球面是临界陷俘面当且仅当其 v, r 值满足 $r=2M(v)$, 这一条件穷尽了所有球对称的临界陷俘面. 令 $f(r,v)\equiv r-2M(v)$, 则由 $f=0$ 定义的超曲面 $\mathscr{H}_1$ 的法余矢为 $\nabla_a f=\nabla_a r-2\dot{M}\nabla_a v$, 借助于式(16-7-3)易得

$$[g^{ab}(\nabla_a f)\nabla_b f]_{\mathscr{H}_1} = -4\dot{M}|_{\mathscr{H}_1} + \left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]_{\mathscr{H}_1} = -4\dot{M}|_{\mathscr{H}_1} \leqslant 0\,,$$

可见法余矢类时(或类光)，因而 $\mathscr{H}_1$ 是类空(或类光)超曲面. 由于压缩两维，$\mathscr{H}_1$ 在图 16-9 中表现为一条曲线，它的每点代表一个 2 球面，每个都是临界陷俘面，所以 $\mathscr{H}_1$ 可用临界陷俘面分层，因而其类空部分就是动力学视界 $\mathscr{H}$. 对图16-9(a)有 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1$，对图 16-9(b)有 $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}_1$, $\mathscr{H} \neq \mathscr{H}_1$，所余部分 $\Delta \equiv \mathscr{H}_1 - \mathscr{H}$ 之所以类光是因为 $\dot{M}|_\Delta = 0$，不难验证它是非涨视界，还可验证它其实是孤立视界. 这是从动力学视界逐渐演化为孤立视界的简单例子，从物理上看这是很自然的.

正如施瓦西时空非常有助于对静态黑洞的直观想象那样，Vaidya 时空对直观想象动态黑洞也大有助益. 然而必须注意这两种黑洞都太过简单，远不能覆盖更真实的黑洞的各种复杂情况.

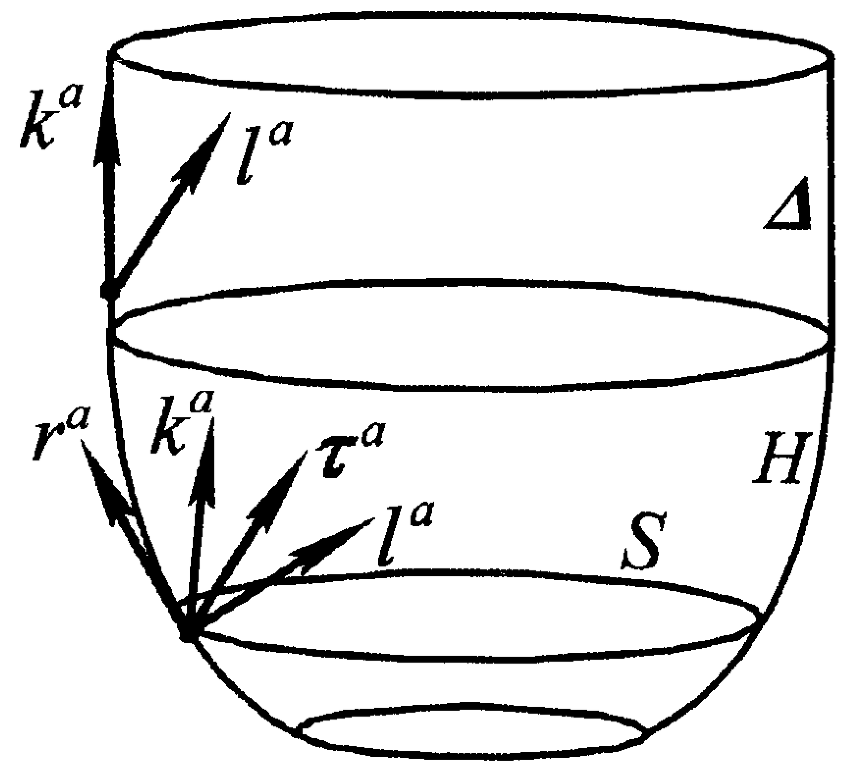
16.7.2　被分层类空面的某些几何关系

为与 Ashtekar 等的文献一致，以下改用 H (而不再用 $\mathscr{H}$)代表动力学视界. 基于小节 16.7.6 要讲的原因，讨论动力学视界时把黑洞热力学改称黑洞力学.

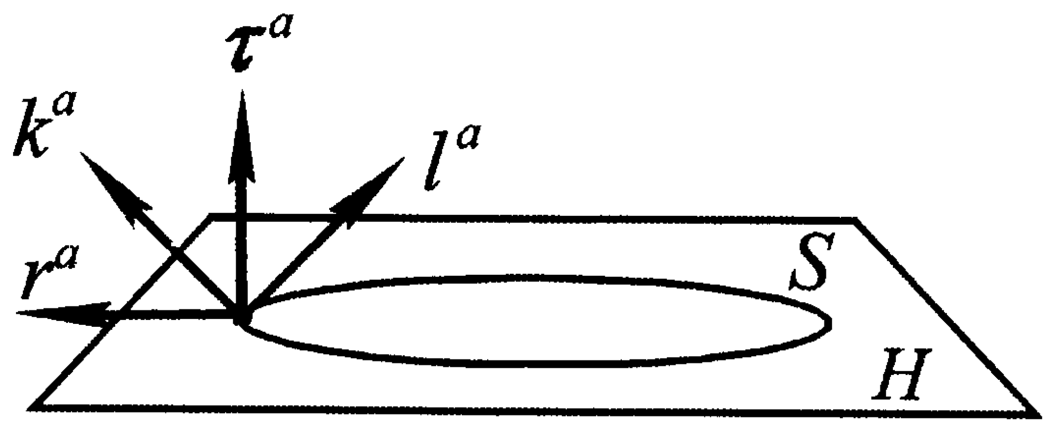
由于代表动力学过程，动力学视界 H 总与引力波及其散射波为伴，但数值模拟表明在有限时间内就近似达到平衡态，即 H 会过渡到弱孤立视界 Δ (图16-10a). 本节的重点是建立黑洞力学第一定律的一个完全动力学(而不是只限于两个邻近平衡态)的推广版本. 为此，我们先在下列两个前提下弄清 H 的某些几何关系：① 物质场的能动张量 T_{ab} 满足主能量条件(见中册附录 D)；②时空度规 g_{ab} 与 T_{ab} 的关系服从宇宙常数 $\Lambda = 0$ 的爱因斯坦方程($\Lambda \neq 0$ 的情况见 Ashtekar 等的文献)，即 $R_{ab} - Rg_{ab}/2 = 8\pi T_{ab}$. 为了有更强的适用性，本小节的 H 只代表任一被分了层的类空超曲面(每层仍叫一个截面)，未必是动力学视界，即各截面未必是临界陷俘面，只当把结论用于动力学视界时才加上这一条件.

H 的类空性保证① H 的法矢场类时；② g_{ab} 在 H 上的诱导度规场 $h_{ab} \equiv i^* g_{ab}$ 的号差为 $(+,+,+)$. 以 τ^a 代表 H 的单位法矢场，即 $g_{ab}\tau^a\tau^b = -1$，并约定取 τ^a 为指向未来. 设 r^a 是 H 的任一截面 $S \subset H$ 上的单位法矢场，它切于 H 而且 $h_{ab}r^a r^b = 1$(图 16-10). 以 k^a 和 l^a 分别代表经过 S 并且正交于 S 的两族类光测地线(未必仿射参数化)的切矢，则当 S 为临界陷俘面(即 H 是动力学视界)时两者的膨胀依次为 $\hat{\theta}_{(k)} = 0$, $\hat{\theta}_{(l)} < 0$. 把图 16-10(a)的 H 改画成水平面(图 16-10(b))，并且选 r^a 的指向使得 k^a 和 l^a 可分别表为 $\tau^a + r^a$ 和 $\tau^a - r^a$ 乘以常数，取此常数为 1 便得

$$k^a = \tau^a + r^a,\quad l^a = \tau^a - r^a \quad 及 \quad \tau^a = \frac{1}{2}(k^a + l^a),\quad r^a = \frac{1}{2}(k^a - l^a)\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}13)$$



(a) 从动力学视界 H 过渡到弱孤立视界 Δ



(b) H 和 S 的另一画法

图 16-10　动力学视界示意

这种做法导致 $k^a l_a|_H \equiv g_{ab}k^a l^b|_H = -2$ (区别于以前的 $k^a l_a = -1$). 如果只有一张 S 面, 则 k^a 和 l^a 只在含 S 的两张类光面(记作 $\Delta_{(k)}$ 和 $\Delta_{(l)}$)上有定义; 但因为 H 可以被无数 S 分层, k^a 和 l^a 便是定义在含 H 的某 4 维开集 U 上的两个类光矢量场, 因而借用式(16-7-13)又可把 τ^a 和 r^a 的定义域拓宽为 U. 另一方面, 无数分层面配以 (H, h_{ab}) 上的矢量场 r^a 又构成对 H 的 2+1 分解, h_{ab} 在每层 S 上诱导出的 2 维正定度规记作 $\tilde{h}_{ab}$. 除 4 维时空 (M, g_{ab}) 外, 还要关心 3 维黎曼空间 (H, h_{ab}) 和无数 2 维黎曼空间 $(S, \tilde{h}_{ab})$ 的几何. 以 $\nabla_a, \mathrm{D}_a, \tilde{\mathrm{D}}_a$ 依次代表 $g_{ab}, h_{ab}, \tilde{h}_{ab}$ 的无挠适配导数算符(后两者的定义见中册小节 14.4.4), 相应的黎曼张量依次记作 $R_{abc}{}^d$, $\mathscr{R}_{abc}{}^d$, $\tilde{\mathscr{R}}_{abc}{}^d$, 而 $(H, h_{ab}) \subset (M, g_{ab})$ 和 $(S, \tilde{h}_{ab}) \subset (H, h_{ab})$ 的外曲率则依次定义为

$$(a)\ K_{ab} \equiv h_a^c h_b^d \nabla_c \tau_d\,, \qquad (b)\ \tilde{K}_{ab} \equiv \tilde{h}_a^c \tilde{h}_b^d \mathrm{D}_c r_d\,. \tag{16-7-14}$$

$\forall p \in S(\subset H \subset M)$, 以 S_p, W_p, V_p 依次代表 p 点切于 S, H, M 的切空间, 则 $S_p \subset W_p \subset V_p$, 维数依次是 $2, 3, 4$, 其上的张量依次称为 2, 3, 4 维张量. p 点全体 (k,l) 型 4 维张量 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ (简记作 $T^a{}_b$)的集合(矢量空间)存在一个由以下条件定义的子空间:

$$(a)\ \tau_a T^a{}_b = 0,\ \tau^b T^a{}_b = 0,\ \text{等价地},\ (b)\ T^a{}_b = h_c^a h_b^d T^c{}_d\,. \tag{16-7-15}$$

根据中册选读14-4-3, 这个子空间与 p 点全体3维 (k,l) 型张量的集合同构, 因此可把满足式(16-7-15)的 4 维 $T^a{}_b$ 认同为 3 维张量. 准确地说, 当(且仅当) 4 维 $T^a{}_b$ 满足式(16-7-15)时可被看作 3 维张量. [反之, 任一 3 维张量都可看作满足式(16-7-15)的 4 维张量.] 例如, 4 维张量 $h_{ab} \equiv g_{ab} + \tau_a \tau_b$ 由于满足 $\tau^a h_{ab} = 0$ 而可看作 3 维, $h_b^a \equiv g^{ac} h_{cb}$ 由于满足 $\tau_a h_b^a = 0$, $\tau^b h_b^a = 0$ 也可看作3维. 这一精神也适用于3维与2维张量的关系, 结论是: 3 维 $T^a{}_b$ 可与 2 维张量认同的充要条件是

$$(a)\ r_a T^a{}_b = 0,\ r^b T^a{}_b = 0,\ \text{等价地},\ (b)\ T^a{}_b = \tilde{h}_c^a \tilde{h}_b^d T^c{}_d\,. \tag{16-7-16}$$

于是满足式(16-7-15)和(16-7-16)的4维张量也可与2维张量认同. 事实上, 本节频繁出现的几个张量(如 $\tilde{h}^a_b$)就可根据需要被看作2维、3维或4维的, 读者应能从每个式子中识别它们的维数, 我们不再一一指出. S_p, W_p, V_p 都有自身的恒等映射(依次是2, 3, 4维张量), 为了互相区分, 不再记作 δ^a_b 而依次记作 $\tilde{h}^a_b, h^a_b, g^a_b$, 三者之间有如下关系:

$$h^a_b \equiv g^{ac}h_{cb} = g^{ac}(g_{cb}+\tau_c\tau_b) = g^a_b + \tau^a\tau_b, \quad \tilde{h}^a_b \equiv h^{ac}\tilde{h}_{cb} = h^{ac}(h_{cb} - r_c r_b) = h^a_b - r^a r_b . \tag{16-7-17}$$

如上所述, 在含 H 的某4维开集 $U\subset M$ 上存在两个类光测地线汇(切矢场分别为 k^a 和 l^a). 仅以 k^a 为例讨论. 仿照§16.2定义 $B_{ab}\equiv \nabla_b k_a$, 便有 $\hat{B}_{ab}$. 然而应该注意两个区别: ①§16.2主要讨论仿射参数化的类光测地线汇, 而本节的类光测地线汇可以非仿射参数化, 即 $k^b\nabla_b k_a = \kappa_{(k)}k_a$ 可以非零; ②本节的线汇是超曲面正交的, ($\forall p\in U$, $k^a|_p$ 必正交于一张含 p 的类光超曲面 $\mathcal{A}_{(k)}$.) 而§16.2的线汇则未必. 区别②保证本节的 $\hat{B}_{ab}$ 是对称的, 因而可表为

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}\hat{g}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} . \tag{16-7-18}$$

命题 16-7-1 以 $\hat{\theta}_{(k)}$ 和 $\hat{\theta}_{(l)}$ 分别代表 k^a 和 l^a 的膨胀, 则在 H 上有

$$(\text{a})\ \hat{\theta}_{(k)} = \tilde{h}^{ab}\nabla_a k_b , \qquad (\text{b})\ \hat{\theta}_{(l)} = \tilde{h}^{ab}\nabla_a l_b . \tag{16-7-19}$$

证明 在 H 上选伪正交归一基 $\{x^a, y^a, l^a, k^a\}$, 由 $g_{ab}k^a l^b|_H = -2$ 不难求得

$$g^{ab} = x^a x^b + y^a y^b - \frac{1}{2}l^a k^b - \frac{1}{2}k^a l^b , \tag{16-7-20}$$

故

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{(k)} &\equiv \hat{g}^{ab}\hat{B}_{ab} = (\hat{x}^a\hat{x}^b + \hat{y}^a\hat{y}^b)\hat{B}_{ab} = (x^a x^b + y^a y^b)B_{ab} \\ &= [g^{ab} + (l^a k^b + k^a l^b)/2]\nabla_a k_b = (g^{ab} + \tau^a\tau^b - r^a r^b)\nabla_a k_b = \tilde{h}^{ab}\nabla_a k_b ,\end{aligned}$$

其中第二步用到式(16-2-18b), 第三步用到式(16-2-9′), 第四步用到式(16-7-20), 第五步用到式(16-7-13), 末步用到式(16-7-17). □

令 $p\in H$, 虽然 $B_{ab}|_p$ 和 $\tilde{h}^c_a\tilde{h}^d_b B_{cd}|_p$ 都是4维张量, 但后者由于 $\tilde{h}^c_a$ 是到 S_p 的投影映射而可看作 S_p 上的张量. 另一方面, $\hat{B}_{ab}|_p$ 则是 $\hat{V}_p$ 上的张量. 好在 S_p 和 $\hat{V}_p$ 都是2维矢量空间, 而且两者的元素通过加 ^ 操作一一对应(即 S_p 与 $\hat{V}_p$ 之间存在自然同构关系), 于是 S_p 上的张量与 $\hat{V}_p$ 上的张量也一一对应, 而且这种对应(映射)保持张

量的所有代数运算(加法、数乘、张量积、缩并). 不难证明 $\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd}|_p$(作为 S_p 上的张量)的对应对象是 $\hat{B}_{ab}|_p$, 即

$$(\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd}|_p)^\wedge = \hat{B}_{ab}|_p, \tag{16-7-21}$$

[为此只须验证 $\forall \hat{s}^a, \hat{t}^a \in \hat{V}_p$ 有 $(\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd})^\wedge \hat{s}^a\hat{t}^b = \hat{B}_{ab}\hat{s}^a\hat{t}^b$.] 不妨把 $\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd}|_p$ 认同为 $\hat{B}_{ab}|_p$ 而写成

$$\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd}|_p = \hat{B}_{ab}|_p, \tag{16-7-21$'$}$$

用类似手法还可证明

$$\text{(a)}\ (\tilde{h}_{ab})^\wedge|_p = \hat{g}_{ab}|_p, \quad \text{(b)}\ (\tilde{h}^{ab})^\wedge|_p = \hat{g}^{ab}|_p, \tag{16-7-22}$$

也可写成

$$\tilde{h}_{ab}|_p = \hat{g}_{ab}|_p, \quad \tilde{h}^{ab}|_p = \hat{g}^{ab}|_p. \tag{16-7-22$'$}$$

于是在 H 上有

$$\hat{\theta}_{(k)} \equiv \hat{g}^{ab}\hat{B}_{ab} = (\tilde{h}^{ab})^\wedge(\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd})^\wedge = (\tilde{h}^{ab}\tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d B_{cd})^\wedge = (\tilde{h}^{cd}B_{cd})^\wedge = \tilde{h}^{ab}B_{ab}, \tag{16-7-23}$$

[其中第一步用到式(16-2-21a), 第二步用到式(16-7-22)及(16-7-21), 第三步是因为 S_p 上的张量与 $\hat{V}_p$ 上的张量之间的对应关系保持张量积和缩并, 第五步是因为 $\tilde{h}^{ab}B_{ab}$ 是标量.] 因而在 H 上有

$$\text{(a)}\ \hat{\theta}_{(k)} = \tilde{h}^{ab}\nabla_a k_b, \quad \text{(b)}\ \hat{\theta}_{(l)} = \tilde{h}^{ab}\nabla_a l_b. \ \text{(同理可证)} \tag{16-7-24}$$

式(16-7-18)与(16-7-22a)结合给出

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}(\tilde{h}_{ab})^\wedge + \hat{\sigma}_{ab}. \quad (\text{在 } H \text{ 上}) \tag{16-7-25}$$

又由于 $(\tilde{h}_{ab})^\wedge$ 与 $\tilde{h}_{ab}$ 有对应关系, 不妨就写

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}\tilde{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab}. \quad (\text{在 } H \text{ 上}) \tag{16-7-25$'$}$$

命题 16-7-2　以 $\underset{\frown}{K}_{ab}$ 代表 K_{ab} 在截面 S 上的投影, 即 $\underset{\frown}{K}_{ab} \equiv \tilde{h}_a^c\tilde{h}_b^d K_{cd}$, 再以 $\tilde{S}_{ab}$ 和 $\underset{\frown}{S}_{ab}$ 分别代表 $\tilde{K}_{ab}$ 和 $\underset{\frown}{K}_{ab}$ 的无迹部分, 即

$$\text{(a)}\ \tilde{S}_{ab} \equiv \tilde{K}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{h}_{ab}, \quad \text{(b)}\ \underset{\frown}{S}_{ab} \equiv \underset{\frown}{K}_{ab} - \frac{1}{2}\underset{\frown}{K}\tilde{h}_{ab}, \tag{16-7-26}$$

(式中的 $\tilde{K}$ 和 $\underset{\frown}{K}$ 分别代表 $\tilde{K}_{ab}$ 和 $\underset{\frown}{K}_{ab}$ 的迹.) 则

$$(\mathrm{a})\ \hat{\sigma}_{ab}=\tilde{S}_{ab}+\underset{\frown}{S}_{ab}\,,\qquad (\mathrm{b})\ \hat{\theta}_{(k)}=\tilde{K}+\underset{\frown}{K}\,. \tag{16-7-27}$$

证明

$$\tilde{K}_{ab}\equiv\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d\mathrm{D}_c r_d=\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d h_c{}^e h_d{}^f\nabla_e r_f=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_b{}^f\nabla_e r_f=\frac{1}{2}\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d\nabla_c(k_d-l_d)\,, \tag{16-7-28}$$

[其中第二步用到空间张量场的空间导数的定义, 即中册式(14-4-18b), ① 第四步用到式(16-7-13).] 由上式及式(16-7-24)易得

$$\tilde{K}\equiv\tilde{h}^{ab}\tilde{K}_{ab}=\frac{1}{2}\tilde{h}^{cd}\nabla_c(k_d-l_d)=\frac{1}{2}(\hat{\theta}_{(k)}-\hat{\theta}_{(l)})\,, \tag{16-7-29}$$

及

$$\tilde{S}_{ab}\equiv\tilde{K}_{ab}-\frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{h}_{ab}=\frac{1}{2}\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d\nabla_c(k_d-l_d)-\frac{1}{4}\tilde{h}_{ab}(\hat{\theta}_{(k)}-\hat{\theta}_{(l)})\,. \tag{16-7-30}$$

另一方面, 由 $\underset{\frown}{K}_{ab}$ 及 K_{ab} 的定义和式(16-7-13)又得

$$\underset{\frown}{K}_{ab}\equiv\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d K_{cd}=\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d h_c{}^e h_d{}^f\nabla_e\tau_f=\frac{1}{2}\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_b{}^f\nabla_e(k_f+l_f)\,, \tag{16-7-31}$$

故

$$\underset{\frown}{K}\equiv\tilde{h}^{ab}\underset{\frown}{K}_{ab}=\frac{1}{2}\tilde{h}^{ef}\nabla_e(k_f+l_f)=\frac{1}{2}(\hat{\theta}_{(k)}+\hat{\theta}_{(l)})\,, \tag{16-7-32}$$

$$\underset{\frown}{S}_{ab}\equiv\underset{\frown}{K}_{ab}-\frac{1}{2}\underset{\frown}{K}\tilde{h}_{ab}=\frac{1}{2}\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d\nabla_c(k_d+l_d)-\frac{1}{4}\tilde{h}_{ab}(\hat{\theta}_{(k)}+\hat{\theta}_{(l)})\,. \tag{16-7-33}$$

式(16-7-30)与(16-7-33)相加, 注意到式(16-7-21′)及(16-7-25′), 便得待证的式(16-7-27a), 而式(16-7-29)与(16-7-32)相加则给出待证的式(16-7-27b). □

16.7.3 动力学视界的面积平衡定律

鉴于面积对黑洞力学的重要性, 我们先证明动力学视界 H (看作黑洞边界)的截面积沿 r^a 单调增加, 然后找出这一增量(任意两个截面的面积差)的定量表达式. 用类空超曲面族对时空分层, 使 H 的每一截面可看作其中某层与 H 的交面, 则两个截面 S_1 和 S_2 可解释为两个时刻, 而且 r^a 方向代表时间增大方向(参见图16-10 及图 16-9), 因而截面积沿 r^a 单调增长就可解释为“面积随时间增大”.

根据定义, 动力学视界 H 是被临界陷俘面分了层的类空超曲面, 而临界陷俘

① 对第三步应做说明. 作为 3 维等式, $\tilde{h}_a{}^c\tilde{h}_b{}^d h_c{}^e h_d{}^f=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_b{}^f$ 当然成立, 但现在各量都已看作 4 维张量, 此式还成立吗?以中册选读 14-4-3 为基础可以证明仍然成立. 后面不再一一指出.

面是闭合 2 维面，所以法矢场 r^a 的任一不可延积分曲线与每一截面必然相交且仅交一次. 此外，用这些积分曲线还可定义各截面之间的微分同胚映射，于是 H 微分同胚于 $\mathbb{R}\times S$ (其中 S 代表临界陷俘面). 后面用到这些结论时将不再明确提及.

命题 16-7-3　动力学视界 H 的截面面积 A 沿 r^a 方向单调增长.

证明　不妨参照命题16-4-1的证明进行. 该证明用到 $i^*(\nabla_{(a}\bar{k}_{b)})=\mathscr{L}_k h_{ab}/2$ [式(16-4-8)]，其中 h_{ab} 是指 g_{ab} 在类光面 Δ 上诱导的退化 "度规" (而非本节的 H 上的非退化诱导度规)，$k^a=(\partial/\partial\lambda)^a$，而 λ 在每一分层面 $S(\lambda)$ 上为常数. 对本命题，可以利用的类似公式是

$$\tilde{K}_{ab}=\frac{1}{2}\mathscr{L}_r\tilde{h}_{ab}\,, \tag{16-7-34}$$

[上式的证明与中册式(14-4-16)的证明很像，此外也可令稍后的式(16-7-37)的 $\nu=1$ 而直接证明.] 式(16-7-34)的 r^a 由于满足 $h_{ab}r^ar^b=1$ 而可表为 $r^a=(\partial/\partial l)^a$ (l 是 r^a 积分曲线的线长参数)，但 r^a 的两条积分曲线介于两个截面(临界陷俘面)之间的线长没有理由相等，这使本命题的证明略微复杂. 定义函数 $\lambda: H\to\mathbb{R}$ 使每一截面为等 λ 面，从而可认为 H 被等 λ 面族 $\{S(\lambda)\}$ 分层，于是，设 $C(l)$ 是 r^a 的一条积分曲线，则可选 λ 为新参数作重参数化而得 $C'(\lambda)=C(l)$，切矢关系为

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}=\nu r^a,\quad \text{其中}\,\nu\equiv\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{16-7-35}$$

总可选 $\lambda: H\to\mathbb{R}$ 使 $\nu>0$，从而使 $(\partial/\partial\lambda)^a$ 与 r^a 同向，所以只须证明 $\mathrm{d}A(\lambda)/\mathrm{d}\lambda>0$，其中 $A(\lambda)$ 代表 $S(\lambda)$ 的面积. 参考命题16-4-1的证明选 H 上的坐标系 $\{\lambda,\theta,\varphi\}$，以 $\tilde{h}$ 代表 $\tilde{h}_{ab}$ 在 $\{\theta,\varphi\}$ 系的行列式，则 $A(\lambda)=\iint\sqrt{\tilde{h}(\lambda,\theta,\varphi)}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，故

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{1}{2}\iint\frac{1}{\sqrt{\tilde{h}}}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\lambda}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{16-7-36}$$

再仿照式(16-4-6)的证明又得

$$\frac{1}{\tilde{h}}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\lambda}=\sum_{i,j=2}^{3}\tilde{h}^{ij}\frac{\partial\tilde{h}_{ij}}{\partial\lambda}=\sum_{i,j=2}^{3}\tilde{h}^{ij}(\mathscr{L}_{\partial/\partial\lambda}\tilde{h})_{ij}=\tilde{h}^{ab}\mathscr{L}_{\nu r}\tilde{h}_{ab}\,,$$

故

$$\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\lambda}=\tilde{h}\tilde{h}^{ab}\mathscr{L}_{\nu r}\tilde{h}_{ab}\,, \tag{16-7-37}$$

而

$$\mathscr{L}_{\nu r}\tilde{h}_{ab}=\nu(r^c\mathrm{D}_c\tilde{h}_{ab}+\tilde{h}_{cb}\mathrm{D}_ar^c+\tilde{h}_{ac}\mathrm{D}_br^c)+r^c\tilde{h}_{cb}\mathrm{D}_a\nu+r^c\tilde{h}_{ac}\mathrm{D}_b\nu=\nu\mathscr{L}_r\tilde{h}_{ab}=2\nu\tilde{K}_{ab}\,,$$

[其中第二步用到 $r^c\tilde{h}_{cb}=0$，第三步用到式(16-7-34).] 代入式(16-7-37)后再代入式(16-7-36)便得

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\iint v\sqrt{\tilde{h}}\,\tilde{K}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,. \tag{16-7-38}$$

截面是临界陷俘面导致 $\hat{\theta}_{(k)}=0,\ \hat{\theta}_{(l)}<0$，代入式(16-7-29)得 $\tilde{K}=-\hat{\theta}_{(l)}/2>0$，于是式(16-7-38)保证 $\mathrm{d}A(\lambda)/\mathrm{d}\lambda>0$. □

[选读 16-7-1]

本选读给出命题16-7-3的另一证明，它无须借用坐标系，是一种更漂亮的纯几何式证明.

设 ε_{abc} 是 (H,h_{ab}) 的适配体元，则由上册式(5-5-6)可知 $r^c\varepsilon_{abc}$ [在 $S(\lambda)$ 上的限制]是 ε_{abc} 在 $S(\lambda)$ 上的诱导面元，故 $A(\lambda)=\int_{S(\lambda)}r^c\varepsilon_{abc}$. 为证式(16-7-38)，只须证明它的几何语言版本

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\int_{S(\lambda)}v\tilde{K}r^c\varepsilon_{abc}\,. \tag{16-7-38$'$}$$

为此可参考引理16-6-4. 从该引理的证明不难看出，若把其中的 Δ 和 k^a 依次改为现在的 H 和 vr^a，结论仍然适用，即下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_{S(\lambda)}\mu_{ab}=\int_{S(\lambda)}\mathscr{L}_{vr}\mu_{ab}\,, \tag{16-7-39}$$

其中 μ_{ab} 代表 H 上的任一2形式场. 取 $\mu_{ab}=r^c\varepsilon_{abc}$，则为证式(16-7-38′)只须证明

$$\mathscr{L}_{vr}(r^c\varepsilon_{abc})=v\tilde{K}r^c\varepsilon_{abc}\,. \tag{16-7-40}$$

因为不难证明 $\varepsilon_{abc}\mathscr{L}_{vr}r^c=-r^c\varepsilon_{abc}\mathscr{L}_r v$，所以，如能证明

$$r^c\mathscr{L}_{vr}\varepsilon_{abc}=r^c\varepsilon_{abc}(v\tilde{K}+\mathscr{L}_r v)\,, \tag{16-7-41}$$

则式(16-7-40)得证. 下面证明式(16-7-41). 因 $\mathscr{L}_{vr}\varepsilon_{abc}$ 是3维流形 H 上的3形式场，故 H 上有标量场 α 使

$$\alpha\varepsilon_{abc}=\mathscr{L}_{vr}\varepsilon_{abc}=\mathrm{d}_a(vr^e\varepsilon_{ebc})+(\mathrm{d}\varepsilon)_{eabc}vr^e=\mathrm{d}_a(vr^e\varepsilon_{ebc})\,, \tag{16-7-42}$$

其中第二步用到第5章习题6(a)，第三步是因为3维流形上的4形式场一定为零. 令 $F_a\equiv vr_a$，则其对偶形式 $({}^*F)_{bc}=F^e\varepsilon_{ebc}=vr^e\varepsilon_{ebc}$，故 $\alpha\varepsilon_{abc}=\mathrm{d}_a{}^*F_{bc}$. 由第5章习题16可知 $\mathrm{d}{}^*\boldsymbol{F}={}^*(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$，代入上式得

$$\alpha\varepsilon_{abc}={}^*(\mathrm{div}F)_{abc}={}^*[\mathrm{D}_e(vr^e)]_{abc}=[\mathrm{D}_e(vr^e)]\,\varepsilon_{abc}\,,$$

于是

$$\alpha = \mathrm{D}_a(\nu r^a) = \nu \mathrm{D}_a r^a + r^a \mathrm{D}_a \nu = \nu \tilde{K} + \mathscr{L}_r \nu ,$$

其中末步用到$\mathrm{D}_a r^a = \tilde{K}$(可由$\tilde{K}$及$\tilde{K}_{ab}$的定义证实). □

[选读 16-7-1 完]

上述命题表明黑洞力学第二定律对动力学视界的截面也成立(Hawking当年只证明了它对事件视界成立). 现在的首要任务是找出这一面积变化的定量表达式. 动力学视界H的截面积增加是因为有能量不断经H流入黑洞(把H看作黑洞的边界), 为求得面积增长的表达式就应该计算经H流入的能量. 相对论中能量总是关于某个类时矢量场ξ^a而言的, 与动力学视界H的内禀几何有密切关系的k^a自然成为ξ^a的首选对象(此处把ξ^a的条件从类时放宽至还允许类光). 但因k^a的"归一化"有任意性, 我们选$\xi^a = Nk^a$, 其中N是某个函数. 由$k^a = \tau^a + r^a$又得$\xi^a = N\tau^a + Nr^a$, 此式颇像时空3+1分解中对类时矢量场(小节14.4.2的t^a)的分解式, 因此不妨把现在的N和Nr^a分别称为(类空超曲面H上的)时移函数和位移矢量场. 设S_1和S_2是H的两个截面, 面积满足$A(S_2) > A(S_1)$ [亦即S_2代表的时刻迟于S_1代表的时刻, 则介于S_1和S_2的3维区域$\Delta H \subset H$就代表介于这两个时刻的那段时间内的演化过程. 仿照上册§6.4, 可以认为$-T^a{}_b\xi^b$代表由"观者"ξ^a测得的4动量密度, 再仿照选读6-4-2的讨论(上册167页第4行及图6-33)便知$\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\xi^b$可解释为物质场$T_{ab}$提供的、通过$\Delta H$流入黑洞的、关于$\xi^a$的能量, 记作$\mathscr{F}^{(\xi)}_{\text{matter}}$, 即

$$\mathscr{F}^{(\xi)}_{\text{matter}} = \int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\xi^b\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} . \quad ({}^3\boldsymbol{\varepsilon}\text{代表}H\text{上与}h_{ab}\text{适配的体元}) \qquad (16\text{-}7\text{-}43)$$

式(16-7-43)右边与h_{ab}及其标量曲率(记作$\mathscr{R}$)、外曲率K_{ab}有关. 为找出$T_{ab}\tau^a\xi^b$用这些几何量的表达式, 可以利用广义相对论的约束方程. 既然H是类空超曲面, 其上的柯西数据(初值)(h_{ab}, K_{ab})就必须服从标量和矢量约束方程. 中册§14.5(及下册第15章)所讲的都只是真空引力场的约束, 而现在涉及物质场, 应做修改. 约束函数仍是真空情况下的那两类, 即标量约束函数$H_{\mathrm{S}} \equiv \mathscr{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2$和矢量约束函数$H^a_{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{D}_b(K^{ab} - Kh^{ab})$ [见式(14-5-9)和(14-5-10)左边], 但它们不再为零, H上的约束方程分别为[见Wald(1984)式(10.2.42)及(10.2.41)]①

$$H_{\mathrm{S}} \equiv \mathscr{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2 = 16\pi T_{ab}\tau^a\tau^b , \qquad (16\text{-}7\text{-}44\text{a})$$

$$H^a_{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{D}_b(K^{ab} - Kh^{ab}) = 8\pi T^c{}_b\tau_c h^{ab} . \qquad (16\text{-}7\text{-}44\text{b})$$

由此易证$T_{ab}\tau^a\xi^b = (16\pi)^{-1}N(H_{\mathrm{S}} + 2r_a H^a_{\mathrm{V}})$, 故

---

① Ashtekar等的文献还允许宇宙常数$\Lambda \neq 0$, 这时式(16-7-44a)和(16-7-44b)右边的T_{ab}和$T^c{}_b$应改为$\bar{T}_{ab}$和$\bar{T}^c_b$, 其中$\bar{T}_{ab} \equiv T_{ab} - \Lambda g_{ab}/8\pi$. 我们只限于$\Lambda = 0$的情况.

$$\mathscr{F}^{(\xi)}_{\text{matter}}=\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}N(H_{\text{S}}+2r_aH^a_{\text{V}})^3\boldsymbol{\varepsilon}\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}45)$$

由式(16-7-44)又得

$$H_{\text{S}}+2r_aH^a_{\text{V}}=\mathscr{R}-K_{ab}K^{ab}+K^2+2r_a\text{D}_bP^{ab},\ \text{其中}\ P^{ab}\equiv K^{ab}-Kh^{ab}\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}46)$$

现在的关键是推导 $H_{\text{S}}+2r_aH^a_{\text{V}}$ 的一个便于应用的表达式.

只要 H 是被一族闭合面分了层的类空超曲面[分层面(截面)未必是临界陷俘面], 则 H 上自然存在一个标量场 R (面积半径), 定义为

$$R|_p:=\sqrt{A_p/4\pi}\,,\quad \forall p\in H,\text{其中}\ A_p\ \text{代表过}\ p\ \text{点的截面的面积}.$$

在以下的推导中(从命题 16-7-4 至命题 16-7-10), H 可以不是动力学视界, 但要满足:① H 是被闭合面族分了层的类空超曲面;② $r^a\text{D}_aR>0$ (“面积严格增加”).

命题 16-7-4 以 $\mathscr{G}_{ab}$ 代表 D_a 的爱因斯坦张量, 则

$$2\mathscr{G}_{ab}r^ar^b=-\tilde{\mathscr{R}}+\tilde{K}^2-\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}47)$$

证明 以 $\mathscr{R}_{abc}{}^d$ 和 $\tilde{\mathscr{R}}_{abc}{}^d$ 分别代表 D_a 和 $\tilde{\text{D}}_a$ 的黎曼张量. 仿照中册命题14-4-4的推证, 注意到现在的 h_{ab} 和 $\tilde{h}_{ab}$ 在号差上与该命题不同, 得

$$\tilde{\mathscr{R}}_{abc}{}^d=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_b{}^f\tilde{h}_c{}^l\tilde{h}_m{}^d\mathscr{R}_{efl}{}^m+\tilde{K}_{ca}\tilde{K}_b{}^d-\tilde{K}_{cb}\tilde{K}_a{}^d\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}48)$$

再以 $\mathscr{R}_{ac}$ 和 $\tilde{\mathscr{R}}_{ac}$ 分别代表 D_a 和 $\tilde{\text{D}}_a$ 的里奇张量, 则

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{R}}_{ac}&\equiv\tilde{\mathscr{R}}_{abc}{}^b=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_c{}^l\tilde{h}_m{}^f\mathscr{R}_{efl}{}^m+\tilde{K}\tilde{K}_{ac}-\tilde{K}_{cb}\tilde{K}_a{}^b=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_c{}^l(h_m{}^f-r_mr^f)\mathscr{R}_{efl}{}^m+\tilde{K}\tilde{K}_{ac}-\tilde{K}_{cb}\tilde{K}_a{}^b\\&=\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_c{}^l\mathscr{R}_{el}-\tilde{h}_a{}^e\tilde{h}_c{}^lr_mr^f\mathscr{R}_{efl}{}^m+\tilde{K}\tilde{K}_{ac}-\tilde{K}_{cb}\tilde{K}_a{}^b\,.\end{aligned} \qquad (16\text{-}7\text{-}49)$$

求迹得 $\tilde{\text{D}}_a$ 的标量曲率

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{R}}&\equiv\tilde{h}^{ac}\tilde{\mathscr{R}}_{ac}=\tilde{h}^{el}(\mathscr{R}_{el}-r_mr^f\mathscr{R}_{efl}{}^m)+\tilde{K}^2-\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}\\&=(h^{el}-r^er^l)(\mathscr{R}_{el}-r_mr^f\mathscr{R}_{efl}{}^m)+\tilde{K}^2-\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}=\mathscr{R}-2\mathscr{R}_{ab}r^ar^b+\tilde{K}^2-\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}\,.\end{aligned} \qquad (16\text{-}7\text{-}50)$$

其中末步用到 $r^{(e}r^{f)}r^lr_m\mathscr{R}_{[ef]l}{}^m=0$. 再由爱因斯坦张量的定义 $\mathscr{G}_{ab}\equiv\mathscr{R}_{ab}-\mathscr{R}h_{ab}/2$ 便得待证的式(16-7-47). □

命题 16-7-5

$$\mathscr{R}=\tilde{\mathscr{R}}+\tilde{K}^2-\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}+2\text{D}_a\alpha^a,\ \text{其中}\ \alpha^a\equiv r^b\text{D}_br^a-r^a\text{D}_br^b\,. \qquad (16\text{-}7\text{-}51)$$

证明 习题. 提示:由 $\tilde{K}_{ab},\tilde{K}$ 的定义得 $\tilde{K}=\text{D}_ar^a$. 由 $\tilde{K}_{ab}=\tilde{K}_{ba}$ 及 $\tilde{K}_{ab}$ 的定义又得 $\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab}=(\text{D}_ar^b)\text{D}_br^a$. 借此二式, 由 α^a 的定义及式(16-7-50)便得式(16-7-51). □

命题 16-7-6　令 $\beta^a \equiv K^{ab} r_b - K r^a$，$\gamma^a \equiv \alpha^a + \beta^a$，则

$$H_{\rm S} + 2r_a H^a_{\rm V} = 2{\rm D}_a \gamma^a + \tilde{\mathscr{R}} + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} + K^2 - K_{ab}K^{ab} - 2P^{ab}{\rm D}_a r_b . \tag{16-7-52}$$

证明　式(16-7-46)与(16-7-51)结合给出

$$H_{\rm S} + 2r_a H^a_{\rm V} = \tilde{\mathscr{R}} + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} + 2{\rm D}_a \alpha^a - K_{ab}K^{ab} + K^2 + 2r_a {\rm D}_b P^{ab} . \tag{16-7-53}$$

与式(16-7-52)比较可知只须证 $r_a {\rm D}_b P^{ab} = {\rm D}_a \beta^a - P^{ab}{\rm D}_a r_b$，而这由 $\beta^a \equiv K^{ab} r_b - K r^a$ 及 $P_{ab} \equiv K_{ab} - K h_{ab}$ [见式(16-7-46)]易得. □

命题 16-7-7　以 $\tilde{W}_a$ 代表 $K_{ab} r^b$ 在 S 上的投影，即 $\tilde{W}_a \equiv \tilde{h}^e_a K_{eb} r^b$，令 $b \equiv K_{ab} r^a r^b$，则

$$H_{\rm S} + 2r_a H^a_{\rm V} = 2{\rm D}_a \gamma^a + \tilde{\mathscr{R}} - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} - 2\tilde{W}_a \tilde{W}^a - 2\tilde{W}^a r^b {\rm D}_b r_a + \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}(\hat{\theta}_{(k)} + 4b) . \tag{16-7-54}$$

证明　由 $\underset{\frown}{K}_{ab} \equiv \tilde{h}^c_a \tilde{h}^d_b K_{cd}$ 出发，利用 $\tilde{h}^c_a = h^c_a - r_a r^c$ (并注意到 h^c_a 是 ${}^3\delta^c_a$) 可得

$$K_{ab} = \underset{\frown}{K}_{ab} + 2r^c K_{c(a} r_{b)} - b r_a r_b = \underset{\frown}{S}_{ab} + \frac{1}{2}\underset{\frown}{K}\tilde{h}_{ab} + 2\tilde{W}_{(a} r_{b)} + b r_a r_b . \tag{16-7-55}$$

对上式求迹，注意到① $\underset{\frown}{S}_{ab}$ 无迹；② $\tilde{h}^{ab} r_b = 0$；③ $\tilde{W}_a$ (作为投影)与 r^a 缩并为零，便得

$$K = \underset{\frown}{K} + b . \tag{16-7-56}$$

从 $P_{ab} \equiv K_{ab} - K h_{ab}$ 出发，利用式(16-7-55)、(16-7-26b)和(16-7-56)易得

$$P^{ab} = \underset{\frown}{S}^{ab} - \frac{1}{2}\underset{\frown}{K}\tilde{h}^{ab} + 2\tilde{W}^{(a} r^{b)} - \underset{\frown}{K} r^a r^b - b\tilde{h}^{ab} . \tag{16-7-57}$$

从 $\tilde{K}_{ab} \equiv \tilde{h}^c_a \tilde{h}^d_b {\rm D}_c r_d$ 出发，利用 $\tilde{h}^c_a = h^c_a - r_a r^c$，$r^d {\rm D}_a r_d = 0$ 及 $\tilde{K}_{ab} = \tilde{S}_{ab} + \tilde{K}\tilde{h}_{ab}/2$ 又得

$${\rm D}_a r_b = \tilde{K}_{ab} + r_a r^c {\rm D}_c r_b = \tilde{S}_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{h}_{ab} + r_a r^c {\rm D}_c r_b . \tag{16-7-58}$$

把式(16-7-26a)及(16-7-55)~(16-7-57)代入(16-7-52)，利用 $\tilde{S}_{ab}$ 和 $\underset{\frown}{S}_{ab}$ 的无迹性、$\tilde{h}_{ab} r^a = 0$，$r^b {\rm D}_c r_b = 0$ 以及由 $\tilde{S}_{ab}, \underset{\frown}{S}_{ab}, \tilde{W}_a$ “切于” S 所导致的 $\tilde{S}_{ab} r^a = 0, \underset{\frown}{S}_{ab} r^a = 0$ 和 $\tilde{W}_a r^a = 0$ 便得

$$\begin{aligned} & H_{\rm S} + 2r_a H^a_{\rm V} \\ &= 2{\rm D}_a \gamma^a + \tilde{\mathscr{R}} + \frac{1}{2}(\tilde{K} + \underset{\frown}{K})^2 + 2b(\tilde{K} + \underset{\frown}{K}) - (\tilde{S}_{ab} + \underset{\frown}{S}_{ab})(\tilde{S}^{ab} + \underset{\frown}{S}^{ab}) - 2\tilde{W}_a \tilde{W}^a - 2\tilde{W}^b r^c {\rm D}_c r_b \\ &= 2{\rm D}_a \gamma^a + \tilde{\mathscr{R}} + \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}(\hat{\theta}_{(k)} + 4b) - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} - 2\tilde{W}_a \tilde{W}^a - 2\tilde{W}^b r^c {\rm D}_c r_b , \end{aligned}$$

其中第二步用到式(16-7-27). □

以下的任务是简化式(16-7-54)的右边.

命题 16-7-8 $$\gamma^a = r^b \mathrm{D}_b r^a + \tilde{W}^a - \hat{\theta}_{(k)} r^a . \tag{16-7-59}$$

证明 由$\gamma^a \equiv \alpha^a + \beta^a$, $\alpha^a \equiv r^b \mathrm{D}_b r^a - r^a \mathrm{D}_b r^b$, $\beta^a \equiv K^{ab} r_b - K r^a$得

$$\gamma^a = r^b \mathrm{D}_b r^a - r^a \mathrm{D}_b r^b + K^{ab} r_b - K r^a . \tag{16-7-60}$$

所以只须证明

$$-r^a \mathrm{D}_b r^b + K^{ab} r_b - K r^a = \tilde{W}^a - \hat{\theta}_{(k)} r^a . \tag{16-7-61}$$

因$\tilde{K} = \mathrm{D}_a r^a$(见命题 16-7-5 证明提示), 故式(16-7-61)的

$$\text{左边} = -r^a(\tilde{K} + K) + K^{ab} r_b = -r^a(\hat{\theta}_{(k)} + b) + K^{ab} r_b = -\hat{\theta}_{(k)} r^a + \tilde{W}^a = \text{右边},$$

其中第二步用到式(16-7-56)及(16-7-27b), 第三步是因为

$$\tilde{W}^a = \tilde{h}^a_b K^{bc} r_c = (h^a_b - r^a r_b) K^{bc} r_c = K^{ac} r_c - b r^a . \qquad \square$$

命题16-7-4之前已对H约定面积半径R满足$r^a \mathrm{D}_a R > 0$, 这就保证$\mathrm{D}_a R$处处非零, 所以R可被选为H上的一个坐标, 配以截面上的θ, φ便得到H上的局域坐标系$\{x^\alpha\} \equiv \{x^1 \equiv R, x^2 \equiv \theta, x^3 \equiv \varphi\}$. 又因每一截面都是等$R$面, 所以$R$可以充当命题 16-7-3 证明中的$\lambda$, 因而[见式(16-7-35)]

$$\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^a = \nu r^a, \quad \text{其中} \nu \equiv \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}R} . \tag{16-7-35$'$}$$

又因r^a正交于截面, 故$(\partial/\partial R)^a$亦然, 所以$(\partial/\partial R)^a$正交于$(\partial/\partial\theta)^a$及$(\partial/\partial\varphi)^a$, 因而有3维张量场等式

$$h_{ab} = h_{11}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b + \tilde{h}_{ab} = h_{11}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b + \sum_{i,j=2}^{3} \tilde{h}_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b , \tag{16-7-62}$$

其中$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}$是h_{ab}在$\{R,\theta,\varphi\}$系的9个坐标分量中偏后的4个. 于是h_{ab}和$\tilde{h}_{ab}$在该系的行列式h和$\tilde{h}$有简单关系$h = h_{11}\tilde{h}$, 由此易得H的体元${}^3\varepsilon$与S的面元${}^2\varepsilon$的关系

$${}^3\varepsilon = \sqrt{h}\, \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = \sqrt{h_{11}\tilde{h}}\, \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = \sqrt{h_{11}}\mathrm{d}R \wedge {}^2\varepsilon . \tag{16-7-63}$$

前面已选$\xi^a = N k^a$作为定义能量的矢量场, 但N仍有任意性. 一种方便选择是取N为R的梯度$\mathrm{D}_a R$的大小(以N_R代表此N), 即

$$N_R \equiv \sqrt{h^{ab}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b} = \sqrt{h^{11}} . \tag{16-7-64}$$

另一方面, 由式(16-7-62)易见$h^{11} = \tilde{h}/h = 1/h_{11}$, 故$h_{11} = 1/h^{11} = N_R^{-2}$. 代入式(16-7-63)得

$$^3\varepsilon = N_R{}^{-1}\mathrm{d}R \wedge {}^2\varepsilon\,. \tag{16-7-65}$$

命题 16-7-9

$$r^a \mathrm{D}_a r_b = N_R{}^{-1}\tilde{\mathrm{D}}_b N_R\,. \tag{16-7-66}$$

证明　由 $(\partial/\partial R)^a = \nu r^a$ 得 $h_{11} = \nu^2 h_{ab} r^a r^b = \nu^2$，与 $h_{11} = N_R{}^{-2}$ 结合得 $N_R = \nu^{-1}$. 故 $r^a = N_R(\partial/\partial R)^a$. 再把 $h_{11} = N_R{}^{-2}$ 代入式(16-7-62)，两边沿 r^a 取李导数得

$$\mathrm{D}_a r_b + \mathrm{D}_b r_a = \mathscr{L}_r[N_R{}^{-2}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b] + \mathscr{L}_r[h_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b]\,. \tag{16-7-67}$$

以 r^b 缩并上式两边，注意到 $r^b\mathrm{D}_a r_b = \mathrm{D}_a(r^b r_b)/2 = 0$，得

$$r^b\mathrm{D}_b r_a = r^b\mathscr{L}_r[N_R{}^{-2}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b] + r^b\mathscr{L}_r[h_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^j)_b]\,. \tag{16-7-68}$$

上式右边第二项按莱布尼茨律可拆成三个分项，其中两项都因含 $r^b(\mathrm{d}x^j)_b$ 而为零[因 $r^b = N_R(\partial/\partial x^1)^b$]，第三分项则因含 $\mathscr{L}_r(\mathrm{d}x^j)_b$ 也为零，理由是：由李导数与外微分的可交换性[第 5 章习题 6(b)]有 $\mathscr{L}_r(\mathrm{d}x^j)_b = \mathrm{d}_b(\mathscr{L}_r x^j)$，而

$$(\mathscr{L}_r x^j) = r^a\mathrm{D}_a x^j = N_R\partial x^j/\partial x^1 = 0\,.$$

于是式(16-7-68)简化为

$$\begin{aligned} r^b\mathrm{D}_b r_a &= r^b\mathscr{L}_r[N_R{}^{-2}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b] \\ &= r^b\{(\mathscr{L}_r N_R{}^{-2})(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b + N_R{}^{-2}[(\mathrm{d}R)_a\mathscr{L}_r(\mathrm{d}R)_b + (\mathrm{d}R)_b\mathscr{L}_r(\mathrm{d}R)_a]\}\,. \end{aligned} \tag{16-7-69}$$

上式右边涉及 $\mathscr{L}_r N_R{}^{-2}$ 及 $\mathscr{L}_r(\mathrm{d}R)_a$，前者容易求得为

$$\mathscr{L}_r N_R{}^{-2} = -2N_R{}^{-2}\frac{\partial N_R}{\partial R}\,, \tag{16-7-70}$$

后者则为

$$\mathscr{L}_r(\mathrm{d}R)_a = \mathrm{d}_a(\mathscr{L}_r R) = \mathrm{d}_a(r^b\mathrm{D}_b R) = \mathrm{d}_a\left[N_R\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^b\mathrm{D}_b R\right] = \mathrm{D}_a N_R\,. \tag{16-7-71}$$

把式(16-7-70)、(16-7-71)代入(16-7-69)，注意到 $r^b = N_R(\partial/\partial R)^b$，得

$$r^b\mathrm{D}_b r_a = N_R{}^{-1}\left[-\frac{\partial N_R}{\partial R}(\mathrm{d}R)_a + \mathrm{D}_a N_R\right]. \tag{16-7-72}$$

由 $r_a r^a = 1$ 及 $r^b = N_R(\partial/\partial R)^b$ 不难验证

$$(\mathrm{d}R)_a = N_R r_a\,, \tag{16-7-73}$$

故

$$-\frac{\partial N_R}{\partial R}(\mathrm{d}R)_a = -N_R r_a\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^b\mathrm{D}_b N_R = -r_a r^b\mathrm{D}_b N_R\,,$$

因而式(16-7-77)给出

$$r^b \mathrm{D}_b r_a = N_R{}^{-1}(-r_a r^b \mathrm{D}_b N_R + \mathrm{D}_a N_R) = N_R{}^{-1}\tilde{\mathrm{D}}_a N_R,$$

其中第二步用到 $\tilde{\mathrm{D}}_a$ 的定义，即中册式(14-4-18). □

命题 16-7-10　令 $\varsigma^a \equiv \tilde{W}^a + \tilde{\mathrm{D}}^a \ln N_R$,① 则式(16-7-54)可改写为

$$H_\mathrm{S} + 2r_a H^a_\mathrm{V} = \tilde{\mathscr{R}} - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} - 2\varsigma^a\varsigma_a + 2\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a + \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}(4K - 3\hat{\theta}_{(k)}) - 2r^a\mathrm{D}_a\hat{\theta}_{(k)}. \quad (16\text{-}7\text{-}74)$$

证明　作为习题供读者练习. 提示:

(1)由 ζ^a 的定义及式(16-7-66)得 $\varsigma^a = \tilde{W}^a + r^b\mathrm{D}_b r^a$，从而有

$$\tilde{W}^a\tilde{W}_a + \tilde{W}^a r^b \mathrm{D}_b r_a = \varsigma^a\varsigma_a + r_a r^b \mathrm{D}_b\varsigma^a.$$

(2)式(16-7-59)导致 $\mathrm{D}_a\gamma^a = \mathrm{D}_a\varsigma^a - \mathrm{D}_a(\hat{\theta}_{(k)}r^a)$，进而有

$$\mathrm{D}_a\gamma^a = \mathrm{D}_a\varsigma^a - \hat{\theta}_{(k)}\tilde{K} - r^a\mathrm{D}_a\hat{\theta}_{(k)}.$$

(3)由 $\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a \equiv \tilde{h}_a^c\tilde{h}_d^a\mathrm{D}_c\varsigma^d$ 得 $\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a = \mathrm{D}_a\varsigma^a - r_a r^b\mathrm{D}_b\varsigma^a$.

于是式(16-7-54)的一、四、五项之和为

$$2\mathrm{D}_a\gamma^a - 2\tilde{W}_a\tilde{W}^a - 2\tilde{W}^a r^b\mathrm{D}_b r_a = -2\varsigma^a\varsigma_a + 2\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a - 2\hat{\theta}_{(k)}\tilde{K} - 2r^a\mathrm{D}_a\hat{\theta}_{(k)}.$$

(4)用式(16-7-27b)及(16-7-56)把式(16-7-54)末项化为

$$\hat{\theta}_{(k)}(4K - 3\hat{\theta}_{(k)})/2 + 2\hat{\theta}_{(k)}\tilde{K}.$$ □

由 $\tilde{h}_{ab}$ 的正定性不难证明 $\hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} \geqslant 0$, $\varsigma^a\varsigma_a \geqslant 0$，可记作 $\hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} \equiv |\hat{\sigma}|^2$, $\varsigma^a\varsigma_a \equiv |\varsigma|^2$，故式(16-7-74)又可表为

$$H_\mathrm{S} + 2r_a H^a_\mathrm{V} = \tilde{\mathscr{R}} - |\hat{\sigma}|^2 - 2|\varsigma|^2 + 2\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a + \frac{1}{2}\hat{\theta}_{(k)}(4K - 3\hat{\theta}_{(k)}) - 2r^a\mathrm{D}_a\hat{\theta}_{(k)}. \quad (16\text{-}7\text{-}74')$$

上式适用于任何被分了层(且 $r^a\mathrm{D}_a R > 0$)的类空超曲面 H.

下面把以上结果用于动力学视界 H，这时 $\hat{\theta}_{(k)} = 0$ 导致式(16-7-74′)右边后两项为零，代入式(16-7-45)(并取该式的 N 为 N_R)便得

$$16\pi\mathscr{F}^{(R)}_{\text{matter}} = \int_{\Delta H} N_R(\tilde{\mathscr{R}} - |\hat{\sigma}|^2 - 2|\varsigma|^2)\,{}^3\varepsilon + 2\int_{\Delta H} N_R(\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a)\,{}^3\varepsilon. \quad (16\text{-}7\text{-}75)$$

再由式(16-7-65)可知上式末项的积分为

① 还可证明(习题) $\varsigma^a = \tilde{h}^{ab}r^c\nabla_c k_b$，不过后面不用这一结果.

$$\int_{\Delta H} N_R(\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a)\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Delta H}(\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a)\mathrm{d}R\wedge{}^2\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\int_S(\tilde{\mathrm{D}}_a\varsigma^a)\,{}^2\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{16-7-76}$$

其中 R_1 和 R_2 分别是 S_1 和 S_2 的面积半径. 上式右边又可用 Gauss 定理化为边界项, 而 S (作为闭合面)的边界为空, 故式(16-7-75)右边末项为零, 再与式(16-7-43)结合乃得

$$\int_{\Delta H} N_R\tilde{\mathscr{R}}\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} = 16\pi\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\xi^b_{(R)}\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} + \int_{\Delta H} N_R(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{16-7-77}$$

其中 $\xi^b_{(R)} \equiv N_R k^b$. 再次使用式(16-7-65)可知上式左边为

$$\int_{\Delta H} N_R\tilde{\mathscr{R}}\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\int_S\tilde{\mathscr{R}}\,{}^2\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{R_1}^{R_2}\mathscr{I}\mathrm{d}R\,,\quad 其中\ \mathscr{I} \equiv \int_S\tilde{\mathscr{R}}\,{}^2\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{16-7-78}$$

如果 S 是半径为 R 的 2 球面, 则由第 3 章习题 13 的结果不难求得 $\tilde{\mathscr{R}} = 2R^{-2}$, 故 $\mathscr{I} = 8\pi$. 然而在一般情况下只敢说 S 是闭合的 2 维定向流形, 未必是球面. 幸好数学上早已证明闭合 2 维定向流形的 $\mathscr{I}$ 在同胚映射下不变(是拓扑不变量), 而 H 的各截面 S 有相同拓扑, 故 $\mathscr{I}$ 不随 R 而变, 因而

$$\int_{\Delta H} N_R\tilde{\mathscr{R}}\,{}^3\boldsymbol{\varepsilon} = \mathscr{I}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R = \mathscr{I}(R_2 - R_1)\,. \tag{16-7-79}$$

这正是当初选 N_R 作为 N 的用心所在. 把上式代回式(16-7-77), 去掉体元记号便得

$$\mathscr{I}(R_2 - R_1) = 16\pi\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\xi^b_{(R)} + \int_{\Delta H} N_R(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,. \tag{16-7-80}$$

数学上还证明了 $\mathscr{I}$ 有如下性质: $\mathscr{I} > 0 \Leftrightarrow S$ 为拓扑 2 球面; $\mathscr{I} = 0 \Leftrightarrow S$ 为拓扑 2 环面(“救生圈”). 式(16-7-80)右边第二项显然非负; 由于默认能动张量 T_{ab} 满足主能量条件(见附录 D), 式(16-7-80)右边第一项也非负, 加之 $R_2 > R_1$ (面积恒增), 故 $\mathscr{I} \geqslant 0$. 若 $\mathscr{I} = 0$, 则式(16-7-80)退化为 $0 = 0$, 不再给出 $R_2 - R_1$ 的表达式. 我们不拟讨论这种非常特别的退化情况[可参阅 Ashtekar and Krishnan(2003)], 故 $\mathscr{I} > 0$, 即动力学视界的截面只能是拓扑 2 球面. 既然 2 球面的 $\mathscr{I} = 8\pi$ 而且 $\mathscr{I}$ 是拓扑不变量, 任何拓扑 2 球面就都有 $\mathscr{I} = 8\pi$, 故式(16-7-80)成为

$$\frac{1}{2}(R_2 - R_1) = \int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\xi^b_{(R)} + \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} N_R(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,. \tag{16-7-81}$$

上式称为动力学视界的**面积平衡定律**(area balance law).

[选读 16-7-2]

除拓扑 2 球面和 2 环面外, 闭合、连通、可定向的 2 维流形还能有什么拓扑? 本选读对此做一简介.

对闭合连通 2 维曲面 S 可定义一个称为**欧拉示性数**(Euler characteristic index)

的拓扑不变量 χ. 为此, 先对 S 作"三角剖分", 通俗说就是把 S 表为有限个"拓扑三角形"($\mathbb{R}^2$ 中的三角形在连续映射 $f:\mathbb{R}^2\to S$ 下的像)的并集, 要求任意两个"三角形"的交集只能是下述情形之一:①空集; ②唯一的公共顶点; ③唯一且完全重合的公共边. 例如, S^2 的最简单剖分就是使之如同四面体的表面. 设 S 的一个剖分有 n_0 个顶点, n_1 条边, n_2 个"三角形", 则 $\chi := n_0 - n_1 + n_2$. 可以证明, 这样定义的 χ 与三角剖分的选择无关, 仅取决于 S 的拓扑结构. 读者可依据此定义计算任何闭合连通 2 维曲面的 χ. 易见 S^2 的 $\chi = 2$. 而由 Gauss-Bonnet 定理[见陈省身, 陈维桓(1983)定理 4.1]又知

$$\chi = (4\pi)^{-1}\int_S \tilde{\mathscr{R}}^2\varepsilon\,, \qquad (\tilde{\mathscr{R}}\text{ 是 }S\text{ 的标量曲率}) \qquad (16\text{-}7\text{-}82)$$

可见 χ 与正文中引入的 $\mathscr{I}$ 成正比: $\mathscr{I} = 4\pi\chi$. 为帮助想象 S 的其他拓扑类型, 还可引入另一拓扑不变量 g, 称为**亏格**(genus), 严格定义见伍鸿熙等(1981), 第 40 页, §6. 下面的直观想像对理解亏格大有裨益. 球面与环面("救生圈")的拓扑不同在于后者有一个洞而前者没有. 把球状面团压扁(拓扑不变)后可炸成油饼. 若先用筷子在压扁后的面团上穿一个洞(改变拓扑), 就可炸成带一个洞的油饼(或制成面包圈), 其表面就是环面. 类似地, 穿两个洞(两洞不得在面团内部互通)可得带双洞的油饼, 等等. 亏格 g 就是洞的个数, 因此球面的 $g = 0$ 而环面的 $g = 1$. 高亏格的曲面只不过多几个洞而已. 正如式(16-7-82)是微分几何的一个重要结论那样, 拓扑学的一个重要结论是曲面的 χ 与 g 有如下简单关系: $\chi = 2 - 2g$ [见侯伯元, 侯伯宇(1995)§18. 1]. 于是, 球面的 $g = 0$ 意味着 $\chi = 2$, 与三角剖分的结论(以及正文中求得的 $\mathscr{I} = 8\pi$)一致; 环面的 $g = 1$ 则意味着 $\chi = 0$, 这也可用式(16-7-82)通过计算验证.

作为洞的个数, g 当然是非负整数, 因而便于穷尽, 其重要意义在于存在这样的结论[见 Forster(1981)P.158§19]: 闭合、连通、可定向的 2 维流形的拓扑仅由亏格决定, 亏格相同的这种流形一定同胚. 因此, 穷尽了亏格也就穷尽了这种流形的拓扑. 可见亏格最便于描述曲面的拓扑分类. 动力学视界的定义的威力之一在于: 主能量条件和面积恒增的结论排除了高亏格截面的存在性, 从而对截面的拓扑给出强烈限制:(除退化情况外)只能是拓扑 2 球面.

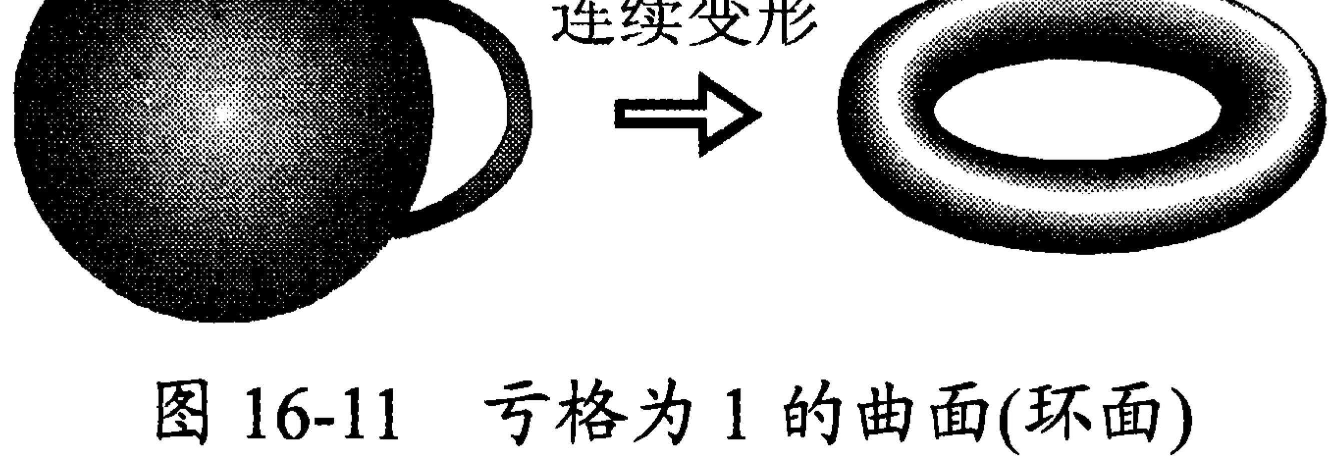


图 16-11　亏格为 1 的曲面(环面)

对亏格也可做这样的直观理解: 先规定球面的亏格 $g = 0$, 再安上一个把手

(handle), g 就变为 1，而这就是环面("救生圈")，见图 16-11．以此类推，安上 g 个把手后的亏格就是 g．不妨把 $g=2$ 的 S 比喻为"双人用"救生圈，有两个孔，每孔可套住一人．于是亏格为 g 的曲面就可比喻为"g 人用"的救生圈．**[选读 16-7-2 完]**

16.7.4　角动量为零时的第一定律

上小节的大部分篇幅放在数学推演上，最后得到式(16-7-81)．本小节要讨论此式的物理意义．

动力学视界的定义保证 $\hat{\theta}_{(k)}=0$，故由式(16-5-50)可知式(16-7-81)左边等于截面 S_2 与 S_1 的 Hawking 质量之差．如果 Hawking 质量代表黑洞内的(准局域)能量，则式(16-7-81)右边应等于经黑洞边界 ΔH 流进洞内的能流．事实上，右边第一项本来就是由物质场 T_{ab} 提供的 $\xi^a_{(R)}$ 能流(加 $\xi^a_{(R)}$ 表示这能量由矢量场 $\xi^a_{(R)}$ 定义)，现在明确记作 $\mathscr{F}^{\xi(R)}_{\text{matter}}$；第二项是纯几何的(只涉及引力场)，自然应解释为(定义为)由引力波携带的、经 ΔH 流进的 $\xi^a_{(R)}$ 能流，即

$$\mathscr{F}^{\xi(R)}_{\text{grav}} \equiv \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} N_R(|\hat{\sigma}|^2+2|\varsigma|^2)\,. \tag{16-7-83}$$

然而，这一解释果真站得住脚吗?请注意现在的对象是强引力场领域，比在渐近平直领域的 Bondi 能流问题还要复杂得多．即使是渐近平直领域，Bondi 等人在当年找到引力能流表达式后也曾经十分慎重地审查过它是否满足引力能流所必须满足的多项判据．强场领域中由式(16-7-83)定义的 $\mathscr{F}^{\xi(R)}_{\text{grav}}$ 也满足这些判据吗? Ashtekar 等在逐一审查后的结论是：它满足除一个以外的所有判据．至于那被除外的一个，至今仍是个有待探讨的开放问题．Ashtekar and Krishnan(2004)中列出了五个(在另一文献中甚至七个)判据，它们都被很好地满足．此处只举两个：

(1)**规范不变性判据**．历史上有过关于引力能流的借助于赝张量的大量表达式，它们都涉及人为借用的非内禀几何因素(例如坐标系和标架)，于是必须检验所得表达式是否实质上与这些人为因素无关．但式(16-7-83)天生就是纯几何表述(不涉及任何人为借用对象)，因而是天生规范不变的．

(2)**正定性判据**．关于引力波到底"只代表时空坐标的波动"还是真有物理意义的讨论是引力波研究史中的重大问题，而引力波能流表达式的正定性恐怕是对后者的最有说服力的支持．式(16-7-83)一望而知是正定的．请注意这一结果来之不易：正是动力学视界的定义本身恰到好处地保证了这一正定性．只要把条件稍加削弱，例如保留其他条件而只把"截面为临界陷俘面"的"临界"两字去掉，正定性就可能丧失．前已述及，在强场领域中的引力能流表达式是很难找到的，但是，动力学视界的巧妙定义竟能出奇制胜地帮助人们找到穿越该视界的引力能流的满意表

达式.

面积平衡定律(16-7-81)在某种意义上代表着能量的守恒性：经黑洞边界流进的能量(由物质场和引力场提供)等于洞内能量的增量，这种解释的关键点在于等式左边代表 Hawking 能量. 然而，Kerr 时空的例子告诉我们在有角动量时洞内能量并不等于 Hawking 能量，于是，虽然等式(16-7-81)在有角动量时照样成立，但上述能量守恒的解释不再适用. 这一问题也可从另一角度看出. 把式(16-7-81)的 $\xi^a_{(R)}$ 能量记作 $E^{\xi_{(R)}}$，并认为右边的能流正好等于 $E^{\xi_{(R)}}$ 的增量 $\Delta E^{\xi_{(R)}}$，即

$$\Delta E^{\xi_{(R)}} = \mathscr{F}^{\xi_{(R)}}_{\text{matter}} + \mathscr{F}^{\xi_{(R)}}_{\text{grav}} .$$

令 S_2 面无限靠近 S_1，则式(16-7-81)左边成为无限小量 $\mathrm{d}R/2$，右边则代表无限小 3 维面(改记作 $\mathrm{d}H$)的能流 $\mathrm{d}E^{\xi_{(R)}}$，故式(16-7-81)的无限小形式为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}R = \mathrm{d}E^{\xi_{(R)}} . \tag{16-7-84}$$

用下式定义 S 关于 $\xi^a_{(R)}$ 的**有效**(effective)**表面引力** $\bar{\kappa}_R$：

$$\bar{\kappa}_R \equiv \frac{1}{2R}, \tag{16-7-85}$$

与 $A = 4\pi R^2$ 结合便可把无限小等式(16-7-84)重铸为如下形式：

$$\frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_R \mathrm{d}A = \mathrm{d}E^{\xi_{(R)}} . \tag{16-7-86}$$

上式可看作将要推导的动力学视界第一定律

$$\mathrm{d}E^{\xi_{(R)}} = \frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_R \mathrm{d}A + \Omega \mathrm{d}J$$

在角动量 $J = 0$ 时的特例. 可见上面对式(16-7-81)所做的“能量守恒”解释只适用于角动量为零的情形. 为了找到第一定律的积分形式，必须加入角动量的考虑，详见小节 16. 7. 5 和 16. 7. 6.

我们至今所讨论的能量都只是 $\xi^a_{(R)}$ 能量，即是由矢量场 $\xi^a_{(R)} \equiv N_R k^a$ 定义的能量，其中时移 $N_R \equiv \sqrt{h^{ab}(\mathrm{d}R)_a(\mathrm{d}R)_b}$ 满足 $\mathrm{D}_a R = N_R r_a$ [见式(16-7-73)]. 然而时移 N (因而 $\xi^a \equiv N k^a$)的选择有相当的任意性. 设 $r(R)$ 是 R 的任一函数，则 r 在截面上也是常数. 仿照 $\mathrm{D}_a R = N_R r_a$ 可定义更一般的时移 N_r 如下：

$$\mathrm{D}_a r \equiv N_r r_a . \tag{16-7-87}$$

但请注意这样定义的 N_r 可能在 H 的某些点(甚至某个开子集)上为零. 把

$$\mathrm{D}_a r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}\mathrm{D}_a R = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} N_R r_a$$

同式(16-7-87)比较得

$$\frac{N_r}{N_R} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}, \qquad (16\text{-}7\text{-}88)$$

可见，虽然 N_r 很可能依赖于三个坐标 R, θ, φ，但比值 N_r/N_R 却只能依赖于坐标 R . 利用这一性质，不难将式(16-7-81)推广为以 r 代 R 的下式：

$$\frac{1}{2}(r_2 - r_1) = \int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(r)}\,{}^3\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} N_r(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^3\varepsilon, \qquad (16\text{-}7\text{-}89)$$

其中 $\xi^b_{(r)} \equiv N_r k^b$, $r_1 \equiv r(R_1)$, $r_2 \equiv r(R_2)$. 现在证明上式. 为使适用面更广，我们改从式(16-7-80)，即

$$\mathscr{F}(R_2 - R_1) = 16\pi\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)}\,{}^3\varepsilon + \int_{\Delta H} N_R(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^3\varepsilon$$

出发. 利用式(16-7-65)把上式改写为

$$\mathscr{F} = \frac{16\pi}{R_2 - R_1}\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)} N_R^{-1}\mathrm{d}R \wedge {}^2\varepsilon + \frac{1}{R_2 - R_1}\int_{\Delta H}(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,\mathrm{d}R \wedge {}^2\varepsilon$$

$$= \frac{16\pi}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\int_S N_R^{-1} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)}\,{}^2\varepsilon + \frac{1}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\int_S(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^2\varepsilon,$$

再由 R_1, R_2 的任意性便有

$$\mathscr{F} = 16\pi\int_S N_R^{-1} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)}\,{}^2\varepsilon + \int_S(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^2\varepsilon. \qquad (16\text{-}7\text{-}90)$$

于是待证式(16-7-89)右边乘以 16π 后可表为

$$16\pi\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(r)}\,{}^3\varepsilon + \int_{\Delta H} N_r(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^3\varepsilon$$

$$= 16\pi\int_{\Delta H}\frac{N_r}{N_R} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)}\,{}^3\varepsilon + \int_{\Delta H}\frac{N_r}{N_R} N_R(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^3\varepsilon$$

$$= \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\frac{N_r}{N_R}\left[16\pi\int_S N_R^{-1} T_{ab}\tau^a \xi^b_{(R)}\,{}^2\varepsilon + \int_S(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\,{}^2\varepsilon\right]$$

$$= \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\frac{N_r}{N_R}\mathscr{F} = \mathscr{F}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R = \mathscr{F}[r(R_2) - r(R_1)] = \mathscr{F}(r_2 - r_1), \qquad (16\text{-}7\text{-}91)$$

其中第一步用到 $\xi^b_{(r)} = (N_r/N_R)\xi^b_{(R)}$，第二步除了用到式(16-7-65)之外还因为

$N_r/N_R = \mathrm{d}r/\mathrm{d}R$ 与 S 面上的坐标无关保证可被提出积分号 $\int_S$ 外面, 第三步用到式(16-7-90). 当截面同胚于 S^2 时 $\mathscr{I} = 8\pi$, 式(16-7-89)于是得证.

对式(16-7-89)还应注意: N_r 不但可能在 H 的某个开子集上为零, 而且 S_1 与 S_2 之间的 ΔH 还可能存在开子集, 其上因 $N_r < 0$ 而导致 $r_2 < r_1$ (虽然 $R_2 > R_1$). 这时式(16-7-89)两边皆为负.

式(16-7-86)虽然可以看作(角动量为零时)第一定律的特例, 但该式中的能量只限于由矢量场 $\xi^a_{(R)} \equiv N_R k^a$ 定义的 $\xi^a_{(R)}$ 能量 $E^{\xi(R)}$. 既然能量也可用许多不同的 $\xi^a_{(r)} \equiv N_r k^a$ 定义, 自然希望这些 $\xi^a_{(r)}$ 能量 $E^{\xi(r)}$ 也满足类似的第一定律. 下面的讨论表明的确如此(暂时限于角动量为零的情况).

利用 $\mathscr{I} = 8\pi$ 把式(16-7-90)改写为

$$\frac{1}{2} = \int_S N_R{}^{-1} T_{ab} \tau^a \xi^b_{(R)}{}^2\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\int_S (|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)^2\varepsilon . \tag{16-7-92}$$

上式同 $\mathrm{d}R/2 = \mathrm{d}E^{\xi(R)}$ [式(16-7-84)]结合给出

$$\mathrm{d}E^{\xi(R)} = \mathrm{d}R\left[\int_S N_R{}^{-1} T_{ab} \tau^a \xi^b_{(R)}{}^2\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\int_S (|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)^2\varepsilon\right], \tag{16-7-93}$$

而式(16-7-92)乘以 $\mathrm{d}r$ 则给出

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\left[\int_S N_R{}^{-1} T_{ab} \tau^a \xi^b_{(R)}{}^2\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\int_S (|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)^2\varepsilon\right]. \tag{16-7-94}$$

上两式右边方括号的内容相同, 暗示可猜测性地用下式定义 $E^{\xi(r)}$:

$$\mathrm{d}E^{\xi(r)} = \mathrm{d}r\left[\int_S N_R{}^{-1} T_{ab} \tau^a \xi^b_{(R)}{}^2\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\int_S (|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)^2\varepsilon\right]. \tag{16-7-95}$$

当 $r = R$ 时上式回到式(16-7-93), 从一个角度说明用式(16-7-95)定义 $E^{\xi(r)}$ 的合理性. 当然仅此一点还不够, 例如, 你可能问: "把式(16-7-95)方括号内的 R 也换成 r 不是也行吗?" 稍后将回答这一问题. 还应说明一点: 虽然 $r(R)$ 的选择有相当的任意性, 但只当 r 与 R 量纲一样时 $E^{\xi(r)}$ 才有能量的量纲. 以下只考虑与 R 有相同量纲的 r.

对比式(16-7-94)和(16-7-95)给出

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r = \mathrm{d}E^{\xi(r)}, \tag{16-7-96}$$

当 $r = R$ 时上式回到式(16-7-84). 依次利用式(16-7-96)、$A = 4\pi R^2$ 及式(16-7-85)又得

$$\mathrm{d}E^{\xi(r)} = \frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_R \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}A . \tag{16-7-97}$$

上式暗示我们应该用下式定义 S 关于 $\xi^a_{(r)}$ 的**有效表面引力**

$$\bar{\kappa}_r := \bar{\kappa}_R \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} = \bar{\kappa}_R \frac{N_r}{N_R}, \quad (当 r = R 时有 \bar{\kappa}_r = \bar{\kappa}_R) \tag{16-7-98}$$

因为这样可使式(16-7-97)成为

$$\frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_r \mathrm{d}A = \mathrm{d}E^{\xi_{(r)}}, \quad [当 r = R 时回到式(16\text{-}7\text{-}86)] \tag{16-7-99}$$

而上式可看作将要推导的更一般的动力学视界第一定律

$$\mathrm{d}E^{\xi_{(r)}} = \frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_r \mathrm{d}A + \Omega \mathrm{d}J$$

在角动量 $J = 0$ 时的特例. 同式(16-7-86)相较, 式(16-7-99)只不过是使用更一般的 $\xi^a_{(r)}$ 能量而已. 这就进一步印证了式(16-7-95)的合理性. 假若把式(16-7-95)中方括号内的 R 也换成 r, 则式(16-7-96)的等号势必改为不等号, 于是式(16-7-99)也就不会成立.

注 2　有效表面引力 $\bar{\kappa}_r$ 与 $\bar{\kappa}_R$ 的区别在于一个因子 N_r/N_R [见式(16-7-98)], 而这个因子也正是用以定义能量的两个矢量场 $\xi^a_{(r)} \equiv N_r k^a$ 与 $\xi^a_{(R)} \equiv N_R k^a$ 的区别所在. 这同弱孤立视界的情况类似, 那里的表面引力 $\kappa_{(k)}$ 也会由于矢量场 k^a 的重标度化($k^a \mapsto k'^a = ck^a$)而重标度化($\kappa_{(k)} \mapsto \kappa_{(k')} = c\kappa_{(k)}$, 见 §16.5 注 8), 而且两者有相同的重标度因子 c, 同现在的区别在于现在的重标度因子 N_r/N_R 可以是 R 的函数. 这是很自然的, 因为现在讨论的是描述时间演化的动力学视界, 而 R 正好扮演时间的角色.

注 3　式(16-7-99)的 $\mathrm{d}E^{\xi_{(r)}}$ 和 $\mathrm{d}A$ 是能量 $E^{\xi_{(r)}}$ 和面积 A 在经历一个无限小物理过程后的改变量(动力学视界从截面到截面的过渡本身就代表演化过程), 因此该式是 $J = 0$ 时的动力学视界第一定律的物理过程版本, 这与弱孤立视界第一定律[式(16-5-69)]从“味道”上看来非常不同: 该式的 $\delta E^{(t)}_\Delta$, δA_Δ, δJ_Δ 是含有弱孤立视界的两个有微小差别的时空的物理量 $E^{(t)}_\Delta$, A_Δ, J_Δ 的差值, 就是说, 该式是第一定律的平衡态(被动)版本.

16.7.5　角动量平衡方程

时空角动量与反映轴对称性的 Killing 矢量场有密切关系, 而含有动力学视界的时空未必存在这种 Killing 场, 如何定义角动量?先看如下的一种特殊情况:

命题 16-7-11　设时空 (M, g_{ab}) 含有动力学视界 H, 在 M 上存在反映轴对称

性的 Killing 场 ϕ^a，而且 $\phi^a|_H$ 切于 H，① 则 Komar 积分 $\int_S {}^*\mathrm{d}\phi\,(=\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d)$ 可以表为(S 代表 H 的任一截面)

$$\int_S {}^*\mathrm{d}\phi = -2\int_S K_{ab}\phi^a r^b, \qquad \text{其中}\ K_{ab}\ \text{是}\ (H,h_{ab})\ \text{的外曲率}. \tag{16-7-100}$$

注4 细察下面的证明就可发现本命题对 ϕ^a 的要求可以从 $(\nabla_a\phi_b+\nabla_b\phi_a)|_M=0$ [即 ϕ^a 是 M 上的 Killing 场]削弱为 $(\nabla_a\phi_b+\nabla_b\phi_a)|_H=0$.

证明 在 H 的邻域 U 上局域引入正交归一标架场 $\{e_\mu^a\}$，满足 $e_0^a|_H=\tau^a|_H$，$e_1^a|_H=r^a|_H$，则其对偶标架场 $\{e_a^\mu\}$ 满足 $e_a^0|_H=-\tau_a|_H$，$e_a^1|_H=r_a|_H$．度规 g_{ab} 的适配体元 ε_{abcd} 在 H 上可用标架表为

$$\varepsilon_{abcd}|_H=(e_a^0\wedge e_b^1\wedge e_c^2\wedge e_d^3)|_H=[e_a^2\wedge e_b^3\wedge(-\tau_c)\wedge r_d]|_H=-\varepsilon_{ab}\wedge(\tau_c\wedge r_d)|_H, \tag{16-7-101}$$

其中 $\varepsilon_{ab}\equiv(e_a^2\wedge e_b^3)|_H$．设 $i_S: S\to M$ 是包含映射，则拉回 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ 就是 $(S,\tilde h_{ab})$ 的适配面元．令 $v_{cd}\equiv-(\tau_c\wedge r_d)|_H$，则

$$\varepsilon_{abcd}|_H=\varepsilon_{ab}\wedge v_{cd}=\varepsilon_{ab}v_{cd}+(\varepsilon_{ca}v_{bd}+\varepsilon_{bc}v_{ad})+(\varepsilon_{da}v_{cb}+\varepsilon_{db}v_{ac})+\varepsilon_{cd}v_{ab},$$

故②

$$\int_S \varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d = I_1+I_2+I_3+I_4,$$

其中

$$I_1\equiv\int_S \varepsilon_{ab}v_{cd}\nabla^c\phi^d,\qquad I_2\equiv\int_S(\varepsilon_{ca}v_{bd}+\varepsilon_{bc}v_{ad})\nabla^c\phi^d,$$

$$I_3\equiv\int_S(\varepsilon_{da}v_{cb}+\varepsilon_{db}v_{ac})\nabla^c\phi^d,\qquad I_4\equiv\int_S\varepsilon_{cd}v_{ab}\nabla^c\phi^d.$$

首先计算 I_1.

$$I_1\equiv\int_S\varepsilon_{ab}v_{cd}\nabla^c\phi^d=\int_S i_S^*(\varepsilon_{ab}v_{cd}\nabla^c\phi^d)=\int_S(i_S^*\varepsilon_{ab})v_{cd}\nabla^c\phi^d=2\int_S\tau_{[d}r_{c]}\nabla^c\phi^d$$

$$=2\int_S\tau_d r_c\nabla^{[c}\phi^{d]}=2\int_S\tau_d r_c\nabla^c\phi^d=-2\int_S\phi^d r^c\nabla_c\tau_d, \tag{16-7-102}$$

其中第二步的理由见上册 §5.3 末二行(指要对限制做积分)，第三步是因为 $v_{cd}\nabla^c\phi^d$ 是标量场，第四步无非是略去被积面元 $i_S{}^*\varepsilon_{ab}$ 并用到 $v_{cd}\equiv-(\tau_c\wedge r_d)|_H$，第六步用到

---

① 由此还可证明 $\phi^a|_H$ 必切于各截面，证明中要用到：① ϕ^a 是 Killing 场；② ϕ^a 的积分曲线闭合；③ H 有唯一的截面(临界陷俘面)族.

② 基矢场 e_a^2, e_a^3 通常只能在 S 上局域定义，故 S 上的积分只要涉及它们就应先计算局域积分再“缝合”而成，这要用到“单位分解”，详略.

Killing 方程, 末步是因为 $\phi^a|_H$ 切于 H 导致 $(\tau_a\phi^a)|_H=0$.

下面证明 $I_2=I_3=I_4=0$. 先看 I_4.

$$I_4\equiv\int_S\varepsilon_{cd}v_{ab}\nabla^c\phi^d=\int_S(i_S{}^*v_{ab})\varepsilon_{cd}\nabla^c\phi^d$$
$$=\int_S i_S^*(r_a\wedge\tau_b)\varepsilon_{cd}\nabla^c\phi^d=\int_S(i_S{}^*r_a)\wedge(i_S{}^*\tau_b)\varepsilon_{cd}\nabla^c\phi^d=0,$$

其中第四步用到上册式(4-1-8), 末步用到 $i_S^*r_a=0$ (来自 r^a 正交于 S). 类似地还可证明 $I_3=0$, 而由 Killing 方程易见 $I_2=I_3$, 故 $I_2=I_3=I_4=0$, 因而 $\int_S\varepsilon_{abcd}\nabla^c\phi^d=I_1$, 即

$$\int_S{}^*\mathrm{d}\phi=-2\int_S\phi^d r^c\nabla_c\tau_d. \tag{16-7-103}$$

又因 ϕ^d 和 r^c 都切于 H, 其投影等于自身, 故 $\phi^d=h^d_b\phi^b$, $r^c=h^c_a r^a$, 所以

$$\phi^d r^c\nabla_c\tau_d|_H=\phi^b r^a h^d_b h^c_a\nabla_c\tau_d|_H=\phi^b r^a K_{ab}, \tag{16-7-104}$$

代入式(16-7-103)便得待证的等式(16-7-100). □

再讨论动力学视界的一般情况, 这时 M 上可以没有反映轴对称性的 Killing 场, 我们改从 H 上切于每一截面 S 的任一矢量场 φ^a 入手(M 上未必有 Killing 场 ϕ^a 使 $\phi^a|_H=\varphi^a$). 以 φ_a 缩并式(16-7-44b)得

$$0=\varphi_a\mathrm{D}_bP^{ab}-8\pi T^{bc}\tau_c\varphi_b=\varphi_a\mathrm{D}_bP^{ab}-8\pi T_{ab}\tau^a\varphi^b, \tag{16-7-105}$$

其中 $P^{ab}\equiv K^{ab}-Kh^{ab}$. 上式在 ΔH 上积分给出

$$0=\int_{\Delta H}(\varphi_a\mathrm{D}_bP^{ab}-8\pi T_{ab}\tau^a\varphi^b)=\int_{\Delta H}[\mathrm{D}_b(\varphi_aP^{ab})-P^{ab}\mathrm{D}_b\varphi_a]-8\pi\int_{\Delta H}T_{ab}\tau^a\varphi^b. \tag{16-7-106}$$

利用 $\mathrm{D}_{(a}\varphi_{b)}=\mathscr{L}_\varphi h_{ab}/2$ 又可改写上式为

$$\int_{\Delta H}(8\pi T_{ab}\tau^a\varphi^b+\frac{1}{2}P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab})=\int_{\Delta H}\mathrm{D}_b(\varphi_aP^{ab})=\int_{S_2}(P^{ab}\varphi_a)r_b-\int_{S_1}(P^{ab}\varphi_a)r_b, \tag{16-7-107}$$

其中第二步用到 Gauss 定理. 再由 $P^{ab}\equiv K^{ab}-Kh^{ab}$ 及 $h_{ab}\varphi^a r^b=0$ 便有

$$\int_{\Delta H}\left(T_{ab}\tau^a\varphi^b+\frac{1}{16\pi}P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}\right)=\frac{1}{8\pi}\left(\int_{S_2}K_{ab}\varphi^a r^b-\int_{S_1}K_{ab}\varphi^a r^b\right). \tag{16-7-108}$$

上式右边的两个积分与式(16-7-100)右边形式相同, 区别只在于上式的 φ^a 未必是某 Killing 场 ϕ^a 在 H 上的值, 甚至也不要求 φ^a 是 $(S,\tilde h_{ab})$ 上的 Killing 场(即不要求 $\mathscr{L}_\varphi\tilde h_{ab}=0$). 既然当 ϕ^a 为 Killing 场时 Komar 积分 $\int_S{}^*\mathrm{d}\phi$ 代表 S 面内的(准局域)角动量乘以 16π [参见式(16-5-57)及(13-2-17)], 不妨就把 $-(8\pi)^{-1}\int_S K_{ab}\varphi^a r^b$ 称为 S 面内关

于 φ^a 的**广义**(generalized)**角动量**, 记作 J_S^φ, 即

$$J_S^\varphi \equiv -\frac{1}{8\pi}\int_S K_{ab}\varphi^a r^b \equiv \frac{1}{8\pi}\int_S j^\varphi, \quad 其中\ j^\varphi \equiv -K_{ab}\varphi^a r^b, \tag{16-7-109}$$

于是式(16-7-108)又可写成

$$-\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\varphi^b - \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab} = J_{S_2}^\varphi - J_{S_1}^\varphi . \tag{16-7-108$'$}$$

既然上式右边代表截面 S_2, S_1 内广义角动量之差, 左边自然应解释为经 ΔH 流入黑洞的角动量流, 而且其中第一项是由物质场 T_{ab} 提供的角动量流(记作 $\mathscr{J}_{\text{matter}}^\varphi$), 因而与物质场无关的第二项理应解释为由引力波提供的角动量流(记作 $\mathscr{J}_{\text{grav}}^\varphi$), 于是

$$J_{S_2}^\varphi - J_{S_1}^\varphi = \mathscr{J}_{\text{matter}}^\varphi + \mathscr{J}_{\text{grav}}^\varphi , \tag{16-7-110}$$

其中

$$\mathscr{J}_{\text{matter}}^\varphi \equiv -\int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a\varphi^b, \qquad \mathscr{J}_{\text{grav}}^\varphi \equiv -\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab} . \tag{16-7-111}$$

当 φ^a 是3维黎曼空间 (H, h_{ab}) 的 Killing 场(即 $\mathscr{L}_\varphi h_{ab} = 0$)时 $\mathscr{J}_{\text{grav}}^\varphi = 0$.

式(16-7-108)或(16-7-110)称为**角动量平衡方程**.

16.7.6 第一定律的积分形式

小节16.7.4介绍了动力学视界在角动量为零时的第一定律, 本小节要加上角动量, 还将推出动力学视界第一定律的积分形式.

由于在许多场合下动力学视界会逐渐过渡到弱孤立视界(例如图16-9), 而§16.5已讨论过后者的角动量问题, 现在应该借鉴. 该节只讨论了II型弱孤立视界, 其中 φ^a 是无限小轴对称性. 相应地, 现在也只限于讨论这样的动力学视界 H , 其上存在反映截面的轴对称性的矢量场 φ^a , 满足:① φ^a 切于各截面; ② φ^a 的积分曲线闭合, 周期为 2π . [更准确地说, 每一拓扑2球截面上的 φ^a 应是某一度规(不一定是 $\tilde{h}_{ab}$)的 Killing 场, 但 $\varphi^a|_H$ 可以不是 (H, h_{ab}) 的 Killing 场, 即 $\mathscr{L}_\varphi h_{ab}$ 可以非零.] 这样一来, J_S^φ 就可以明确地解释为截面 S 的(广义)角动量. 以下的 φ^a 都指这个特定的 φ^a , 因此有关量的上标 φ 可以去掉, 例如 J_S^φ 可写成 J_S . 仿照式(16-5-58), 以

$$t^a \equiv N_r k^a - \Omega\varphi^a \tag{16-7-112}$$

代替 $\xi_{(r)}^a$, 其中 r 和 Ω 都是 R 的任意函数(因而在每一截面都为常数), 区别在于式(16-5-58)的两个系数是常数而现在的系数 Ω 是 R 的函数, N_r [由式(16-7-87)定义]

是 R,θ,φ 的函数. 由式(16-6-91)和(16-7-108)可推出如下命题.

命题 16-7-12

$$\frac{1}{2}(r_2-r_1)+\frac{1}{8\pi}\left(\int_{S_2}\Omega j-\int_{S_1}\Omega j-\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\mathrm{d}\Omega\int_S j\right)$$

$$=\int_{\Delta H}T_{ab}\tau^a t^b+\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}N_r(|\hat{\sigma}|^2+2|\varsigma|^2)-\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}\Omega P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}\,. \tag{16-7-113}$$

证明　由 $t^b\equiv N_r k^b-\Omega\varphi^b=\xi^b_{(r)}-\Omega\varphi^b$ 得

$$\int_{\Delta H}T_{ab}\tau^a t^b=\int_{\Delta H}T_{ab}\tau^a\xi^b_{(r)}-\int_{\Delta H}\Omega T_{ab}\tau^a\varphi^b$$

$$=\frac{1}{2}(r_2-r_1)-\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}N_r(|\hat{\sigma}|^2+2|\varsigma|^2)-\int_{\Delta H}\Omega T_{ab}\tau^a\varphi^b\,, \tag{16-7-114}$$

[其中第二步用到式(16-6-86).] 上式右边最末一个积分为

$$\int_{\Delta H}\Omega T_{ab}\tau^a\varphi^b=\frac{1}{8\pi}\int_{\Delta H}\Omega\varphi_a D_b P^{ab}=\frac{1}{8\pi}\int_{\Delta H}[D_b(\Omega\varphi_a P^{ab})-\varphi_a P^{ab}D_b\Omega-\Omega P^{ab}D_b\varphi_a]$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left[-\left(\int_{S_2}\Omega j-\int_{S_1}\Omega j\right)+\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\mathrm{d}\Omega\int_S j\right]-\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}\Omega P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}\,, \tag{16-7-115}$$

代入式(16-7-114)便得待证的等式(16-7-113). 式(16-7-115)推导中的第一步用到式(16-7-105), 第三步的证明留做习题, 提示: 把第二个等号右边的三个积分(不含系数)依次记作 I_1,I_2,I_3, 则 $I_3=\int_{\Delta H}\Omega P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}/2$. 利用下列三式

$$P^{ab}=K^{ab}-Kh^{ab},\qquad K_{ab}\varphi^a r^b\equiv -j,\qquad h_{ab}\varphi^a r^b=0$$

及 Gauss 定理可得 $I_1=-\int_{S_2}\Omega j+\int_{S_1}\Omega j$, 再利用上述三式、式(16-7-65)以及

$$D_b\Omega=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}D_b R=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}N_R r_b\quad\text{[末步用到式(16-7-73)]}$$

又得

$$I_2=-\int_{\Delta H}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}j\mathrm{d}R\wedge{}^2\varepsilon=-\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\mathrm{d}\Omega\int_S j\,{}^2\varepsilon\,.$$ □

式(16-7-113)可看作角动量非零时的平衡方程. 每个满足 $t^a\equiv N_r k^a-\Omega\varphi^a$ 的 t^a 都有自己的平衡方程, 所以平衡方程有无限多个.

同式(16-6-81)右边第一项的物理解释类似, 式(16-7-113)右边第一项可解释为由物质场提供的"能流", 只不过这"能量"现在是用 t^a 定义的. 于是, 仿照式(16-6-81), 不妨暂时把式(16-7-113)右边解释为物质场和引力场共同提供的流过

ΔH 的 t^a “能流”，并记作 $\hat{\mathscr{F}}^t_{\Delta H}$. 再以 $\hat{E}^t_S$ 代表截面 S 内的 t^a 能量，则

$$\hat{\mathscr{F}}^t_{\Delta H} = \hat{E}^t_{S_2} - \hat{E}^t_{S_1},$$

因而

$$\hat{E}^t_{S_2} - \hat{E}^t_{S_1} = \int_{\Delta H} T_{ab}\tau^a t^b + \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} N_r(|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2) - \frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H} \Omega P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}. \qquad (16\text{-}7\text{-}116)$$

然而此处有一重要悬疑. 为保证 $\hat{E}^t_S$ 真能代表 S 面内的能量，它必须只依赖于在截面 S 上局域定义的场量. 可惜一般而言这是做不到的，就是说，如果随便选函数 $N_r(R,\theta,\varphi)$ 及 $\Omega(R)$ 代入 $t^a = N_r k^a - \Omega\varphi^a$ 求出一个矢量场 t^a，则由此 t^a 定义的 $\hat{E}^t_S$ 很可能不满足上述要求. 所以特别对能量一词加上引号，并相应地在 E^t_S 上加上 ^ 号. 后面将要说明，借助于Kerr视界的考虑可以找到适当的函数 $N_r(R,\theta,\varphi)$ 及 $\Omega(R)$，由它们构造的 t^a (专记作 t^a_0)所定义的 $E^{t_0}_S$ 就能够满足上述要求，因此可以充当 S 面内的能量.

当 $\hat{E}^t_S$ 真能代表 S 面内的 t^a 能量时，式(16-7-116)可称为动力学视界的能量平衡方程，它无非是能量守恒律的反映. 另一方面，式(16-7-116)与式(16-7-113)联立又给出

$$\frac{1}{2}(r_2 - r_1) + \frac{1}{8\pi}\left(\int_{S_2}\Omega j - \int_{S_1}\Omega j - \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \mathrm{d}\Omega \int_S j\right) = \hat{E}^t_{S_2} - \hat{E}^t_{S_1}. \qquad (16\text{-}7\text{-}117)$$

以下的计算和讨论有助于弄懂上式的物理意义. 令

$$Z \equiv \text{式(16-7-113)左边} = \text{式(16-7-117)左边},$$

$$Y \equiv \text{式(16-7-113)右边} = \text{式(16-7-116)右边}.$$

因为 r, Ω 以及 $J_S \equiv (8\pi)^{-1}\int_S j$ 都只是 R 的函数，所以

$$Z = \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R + \frac{1}{8\pi}\left[\Omega(R_2)\int_{S(R_2)} j - \Omega(R_1)\int_{S(R_1)} j - \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\int_{S(R)} j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R + \Omega(R_2)J(R_2) - \Omega(R_1)J(R_1) - \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}J(R)\mathrm{d}R$$

$$= \int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(\Omega(R)J(R)) - \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}J(R)\right]\mathrm{d}R = \int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} + \Omega(R)\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}R}\right]\mathrm{d}R. \qquad (16\text{-}7\text{-}118)$$

再利用式(16-7-65)以及 N_r/N_R 只是 R 的函数又得

$$Y=\int_{\Delta H}N_R{}^{-1}T_{ab}\tau^a t^b \mathrm{d}R\wedge{}^2\varepsilon+\frac{1}{16\pi}\int_{\Delta H}\left[\frac{N_r}{N_R}(|\hat{\sigma}|^2+2|\varsigma|^2)-\frac{\Omega}{N_R}P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab}\right]\mathrm{d}R\wedge{}^2\varepsilon$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R\left[\int_{S(R)}N_R{}^{-1}T_{ab}\tau^a t^b\,{}^2\varepsilon+\frac{1}{16\pi}\frac{N_r}{N_R}\int_{S(R)}(|\hat{\sigma}|^2+2|\varsigma|^2)\,{}^2\varepsilon-\frac{\Omega}{16\pi N_R}\int_{S(R)}(P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab})\,{}^2\varepsilon\right].\tag{16-7-119}$$

由式(16-7-116)又得

$$Y=\hat{E}^t_{S_2}-\hat{E}^t_{S_1}=\hat{E}^t(R_2)-\hat{E}^t(R_1)=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}\hat{E}^t}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R\,,\tag{16-7-120}$$

于是由 $Z=Y$ 以及式(16-7-120)、(16-7-118)便有

$$\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}+\Omega(R)\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}R}\right]\mathrm{d}R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}\hat{E}^t}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R\,.\tag{16-7-121}$$

注意到 R_1, R_2 的任意性, 可知上式导致

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R}+\Omega(R)\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}R}=\frac{\mathrm{d}\hat{E}^t}{\mathrm{d}R},\qquad \text{即}\ \frac{1}{2}\mathrm{d}r+\Omega\mathrm{d}J=\mathrm{d}\hat{E}^t\,.\tag{16-7-122}$$

另一方面, 由式(16-7-96)及(16-7-99)得

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r=\frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_r\mathrm{d}A\,,\tag{16-7-123}$$

代入式(16-7-122)便给出

$$\mathrm{d}\hat{E}^t=\frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_r\mathrm{d}A+\Omega\mathrm{d}J\,.\tag{16-7-124}$$

上式在形式上类似于熟知的黑洞力学第一定律. 若要把“形式上类似于”发展为“物理上就是”, 还须对式中各量分别赋予合理的物理解释. 右边的四个量 $A(R)$, $J(R)$, $\Omega(R)$, $\bar{\kappa}_r(R)$ 都只是 R 的函数, 因而都只依赖于截面, 而一个截面可看作动力学视界 H 在某一时刻的表现. 为突出物理意义, 下面也把截面 $S(R)$ 称为时刻. $A(R)$ 的意义最清楚: 它就是黑洞在时刻 $S(R)$ 的面积; $J(R)$ 则可被合理地解释为时刻 $S(R)$ 的(广义)角动量; $\Omega(R)$ 最早是在式(16-7-112)中引入的, 把该式同中册式(13-5-4)对比发现 Ω 可被解释为时刻 $S(R)$ 的角速度; $\bar{\kappa}_r(R)$ 是 $\bar{\kappa}_R(R)$ 的推广, 而由式(16-7-86)看出 $\bar{\kappa}_R(R)$ (至少在 $J=0$ 时)扮演着时刻 $S(R)$ 的有效表面引力的角色, 自然就可把 $\bar{\kappa}_r(R)$ 解释为时刻 $S(R)$ 在更一般情况下的有效表面引力. (“更一般情况” 是指:①时移可取 N_r 而不限于 N_R ; ② J 可以非零.) 总之, 式(16-7-124)右边各量都有明确的物理意义, 而且同黑洞力学第一定律右边各量一一对应. 假若该式左

边的 $\hat{E}^t(R)$ 可以解释为动力学视界 H 在时刻 $S(R)$ 的能量，便可大功告成. 然而，偏偏在这一步上并不简单. 前已指出，为了把 $\hat{E}^t(R)$ 解释为黑洞在时刻 $S(R)$ 的能量(摘掉引号)，$\hat{E}^t(R)$ 的表达式中只能含有局域地依赖于截面 $S(R)$ 的场量. 以 $\Lambda(R)$ 代表式(16-7-119)右边方括号的内容，即

$$\Lambda(R) \equiv \int_{S(R)} N_R^{-1} T_{ab}\tau^a t^b\, {}^2\varepsilon + \frac{1}{16\pi}\frac{N_r}{N_R}\int_{S(R)} (|\hat{\sigma}|^2 + 2|\varsigma|^2)\, {}^2\varepsilon - \frac{\Omega}{16\pi N_R}\int_{S(R)} (P^{ab}\mathscr{L}_\varphi h_{ab})\, {}^2\varepsilon\,, \tag{16-7-125}$$

则由式(16-7-119)和(16-7-120)得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{E}^t(R)}{\mathrm{d}R} = \Lambda(R)\,, \tag{16-7-126}$$

故

$$\mathrm{d}\hat{E}^t(R) = \mathrm{d}\hat{E}^t(R_0) + \int_{R_0}^{R} \Lambda(R')\mathrm{d}R'\,, \tag{16-7-127}$$

其中 R_0 是某一指定的 R 值. 虽然 $\Lambda(R')$ 只取决于截面 $S(R')$ 上的场量，但上式右边的积分却涉及从 $S(R_0)$ 到 $S(R)$ 的无数截面 $S(R')$ 上的场量，于是单凭 $S(R)$ 上的局域场量一般不足以决定 $\hat{E}^t(R)$. 所以这个 $\hat{E}^t(R)$ 一般不能被解释为时刻 $S(R)$ 的能量.

综上所述可知，我们的遗留问题是要找到一个量 $E^t(R)$，它只依赖于 $S(R)$ 上的局域场量，满足

$$\mathrm{d}E^t = \frac{1}{8\pi}\bar{\kappa}_r \mathrm{d}A + \Omega\mathrm{d}J, \quad 即\ \frac{\mathrm{d}E^t}{\mathrm{d}R} = R\bar{\kappa}_r + \Omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}R}\,, \tag{16-7-128}$$

从而可被物理地解释为以动力学视界 H 为边界的黑洞内部在时刻 $S(R)$ 的(准局域)能量. 一旦做到这点，式(16-7-128)就可被解释为动力学视界的第一定律(物理过程版本)，而式(16-7-117)则成为动力学视界第一定律的积分形式(物理过程版本). 仿照弱孤立视界借助于 Kerr 视界的做法，Ashtekar and Krishnan(2003)为动力学视界提供了寻找 E^t 的如下特别途径.

§16. 5 之末曾导出 Kerr 视界的表面引力和角速度公式

$$\kappa_{\text{Kerr}}(R,J) = \frac{R^4 - 4J^2}{2R^3\sqrt{R^4 + 4J^2}}, \qquad \Omega_{\text{Kerr}}(R,J) = \frac{2J}{R\sqrt{R^4 + 4J^2}}\,. \tag{16-7-129}$$

借用这两个函数关系可对截面 $S \subset H$ 用下式定义有效表面引力 $\bar{\kappa}_S$ 及角速度 Ω_S：

$$\bar{\kappa}_S \equiv \kappa_{\text{Kerr}}(R_S, J_S) = \frac{{R_S}^4 - 4{J_S}^2}{2{R_S}^3\sqrt{{R_S}^4 + 4{J_S}^2}}\,, \tag{16-7-130a}$$

$$\Omega_S \equiv \Omega_{\text{Kerr}}(R_S, J_S) = \frac{2J_S}{R_S\sqrt{R_S{}^4 + 4J_S{}^2}} . \qquad (16\text{-}7\text{-}130\text{b})$$

因 J_S 只是 R 的函数，上两式在整个 H 上定义了两个函数，依次记作 $\bar{\kappa}^0(R)$ 及 $\Omega^0(R)$. 把 $\bar{\kappa}^0(R)$ 看作 $\bar{\kappa}_r = \bar{\kappa}_R \mathrm{d}r/\mathrm{d}R$ [式(16-7-98)]的 $\bar{\kappa}_r(R)$ ，注意到式中的 $\bar{\kappa}_R \equiv 1/2R$，便可由 $\bar{k}_r = \bar{k}_R \mathrm{d}r/\mathrm{d}R$ 求得函数 $r(R)$，专记作 $r^0(R)$，由此可用式(16-7-87)定义时移 N_{r^0}，即要求 N_{r^0} 满足 $\mathrm{D}_a r^0 = N_{r^0} r_a$，再用此 N_{r^0} 及刚才已有的 Ω^0 按

$$t_0^a = N_{r^0} k^a - \Omega^0 \varphi^a \qquad (16\text{-}7\text{-}131)$$

定义矢量场 t_0^a 并专称之为**正则矢量场**，相应的式(16-7-117)就给出正则平衡方程

$$E_{S_2}^{t_0} - E_{S_1}^{t_0} = \frac{1}{2}(r^0{}_2 - r^0{}_1) + \frac{1}{8\pi}\left(\int_{S_2} \Omega^0 j - \int_{S_1} \Omega^0 j - \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \mathrm{d}\Omega^0 \int_{S} j\right). \qquad (16\text{-}7\text{-}132)$$

于是上述遗留问题也就是上式是否可积，即：是否存在函数 $E^{t_0}(R)$ 满足上式，它只局域地依赖于 S 上的场量，并可被恰当地解释为能量?由于 $\bar{\kappa}_S$ 和 Ω_S 是借用 Kerr 的函数关系 κ_{Kerr} 和 Ω_{Kerr} 定义的，自然猜想待求函数 E^{t_0} (作为 R 的函数)的函数关系与 Kerr 质量 M 对 R 的依赖关系相同，而由§16. 5 之末可知后者为

$$M(R, J(R)) = \frac{1}{2R}\sqrt{R^4 + 4J^2(R)} ,$$

故猜测解为

$$E^{t_0} = \frac{1}{2R}\sqrt{R^4 + 4J^2} . \qquad (16\text{-}7\text{-}133)$$

由上式易见 E^{t_0} 的确只局域地依赖于 $S(R)$ 上的场量(而且只是几何量)，并且不难直接验证它的确是微分方程(16-7-128)的解，所以可以物理地把它解释为时刻 $S(R)$ 的能量，因而式(16-7-132)就是动力学视界第一定律的积分形式. 因为 E^{t_0} 是用正则矢量场 t_0^a 定义的能量，所以专称为**正则视界能量**，亦称动力学视界的**视界质量**，记作 M_S，即 $M_S \equiv E^{t_0}$. 每一截面 $S \subset H$ 的质量 M_S 等于一个 Kerr 黑洞的质量 M，该黑洞的视界面积 A 及角动量 J 分别等于 S 的面积 A_S 和角动量 J_S . 所以，就质量而言，不妨认为动力学视界描述了一个“历经一系列 Kerr 视界的演化过程”.

16.7.7　黑洞热力学定律还是黑洞力学定律?

面积不减定理使人们觉得黑洞面积 A 与热力学系统的熵 S 在形式上类似. Bekenstein (1973)从信息论的角度率先提出 $A/4$ 就是黑洞的物理熵的建议，但 Hawking 等开始时不以为然. Hawking 与合作者的早期文章[Bardeen et al. (1973)]在给出黑洞热力学四定律时指出(译文)：“可以看到 $(8\pi)^{-1}\kappa$ 与温度类似，正如 A 与

熵类似那样. 然而应该强调 $(8\pi)^{-1}\kappa$ 及 A 与黑洞的温度及熵不同. 事实上, 黑洞的有效温度是绝对零度, 看出这一结论的方法之一就是注意到黑洞不可能与任何非零温的黑体辐射处于热平衡中, 因为黑洞不发出辐射而总有辐射穿越视界进入黑洞. ” 既然认为黑洞定律与热力学只是形式上相似而物理上不同, 该文从题目开始就提 “黑洞力学(black hole mechanics)四定律” 而不是 “黑洞热力学(black hole thermodynamics)四定律” . 然而, 不久后 Hawking 辐射的发现使包括 Hawking 在内的所有人都对 Bekenstein 的建议刮目相看, “ $(8\pi)^{-1}\kappa$ 及 $A/4$ 分别是黑洞的物理温度和物理熵”的结论获得公认, 黑洞力学四定律也就名正言顺地被称做黑洞热力学四定律. 至此仍属传统黑洞热力学范畴, 除第二定律外的上述定律只适用于稳态黑洞(以及对稳态的微小偏离).

作为向非稳态黑洞过渡的第一步, Ashtekar 等人提出了(弱)孤立视界的概念并证明了第零和第一定律对此仍然成立. 稳态黑洞的事件视界(只要拓扑为 $\mathbb{R}\times S^2$)是当然的、严格意义下的孤立视界, 对应于热力学中的静态系统, 其温度在系统内点点相同, 而且不随时间而变(没有演化). 然而, 从(弱)孤立视界的引入动机可以看出, 人们真正关心的乃是非稳态时空中那些可被近似看作弱孤立视界的视界, 例如图 16-3 中的 Δ , 其上每点(代表一个截面)可近似地看作一个“非时间依赖态”(time independent state, 其几何性质近似与“时间”无关), 对应于热力学的平衡态, 而从 Δ 的一点到邻点的过渡则代表从一个 “非时间依赖态” 到下一个 “非时间依赖态” 的缓慢演化过程. 虽然 “表面引力在弱孤立视界上为常数” (第零定律)是一个严格证明了的结论, 但是对于以图 16-3 的 Δ 为代表的一大类近似的弱孤立视界而言, 表面引力并非是严格的常数. 这种情况对应于处在准静态过程中的热力学系统, 由于变化足够缓慢, 系统在每一时刻都近似地处在平衡态中(特别是, 温度有意义), 热力学第一定律 $\delta E = T\delta S - P\delta V$ 对这种系统成立, 其中 δS 和 δV 分别代表系统的熵和体积在从一个平衡态向邻近平衡态过渡时的改变量. 类似地, 弱孤立视界第一定律

$$\delta E = (8\pi)^{-1}\kappa\delta A + \Omega\delta J \qquad [\text{式(16-5-69)略去角标}]$$

适用于以图16-3的 Δ 为代表的近似弱孤立视界, 其中 δA 和 δJ 分别代表黑洞的面积和角动量在从一个非时间依赖态向邻近的非时间依赖态过渡时的改变量.

向非稳态黑洞大步迈进的里程碑是动力学视界的引入, 特别是第一定律的动力学版本[式(16-7-132)]的证明. 该式右边第二项(角动量项)仍可解释为对黑洞所做的机械功, 问题是: 第一项(面积变化项)应如何理解?它与热力学系统的量可以对应到什么程度?还能表为 $\int T\mathrm{d}S$ 吗?由于动力学视界甚至在迅速演化着的时空中也可以存在, 一般而言视界截面的几何可以随时间迅速改变, 视界的一个截面不再代表一个非时间依赖态. 这对应于非平衡态(甚至远离平衡态)热力学系统. 由于演

化迅速，这种热力学系统来不及在每个时刻调整到平衡态，于是温度(至少是正规意义下的温度，即 canonical temperature)失去意义. 虽然从能量守恒律看来仍可将 $(E_2 - E_1 - \text{功})$解释为系统所吸的热，但却不再能写成温度乘以熵增量的积分 $\int T\mathrm{d}S$ 的形式. 如果改写为无限小形式，则非平衡态热力学只能写出 $\delta E = \delta Q + \delta W(\text{功})$，而不能进一步把 δQ 改写为 $T\delta S$. 就是说，动力学视界第一定律(无限小形式)

$$\delta E = (8\pi)^{-1}\bar{\kappa}_r \delta A + \Omega \delta J$$

在热力学中找不到对应定律，所以人们宁愿把动力学视界的定律称为力学定律而不是热力学定律. 可以提出这样的问题：弱孤立视界的表面引力 κ 与热力学系统的温度 T 有很好的对应关系，为什么动力学视界的 $\bar{\kappa}_r$ 在热力学中找不到对应量？由于有关的研究正在不断发展中，对这个问题很难给出完全了断性的回答. 目前的回答是：$\bar{\kappa}_r$ 只是有效表面引力而不是表面引力 κ，两者有很多区别. 首先，κ 在弱孤立视界上是常数，而 $\bar{\kappa}_r$ 在动力学视界上不是常数. 其次，从引力论角度看来，$\bar{\kappa}_r$ 没有选读16-1-1末段那种关于表面引力的几何意义，它只能解释为与 H 上某些矢量场相伴的几何表面引力的 2 球面平均值[见 Ashtekar and Krishnan(2003)第 VI 节]. 第三，Hawking 辐射的温度 T 等于事件视界表面引力 κ 的 $(2\pi)^{-1}$ 倍，因此 $(2\pi)^{-1}\kappa$ 完全有资格充当黑洞的物理温度，后来还证明了弱孤立视界也能发射温度为 $(2\pi)^{-1}\kappa$ 的 Hawking 辐射，然而人们对以下两个问题尚不清楚：①动力学视界的 Hawking 辐射(如果有的话)是否也为黑体辐射；②如果是，其温度是否也正比于其有效表面引力 $\bar{\kappa}_r$. 以上三点是笔者所知的 $\bar{\kappa}_r$ 与 κ 的区别. 不过，在本书交稿之前笔者注意到有最新文献证明动力学视界也发射以 $(2\pi)^{-1}\bar{\kappa}_r$ 为温度的黑体辐射. 如果这一结论取得公认，上述第三点区别就不复存在.

习　题

~1. 设 k^a 是类光测地线汇(含非仿射参数化)的切矢场，κ 是满足 $k^c\nabla_c k_a = \kappa k_a$ 的函数，$\hat{\theta}$ 是线汇的膨胀，试证 $\hat{\theta} = g^{ab}\nabla_a k_b - \kappa$，即式(16-2-39). 提示：依次利用式(16-2-21a)、(16-2-18b)、(16-2-9′)及(16-2-19).

~2. 试证非涨视界 $\varDelta$ 上的导数算符 $\mathscr{D}_a$ (定义见小节 16.5.1)是无挠的. 提示：对 $\varDelta$ 上的任一函数 f，在含 $\varDelta$ 的开集 U 上取函数 F 使 $f = i^*F$，利用 $\mathscr{D}_a \circ i^* = i^* \circ \nabla_a$ 以及 ∇_a 的无挠性便可证明 $\mathscr{D}_a\mathscr{D}_b f = \mathscr{D}_b\mathscr{D}_a f$.

~3. 试证：若非涨视界 $\varDelta$ 上有一 k^a 满足 $\mathscr{L}_k h_{ab} = 0$，则其他 k^a 也必定满足.

~4. 试证命题 16-6-2 的结论(3)，即 $\hat{\theta}_{(k)} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{d}\varepsilon)_{abc} = 0$.

~5. 试证 $h_{ab} = \delta_{ij} e^i_a e^j_b$ [式(16-6-27)]在非涨视界 $\varDelta$ 上成立，其中 e^i_a 的含义见命题 16-6-3 证明的开头.

~6. 试证类光面 $\varDelta$ 上的退化“度规” h_{ab} 的广义逆 h^{ab} 服从命题 16-6-5，即满足式(16-6-34).

~7. 试证类光面 $\varDelta$ 上的适配"面元" ε_{ab} 的广义"逆" ε^{ab} 服从命题 16-6-7，即满足式(16-6-39).

*8. 试证弱孤立视界 $(\varDelta,[k])$ 上的全体无限小对称性 ξ^a 的集合是矢量空间.

9. 试证命题 16-7-5，即式(16-7-51).

10. 试证命题 16-7-10，即式(16-7-74).

11. 试证 $\varsigma^a = \tilde{h}^{ab} r^c \nabla_c k_b$，其中各量的意义同命题 16-7-10 .

~12. 命题 16-7-12 证明中用到式(16-7-115)，试补充该式第三步的证明.

附录 H　时空对称性与守恒律(Noether 定理)

根据著名的 Noether 定理, 一个连续的对称性导致体系的一个守恒律. (本附录只关心时空对称性, 附录 I 将适当涉及内部对称性.) 多数教科书在讲授该定理的证明时都使用坐标语言. 本附录的 §H.1 参照 Wald(1984) 给出几何语言的证明, §H.2 讨论正则能动张量 S^{ab} 及其与熟知的能动张量 T^{ab} 的关系, §H.3 则以 §H.1 为基础介绍笔者(在与若干同仁讨论后)对坐标语言的证明的理解. 阅读本附录至少应具备 §15.1 的知识.

§H.1　用几何语言证明定理

设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的整体坐标系, 则

$$\eta_{ab} \equiv \eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b \tag{H-1-1}$$

的黎曼张量(记作 $R_{abc}{}^d[\eta]$)为零, 因此 η_{ab} 是平直度规. 设 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 是微分同胚, 则新度规 $f_*\eta_{ab}$ 的黎曼张量 $R_{abc}{}^d[f_*\eta]$ 也是零, 因为 $R_{abc}{}^d[f_*\eta] = f_*R_{abc}{}^d[\eta] = 0$ [第一个等号的证明见式(8-10-14)后的提示]. 新、老度规一般不等, 除非 f 是等度规映射. 可见从一个平直度规 η_{ab} 出发通过各种微分同胚可生出无限多个平直度规. 若 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的自然坐标系, 则式(H-1-1)定义的 η_{ab} 叫闵氏度规, 自然坐标系 $\{x^\mu\}$ 以及与 $\{x^\mu\}$ 以 Poincaré 变换相联系的所有坐标系 $\{x'^\mu\}$ 都叫洛伦兹坐标系, 它们按式(H-1-1)给出的 η_{ab} 都一样. 初学者对 "$\mathbb{R}^4$ 上存在无数互不相等的平直度规" 的提法(暂称提法 A)也许觉得不好接受, 但对下面的提法(暂称提法 B)却普遍认可: "同一度规 η_{ab} 在不同坐标系的分量可以不同". 然而提法 A 无非是提法 B 在主动观点中的等价提法(参阅小节 8.10.2). 根据该小节, 各种不同的平直度规给出相同的局域几何和物理, 在这个意义上可以说各种不同的平直度规互相等价.

以 ψ 代表闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的某种物质场(我们只讨论 ψ 是张量场的情况并略去 ψ 的全部张量指标), 以 ∂_a 代表与平直度规 η_{ab} 适配的导数算符, 则 $\partial_a\psi$ 也是 $\mathbb{R}^4$ 上的张量场. 设 ξ^a 是 $\mathbb{R}^4$ 上任一光滑矢量场, $\{f_\lambda: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\}$ 是 ξ^a 产生的单参微分同胚族(其中 f_0 代表恒等映射), 则 f_λ 诱导出拉回映射 f_λ^*, 它把场 ψ, $\partial_a\psi$ 和 η_{ab} 变为新场

$$\psi_\lambda \equiv f_\lambda^*\psi, \qquad (\partial_a\psi)_\lambda \equiv f_\lambda^*(\partial_a\psi), \qquad (\eta_{ab})_\lambda \equiv f_\lambda^*\eta_{ab}. \tag{H-1-2}$$

新的平直度规场有自己的适配导数算符, 记作∂'_a, 即$\partial'_a(\eta_{bc})_\lambda = 0$, 不难验证

$$f_\lambda^*(\partial_a\psi) = \partial'_a(f_\lambda^*\psi). \quad \text{[此即式(8-10-15)]} \tag{H-1-3}$$

式(H-1-2)可看作由f_λ^*引起的对系统的位形的一种改变, 它导致系统的拉氏密度$\mathscr{L}$的相应改变. 由于f_λ^*对η_{ab}也有所改变, 现在的$\mathscr{L}$应看作ψ, $\partial_a\psi$和η_{ab}的局域函数.① 即

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab}), \tag{H-1-4}$$

所谓局域函数是指$\mathscr{L}$在任一点$p \in \mathbb{R}^4$的值$\mathscr{L}|_p$只取决于场ψ, $\partial_a\psi$和η_{ab}在p点的值而与这些场在p点以外的值无关, 即

$$\mathscr{L}|_p = \mathscr{L}(\psi|_p, \partial_a\psi|_p, \eta_{ab}|_p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^4. \tag{H-1-5}$$

因此, 只要给定$\mathbb{R}^4$上的场ψ和η_{ab}, 每点p就对应于一个实数$\mathscr{L}|_p$. 可见在场量给定的前提下$\mathscr{L}$是$\mathbb{R}^4$上的标量场. 用下式定义变分[见式(15-1-3)所在页的脚注]:

$$\delta\psi := \left.\frac{\mathrm{d}\psi_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \equiv \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^*\psi - \psi), \tag{H-1-6}$$

$$\delta(\partial_a\psi) := \left.\frac{\mathrm{d}(\partial_a\psi)_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \equiv \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[f_\lambda^*(\partial_a\psi) - (\partial_a\psi)], \tag{H-1-7}$$

$$\delta\eta_{ab} := \left.\frac{\mathrm{d}(\eta_{ab})_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \equiv \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^*\eta_{ab} - \eta_{ab}), \tag{H-1-8}$$

则$\delta\psi$, $\delta(\partial_a\psi)$和$\delta\eta_{ab}$分别等于$L_\xi\psi$, $L_\xi\partial_a\psi$和$L_\xi\eta_{ab}$(其中L_ξ代表沿ξ^a的李导数. 为避免与拉氏密度$\mathscr{L}$混淆, 本附录中李导数符号一律从原来的$\mathscr{L}$改为L.) 类似地, 令

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab}),$$

则

$$\delta\mathscr{L} := \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \equiv \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(\mathscr{L}_\lambda - \mathscr{L}) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\mathscr{L}(f_\lambda^*\psi,\ f_\lambda^*(\partial_a\psi), f_\lambda^*\eta_{ab}) - \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab})]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^*\mathscr{L} - \mathscr{L}) = L_\xi\mathscr{L} = \xi^a\partial_a\mathscr{L},$$

其中第四步用到上册§4.1关于拉回映射的知识. 所以

---

① 为简单起见, 只讨论$\mathscr{L}$中不含ψ的高于一阶的导数的情形.

$$\xi^a\partial_a\mathscr{L}=\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}L_\xi\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}L_\xi(\partial_a\psi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{ab}}L_\xi\eta_{ab}\ .^{①} \qquad \text{(H-1-9)}$$

读者应能补上 ψ 的张量指标. 例如, 设 ψ 是 (1,1) 型张量场, 则上式右边第一项实为 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^a{}_b}L_\xi\psi^a{}_b$. 物质场 ψ 的运动方程就是它的拉氏方程, 可由 ψ 的作用量取极值导出. 小节15.1.1对标量场 ϕ 的拉氏方程[式(15-1-19)]做过详细推导, 仿此不难知道任意张量场 ψ 的拉氏方程为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}=\partial_a\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right], \qquad \text{(H-1-10)}$$

代入式(H-1-9)得

$$\xi^a\partial_a\mathscr{L}=\left(\partial_a\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right]\right)L_\xi\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}L_\xi(\partial_a\psi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{ab}}L_\xi\eta_{ab}\,. \qquad \text{(H-1-11)}$$

至此对 ξ^a 场除光滑性外并无要求. Noether 定理的实质是时空的一个连续对称性导致体系的一个守恒律(本附录不拟涉及内部对称性的情形). 闵氏时空的对称性体现在它以 Poincaré 群为等度规群, 等价地, 它有10个独立的 Killing 矢量场. 若选 ξ^a 为 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上的任一 Killing 矢量场, 则式(H-1-11)可以明显简化, 因为 ξ^a 的 Killing 性导致 $L_\xi\eta_{ab}=0$ 以及 $(\eta_{bc})_\lambda=\eta_{bc}$, 后者又保证 $\partial'_a=\partial_a$, 所以有

$$L_\xi(\partial_a\psi)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[f_\lambda^*(\partial_a\psi)-\partial_a\psi]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\partial'_a(f_\lambda^*\psi)-\partial_a\psi]=\partial_a(L_\xi\psi)\,. \qquad \text{(H-1-12)}$$

[其中第二步用到式(H-1-3), 第三步用到 $\partial'_a=\partial_a$.] 于是式(H-1-11)简化为

$$\xi^a\partial_a\mathscr{L}=\left(\partial_a\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right]\right)L_\xi\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\partial_a L_\xi\psi\ .$$

ξ^a 的 Killing 性还导致 $\partial_a\xi^a=\eta^{ab}\partial_a\xi_b=\eta^{(ab)}\partial_{[a}\xi_{b]}=0$, 故上式还可改写为

$$\partial_a(\xi^a\mathscr{L})=\partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}L_\xi\psi\right), \qquad \text{(H-1-13)}$$

可见矢量场

$$J^a\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}L_\xi\psi-\xi^a\mathscr{L} \qquad \text{(H-1-14)}$$

---

① 其中“偏导数” $\partial\mathscr{L}/\partial\psi$ 和 $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\psi)$ 的准确定义见选读 15-4-1.

满足连续性方程$\partial_a J^a = 0$, 因而代表某种守恒流密度[其0分量代表某种守恒荷(量)密度]. 因为存在10个独立的Killing矢量场ξ^a, 相应地就有10个独立的守恒流密度J^a. 定义

$$S^{ab} := -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)}\partial^b \psi + \mathscr{L}\eta^{ab}, \tag{H-1-15}$$

则

$$S^{ab}\xi_b = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)}\xi^b \partial_b \psi + \mathscr{L}\xi^a. \tag{H-1-16}$$

当$\xi^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$(平移)时, 利用李导数公式和$\partial_a(\partial/\partial x^\nu)^b = 0$不难证明对任意$(k,l)$型张量场$\psi$有$L_\xi \psi = \xi^b \partial_b \psi$, 故

$$S^{ab}\xi_b = S^{ab}(\partial/\partial x^\mu)_b = -J^a. \tag{H-1-17}$$

对上式求导得$0 = \partial_a J^a = -(\partial/\partial x^\mu)_b \partial_a S^{ab}$ $(\mu = 0,1,2,3)$, 故

$$\partial_a S^{ab} = 0. \tag{H-1-18}$$

S^{ab}称为**正则能动张量**(canonical energy-momentum tensor).

注1　若ξ^a不是平移的Killing矢量场, 则$L_\xi \psi \neq \xi^b \partial_b \psi$, 故$S^{ab}\xi_b \neq -J^a$ [应代之以式(H-2-6)].

注2　可以证明以上结论也适用于多个场. 例如, 设有场ψ_1和ψ_2, 则只须把式(H-1-14)和(H-1-15)右边第一项改为两项之和(每项中的ψ分别为ψ_1和ψ_2), 把两式右边的$\mathscr{L}$理解为两个场构成的系统的总$\mathscr{L}$(含相互作用项).

以上证明了Noether定理用于时空对称性的实质内容: 一个连续的时空对称性(一个独立的Killing矢量场)导致一个守恒律. 现在讨论相应的守恒量. 先考虑$\xi^a = (\partial/\partial t)^a$的情况, 这时

$$J^a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)}\dot{\psi} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \mathscr{L}, \qquad (\text{其中}\ \dot{\psi} = L_{\partial/\partial t}\psi)$$

因此

$$J^0 = (\partial \mathscr{L}/\partial \dot{\psi})\dot{\psi} - \mathscr{L} = \mathscr{H} \tag{H-1-19}$$

是ψ场的哈氏密度(因为$\partial \mathscr{L}/\partial \dot{\psi}$按定义是$\psi$的共轭动量), 它在同时面$\Sigma_t$上的积分

$$H \equiv \int_{\Sigma_t} \mathscr{H}\, \mathrm{d}^3 x \quad (\text{场所满足的边界条件保证积分收敛}) \tag{H-1-20}$$

代表ψ场在t时刻的总能量. 设$\Sigma_{t'}$是另一同时面, 则$H' \equiv \int_{\Sigma_{t'}} \mathscr{H}\, \mathrm{d}^3 x$代表$\psi$场在$t'$

时刻的总能量. 对介于Σ_t与$\Sigma_{t'}$之间的时空区域Ω使用Gauss定理便可从$\partial_a J^a = 0$导出$H' = H$，此即能量守恒. 类似地还可通过相继取ξ^a为3个空间平移和3个空间转动Killing矢量场导出物质场ψ的动量守恒和角动量守恒.

§H.2　正则能动张量

自然要问:①从这些J^a出发定义的能量、动量和角动量与中册的小节12.6.2从$L^a = -T^{ab}\xi_b$出发定义的相应量是否一样?②上面定义的正则能动张量S^{ab}与我们熟知的能动张量T^{ab}是否一样?对问题②的答案是:两者一般不等. 一个主要区别是T^{ab}对称而S^{ab}却未必. 小节 12. 6. 2 曾指出$L^a = -T^{ab}\xi_b$是守恒流的理由是

$$\partial_a L^a = \partial_a(-T^{ab}\xi_b) = -T^{ab}\partial_a\xi_b = -T^{(ab)}\partial_{[a}\xi_{b]} = 0,$$

其中第三步用到ξ^a的Killing性和T^{ab}的对称性. 所以非对称的S^{ab}将使问题变得微妙. 如果ξ^a是平移Killing场，则$\partial_a\xi_b$自动为零，保证$\partial_a(S^{ab}\xi_b) = S^{ab}\partial_a\xi_b = 0$，因而$-S^{ab}\xi_b$是守恒流，对应于能量、动量守恒. 然而当$\xi^a$为非平移的Killing场时守恒流不能表为$-S^{ab}\xi_b$，问题变得复杂. 此外，$S^{ab}$还有其他缺点. 以无源电磁场为例，若取拉氏密度为

$$\mathscr{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{H-2-1}$$

则由式(H-1-15)求得的S^{ab}的部分分量为

$$\begin{aligned} S^{00} &= (8\pi)^{-1}(E^2 + B^2) + (4\pi)^{-1}\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{E}) \neq T^{00}, \\ S^{0i} &= (4\pi)^{-1}[(\vec{E}\times\vec{B})^i + \vec{\nabla}\cdot(A^i\vec{E})] \neq T^{0i}, \\ S^{i0} &= (4\pi)^{-1}\{(\vec{E}\times\vec{B})^i + [(\vec{\nabla}\times\phi\vec{B})^i - (\partial/\partial t)(\phi E)^i]\} \neq T^{i0}, \end{aligned} \tag{H-2-2}$$

其中$\vec{E}, \vec{B}, \phi, \vec{A}$分别是电场、磁场、标势和3矢势. 分量明显含有标势和矢势导致S^{ab}没有规范不变性，另一缺点则是其迹$\eta_{ab}S^{ab}$非零(而光子的零静质量要求它为零). S^{ab}的诸多缺点使人萌发对它改造的念头. 仔细一想，发现问题其实并不复杂：时空对称性的实质性后果是$\partial_a J^a = 0$[其中J^a由式(H-1-14)定义]，这使我们可以引入张量S^{ab}，满足$\partial_a S^{ab} = 0$. S^{ab}之所以选择式(H-1-15)的形状只是因为它满足$\partial_a S^{ab} = 0$. 然而满足$\partial_a S^{ab} = 0$的张量有无限多个，任一S'^{ab}只要等于$S^{ab} + Y^{ab}$(其中Y^{ab}满足$\partial_a Y^{ab} = 0$)都满足$\partial_a S'^{ab} = 0$. 选适当的Y^{ab}就可得到对称的S'^{ab}，从而保证$-S'^{ab}\xi_b$代表守恒流. 能使S^{ab}对称化(并保证$\partial_a S'^{ab} = 0$)的Y^{ab}很多，其中有一个恰使$S^{ab} + Y^{ab}$等于我们熟知的闵氏时空中物质场的能动张量T^{ab}(或差一个常数因子). 寻找这一Y^{ab}的关键是求出$S^{[ab]}$的表达式，介绍如下. 式(H-1-14)定义的守恒流

J^a 依赖于所选的 Killing 场 ξ^a，现在只关心转动和伪转动 Killing 场，为了明确区分，特以反称指标 $\mu,\nu\,(=0,1,2,3)$ 给这 6 个独立的 ξ^a (洛伦兹李代数的 6 个基矢)编号，记作 $\xi^a{}_{\mu\nu}$，满足

$$\xi^a{}_{\mu\nu} = -\xi^a{}_{\nu\mu} = x_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a - x_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a, \quad \text{其中}\, x_\mu \equiv \eta_{\mu\sigma}x^\sigma. \tag{H-2-3}$$

就是说，以 $\xi^a{}_{01}$, $\xi^a{}_{02}$, $\xi^a{}_{03}$ 和 $\xi^a{}_{12}$, $\xi^a{}_{13}$, $\xi^a{}_{23}$ 分别代表 3 个伪转动和 3 个转动 Killing 场，相应的 6 个守恒流按式(H-1-14)现在应记作

$$J^a{}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}L_{\xi_{\mu\nu}}\psi - \xi^a{}_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{H-2-4}$$

引入符号

$$l_{\mu\nu}\psi \equiv L_{\xi_{\mu\nu}}\psi - \xi^b{}_{\mu\nu}\partial_b\psi, \tag{H-2-5}$$

($l_{\mu\nu}\psi$ 代表 6 个与 ψ 同型的张量场.) 则

$$J^a{}_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}l_{\mu\nu}\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}\xi^b{}_{\mu\nu}\partial_b\psi - \xi^a{}_{\mu\nu}\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}l_{\mu\nu}\psi - S^{ab}\xi_{b\mu\nu}, \tag{H-2-6}$$

故

$$J^a{}_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}l_{\mu\nu}\psi - S^a{}_b\left[x_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b - x_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\right]. \tag{H-2-6'}$$

其中第二步用到式(H-1-15)，第三步用到式(H-2-3). 上式与 $\partial_a J^a_{\mu\nu} = 0$ 及 $\partial_a S^{ab} = 0$ 结合给出

$$0 = \partial_a J^a{}_{\mu\nu} = \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}l_{\mu\nu}\psi\right) - 2S_{[\mu\nu]}, \tag{H-2-7}$$

其中第二步用到 $\partial_a(\partial/\partial x^\nu)^c = 0$ 和 $\partial_a x_\mu = \partial_a(\eta_{\mu\rho}x^\rho) = \eta_{\mu\rho}(\mathrm{d}x^\rho)_a$. 定义张量

$$N^c{}_{ab} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_c\psi}l_{\mu\nu}\psi(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b, \qquad N^{cab} \equiv \eta^{ad}\eta^{be}N^c{}_{de}, \tag{H-2-8}$$

则可证明 N^{cab} 与坐标系无关，且由式(H-2-7)可知

$$2S^{[ab]} = \partial_c N^{cab}. \tag{H-2-9}$$

再引入张量 F^{cab}，要求它满足

$$F^{cab} = F^{[ca]b} \quad \text{及} \quad 2F^{c[ab]} = -N^{cab}. \tag{H-2-10}$$

这样的F^{cab}一定存在，因为不难证明上式把F^{cab}唯一确定为[仿照上册由式(3-2-7)推(3-2-10)的做法]:

$$2F^{cab}=N^{bca}-N^{cab}-N^{abc}. \tag{H-2-11}$$

令$Y^{ab}\equiv\partial_c F^{cab}$，则$\partial_a Y^{ab}=\partial_a\partial_c F^{cab}=\partial_{(a}\partial_{c)}F^{[ca]b}=0$，所以$S'^{ab}\equiv S^{ab}+Y^{ab}$满足$\partial_a S'^{ab}=0$而且$S'^{ab}=S'^{(ab)}$，后者的理由是

$$S'^{[ab]}=S^{[ab]}+\partial_c F^{c[ab]}=S^{[ab]}-\frac{1}{2}\partial_c N^{cab}=S^{[ab]}-S^{[ab]}=0.$$

[其中第三步用到式(H-2-9).] 事实上，S'^{ab}正是我们熟知的闵氏时空中物质场的能动张量T^{ab}(最多只差一个常数因子)，亦称 Belinfante 张量[见 Weinberg(1995)]. 就是说，能动张量(Belinfante 张量)T_{ab}与正则能动张量T_{ab}的关系为

$$T_{ab}=S_{ab}+\partial^c F_{cab}, \tag{H-2-12}$$

其中F_{cab}由式(H-2-11)定义. 借用最小替代法则(见§7.2)可得它在弯曲时空的表达式，这正是应该出现在爱因斯坦方程右边的T_{ab}. ①

现在就可以回答前面提出的问题①. 先讨论能(动)量. 设ξ^a为平移 Killing 场，即$\xi^a=\xi^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a$ (ξ^μ为常数). 令$L^a\equiv-T^{ab}\xi_b$, $J^a\equiv-S^{ab}\xi_b$. 由式(H-2-12)得

$$L^a=J^a-\partial_c(\xi_b F^{cab}). \tag{H-2-13}$$

注意到$F^{cab}=F^{[ca]b}$，可知两个守恒荷密度L^0和J^0的关系为

$$L^0=J^0-\partial_i(\xi_\nu F^{i0\nu}).\ (i\text{ 从1到3取和}) \tag{H-2-14}$$

时刻t的全空间Σ_t的相应守恒量(能量或动量分量)是守恒荷密度在Σ_t上的体积分，由于式(H-2-14)右边第二项是3维散度，其体积分可化为Σ_t的2维边界面(无限远面)的面积分，而有关物理量在趋于无限远时趋于零的速率保证这一积分为零，因此

$$\int_{\Sigma_t}L^0\mathrm{d}^3x=\int_{\Sigma_t}J^0\mathrm{d}^3x, \tag{H-2-15}$$

可见由L^a和J^a定义的守恒能(动)量一样. 再讨论角动量. 利用式(H-2-12)、(H-2-6)、(H-2-8)、(H-2-10)和(H-2-3)经计算得

$$L^a{}_{\mu\nu}=J^a{}_{\mu\nu}-\partial_c(\xi_{b\mu\nu}F^{cab}), \tag{H-2-13'}$$

其中

① 也可用物质场作用量对度规的泛函导数给T_{ab}下定义，结果与此处的T_{ab}等价，证明见 Zhang(2005).

$$L^a{}_{\mu\nu} \equiv -T^{ab}\xi_{b\mu\nu},$$

$J^a{}_{\mu\nu}$ 则由式(H-2-4)定义(请注意 $J^a{}_{\mu\nu} \neq -S^{ab}\xi_{b\mu\nu}$). 仿照上面的讨论得

$$L^0{}_{\mu\nu} = J^0{}_{\mu\nu} + \partial_i(x_\mu F^{i0}{}_\nu - x_\nu F^{i0}{}_\mu), \qquad \text{(H-2-14}'\text{)}$$

故

$$\int_{\Sigma_t} L^0{}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^3x = \int_{\Sigma_t} J^0{}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^3x, \qquad \text{(H-2-16)}$$

可见由 $L^a{}_{\mu\nu}$ 和 $J^a{}_{\mu\nu}$ 定义的守恒角动量也一样.

§H.3　关于用坐标语言的证明

在介绍 Noether 定理的坐标语言证明之前, 有必要说明坐标语言对张量场的描述. 从标量场谈起. 设 ϕ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的标量场, 即 $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, 则它与任一坐标系 $\{x^\mu\}$ 相结合便诱导出一个 4 元函数, 记作 $\Phi(x)$, 括号内的 x 是 x^μ 的简写. 应特别注意同一标量场 ϕ 与不同坐标系结合给出不同的 4 元函数. 以 $\Phi'(x')$ 代表 ϕ 与坐标系 $\{x'^\mu\}$ 结合所得的 4 元函数, 则

$$\Phi'(x'|_p) = \phi|_p = \Phi(x|_p), \qquad \text{(H-3-1)}$$

去掉下标 p, 但记住 x^μ 和 x'^μ 是同一点在不同系的坐标值, 便有 $\Phi'(x') = \Phi(x)$. 我们特别用大写字母 Φ 和 Φ' 代表同一标量场 ϕ 与不同坐标系结合而得的函数关系, 是为了对概念做出明确区分. 从现在起取消这种符号上的区别, 即把 $\Phi'(x') = \Phi(x)$ 改写为

$$\phi'(x') = \phi(x). \qquad \text{(H-3-2)}$$

上式就是坐标语言中标量场的基本特征. 下面讨论矢量场. 设矢量场 u^a 在 $\{x^\mu\}$ 系和 $\{x'^\mu\}$ 系的分量依次为 u^ν 和 u'^μ [看作两个(坐标依赖)的标量场], 它们在同一点 p 的值当然满足

$$u'^\mu|_p = \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p u^\nu|_p. \qquad \text{(H-3-3)}$$

标量场 u^ν 与 $\{x^\mu\}$ 系结合得函数 $u^\nu(x)$ [请注意 $u^\nu(x)$ 中的 u^ν 代表函数关系而不代表标量场 u^ν], u'^μ 与 $\{x'^\mu\}$ 系结合得函数 $u'^\mu(x')$. 仍设 p 点的老、新坐标分别为 x^μ 和 x'^μ, 则函数值 $u^\nu(x) \equiv u^\nu|_p$, $u'^\mu(x') \equiv u'^\mu|_p$, 所以式(H-3-3)给出两个函数的如下联系:

$$u'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} u^{\nu}(x) . \tag{H-3-4}$$

上式就是坐标语言中矢量场的基本特征. 类似地可讨论任意型张量场.

坐标语言与几何语言本质上等价, 只要使用得当, 都给出正确结果. 由于某些微妙原因, 在用坐标语言的多数教材中的某些概念(量)同几何语言中的相应概念(量)存在某些微妙区别(不完全是几何语言的忠实翻译), 如不注意就会带来混淆. 下面将适当指出.

在几何语言中, $\mathscr{L}$ 是 ψ, $\partial_a\psi$ 和 η_{ab} 的局域函数, 即 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab})$. 在 η_{ab} 固定时 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi)$, 给定场 ψ 后 $\mathscr{L}$ 是标量场. 在坐标语言中经常出现场的坐标分量, 并把每一分量看作坐标的函数. 设 ψ 是 (k,l) 型张量场, 则它有 $N \equiv 4^{k+l}$ 个分量, 但在场论中通常只用一个指标去作区分, 即把分量记作 $\psi^i(x)$ (括号内的 x 是 x^{μ} 的简写), 其中 $i = 1,\cdots,N$. 拉氏密度也被看作坐标的函数, 记作 $\mathscr{L}(x)$, 是由若干中间函数构成的复合 4 元函数:

$$\mathscr{L}(x) \equiv \mathscr{L}(\psi^i(x), \nabla_{\mu}\psi^i(x), g_{\mu\nu}(x)) . \tag{H-3-5}$$

说明:①右边的函数关系 $\mathscr{L}$ 由局域函数 $\mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab})$ 的函数关系 $\mathscr{L}$ 自然诱导而得; 左边的 $\mathscr{L}$ 则代表拉氏密度作为 x^{μ} 的函数的函数关系, 与右边的 $\mathscr{L}$ 显然不是同一函数关系(宗量就不同). ② $g_{\mu\nu}(x)$ 是 η_{ab} 的坐标分量, 只当所用坐标系是洛伦兹系时才等于 $\eta_{\mu\nu}$. ③ $\nabla_{\mu}\psi^i(x)$ 是 $\nabla_a\psi$ 的坐标分量, 其中 ∇_a 满足 $\nabla_a\eta_{bc} = 0$ (故意不记作 ∂_a, 理由稍后自明.) 以 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的电磁场为例, 其场量 ψ 是 4 势 A_a, 其拉氏密度在几何语言中为[见式(15-1-22)]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\pi}\eta^{ac}\eta^{bd}(\nabla_a A_b)\nabla_{[c}A_{d]} , \tag{H-3-6}$$

它显然是标量场. 在坐标语言中相应的 $\mathscr{L}(x)$ 应为

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4\pi}g^{\mu\rho}(x)g^{\nu\sigma}(x)(\nabla_{\mu}A_{\nu}(x))\nabla_{[\rho}A_{\sigma]}(x) , \tag{H-3-7}$$

其中 $\nabla_{\mu}A_{\nu} \equiv (\nabla_a A_b)(\partial/\partial x^{\mu})^a(\partial/\partial x^{\mu})^b$. 再回到式(H-3-5), 若选另一坐标系 $\{x'^{\mu}\}$, 则函数 $\mathscr{L}(x)$ 变为

$$\mathscr{L}'(x') \equiv \mathscr{L}(\psi'^i(x'), \nabla'_{\mu}\psi'^i(x), g'_{\mu\nu}(x')) . \tag{H-3-5'}$$

上式和式(H-3-5)都是几何语言的 $\mathscr{L}$ 的忠实翻译, 当然有 $\mathscr{L}'(x') = \mathscr{L}(x)$, 所以可把函数 $\mathscr{L}(x)$ 称为坐标语言的标量场[请对比式(H-3-2)]. 然而许多教材把 $\mathscr{L}(x)$ 的表达式简化为

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}(\psi^i(x),\nabla_\mu\psi^i(x)) \quad \text{甚至} \quad \mathscr{L}(x)=\mathscr{L}(\psi^i(x),\partial_\mu\psi^i(x)), \tag{H-3-8}$$

即略去式(H-3-5)中的第三组宗量, 暗示凡 $g_{\mu\nu}(x)$ 都写为 $\eta_{\mu\nu}$, 对电磁场而言就是把式(H-3-7)简化为

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{4\pi}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}(\nabla_\mu A_\nu(x))\nabla_{[\rho}A_{\sigma]}(x) \tag{H-3-7$'$}$$

甚至

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{4\pi}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}(\partial_\mu A_\nu(x))\partial_{[\rho}A_{\sigma]}(x), \tag{H-3-7$''$}$$

这种 $\mathscr{L}(x)$ 就不是几何语言的 $\mathscr{L}$ 的忠实翻译, 就只对洛伦兹系正确.① 于是便出现以下提法: 拉氏密度 $\mathscr{L}(x)$ 只是"Poincaré 标量场" [只敢保证在 Poincaré 变换下有 $\mathscr{L}'(x')=\mathscr{L}(x)$]. 所幸的是, 尽管式(H-3-8)及其后果[即" $\mathscr{L}(x)$ 只是 Poincaré 标量场"]不是几何语言的忠实翻译, 但就推证 Noether 定理(以及讨论许多其他问题)而言也已足够[因为定理的条件(在几何语言中就是" ξ^a 为 Killing 场")保证 $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 是 Poincaré 变换], 所以也给出正确结果.

下面介绍用坐标语言对 Noether 定理的推证[默认从式(H-3-8)出发]. 我们将看到它比用几何语言的推证长得多, 而且, 为了把各种不够清晰和容易误导的问题解释清楚, 讨论更是长上加长. 设 $\{x^\mu\}$ 是洛伦兹坐标系, $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 是"无限小" Poincaré 变换, 则 $\mathscr{L}'(x')=\mathscr{L}(x)$. 函数 $\mathscr{L}(x)\equiv\mathscr{L}(\psi^i(x),\partial_\mu\psi^i(x))$ 可看作复合函数, 坐标变换既导致自变量 x^μ 的改变(变为 x'^μ)又导致中间函数关系的改变(从 ψ^i 变为 ψ'^i, 通常说"场也跟着变"), 于是坐标变换 $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 所导致的 $\mathscr{L}$ 值的改变 $\delta\mathscr{L}$ ②可表为两部分之和:

$$\mathscr{L}'(x')-\mathscr{L}(x)\equiv\mathscr{L}(\psi'^i(x'),\ \partial'_\mu\psi'^i(x'))-\mathscr{L}(\psi^i(x),\ \partial_\mu\psi^i(x))\equiv\delta_1\mathscr{L}+\delta_2\mathscr{L}, \tag{H-3-9}$$

其中

$$\delta_1\mathscr{L}\equiv\mathscr{L}(\psi'^i(x'),\ \partial'_\mu\psi'^i(x'))-\mathscr{L}(\psi'^i(x),\ \partial'_\mu\psi'^i(x)), \tag{H-3-10}$$

$$\delta_2\mathscr{L}\equiv\mathscr{L}(\psi'^i(x),\ \partial'_\mu\psi'^i(x))-\mathscr{L}(\psi^i(x),\ \partial_\mu\psi^i(x)). \tag{H-3-11}$$

---

① ∇_μ 与 ∂_μ 的区别对电磁场的 $\mathscr{L}$ 其实不带来后果, 因为 $\mathscr{L}$ 中反称号的存在保证 $\nabla_{[\rho}A_{\sigma]}=\partial_{[\rho}A_{\sigma]}$. 但一般而言在原则上存在正文指出的问题.

② 为与用坐标语言证明定理的教材一致, 此处变分 $\delta\mathscr{L}$ 的定义与 §H.1 略有不同, 差别见式(15-1-3)所在页的脚注.

式(H-3-11)右边两项中的坐标值都是 x^μ，两项之所以不等只是因为中间函数关系不同. 令

$$\delta\psi^i(x) \equiv \psi'^i(x) - \psi^i(x), \tag{H-3-12}$$

$$\delta\partial_\mu\psi^i(x) \equiv \partial'_\mu\psi'^i(x) - \partial_\mu\psi^i(x), \tag{H-3-13}$$

则

$$\delta_2\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i(x)}\delta\psi^i(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi^i(x)}\delta\,\partial_\mu\psi^i(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi^i(x)}\delta\psi^i(x)\right], \tag{H-3-14}$$

其中最末一步用到拉氏方程 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i} = \partial_\mu\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi^i}\right]$ 以及

$$\delta\,\partial_\mu\psi^i(x) = \partial_\mu\delta\psi^i(x).\text{①} \tag{H-3-15}$$

另一方面，式(H-3-10)右边两项中的中间函数关系一样，两项之所以不等只是因为自变量 x^μ 的取值不同. 式(H-3-10)在一阶近似下给出

$$\delta_1\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu, \tag{H-3-16}$$

其中 $\delta x^\mu \equiv x'^\mu - x^\mu$，$\partial\mathscr{L}(x)/\partial x^\mu \equiv \partial\mathscr{L}(\psi^i(x), \partial_\mu\psi^i(x))/\partial x^\mu$.

现在来证明式(H-3-16). 设 $\{x^\mu\} \mapsto \{x'^\mu\}$ 是 Killing 场生成的单参微分同胚族 $\{f_\lambda: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\}$ 中参数为 $\delta\lambda$ 的那个 $f_{\delta\lambda}$ 所诱发的坐标变换. 每个 f_λ 通过诱发坐标变换又诱发一个中间函数的变换，即 $\psi^i(x) \mapsto \psi'^i(x')$，故有单参函数族 $\{\Psi^i(\lambda; x)\}$，满足 $\Psi^i(0; x) = \psi^i(x)$，$\Psi^i(\delta\lambda; x) = \psi'^i(x)$，因而式(H-3-10)给出

$$\begin{aligned}\delta_1\mathscr{L} &= \mathscr{L}(\Psi^i(\delta\lambda; x'), \partial_\mu\Psi^i(\delta\lambda; x')) - \mathscr{L}(\Psi^i(\delta\lambda; x), \partial_\mu\Psi^i(\delta\lambda; x)) \\ &= \left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi^i}\left[\frac{\partial\Psi^i}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Psi^i}{\partial x^\mu}\frac{\delta x^\mu}{\delta\lambda}\right] + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^i)}\left[\frac{\partial(\partial_\mu\Psi^i)}{\partial\lambda} + \frac{\partial(\partial_\mu\Psi^i)}{\partial x^\nu}\frac{\delta x^\nu}{\delta\lambda}\right]\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi^i}\frac{\partial\Psi^i}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^i)}\frac{\partial(\partial_\mu\Psi^i)}{\partial\lambda}\right\}\right|_{\lambda=0}\delta\lambda\end{aligned}$$

---

① 式(H-3-15)的证明颇长(见选读 H-3-2)，但从几何角度不难理解：$\partial_\mu\psi_i(x)$ 是 $\partial_a\psi$ 的坐标分量，而 δ 代表李导数 L_ξ (最多差一个常系数). Killing 场 ξ^a 生成的微分同胚不改变度规，从而也不改变与之适配的导数算符，所以 L_ξ 与导数算符可交换[见式(H-1-12)]，此即式(H-3-15).

$$=\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^i}\frac{\partial \Psi^i(0;x)}{\partial x^\mu}+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^i)}\frac{\partial(\partial_\nu \Psi^i(0;x))}{\partial x^\mu}\right]\delta x^\mu$$

$$=\frac{\partial \mathscr{L}(\psi^i(x),\partial_\nu \psi^i(x))}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu .$$

故得待证等式(H-3-16). 于是等式 $0=\mathscr{L}'(x')-\mathscr{L}(x)=\delta_2\mathscr{L}+\delta_1\mathscr{L}$ 可表为

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, \partial_\mu \psi^i(x)}\delta\psi^i(x)\right]+\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=0 . \qquad \text{(H-3-17)}$$

设 $q\equiv f_{\delta\lambda}(p)$, 把 $\xi^a\delta\lambda$ 直观地看作从 p 到 q 的箭头, 则 q, p 点的坐标差

$$x^\mu(q)-x^\mu(p)=\xi^\mu\delta\lambda .$$

另一方面, δx^μ 的准确含义是

$$\delta x^\mu\equiv x'^\mu(p)-x^\mu(p)=x^\mu(q)-x^\mu(p),$$

所以[①]

$$\delta x^\mu=\xi^\mu\delta\lambda . \qquad \text{(H-3-18)}$$

注意到 Killing 性导致 $\partial_\mu\xi^\mu=0$ [见式(H-1-13)前一行], 便得

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu}(\xi^\mu\delta\lambda)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathscr{L}\xi^\mu\delta\lambda), \qquad \text{(H-3-19)}$$

代入式(H-3-17)得

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, \partial_\mu \psi^i(x)}\frac{\delta\psi^i(x)}{\delta\lambda}+\mathscr{L}\xi^\mu\right]=0 . \qquad \text{(H-3-20)}$$

可见

$$\tilde{J}^\mu\equiv-\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, \partial_\mu \psi^i(x)}\frac{\delta\psi^i(x)}{\delta\lambda}+\mathscr{L}\xi^\mu\right]$$

是守恒流. 其实 $\tilde{J}^\mu$ 正是式(H-1-14)的 J^a 的坐标分量. 要确信这点, 只须证明(见选读 H-3-1)

$$\delta\psi^i(x)=-(L_\xi\psi)^i\delta\lambda . \qquad \text{(H-3-21)}$$

---

① 正式的证明可借用选读 2-3-1 末的公式, 其中的 f, α 和 v 分别是现在的 $x^\mu, \delta\lambda$ 和 ξ^a.

以上从$\mathscr{L}(x)$的 Poincaré 不变性出发证明了 Noether 定理. 也有许多书从作用量S出发做证明. S是$\mathscr{L}(x)$在某时空区域上的积分, 利用S的 Poincaré 不变性以及积分区域的任意性同样可得到 Noether 守恒流. 书中指出, 之所以要求S有 Poincaré 不变性(亦称相对论不变性), 是因为由$\delta S=0$所导出的演化方程必须 Poincaré 不变. 这种讲法已默认S在坐标变换下可能要变(否则"在 Poincaré 变换下S不变"就无从谈起). 然而, 在几何语言中, 给定场量后S就是一个确定的实数, 与坐标系无关, 是绝对的(因而是不变量). 结论的这种差异同样源于非忠实翻译. 此外, 许多书把S表为

$$S=\int\mathscr{L}(x)\,\mathrm{d}^4x=\int\mathscr{L}(\psi^i(x),\,\partial_\mu\psi^i(x))\,\mathrm{d}^4x, \qquad \text{(H-3-22)}$$

这也不是忠实翻译, 因为, ①如前所述, 此处的$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}(\psi^i(x),\partial_\mu\psi^i(x))$本来就不是忠实翻译, ②几何语言的$S=\int\mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon}$中的$\boldsymbol{\varepsilon}$是与度规适配的体元, 未必等于坐标体元$\mathrm{d}^4x$. 然而这两个问题对洛伦兹系都不存在, 而证明 Noether 定理时可以只限于洛伦兹系, 所以从式(H-3-22)出发同样能给出正确的 Noether 守恒流.

[选读 H-3-1]

式(H-3-21)的证明 设点p是点r在映射$f_{\delta\lambda}$下的像, 即$p=f_{\delta\lambda}(r)$. 为清晰起见, 暂以不同符号代表活动的坐标和具体的坐标值: 分别以y^μ和y'^μ代表老、新活动坐标(坐标变换改记为$\{y^\mu\}\mapsto\{y'^\mu\}$), 而$x^\mu$则代表$\{y^\mu\}$系在$p$点的坐标值, 即$x^\mu\equiv y^\mu|_p$. 这样, $\delta\psi^i(x)\equiv\psi'^i(x)-\psi^i(x)$中的$\psi^i(x)$可看作函数$\psi^i(y)$在自变量$y^\mu$取值$x^\mu$时的函数值, 所以$\psi^i(x)=\psi^i|_p$. 同理, $\psi'^i(x)$可看作函数$\psi'^i(y')$在自变量y'^μ取值x^μ时的函数值, 而r点的新坐标$y'^\mu|_r$按定义等于p点的老坐标, 即$y'^\mu|_r=x^\mu$, 故$\psi'^i(x)=\psi'^i|_r$. 于是

$$\delta\psi^i(x)=\psi'^i|_r-\psi^i|_p=(f_{\delta\lambda*}\psi)^i|_p-\psi^i|_p,$$

其中第二步用到上册定理 4-1-3(即"新新老=老老新"). 注意到

$$-(L_\xi\psi)^i|_p=(L_{-\xi}\psi)^i|_p,$$

设ξ^a产生的单参微分同胚族为$\{\bar{f}_\lambda:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4\}$, 则$\bar{f}_{\delta\lambda}{}^*=f_{\delta\lambda*}$, 故近似有

$$-(L_\xi\psi)^i|_p\,\delta\lambda=(L_{-\xi}\psi)^i|_p\,\delta\lambda=(\bar{f}_{\delta\lambda}{}^*\psi)^i|_p-\psi^i|_p=(f_{\delta\lambda*}\psi)^i|_p-\psi^i|_p=\delta\psi^i(x).$$

此即待证的式(H-3-21). □

[选读 H-3-1 完]

[选读 H-3-2]

本选读首先用坐标语言补证式(H-3-15), 然后介绍用坐标语言得出正则能动

张量$S_{\mu\nu}$、守恒流$J^{\sigma}{}_{\mu\nu}$和对称化能动张量(Belinfante张量)$T_{\mu\nu}$的推导过程.

把固有 Poincaré 变换$\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$表示为$x'^\mu=b^\mu+\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$的形式，其中$b^\mu(\mu=0,1,2,3)$为常数，$\Lambda^\mu{}_\nu$是洛伦兹群元(看作常数矩阵). 对于由小量$\delta\lambda$描述的无限小变换，$b^\mu=a^\mu\delta\lambda$(其中$a^\mu$为常数)，$\Lambda^\mu{}_\nu$则可表为

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\mathrm{Exp}(\omega^\mu{}_\nu\delta\lambda)\cong\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu\delta\lambda\,, \tag{H-3-23}$$

其中第一步用到式(G-4-10)($\omega^\mu{}_\nu$是生成$\Lambda^\mu{}_\nu$所在的单参子群的洛伦兹代数元)，第二步用到式(G-5-3)，$\cong$号代表保留至一阶小项. (以下各式都如此，并常用等号代替$\cong$号.) 于是

$$x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu,\ \text{其中}\ \delta x^\mu\equiv(a^\mu+\omega^\mu{}_\nu x^\nu)\delta\lambda\,, \tag{H-3-24}$$

$$x^\mu=x'^\mu-\delta x^\mu=x'^\mu-(a^\mu+\omega^\mu{}_\nu x'^\nu)\delta\lambda\,, \tag{H-3-25}$$

$$\partial x'^\mu/\partial x^\nu=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu\,\delta\lambda,\qquad \partial x^\mu/\partial x'^\nu=\delta^\mu{}_\nu-\omega^\mu{}_\nu\,\delta\lambda\,. \tag{H-3-26}$$

用$\eta^{\mu\nu}$和$\eta_{\mu\nu}$升降指标(例如$\omega^{\mu\nu}\equiv\omega^\mu{}_\rho\eta^{\rho\nu}$，$x_\nu\equiv x^\mu\eta_{\mu\nu}$)，则洛伦兹群元$\Lambda^\mu{}_\nu$所满足的条件$\eta_{\mu\nu}=\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu\eta_{\rho\sigma}$[式(G-5-23)]与式(H-3-23)结合导致$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$，从而又有$\omega^\mu{}_\mu=0$.

以$\mathscr{P}$代表固有 Poincaré 李群P的李代数(10 维). 由定理 G.7.1 可知$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$上全体 Killing 矢量场的集合(记作$\mathscr{K}$)是与$\mathscr{P}$同构的李代数，

$$\{(\partial/\partial x^\mu)^a,\xi^a{}_{\mu\nu}\mid\mu,\nu=0,1,2,3\}$$

是$\mathscr{K}$的一个基底. $\forall\xi^a\in\mathscr{K}$，由式(H-3-18)和(H-3-24)得$\xi^\mu=a^\mu+\omega^\mu{}_\nu x^\nu$，[①]与式(H-2-3)结合得

$$\xi^a=a^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\xi^a{}_{\mu\nu}\,, \tag{H-3-27}$$

这就是ξ^a用基底的线性展开式(其中a^μ和$\omega^{\mu\nu}$现在充当展开系数). 由ξ^a生成的 Poincaré 变换$\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$所诱发的场变换$\{\psi^i(x)\}\mapsto\{\psi'^i(x')\}$可借群表示论求得. Poincaré 群$P$的平移子群$T$是正规子群，故可构造商群$G\equiv P/T$，而且$G$与洛伦兹群有李群同构关系[②](证略). 存在自然的投影映射(而且是群同态)$\pi: P\to G$，满足

① 场论书通常不提 Killing 场而称$\omega^\mu{}_\nu$为无限小生成元. 由$\xi^\mu=a^\mu+\omega^\mu{}_\nu x^\nu$易见$\partial_\mu\xi^\mu=\omega^\mu{}_\mu$，故前面用过的$\partial_\mu\xi^\mu=0$其实就是$\omega^\mu{}_\mu=0$.

② 由$x'^\mu=b^\mu+\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$可知一个 Poincaré 群元由一组$(b^\mu,\Lambda^\mu{}_\nu)$决定. 两个群元称为**等价的**，若它们有一样的$\Lambda^\mu{}_\nu$. 可以证明，Poincaré 群所有等价类的集合是李群，即P与T的商群P/T.

$\pi(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda^\mu{}_\nu \in G$, 所以 Poincaré 群的每一群元 $(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu)$ 都给出一个洛伦兹群的群元 $\Lambda^\mu{}_\nu$. 设 ψ 是 (k,l) 型张量场, 则 $\psi^i(x)$ 的 i 应从 1 取到 $N \equiv 4^{k+l}$. 设 $\hat{G}$ 是 G 的 N 维表示, 就是说, 存在同态映射 $\rho: G \to \hat{G}$, 而且表示空间 V 是 N 维矢量空间, 则每组 $\psi^i(x) \in V$ 可以看作一个 $N \times 1$ 矩阵. 以 $\mathscr{G}$ 和 $\hat{\mathscr{G}}$ 分别代表 G 和 $\hat{G}$ 的李代数, 则 $\rho: G \to \hat{G}$ 在恒等元 $e \in G$ 诱导的推前映射 $\rho_*: \mathscr{G} \to \hat{\mathscr{G}}$ 就是李代数同态. 再令 $\sigma = \rho \circ \pi$, 则 $\sigma: P \to \hat{G}$ 和 $\sigma_*: \mathscr{P} \to \hat{\mathscr{G}}$ 分别是群同态和李代数同态. $\forall (b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu) \in P$, $\exists \omega^\mu{}_\nu \in \mathscr{G}$, $\delta\lambda \in \mathbb{R}$ 使

$$(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu) = (a^\mu \delta\lambda, \mathrm{Exp}(\omega^\mu{}_\nu \delta\lambda)).$$

令 $\hat{\Lambda}^i_j \equiv \rho(\Lambda^\mu{}_\nu) \in \hat{G}$, $\hat{\omega}^i_j \equiv \rho_*(\omega^\mu{}_\nu) \in \hat{\mathscr{G}}$ (都是 $N \times N$ 矩阵), 则

$$\hat{\Lambda}^i{}_j = \rho[\mathrm{Exp}(\omega^\mu{}_\nu \delta\lambda)] = \mathrm{Exp}[\rho_*(\omega^\mu{}_\nu)\delta\lambda] = \mathrm{Exp}(\hat{\omega}^i{}_j \delta\lambda) = \delta^i{}_j + \hat{\omega}^i{}_j \delta\lambda,$$

[其中第二步见附录G 习题10.] 另一方面,

$$\rho(\Lambda^\mu{}_\nu) = \rho[\pi(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu)] = \sigma(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu),$$

于是 $\sigma(b^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu) = \hat{\Lambda}^i_j = \delta^i{}_j + \hat{\omega}^i_j \delta\lambda$, 所以由 Poincaré 变换 $x'^\mu = b^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 诱发的场变换为

$$\psi^i(x) \mapsto \psi'^i(x') = (\delta^i{}_j + \hat{\omega}^i{}_j \delta\lambda)\psi^j(x) = \psi^i(x) + \hat{\omega}^i{}_j \psi^j(x)\delta\lambda. \qquad \text{(H-3-28)}$$

下面来找 $\hat{\omega}^i{}_j$ 的表达式. 利用 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{K}$ 的李代数同构关系可把两者的对应元素认同, 对应标准就是式(H-3-27). 就是说, $(a^\mu, \omega^\mu{}_\nu) \in \mathscr{P}$ 认同于 $\xi^a \in \mathscr{K}$ 当且仅当两者满足式(H-3-27). 于是有

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^i_j &\equiv \rho_*(\omega^\mu{}_\nu) = \rho_*[\pi_*(a^\mu, \omega^\mu{}_\nu)] = (\rho_* \circ \pi_*)(\xi^a) \\ &= \sigma_*[a^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\,\xi^a{}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_*(-\xi^a{}_{\mu\nu}),\end{aligned}$$

其中第二步用到 $\pi_*(a^\mu, \omega^\mu{}_\nu) = \omega^\mu{}_\nu$, 最末一步用到 $\sigma_*[a^\mu(\partial/\partial x^\mu)^a] = 0$ (均请读者自证). 令

$$(l_{\mu\nu})^i{}_j \equiv \rho_*(-\xi^a{}_{\mu\nu}), \qquad \text{(H-3-29)}$$

则

$$\hat{\omega}^i_j = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(l_{\mu\nu})^i{}_j, \qquad \text{(H-3-30)}$$

代入式(H-3-28)便得

$$\psi'^i(x') = \psi^i(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x)\,\delta\lambda\,. \tag{H-3-31}$$

把右边的$\psi^i(x)$和$\psi^j(x)$改写为$\psi^i(x) = \psi^i(x' - \delta x)$和$\psi^j(x) = \psi^j(x' - \delta x)$，在$x'$处作泰勒展开后代回式(H-3-31)并保留至一阶项得

$$\psi'^i(x') = \psi^i(x') + [-a^\nu\partial_\nu\psi^i(x') - \omega^\nu{}_\sigma x^\sigma\partial_\nu\psi^i(x') + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x')]\,\delta\lambda\,.$$

上式左边是函数$\psi'^i(y)$在$y = x'$处的值，右边也如此，x'的任意性保证两函数相等，故

$$\psi'^i(x) = \psi^i(x) + [-a^\nu\partial_\nu\psi^i(x) - \omega^\nu{}_\sigma x^\sigma\partial_\nu\psi^i(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x)]\,\delta\lambda\,. \tag{H-3-32}$$

注意到$\delta\psi^i(x) \equiv \psi'^i(x) - \psi^i(x)$，便有

$$\delta\psi^i(x) = [-a^\nu\partial_\nu\psi^i(x) - \omega^\nu{}_\sigma x^\sigma\partial_\nu\psi^i(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x)]\,\delta\lambda\,, \tag{H-3-33}$$

求导得

$$\partial_\mu\delta\psi^i(x) = [-a^\nu\partial_\mu\partial_\nu\psi^i(x) - \omega^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi^i(x) - \omega^\nu{}_\sigma x^\sigma\partial_\mu\partial_\nu\psi^i(x) + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(l_{\rho\sigma})^i{}_j\partial_\mu\psi^i(x)]\delta\lambda\,, \tag{H-3-34}$$

下面再求$\delta\partial_\mu\psi^i(x) \equiv \partial'_\mu\psi'^i(x) - \partial_\mu\psi^i(x)$，为此可先求$\partial'_\mu\psi'^i(x')$：

$$\begin{aligned}\partial'_\mu\psi'^i(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu\psi'^i(x')\\ &= \partial_\mu\psi^i(x) - \omega^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi^i(x)\delta\lambda + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(l_{\rho\sigma})^i{}_j\partial_\mu\psi^j(x)\delta\lambda\,,\end{aligned} \tag{H-3-35}$$

其中第一步用到复合函数微分法，第二步用到式(H-3-26)和(H-3-31)并保留至$\delta\lambda$的一阶项. 把函数$\partial_\nu\psi^i(x)$和$\partial_\nu\psi^j(x)$写成$\partial_\nu\psi^i(x' - \delta x)$和$\partial_\nu\psi^j(x' - \delta x)$，作泰勒展开后代回式(H-3-35)，保留至一阶项得

$$\begin{aligned}&\partial'_\mu\psi'^i(x') = \partial_\mu\psi^i(x')\\ &+[-a^\nu\partial_\nu\partial_\mu\psi^i(x') - \omega^\nu{}_\sigma x^\sigma\partial_\mu\partial_\nu\psi^i(x') - \omega^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi^i(x') + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(l_{\rho\sigma})^i{}_j\partial_\mu\psi^j(x')]\,\delta\lambda\,,\end{aligned}$$

把上式中所有(x')改为(x)，便可求得$\delta\partial_\mu\psi^i(x) \equiv \partial'_\mu\psi'^i(x) - \partial_\mu\psi^i(x)$的表达式，发现与式(H-3-34)右边无异，于是式(H-3-15)得证.

以上讨论也为用坐标语言得出正则能动张量$S_{\mu\nu}$、守恒流$J^\sigma{}_{\mu\nu}$和对称化能动张量(Belinfante张量)$T_{\mu\nu}$奠定基础. 由式(H-3-17)~ (H-3-19)得

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\,\partial_\sigma\psi^i(x)}\delta\psi^i(x)+\mathscr{L}\delta x^\sigma\right]=0. \tag{H-3-36}$$

把式(H-3-33)代入上式得

$$\partial_\sigma S^\sigma{}_\nu=0 \quad 和 \quad \partial_\sigma J^\sigma{}_{\mu\nu}=0,\ \mu,\nu=0,1,2,3, \tag{H-3-37}$$

其中

$$S^\sigma{}_\nu\equiv-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\sigma\psi^i(x)}\frac{\partial\psi^i(x)}{\partial x^\nu}+\mathscr{L}\delta^\sigma{}_\nu, \tag{H-3-38}$$

$$J^\sigma{}_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\sigma\psi^i(x)}[2x_{[\mu}\partial_{\nu]}\psi^i(x)+(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x)]+2\mathscr{L}\delta^\sigma{}_{[\mu}x_{\nu]}. \tag{H-3-39}$$

不难验证

$$J^\sigma{}_{\mu\nu}=2S^\sigma{}_{[\mu}x_{\nu]}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\sigma\psi^i(x)}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x), \tag{H-3-40}$$

以∂_σ作用上式, 利用式(H-3-37)便知$S_{\mu\nu}$的反称部分满足

$$2S_{[\mu\nu]}=\partial_\sigma N^\sigma{}_{\mu\nu}, \tag{H-3-41}$$

其中

$$N^\sigma{}_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\sigma\psi^i(x)}(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j(x). \tag{H-3-42}$$

以下仿照几何语言的做法便得对称化能动张量$T_{\mu\nu}$.

以上各式使人猜想$S^\sigma{}_\nu$, $J^\sigma{}_{\mu\nu}$和$N^\sigma{}_{\mu\nu}$分别是§H.2 的$S^a{}_b$, $J^a{}_{\mu\nu}$和$N^c{}_{ab}$的坐标分量. 证实这一结论的关键有二:①证明式(H-3-29)引入的矩阵$(l_{\mu\nu})^i{}_j$是式(H-2-5)引入的$l_{\mu\nu}$的坐标分量; ②证明$\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\mu\psi)$是$\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\psi)$的坐标分量. 证明②的关键是弄清$\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\psi)$的准确含义, 已详于选读15-4-1中; 下面给出①的证明.

点$p\in\mathbb{R}^4$的全体(k,l)型张量的集合$\mathscr{T}_p(k,l)$是4^{k+l}维矢量空间, 因此(k,l)型张量场ψ在p点的值$\psi|_p$既可称为张量(V_p上的张量)又可称为矢量[矢量空间$\mathscr{T}_p(k,l)$的元素]. 作为矢量, $\psi|_p$只有一个指标, 所以前面用ψ^i代表分量(略去下标p). 下面以$A,B,\cdots$作为矢量空间$\mathscr{T}_p(k,l)$的抽象指标, 则ψ应记作ψ^A. 再以$\{(E_i)^A\}$代表$\mathscr{T}_p(k,l)$的坐标基底, 便有$\psi^A=\psi^i(E_i)^A$. 设f是$\mathbb{R}^4$上的光滑函数, 则由式(H-2-5)易证$l_{\mu\nu}(f\psi)=fl_{\mu\nu}\psi$, 所以$l_{\mu\nu}$在每点$p$的功用是把该点的矢量$\psi^A$变为矢量$(l_{\mu\nu}\psi)^A$, 可见$l_{\mu\nu}$是$\mathscr{T}_p(k,l)$上的(1,1)型张量, 于是可写

$$(l_{\mu\nu}\psi)^A = (l_{\mu\nu})^A{}_B \psi^B .$$

$a^\nu = 0$ 的式(H-3-33)与(H-2-3)结合给出

$$\frac{\delta\psi^i}{\delta\lambda} = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}[\xi^a{}_{\mu\nu}\partial_a\psi^i + (l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j] . \tag{H-3-43}$$

由式(H-3-21)及 $a^\mu = 0$ 的(H-3-27)又得

$$\frac{\delta\psi^i}{\delta\lambda} = (L_{\omega^{\mu\nu}\xi_{\mu\nu}/2}\psi)^i = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(L_{\xi_{\mu\nu}}\psi)^i , \tag{H-3-44}$$

用等号连接以上两式, 利用 $\omega^{\mu\nu}$ 的任意性得 $(L_{\xi_{\mu\nu}}\psi)^i = \xi^a{}_{\mu\nu}\partial_a\psi^i + (l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j$, 配上基矢 $(E_i)^A$ 后成为

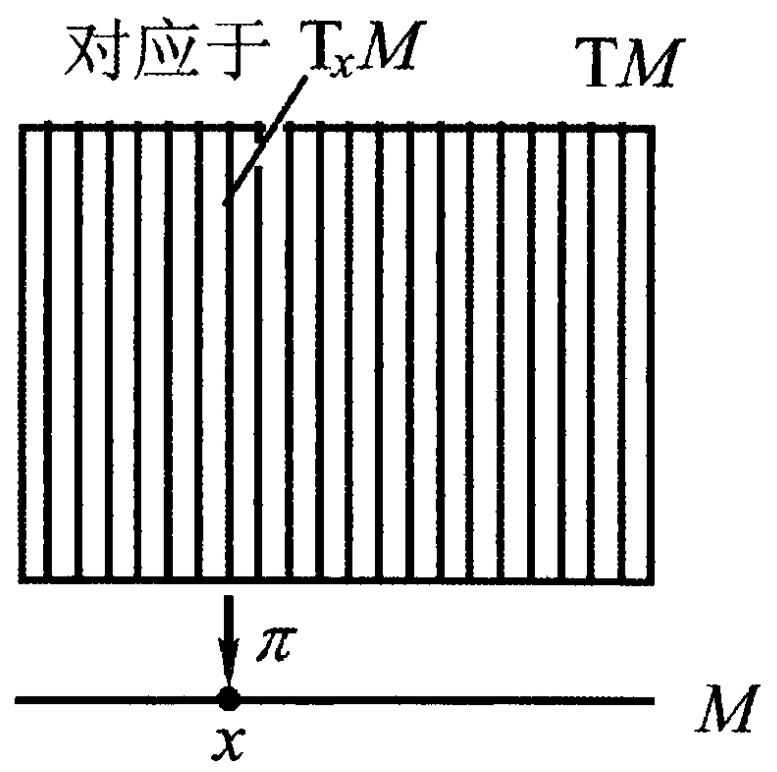
$$(L_{\xi_{\mu\nu}}\psi)^A = \xi^a{}_{\mu\nu}\partial_a\psi^A + (E_i)^A(l_{\mu\nu})^i{}_j\psi^j , \tag{H-3-45}$$

另一方面, 把式(H-2-5)写成 $(l_{\mu\nu})^A{}_B\psi^B \equiv L_{\xi_{\mu\nu}}\psi^A - \xi^a{}_{\mu\nu}\partial_b\psi^A$, 与式(H-3-45)对比便知 $(l_{\mu\nu})^i{}_j$ 无非是 $(l_{\mu\nu})^A{}_B$ 的坐标分量. **[选读 H-3-2 完]**

附录I　纤维丛及其在规范场论的应用

小节15.3.1开头一小段曾简略介绍过切丛和余切丛, 它们都是纤维丛的特例. 本附录将较为详细地介绍主纤维丛(主丛)和伴纤维丛(伴丛)及其在规范场论的应用. 阅读本附录前请先读该小段.

本附录大量用到李群和李代数的知识, 阅读前最好先读中册附录G. 由于种种原因, 本附录(及附录G)的某些符号与本书他处的习惯不尽相同, 例如, ①除少数地方外不用抽象指标, 以减轻表达式的外观复杂度. ②曲线 $\eta(t)$ 的切矢用 $\dfrac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}$ [或 $\mathrm{d}\eta(t)/\mathrm{d}t$, 或 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\eta(t)$] (只在少数情况用 $\partial/\partial t$)代表. 此外, 本附录经常涉及丛流形 P 和底流形 M, 它们的点分别用 $p\in P$ 和 $x\in M$ 代表; $p\in P$ 的切空间在本书他处都记作 V_p, 但在本附录中 V_p 另有含义, 代表 p 点切空间的竖直(vertical)子空间. 因此本附录把 $p\in P$ 的切空间记作 T_pP. 类似地, $x\in M$ 的切空间记作 T_xM. 这不但符合大多数文献的习惯, 而且也合理, 因为 M 的切丛在文献中统一记作 $\mathrm{T}M$, 点 $x\in M$ 的切空间既然对应于 x 上方的纤维, 就对应于 $\mathrm{T}M$ 的一个子集, 自然应记作 T_xM (见图I-1).



图I-1　切丛 $\mathrm{T}M$ 示意. 每一竖直线(纤维)对应于某点 $x\in M$ 的切空间

§I.1　主 纤 维 丛

I.1.1　主丛的定义和例子

定义1　李群 G 在流形 K 上的一个**左作用**(left action)是一个 C^∞ 映射 $L: G\times K\to K$, 满足:

(a) $L_g: K\to K$ 是微分同胚 $\forall g\in G$;　　(b) $L_{gh}=L_g\circ L_h$,　$\forall g,h\in G$.

注1　与§G.7定义1比较可知李变换群 $G\times M\to M$ 就是 G 在 M 上的左作用.

定义1′　李群 G 在流形 K 上的一个**右作用**(right action)是一个 C^∞ 映射 $R: K\times G\to K$, 满足:

(a) $R_g: K \to K$ 是微分同胚 $\forall g \in G$；　(b) $R_{gh} = R_h \circ R_g$，　$\forall g, h \in G$.

注 2　仿照李变换群，也可以证明 L_e 及 R_e (其中 e 是 G 的恒等元)是恒等映射.

下面大量用到李群 G 在某流形(主丛流形) P 上的右作用，即 $R: P \times G \to P$. 我们将把 $R_g(p)$ (其中 $g \in G, p \in P$)简记作 pg.

定义 2　子集 $\{pg \mid g \in G\} \subset P$ 称为右作用 $R: P \times G \to P$ 过点 $p \in P$ 的**轨道**. 右作用 $R: P \times G \to P$ 称为**自由的**(free)，若 $g \neq e \Rightarrow pg \neq p \ \forall p \in P$. 左作用的自由性和轨道仿此定义.

现在介绍主纤维丛的定义. 这一定义对初学者有一定难度，我们先给出定义，再以加注的方式详加解释.

定义 3　**主纤维丛**(principal fiber bundle)由一个叫做**丛流形**(bundle manifold)的流形 P、一个叫做**底流形**(base manifold)的流形 M 和一个叫做**结构群**(structuregroup)的李群 G 组成，满足以下要求：

(a) G 在 P 上有自由右作用 $R: P \times G \to P$；

(b)存在 C^∞ 的、到上的投影映射 $\pi: P \to M$，满足

$$\pi^{-1}[\pi(p)] = \{pg \mid g \in G\}, \quad \forall p \in P; \quad (\text{见图 I-2}) \qquad \text{(I-1-1)}$$

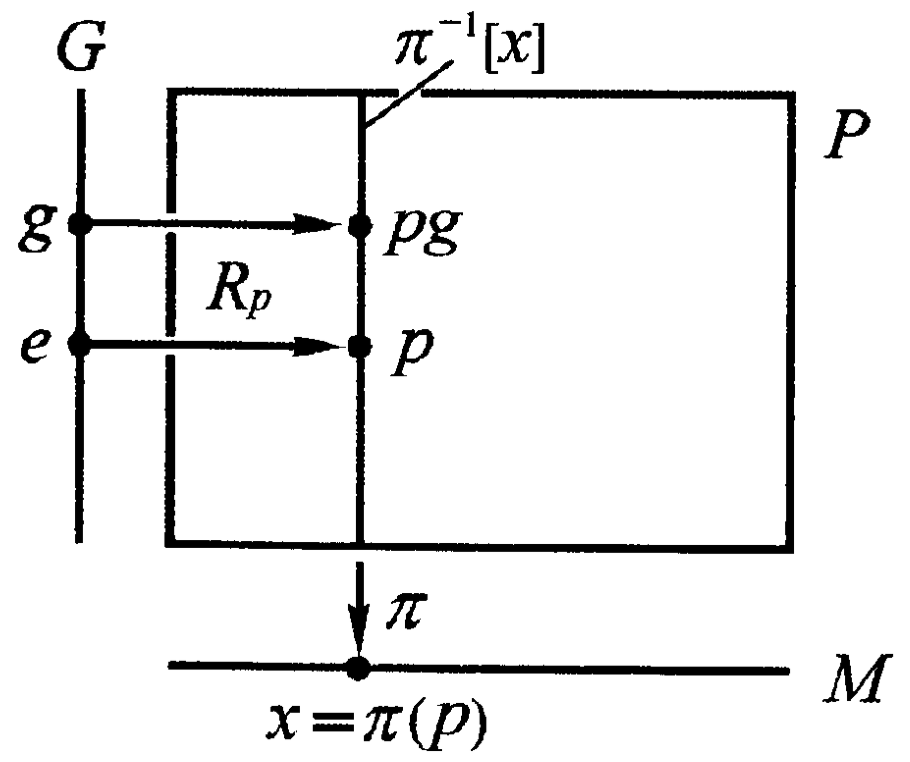


图 I-2　主丛的简单图示

(c)每一 $x \in M$ 有开邻域 $U \subset M$ 及微分同胚 $T_U: \pi^{-1}[U] \to U \times G$，且 T_U 取如下形式：

$$T_U(p) = (\pi(p), S_U(p)), \quad \forall p \in \pi^{-1}[U], \qquad \text{(I-1-2)}$$

其中映射 $S_U: \pi^{-1}[U] \to G$ 满足

$$S_U(pg) = S_U(p)g, \quad \forall g \in G. \qquad \text{(I-1-3)}$$

注 3　今后把主纤维丛简称主丛，并简记为 $P(M,G)$，甚至简记为 P.

注 4　投影映射 $\pi: P \to M$ 一般不是一一映射，故逆映射 $\pi^{-1}: M \to P$ 一般不存在. 但对子集 $U \subset M$ 而言，$\pi^{-1}[U] \equiv \{p \in P \mid \pi(p) \in U\}$ 有明确含义. 同理，把 $x \in M$ 看作 M 的独点子集 $\{x\} \subset M$，则 $\pi^{-1}[\{x\}]$ 有意义(简记作 $\pi^{-1}[x]$)，称为点 $x \in M$ 上方的**纤维**(fiber). 注意到定义 2，式(I-1-1)实际上就是要求任一点 $p \in P$ 的投影 $\pi(p) \in M$ 上方的纤维 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 等于右作用 R 过点 p 的轨道.

注 5　映射 $R: P \times G \to P$ 在给定 $p \in P$ 后诱导出映射 $R_p: G \to P$. 既然 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 是 R 过 p 的轨道，映射 R_p 的值域就只能是 $\pi^{-1}[\pi(p)] \subset P$，故也可把 R_p 更明确地写成 $R_p: G \to \pi^{-1}[\pi(p)]$. 令 $x \equiv \pi(p)$ 以便把 $R_p: G \to \pi^{-1}[\pi(p)]$ 简记为 $R_p: G \to \pi^{-1}[x]$(图 I-2). 可以证明 $R_p: G \to P$ 是个嵌入映射(见上册 §4.4 定义

1), 所以G的流形结构可被带到$\pi^{-1}[x]$上, 使$\pi^{-1}[x]$成为P中的嵌入子流形,[①] 而且$R_p: G\to\pi^{-1}[x]$成为微分同胚. 进一步自然要问: G的群结构是否也可被带到$\pi^{-1}[x]$上?答案是肯定的. 首先, $R_p(e)=p$使我们想到可选p作为待定义李群$\pi^{-1}[x]$的恒等元. 其次, 每一$p'\in\pi^{-1}[x]$对应于G的一个元素$g\equiv R_p^{-1}(p')$, 故

$$p'=R_p(g)=R_g(p)=pg\,,$$

因而可借用G的群乘法给$\pi^{-1}[x]$定义群乘法:

$$(pg)\cdot(ph):=\ p(gh)\,,\qquad \forall pg, ph\in\pi^{-1}[x]\,.$$

于是每一纤维都可看作G的一个李群同构版本. 但必须注意: 由于p点在$\pi^{-1}[x]$上可以任取($\pi^{-1}[x]$中没有一点是天生与众不同的), 在把$\pi^{-1}[x]$定义为李群时不存在一种自然的定义方式(取任一$p\in\pi^{-1}[x]$作为恒等元均可). 所以, 与G不同, $\pi^{-1}[x]$不是一个自然的李群, 或说它不存在天生的群结构. 它与G之间的李群同构映射R_p是p点依赖的.

注6 条件(c)保证每一$x\in M$都有开邻域U, 其逆像$\pi^{-1}[U]$与乘积流形$U\times G$微分同胚. 在特殊情况下, 这个U可能"大"到等于M, 这时$\pi^{-1}[U]=P$, 于是P与乘积流形$M\times G$微分同胚, 不妨写$P=M\times G$. 这种可表为乘积流形的主丛称为**平凡**(trivial)**主丛**. 一般主丛并不平凡, 但条件(c)保证$\pi^{-1}[U]$总与$U\times G$微分同胚, 所以说任何主丛都是**局域平凡的**(locally trivial). 由于微分同胚映射T_U在此起关键作用, 所以把T_U称为一个**局域平凡化**(local trivialization), 简称**局域平凡**.

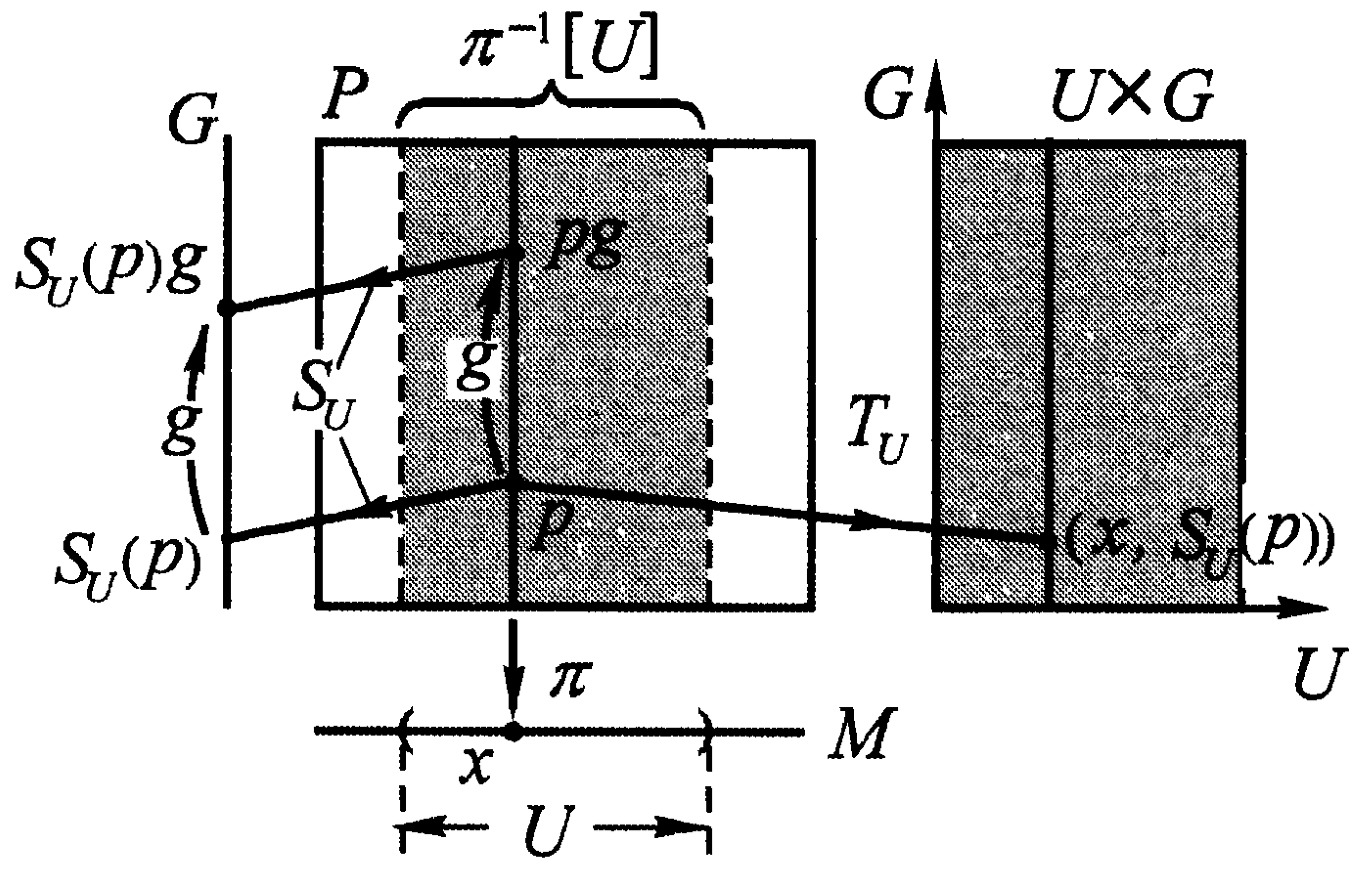


图 I-3 映射$S_U:\pi^{-1}[x]\to G$是微分同胚, 满足$S_U(pg)=S_U(p)g$

注7 式(I-1-2)是对映射T_U的要求. $\forall p\in\pi^{-1}[U]$, 映射的像$T_U(p)$是$U\times G$的一点, 即U的一点与G的一点构成的有序对$(\bullet,\bullet)$, 由此不难理解式(I-1-2)右边写成

① 不难证明$\pi^{-1}[x]$由此得到的微分(流形)结构与点$p\in\pi^{-1}[x]$的选择无关. 还可证明$\pi^{-1}[x]$是正则嵌入子流形(定义见上册选读 4-4-1).

$(\pi(p), S_U(p))$ 的原因. 括号中第一槽 $\pi(p)$ 表明 $T_U(p)$ 的第一要素等于 p 的投影 $\pi(p)$ [$p \in \pi^{-1}[U]$ 保证 $\pi(p)$ 的确是 U 的元素], 第二槽则要灵活得多, 它只规定第二要素是 p 在映射 S_U 下的像, 而对映射 S_U 的唯一要求是满足式(I-1-3)(见图 I-3).

注 8　$\forall x \in U$, 把 S_U 的定义域限制为 $\pi^{-1}[U]$ 的子集 $\pi^{-1}[x]$, 便有微分同胚 $S_U: \pi^{-1}[x] \to G$ (以保证 T_U 是微分同胚). 可见, 选定一个局域平凡 T_U 就选定了 $\pi^{-1}[x]$ 与 G 之间的一个微分同胚映射, 因而在 $\pi^{-1}[x]$ 上确定了一个"特殊点" $\breve{p}_U$, 满足 $S_U(\breve{p}_U) = e \in G$. 相应于这个 $\breve{p}_U$ 又有微分同胚 $R_{\breve{p}_U}: G \to \pi^{-1}[x]$, 不难证明(习题)映射 $R_{\breve{p}_U}$ 与 $S_U: \pi^{-1}[x] \to G$ 互逆, 即

$$S_U \circ R_{\breve{p}_U}: G \to G \text{ 是恒等映射.} \tag{I-1-4}$$

注 9　设 $P(M,G)$ 是主丛, 则不难证明(习题)如下的有用公式:

$$R_g \circ R_p = R_{pg} \circ I_{g^{-1}}, \quad \forall p \in P, g \in G. \tag{I-1-5}$$

其中 $I_{g^{-1}}: G \to G$ 是由 $g^{-1} \in G$ 构造的伴随同构(见中册 §G.1).

例 1　对任给的李群 G 和流形 M 总可按如下三步构造一个主丛:

(1)选 $P \equiv M \times G$ 为丛流形, 则 P 的任一点都可表为 $p = (x,g)$, 其中 $x \in M$, $g \in G$.

(2)定义自由右作用 $R: P \times G \to P$ 为

$$R_h(x,g) := (x,gh), \quad \forall x \in M, \ h,g \in G.$$

$$[\text{也可表为} (x,g)h := (x,gh).]$$

(3)定义投影映射为

$$\pi(x,g) := x, \quad \forall x \in M, g \in G.$$

以上三步足以保证 $P(M,G)$ 是个主丛, 定义 3 的条件(c)自动满足, 具体说, $\forall x \in M$ 都选 M 为条件(c)中的开邻域 U, 从而 $\pi^{-1}[U] = \pi^{-1}[M] = M \times G$, 再把局域平凡 $T_U: \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 定义为恒等映射便可. 这样构造的主丛显然是平凡的.

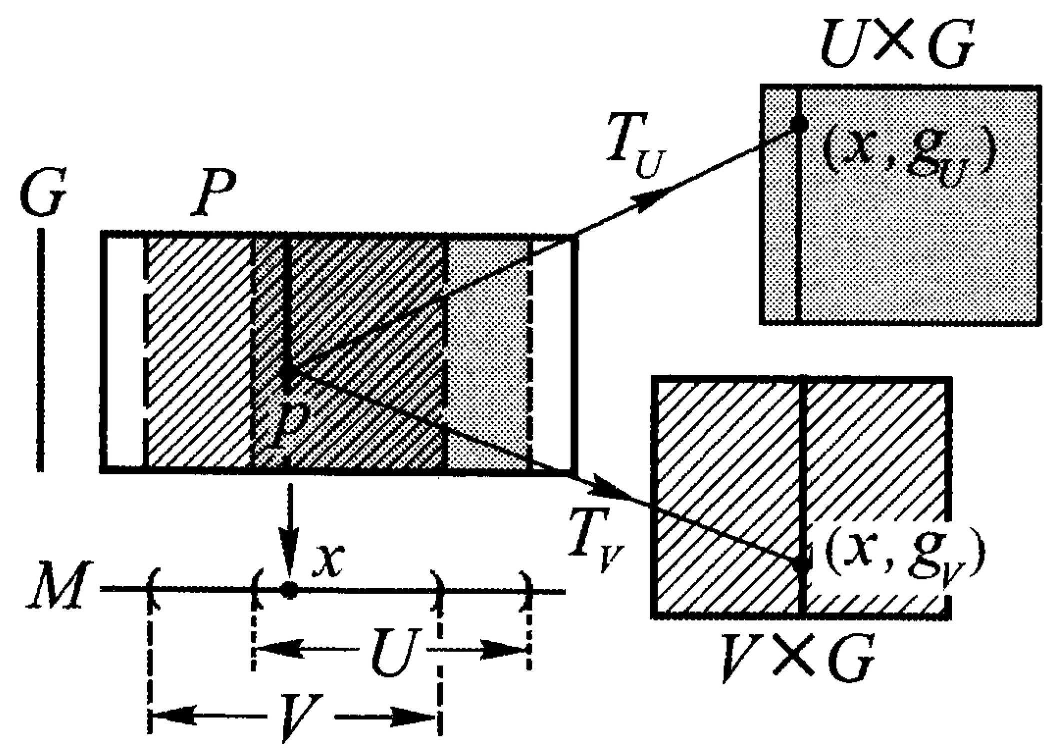


图 I-4　$p \in P$ 在映射 T_U 和 T_V 下的像

设 $P(M,G)$ 是主丛，$T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$ 和 $T_V: \pi^{-1}[V]\to V\times G$ 是两个局域平凡，且 $U\cap V\neq\varnothing$，则每一 $p\in\pi^{-1}[U\cap V]$ 在 G 中有两个像点，即 $g_U\equiv S_U(p)$ 和 $g_V\equiv S_V(p)$，故 $T_U(p)=(x,g_U)$，$T_V(p)=(x,g_V)$（图 I-4）. 设 $\{U,V,\cdots\}$ 是 M 的一个开覆盖，以 Σ 代表 $U\times G, V\times G,\cdots$ 的非交并集[“非交”是指 $(x,g_U)\in U\times G$ 和 $(x,g_V)\in V\times G$ 即使在 $g_U=g_V$ 时也看作不同点]，则 Σ 比 P 要“大”，因为每一 $p\in P$ 在 Σ 中对应于不止一个像点[例如图 I-4 的 p 至少对应于两点 (x,g_U) 和 (x,g_V)]. 但只要把每点 $p\in P$ 在 Σ 的所有像点认同为一点，Σ 就可代表 P. 由于 $g_U=S_U(p)$，$g_V=S_V(p)$，且 g_U 和 g_V 都是群元，所以

$$g_U=g_U g_V{}^{-1} g_V=S_U(p)\,S_V(p)^{-1}\,g_V. \tag{I-1-6}$$

[其中 $S_V(p)^{-1}$ 代表群元 $S_V(p)$ 的逆元.] 由此便引出如下定义.

定义 4 设 $T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$ 和 $T_V: \pi^{-1}[V]\to V\times G$ 是主丛 $P(M,G)$ 的两个局域平凡，$U\cap V\neq\varnothing$. 映射 $g_{UV}: U\cap V\to G$ 称为由 T_U 到 T_V 的**转换函数**(transition function)，若

$$g_{UV}(x)=S_U(p)\,S_V(p)^{-1},\quad \forall x\in U\cap V.\ [\text{其中 } p \text{ 满足 } \pi(p)=x\ ] \tag{I-1-7}$$

注 10 条件 $\pi(p)=x$ 表明 $p\in\pi^{-1}[x]$. 在 $\pi^{-1}[x]$ 上取另一点 $p'(\neq p)$，它自然也满足 $\pi(p')=x$. 如果用 p' 代替式(I-1-7)的 p 后竟给出不同的 $g_{UV}(x)$，则式(I-1-7)不能充当 g_{UV} 的合法定义. 因此应验证由式(I-1-7)定义的 $g_{UV}(x)$ 的确与 p 的选择无关. 设 p' 是 $\pi^{-1}[x]$ 的另一点，则因 $p,p'\in\pi^{-1}[x]$，必有 $g\in G$ 使 $p'=pg$. 故

$$S_U(p')\,S_V(p')^{-1}=S_U(pg)\,S_V(pg)^{-1}=S_U(p)g\,[S_V(p)\,g]^{-1}$$

$$=S_U(p)g\,g^{-1}\,S_V(p)^{-1}=S_U(p)e\,S_V(p)^{-1}=S_U(p)\,S_V(p)^{-1},$$

[其中第三步用到群元乘积之逆的计算法则，即 $(hg)^{-1}=g^{-1}h^{-1}$.] 可见式(I-1-7)是 g_{UV} 的合法定义.

定理 I-1-1 g_{UV} 满足

(a) $g_{UU}(x)=e,\quad \forall x\in U\cap V$;

(b) $g_{VU}(x)=g_{UV}(x)^{-1},\quad \forall x\in U\cap V$;

(c) $g_{UV}(x)g_{VW}(x)g_{WU}(x)=e,\quad \forall x\in U\cap V\cap W$.

证明 甚易，留作习题. □

刚才讲过，要使非交并集 Σ 等于 P，应把 Σ 中由每点 $p\in P$ “裂变”出来的各点(分别属于 Σ 的各项 $U\times G, V\times G,\cdots$)认同. 更准确地可以定义一个等价关系 $\sim$：设 $(x,g)\in U\times G$，$(x',g')\in V\times G$，当且仅当

$$x = x', \quad g = g_{UV}(x)g' \tag{I-1-8}$$

时就说 (x,g) 等价于 (x',g')，记作 $(x,g)\sim(x',g')$. 将 Σ 中所有等价的点认同，结果便是 P，记作 $P=\Sigma/\sim$. 数学上的等价关系必须具备三个性质，以现在的例子陈述就是:

(a) 反身性，即 $(x,g)\sim(x,g)$；

(b) 对称性，即 $(x,g)\sim(x',g')\Leftrightarrow(x',g')\sim(x,g)$；

(c) 传递性，即 $(x,g)\sim(x',g')$, $(x',g')\sim(x'',g'')\Rightarrow(x,g)\sim(x'',g'')$.

作为习题，请读者借定理I-1-1验证由式(I-1-8)定义的 $\sim$ 的确是等价关系.

定理 I-1-2 设 g_{UV} 是从局域平凡 T_U 到 T_V 的转换函数，$x\in U\cap V$. 以 $\breve{p}_U$ 和 $\breve{p}_V$ 分别代表由 T_U 和 T_V 在 $\pi^{-1}[x]$ 上确定的"特殊点"，即

$$S_U(\breve{p}_U)=S_V(\breve{p}_V)=e\in G,$$

则

$$\breve{p}_V=\breve{p}_U g_{UV}(x). \tag{I-1-9}$$

证明 $\breve{p}_U, \breve{p}_V\in\pi^{-1}[x]$ 保证 $\exists\, g\in G$ 使

$$\breve{p}_V=\breve{p}_U g. \tag{I-1-10}$$

取 $\breve{p}_V$ 作为式(I-1-7)的 p，则

$$g_{UV}(x)=S_U(\breve{p}_V)\, S_V(\breve{p}_V)^{-1}=S_U(\breve{p}_V)e=S_U(\breve{p}_U g)=S_U(\breve{p}_U)g=eg=g,$$

[其中第三步用到式(I-1-10), 第四步用到式(I-1-3).] 代入式(I-1-10)便得式(I-1-9).

□

定义 5 设 $P(M,G)$ 是主丛，U 是 M 的开子集. C^∞ 映射 $\sigma: U\to P$ 称为一个**局域截面**[local (cross) section]，若

$$\pi(\sigma(x))=x, \quad \forall x\in U. \tag{I-1-11}$$

注 11 上式保证每点 $x\in U$ 在 σ 映射下的像都在纤维 $\pi^{-1}[x]$ 内.

定理 I-1-3 局域截面与局域平凡之间存在自然的一一对应关系.

证明 给定 $T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$ 后每一 $x\in U$ 的纤维有一个特殊点 $\breve{p}_U$，满足 $S_U(\breve{p}_U)=e\in G$. 把 $\breve{p}_U$ 定义为 $\sigma(x)$ 便自然得到一个局域截面 $\sigma: U\to P$ (光滑性显见). 反之，给定 $\sigma: U\to P$ 后，把每一 $x\in U$ 的像点 $\sigma(x)$ 作为待定义的 T_U 的特殊点便可定义 $T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$. 具体说，$\forall p\in\pi^{-1}[U]$ 令 $x\equiv\pi(p)$，则 p 与 $\sigma(x)$ 属于同一纤维 $\pi^{-1}[x]$，故存在唯一的 $g\in G$ 使 $p=\sigma(x)g$，把 $T_U(p)$ 定义为 (x,g) 便可. □

设 $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 和 $T_V : \pi^{-1}[V] \to V \times G$ 是局域平凡, $U \cap V \neq \varnothing$, g_{UV} 是由 T_U 到 T_V 的转换函数, $\sigma_U : U \to P$ 和 $\sigma_V : V \to P$ 依次是与 T_U 和 T_V 对应的局域截面, 则由式(I-1-9)得

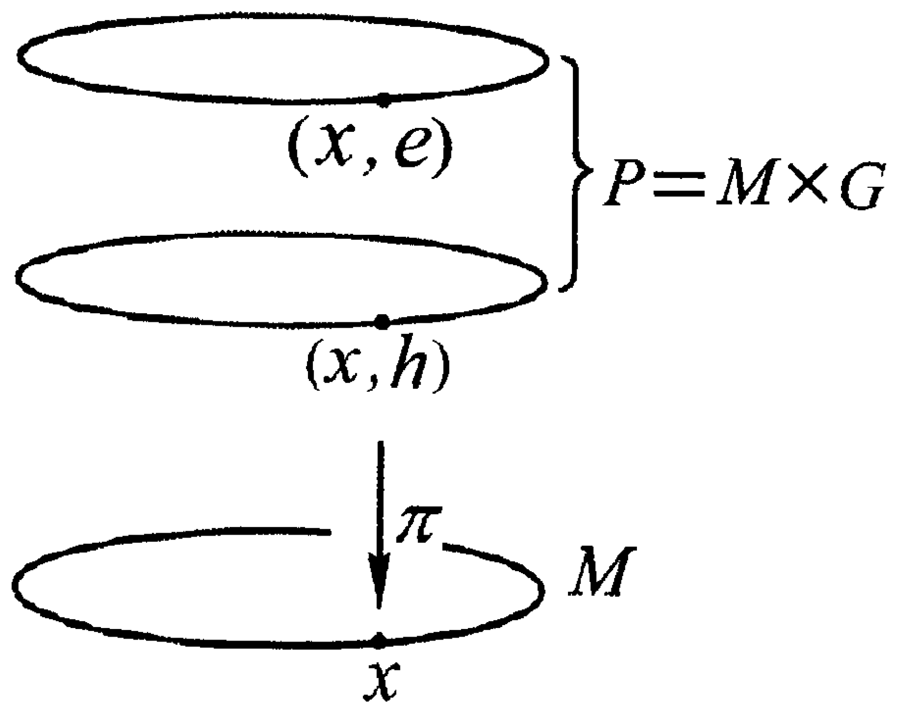
$$\sigma_V(x) = \sigma_U(x) g_{UV}(x), \quad \forall x \in U \cap V. \qquad \text{(I-1-12)}$$

定义6 局域截面 $\sigma : U \to P$ 称为**整体截面**(global section), 若 $U = M$.

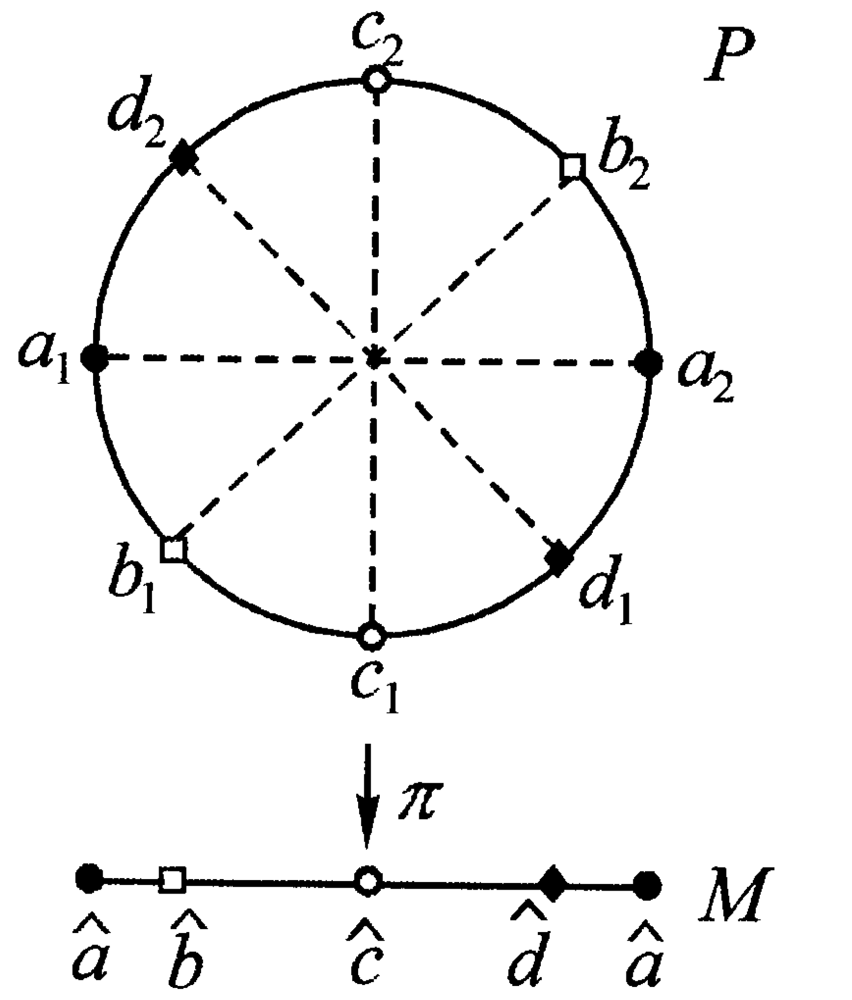
设主丛 $P(M,G)$ 存在整体截面 $\sigma : M \to P$, 则由定理I-1-3可知它对应于一个整体平凡 $T_M : \pi^{-1}[M] \to M \times G$, 而这意味着 $P(M,G)$ 是平凡主丛. 可见非平凡的主丛不存在整体截面.

下面两例涉及李群 $Z_2 \equiv \{e,h\}$, 它除恒等元 e 外只含一个元素, 群乘法定义为 $hh = e$, 可看作0维李群.

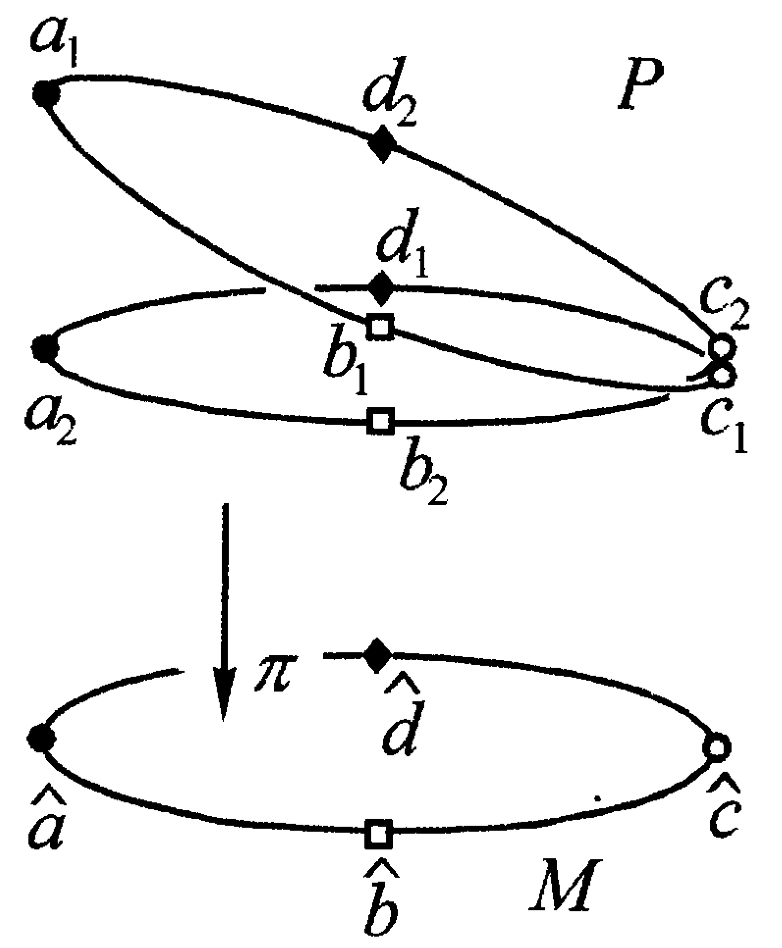
例2 设 $M = S^1, G = Z_2$, 则可按例1的三步构造一个主丛, 其丛流形为 $P = S^1 \times Z_2$. 读者熟知 $S^1 \times \mathbb{R}$ 是2维柱面, 仿此不难理解 $S^1 \times Z_2$ 是两个互不连通的圆周之并(图I-5). 这是个平凡主丛, 但略加修改就变成非平凡主丛(见下例).



图I-5 平凡主丛一例



图I-6 把 Z_2 在 P 的每条轨道(只含两点)看成一个元素便得底流形 M



图I-7 非平凡主丛一例

例3 设 $P = S^1, G = Z_2$. 以 θ 代表 $P = S^1$ 上的角度坐标(并以 p_θ 代表坐标为 θ 的点). 定义 Z_2 在 P 上的自由右作用为 $p_\theta e := p_\theta$, $p_\theta h := p_{\theta+\pi}$, 则 Z_2 的每一轨道由两个点组成, 它们是 S^1 的一条直径的两个端点(例如图I-6的 a_1, a_2). 把每一轨道看作一条纤维便可构造一个主丛, 其底流形 M 无非是把每条纤维(两个点)看作一个元素所得的集合(可以证明它有流形结构). 图I-6示出4条纤维 $\{a_1,a_2\}$, $\{b_1,b_2\}$, $\{c_1,c_2\}$ 和 $\{d_1,d_2\}$ 在底流形 M 中(下方的直线段)对应的4个点 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 和 $\hat{d}$, 而且直线段的两个端点(都记作 $\hat{a}$)要认同. 因此 M 有 S^1 的拓扑结构. 还可证明投影映射 $\pi : P \to M$ 是 C^∞ 的. 读者不难定义局域平凡

$$T_U: \pi^{-1}[U] \to U \times G$$

以使 $P(M,G)$ 成为主丛. 请特别注意现在 P 与 $M \times G$ 并不同胚. (后者是两个互不连通的圆周, 前者实质上是一个圆周.) 图 I-6 的缺点是底流形 M 的一点(如 $\hat{b}$)上方的纤维(由 b_1, b_2 两点组成)未被画成该点上方的一条竖直线, 克服的办法是改画成图 I-7.

例 4 设 M 是 n 维流形, 以 $\mathrm{T}_x M$ 代表 $x \in M$ 的切空间. 令

$$P \equiv \{(x, e_\mu) \mid x \in M,\ \{e_\mu\} \text{ 是 } \mathrm{T}_x M \text{ 的一个基底}\}.$$

[其中 (x, e_μ) 是 $(x, \{e_\mu\})$ 的简写.] 首先证明 P 可以被自然地定义为 $n + n^2$ 维流形. 设 (O, ψ) 是 M 的一个坐标系, 坐标为 $\{x^\mu\}$, 则每个 e_μ (作为点 $x \in M$ 的矢量)可用坐标基矢展开:

$$e_\mu = e^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

且系数矩阵满足 $\det(e^\nu{}_\mu) \neq 0$. 令

$$\tilde{O} \equiv \{(x, e_\mu) \in P \mid x \in O,\ e_\mu \text{ 是 } \mathrm{T}_x M \text{ 的任一基底}\},$$

定义同胚映射 $\tilde{\psi}: \tilde{O} \to \mathbb{R}^{n+n^2}$ 为 $\tilde{\psi}(x, e_\mu) := (x^\sigma, e^\nu{}_\mu)$, [第一槽有 n 个数(x 点的 n 个坐标), 第二槽有 n^2 个数, 故 $(x^\sigma, e^\nu{}_\mu) \in \mathbb{R}^{n+n^2}$.] 则可以证明 $\{(\tilde{O}, \tilde{\psi})\}$ 构成 P 的一个图册, 因而 P 成为 $n + n^2$ 维流形. 选 $\mathrm{GL}(n)$ 为结构群 G, 通过下列三步构造一个主丛:

(1)定义矩阵群 $\mathrm{GL}(n)$ 在 P 上的自由右作用 $R: P \times \mathrm{GL}(n) \to P$ 为

$$R_g(x, e_\mu) := (x,\ e_\nu g^\nu{}_\mu),\ \forall g \in \mathrm{GL}(n),\ g^\nu{}_\mu \text{ 代表 } g \text{ 的矩阵元.} \qquad \text{(I-1-13)}$$

$\mathrm{GL}(n)$ 的群元是可逆映射保证它能把基底 $\{e_\mu\}$ 变为基底 $\{e_\nu g^\nu{}_\mu\}$, (这是线性代数的结论, 建议读者作为习题自我证明.) 所以 $(x, e_\nu g^\nu{}_\mu) \in P$;

(2)定义投影映射 $\pi: P \to M$ 为 $\pi(x, e_\mu) := x,\ \forall (x, e_\mu) \in P$;

(3) $\forall x \in M$, 总有 M 的坐标系 $\{x^\mu\}$, 其坐标域 U 含 x. 定义局域平凡 $T_U: \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 为 $T_U(x, e_\mu) := (x, h)$, 其中 $h \equiv S_U(x, e_\mu) \in G$ 作用于 $\partial/\partial x^\nu|_x$ 得 e_μ, 即 $\partial/\partial x^\nu|_x\, h^\nu{}_\mu = e_\mu$.① 不难验证(习题) S_U 满足 $S_U(pg) = S_U(p)g\ \forall g \in G$, 还可证明 T_U 是微分同胚.

---

① 当 $e_\mu = \partial/\partial x^\nu|_x$ 时 $h = e$, 可见 T_U 对应的局域截面就是 U 上的坐标基矢场.

既然基底也称为标架，由以上三步构造的主丛 $P(M, \mathrm{GL}(n))$ 就称为**标架丛**(frame bundle)，记作 $\mathrm{F}(M)$ 或 $\mathrm{F}M$，有重要意义. 对某些底流形(如 $M=\mathbb{R}^n$)，$\mathrm{F}M$ 是平凡的，但对许多底流形(如 $M=\mathrm{S}^2$)，$\mathrm{F}M$ 为非平凡主丛.

例 5　若 M 上有度规场，对标架场便可谈及正交归一的问题. 设 M 的维数 $n=4$，上面有洛伦兹度规场，令 $P\equiv\{(x,\hat{e}_\mu)\,|\,x\in M,\ \hat{e}_\mu$ 代表 T_xM 的一个正交归一基底$\}$，并选矩阵群 $\mathrm{O}(1,3)$ 为结构群(其群元可把一个正交归一标架变为另一正交归一标架)，所得的主丛称为**正交归一标架丛**(orthonormal frame bundle).

I.1.2　主丛上的基本矢量场

主丛的定义保证丛流形 P 的每点 p 的切空间 T_pP 存在一个天生的子空间，记作 V_p，定义为

$$\mathrm{V}_p := \{X\in\mathrm{T}_pP\,|\,\pi_*(X)=0\}.$$

由推前映射 π_* 的线性性可知 V_p 确是 T_pP 的子空间. 设 $X\in\mathrm{T}_pP$ 切于 p 点所在的纤维 $\pi^{-1}[\pi(p)]$，即切于一条过 p 点并躺在 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 上的曲线，因 π 把整条纤维映为一点 $\pi(p)$，显然有 $\pi_*(X)=0$. 反之也可以证明，若 $\pi_*(X)=0$，则 X 切于纤维 $\pi^{-1}[\pi(p)]$. 可见 $\mathrm{V}_p=\mathrm{T}_p\pi^{-1}[\pi(p)]$. 由于示意图习惯于把投影映射 π 画成竖直向下，所以把满足 $\pi_*(X)=0$ 的 X 称为**竖直矢量**，把 V_p 称为**竖直子空间**(vertical subspace).

定理 I-1-4　设 $P(M,G)$ 是主丛，V_p 是点 $p\in P$ 的切空间 T_pP 的竖直子空间，$\mathscr{G}$ 是 G 的李代数，则 V_p 与 $\mathscr{G}$(作为两个矢量空间)之间有自然的同构映射.

证明　右作用 $R: P\times G\to P$ 对每一点 $p\in P$ 诱导出一个微分同胚 R_p：$G\to\pi^{-1}[\pi(p)]$，而且 $R_p(e)=p$，所以 R_p 在恒等元 $e\in G$ 的推前映射为 R_{p*}：$\mathrm{T}_eG\to\mathrm{T}_p\pi^{-1}[\pi(p)]$. 又因 T_eG 可看作 G 的李代数 $\mathscr{G}$，而 $\mathrm{T}_p\pi^{-1}[\pi(p)]=\mathrm{V}_p$，上式可改写为 R_{p*}：$\mathscr{G}\to\mathrm{V}_p$. 于是由上册第 4 章习题 4 便知 R_{p*} 是同构映射. □

定义 7　给定 $A\in\mathscr{G}$ 后，每点 $p\in P$ 按下式获得一个竖直矢量 A^*_p：

$$A^*_p := R_{p*}A,\quad \forall p\in P, \tag{I-1-14}$$

因而每一 $A\in\mathscr{G}$ 在 P 上生出一个竖直矢量场 A^*，称为由 $A\in\mathscr{G}$ 诱导的**基本矢量场**(fundamental vector field).

定理 I-1-5　设 T_U 是局域平凡，$x\in U$，则微分同胚 S_U：$\pi^{-1}[x]\to G$ 的推前映射 S_{U*} 把 $\pi^{-1}[x]$ 上的基本矢量场 A^* 映为 G 上由 $A\in\mathscr{G}$ 生成的左不变矢量场 $\bar{A}$，即

$S_{U*}A^* = \bar{A}$.

证 明　$\forall p \in \pi^{-1}[x]$，令 $g \equiv S_U(p) \in G$，只须证明推前映射 $S_{U*}: T_p\pi^{-1}[x] \to T_eG$ 把 A_p^* 变为 $\bar{A}_g$，即 $S_{U*}A_p^* = \bar{A}_g$.

设 $L_g: G \to G$ 是由 $g \in G$ 生成的左平移，则易证(习题)

$$R_{pg} = R_p \circ L_g, \quad \forall p \in P. \tag{I-1-15}$$

以 $\breve{p}_U$ 代表 S_U 在 $\pi^{-1}[x]$ 的“特殊点”，即 $S_U(\breve{p}_U) = e$，则由 $g \equiv S_U(p)$ 得

$$p = S_U^{-1}(g) = R_{\breve{p}_U}(g) = \breve{p}_U g,$$

故

$$S_{U*}A_p^* = S_{U*}R_{p*}A = S_{U*}R_{\breve{p}_U g*}A = S_{U*}(R_{\breve{p}_U} \circ L_g)_*A = (S_U \circ R_{\breve{p}_U})_* L_{g*}A = \bar{A}_g, \tag{I-1-16}$$

其中第三步用到式(I-1-15)，第五步用到式(I-1-4)及式(G-2-2).　□

矢量 $A \in T_eG$ 决定 G 的一个单参子群 $\exp(tA)$. 对每一 t 值，$\exp(tA)$ 是 G 的一个群元，它对 $p \in P$ 右作用的结果是 p 所在纤维的一点 $p\exp(tA)$. 当 t 活动时 $p\exp(tA)$ 就是纤维上的一条曲线，其在 p 点的切矢正是 A_p^*，即

$$A_p^* = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [p\exp(tA)], \tag{I-1-17}$$

这是因为

$$A_p^* = R_{p*}A = R_{p*}\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA)\right] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [R_p \exp(tA)] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [p\exp(tA)].$$

[其中第二步是因为 $\exp(tA)$ 是由 $A \in T_eG$ 决定的单参子群，第三步用到“曲线像的切矢等于切矢的像”.] 进一步还有如下定理.

定理 I-1-6　设 $P(M,G)$ 是主丛，$A \in T_eG$，$t \in \mathbb{R}$，定义 $\phi_t: P \to P$ 为

$$\phi_t(p) := p\exp(tA), \qquad \forall p \in P, \tag{I-1-18}$$

则 $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 是由矢量场 A^* 产生的单参微分同胚群.

证明　因为 $\forall p \in P$ 有 $\phi_t(p) = p\exp(tA) = R_{\exp(tA)}(p)$，所以右作用(定义 1′)的条件(a)保证 $\phi_t: P \to P$ 是微分同胚. 由 $\phi_t(p) = p\exp(tA)$ 易证 $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$，加上右作用 R 的 C^∞ 性，便知 $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 是单参微分同胚群. 为证明它由 A^* 产生，只须补证(习题) $p\exp(tA)$ 是 A^* 的积分曲线. 提示：利用式(I-1-17).　□

定理 I-1-7　竖直矢量场 A^* 服从如下公式：

$$R_{g*}A_p^* = (\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A)_{pg}^*, \quad \forall p\in P, g\in G, A\in\mathscr{G}, \tag{I-1-19}$$

其中$\mathscr{Ad}_{g^{-1}}$是由群元g^{-1}定义的伴随同构$I_{g^{-1}}$所诱导的从$\mathscr{G}$到$\mathscr{G}$的推前映射, 详见中册§G.8定义1后第一自然段.

证明

$$R_{g*}A_p^* = R_{g*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} p(\exp tA) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_g[p(\exp tA)] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} p(\exp tA)g$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} pgg^{-1}(\exp tA)g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_{pg}[g^{-1}(\exp tA)g] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_{pg}[I_{g^{-1}}(\exp tA)]$$

$$= R_{pg*}[I_{g^{-1}*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\exp tA)] = R_{pg*}(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A) = (\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A)_{pg}^*,$$

其中第一步用到式(I-1-17), 第二、七步用到“曲线切矢的像等于曲线像的切矢”, 第六步用到伴随同构$I_{g^{-1}}$的定义(见中册§G.1), 第八步用到$\mathscr{Ad}_{g^{-1}}$的定义(见§G.8定义1后第一自然段), 末步用到$\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\in\mathscr{G}$及式(I-1-14). □

定理 I-1-8　设$[A,B]\in\mathscr{G}$是$A\in\mathscr{G}$与$B\in\mathscr{G}$的李括号, $[A^*,B^*]$是矢量场A^*和B^*的对易子, 则P上有矢量场等式

$$[A^*,B^*] = [A,B]^*. \tag{I-1-20}$$

证明　借助于右作用$R: P\times G\to P$可定义李变换群(G对P的左作用)$\sigma: G\times P\to P$如下: $\forall g\in G, p\in P$定义$\sigma(g,p) := R_{g^{-1}}(p)$. 这样便有

$$\sigma_p(g) = R_{g^{-1}}(p) = R_p(g^{-1}).$$

由§G.7可知存在映射$\chi: \mathscr{G}\to\mathscr{K}$(含义见该节), 而且$\forall A\in\mathscr{G}$有

$$\bar{\xi}_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\sigma_p(\exp tA) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_p(\exp(-tA)) = R_{p*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\exp(-tA)) = R_{p*}(-A) = -A_p^*,$$

故$\chi(A) = -A^*$, 因而§G.7的李代数同构$\psi: \mathscr{G}\to\mathscr{K}$满足$\psi(A) = A^*$. 于是

$$[A^*,B^*] = [\psi(A),\psi(B)] = \psi([A,B]) = [A,B]^*. \qquad \square$$

§I.2　主丛上的联络

既然T_pP有竖直子空间, 自然要问它是否也有水平子空间. 答案是: 如果讨论的是无附加结构的主丛, 则“$X\in\mathrm{T}_pP$是否水平”的问题并无意义. 然而, 如果在丛

流形 P 上定义一个称为联络的附加结构，就可谈及 $X \in \mathrm{T}_p P$ 是否水平的问题. 读者不免要问：从流形上的联络与第3章的联络(导数算符)有什么关系?本节最后将回答这个问题(定理 I-2-8).

I.2.1 主丛联络的三个等价定义

在介绍联络定义前先补充一点代数知识. 矢量空间 V 称为其子空间 V_1 和 V_2 的**直和**(direct sum), 并记作 $V = V_1 \oplus V_2$, 若 $\forall v \in V$ 有唯一的 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$ 使 $v = v_1 + v_2$. 不难证明① $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$; ② $V_1 \cap V_2 = \{0\} \subset V$.

定义1 主丛 $P(M,G)$ 上的一个**联络**(connection)是对每点 $p \in P$ 指定一个**水平子空间**(horizontal subspace) $\mathrm{H}_p \subset \mathrm{T}_p P$, 满足

(a) $\mathrm{T}_p P = \mathrm{V}_p \oplus \mathrm{H}_p$, $\forall p \in P$,

(b) $R_{g*}[\mathrm{H}_p] = \mathrm{H}_{pg}$, $\forall p \in P,\ g \in G$,

(c) H_p 光滑地依赖于 p .

注1 因 $R_g(p) = pg$, 故有 R_{g*} : $\mathrm{T}_p P \to \mathrm{T}_{pg} P$. 条件(b)要求 $\mathrm{T}_p P$ 的水平子空间 H_p 在 R_{g*} 作用下的像等于 $\mathrm{T}_{pg} P$ 的水平子空间 H_{pg} . 条件(c)的准确含义是：每一 $p \in P$ 有邻域 N , 其上存在 n 个光滑矢量场($n = \dim M$), 它们在任一 $q \in N$ 的值可充当 H_q 的基底. 用附录F的语言来说, 对每点 $p \in P$ 的水平子空间 H_p 的这种指定就是给出了 P 上的一个 C^∞ 的 n 维分布.

注2 π : $P \to M$ 在点 $p \in P$ 的推前映射为 π_* : $\mathrm{T}_p P \to \mathrm{T}_x M$, 其中 $x \equiv \pi(p)$. 把 π_* 的定义域限制在子空间 $\mathrm{H}_p \subset \mathrm{T}_p P$ 得 π_* : $\mathrm{H}_p \to \mathrm{T}_x M$. 我们来证明这是个同构映射. 首先, 下式表明 H_p 与 $\mathrm{T}_x M$ 维数相同:

$$\dim \mathrm{H}_p = \dim \mathrm{T}_p P - \dim \mathrm{V}_p = \dim P - \dim \mathscr{G} = \dim(M \times G) - \dim G = \dim M = \dim \mathrm{T}_x M .$$

[其中第一步用到 $\mathrm{T}_p P = \mathrm{V}_p \oplus \mathrm{H}_p$, 第二步用到 V_p 与 $\mathscr{G}$ 同构(定理 I-1-4).] 于是, 考虑到 π_* 的线性性, 为证明 π_* : $\mathrm{H}_p \to \mathrm{T}_x M$ 是同构只须证明它是一一映射. 设存在 $X, X' \in \mathrm{H}_p$ 使 $\pi_* X = \pi_* X'$, 则 $\pi_*(X - X') = 0$, 可见 $X - X' \in \mathrm{V}_p$. 所以

$$X - X' \in \mathrm{V}_p \cap \mathrm{H}_p = \{0\} ,$$

因而 $X = X'$, 一一性由此得证.

主丛的联络还有两个重要的等价定义. (三个定义各有用处, 都很常用.) 在介绍它们之前, 请读者复习中册§C.1关于 " $\mathscr{V}$ 值 k 形式场" 的概念.

定义2 主丛 $P(M,G)$ 上的一个**联络**是 P 上的一个 C^∞ 的 $\mathscr{G}$ 值1形式场 $\tilde{\omega}$, 满足

(a) $\tilde{\omega}_p(A_p^*)=A, \quad \forall A\in\mathscr{G}, p\in P,$ (I-2-1)

(b) $\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X), \quad \forall p\in P, g\in G, X\in \mathrm{T}_pP.$ (I-2-2)

注3 条件(b)可等价地表述为(后面要用, 证明留作习题)

(b′) $\forall x\in M, \exists\, p\in\pi^{-1}[x]$使

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X), \quad \forall\, g\in G,\ X\in \mathrm{T}_pP. \tag{I-2-2′}$$

注4 $\mathscr{G}$ 的每一元素 A 对应于 p 点的一个竖直矢量 A_p^*, 条件(a)要求 $\tilde{\omega}_p$ (作为 p 点的一个 $\mathscr{G}$ 值1形式)作用于 A_p^* 的结果恰为 A.

注5 设 $X\in\mathrm{T}_pP$, 则 $\tilde{\omega}_p(X)\in\mathscr{G}$. 另一方面, $R_g(p)=pg$ 导致 R_{g*} 是从 T_pP 到 $\mathrm{T}_{pg}P$ 的映射, 故 $R_{g*}X\in\mathrm{T}_{pg}P$, 因而 $\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)\in\mathscr{G}$. 条件(b)规定了 $\mathscr{G}$ 的这两个元素的关系, 其中 $\mathscr{Ad}_{g^{-1}}$ 是由群元 g^{-1} 定义的伴随同构 $I_{g^{-1}}$ 诱导的从 $\mathscr{G}$ 到 $\mathscr{G}$ 的推前映射. 此处出现一个问题: 如果取条件(b)中的 $X=A_p^*$, 则式(I-2-2)应为

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}A_p^*)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(A_p^*). \tag{I-2-2″}$$

根据条件(a), 上式右边等于 $\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A$. 假若上式左边竟然不等于 $\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A$, 就意味着条件(a)和(b)相矛盾. 幸好这一问题不存在, 因为由式(I-1-19)易见式(I-2-2″)左边也等于 $\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A$.

定理 I-2-1 定义1与定义2等价.

证明 (A)设 $\tilde{\omega}$ 是定义2的联络(P 上的 $\mathscr{G}$ 值1形式场), 就可给每一 $p\in P$ 的切空间 T_pP 定义如下的线性子空间:

$$\mathrm{H}_p:=\{X\in\mathrm{T}_pP\,|\,\tilde{\omega}_p(X)=0\}. \tag{I-2-3}$$

下面验证它是水平子空间, 即满足定义1对水平子空间的全部要求.

(a) $\forall X\in\mathrm{T}_pP$, 令 $A\equiv\tilde{\omega}_p(X)\in\mathscr{G}$, $X_1\equiv A_p^*\in\mathrm{V}_p$, $X_2\equiv X-A_p^*$, 则

$$\tilde{\omega}_p(X_2)=\tilde{\omega}_p(X)-\tilde{\omega}_p(A_p^*)=A-A=0,$$

[第二步用到定义2条件(a).] 故 $X_2\in\mathrm{H}_p$. 可见 $\exists X_1\in\mathrm{V}_p, X_2\in\mathrm{H}_p$ 使 $X=X_1+X_2$. 分解唯一性的证明留作习题.

(b)设 $X\in\mathrm{H}_p$, 则由定义2条件(b)及式(I-2-3)可知 $\forall g\in G$ 有

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}(0)=0\in\mathscr{G},$$

再次利用式(I-2-3)便知上式给出 $R_{g*}X\in\mathrm{H}_{pg}$, 故 $R_{g*}[\mathrm{H}_p]\subset\mathrm{H}_{pg}$. 同理还可证明 $\forall Y\in\mathrm{H}_{pg}$ 有 $R_{g^{-1}*}Y\in\mathrm{H}_p$, 因而 $R_{g*}(R_{g^{-1}*}Y)\in R_{g*}[\mathrm{H}_p]$. 但

$$R_{g*}(R_{g^{-1}*}Y)=(R_g\circ R_{g^{-1}})_*Y=Y\ ,$$

可见$\mathrm{H}_{pg}\subset R_{g*}[\mathrm{H}_p]$. 于是$R_{g*}[\mathrm{H}_p]=\mathrm{H}_{pg}$.

(c)H_p光滑地依赖于p的证明从略.

(B)设$p\mapsto \mathrm{H}_p$是定义1的联络，欲证它给出一个定义2的联络. 为此，先定义P上的一个$\mathscr{G}$值1形式场$\tilde{\omega}$，再证明它满足定义2的条件. $\mathrm{T}_pP=\mathrm{V}_p\oplus\mathrm{H}_p\ \forall p\in P$保证$\forall X\in\mathrm{T}_pP$存在唯一的$X_1\in\mathrm{V}_p$，$X_2\in\mathrm{H}_p$使$X=X_1+X_2$. 由同构$R_{p*}$：$\mathscr{G}\to\mathrm{V}_p$(见定理I-1-4)又知有唯一的$A\in\mathscr{G}$使$X_1=A_p^*$，故$X=A_p^*+X_2$，$X_2\in\mathrm{H}_p$，因而可用下式在$P$上定义$\mathscr{G}$值1形式场$\tilde{\omega}$：

$$\tilde{\omega}(X)=\tilde{\omega}(A_p^*+X_2):=A,\quad \forall p\in P,\ X\in\mathrm{T}_pP. \qquad (\text{I-2-4})$$

下面验证这$\tilde{\omega}$满足定义2的条件. 定义1条件(c)保证了$\tilde{\omega}$的C^∞性，所以只须验证$\tilde{\omega}$满足定义2的条件(a)和(b).

(a)$\forall A\in\mathscr{G},\ p\in P$，由式(I-2-4)得$\tilde{\omega}_p(A_p^*)=\tilde{\omega}_p(A_p^*+0)=A$. 故$\tilde{\omega}$满足式(I-2-1).

(b)任一$X\in\mathrm{T}_pP$可表为$X=X_1+X_2$，$X_1\in\mathrm{V}_p$，$X_2\in\mathrm{H}_p$，为证X满足式(I-2-2)只须分别证X_1和X_2满足该式(因该式有线性性). 由定义1条件(b)知$R_{g*}X_2\in\mathrm{H}_{pg}$，即$X_2$和$R_{g*}X_2$的竖直分量都为零，故由(I-2-4)得$\tilde{\omega}_p(X_2)=0$，$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_2)=0$，前者又给出$\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\omega_p(X_2)=0$，故$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_2)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X_2)$. 再证$X_1$也满足式(I-2-2). $X_1\in\mathrm{V}_p$保证存在唯一的$A\in\mathscr{G}$使$X_1=A_p^*$，故

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_1)=\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}A_p^*)=\tilde{\omega}_{pg}[(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A)_{pg}^*]=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}A=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(A_p^*)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X_1)\,,$$

其中首末两步都用到$X_1=A_p^*$，第二步用到式(I-1-19)，第三、四步都用到定义2条件(a). □

设$\tilde{\omega}$是P上的联络，σ_U：$U\to P$是局域截面，则$\omega_U\equiv\sigma_U{}^*\tilde{\omega}$便是$U$上的$\mathscr{G}$值1形式场. 这一想法导致联络的第三个定义：

定义3　主丛$P(M,G)$的一个**联络**是对每个局域平凡T_U：$\pi^{-1}[U]\to U\times G$指定U上的一个C^∞的$\mathscr{G}$值1形式场ω_U(也称为$U\subset M$上的一个联络). 如果T_V：$\pi^{-1}[V]\to V\times G$是另一局域平凡，$U\cap V\neq\varnothing$，从T_U到T_V的转换函数为g_{UV}，则还要求

$$\omega_V(Y)=\mathscr{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}\omega_U(Y)+L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y),\quad \forall x\in U\cap V,\ Y\in\mathrm{T}_xM\,, \qquad (\text{I-2-5})$$

其中$L^{-1}_{g_{UV}(x)}$是由$g_{UV}(x)\in G$生成的左平移$L_{g_{UV}(x)}$的逆映射，$L^{-1}_{g_{UV}(x)*}$是$(L^{-1}_{g_{UV}(x)})_*$的简写.

注 6 ① g_{UV} 是从 $U\cap V$ 到 G 的映射，它把 $x\in U\cap V$ 映为 $g_{UV}(x)\in G$，故 g_{UV} 在 x 点的推前映射 g_{UV*} 是从 $\mathrm{T}_x M$ 到 $\mathrm{T}_{g_{UV}(x)}G$ 的映射. 又因 Y 是点 $x\in U\cap V$ 的矢量，故 $g_{UV*}(Y)$ 是点 $g_{UV}(x)\in G$ 的矢量(见图 I-8). ②不难验证(见附录 G 习题 6) $L^{-1}_{g_{UV}(x)}=L_{g_{UV}(x)^{-1}}$，故

$$L^{-1}_{g_{UV}(x)}(g_{UV}(x))=g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(x)=e\in G,$$

因而 $L^{-1}_{g_{UV}(x)}$ 在点 $g_{UV}(x)\in G$ 诱导的推前映射为 $L^{-1}_{g_{UV}(x)*}$: $\mathrm{T}_{g_{UV}(x)}G\to \mathrm{T}_e G$ (见图 I-8).

定理 I-2-2 定义 2 与定义 3 等价.

证明 (A)(定义 2 $\Rightarrow$ 定义 3) 设 $\tilde{\omega}$ 是定义 2 的联络，T_U : $\pi^{-1}[U]\to U\times G$ 是任一局域平凡，σ_U : $U\to P$ 是与 T_U 对应的局域截面，则 $\omega_U\equiv\sigma_U^*\tilde{\omega}$ 便是 U 上的一个 C^∞ 的 $\mathscr{G}$ 值 1 形式场($\sigma_U{}^*$ 是 σ_U 的拉回映射). 为证明它的确是定义 3 的联络，只须验证式(I-2-5)成立.

$$\text{式(I-2-5)左边}=\omega_V(Y)=(\sigma_V^*\,\tilde{\omega})(Y)=\tilde{\omega}(\sigma_{V*}Y)\,. \qquad \text{(I-2-6)}$$

设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个含 0 的区间(以下的 $I\subset\mathbb{R}$ 在不加声明时都如此)，η : $I\to U\cap V$ 是 C^∞ 曲线且 $\eta(0)=x$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\eta(t)=Y$ (见图 I-8)，则

$$\sigma_{V*}Y=\sigma_{V*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\eta(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\sigma_V(\eta(t))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\sigma_U(\eta(t))g_{UV}(\eta(t))]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\sigma_U(\eta(t))g_{UV}(x)]+\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\sigma_U(x)g_{UV}(\eta(t))], \qquad \text{(I-2-7)}$$

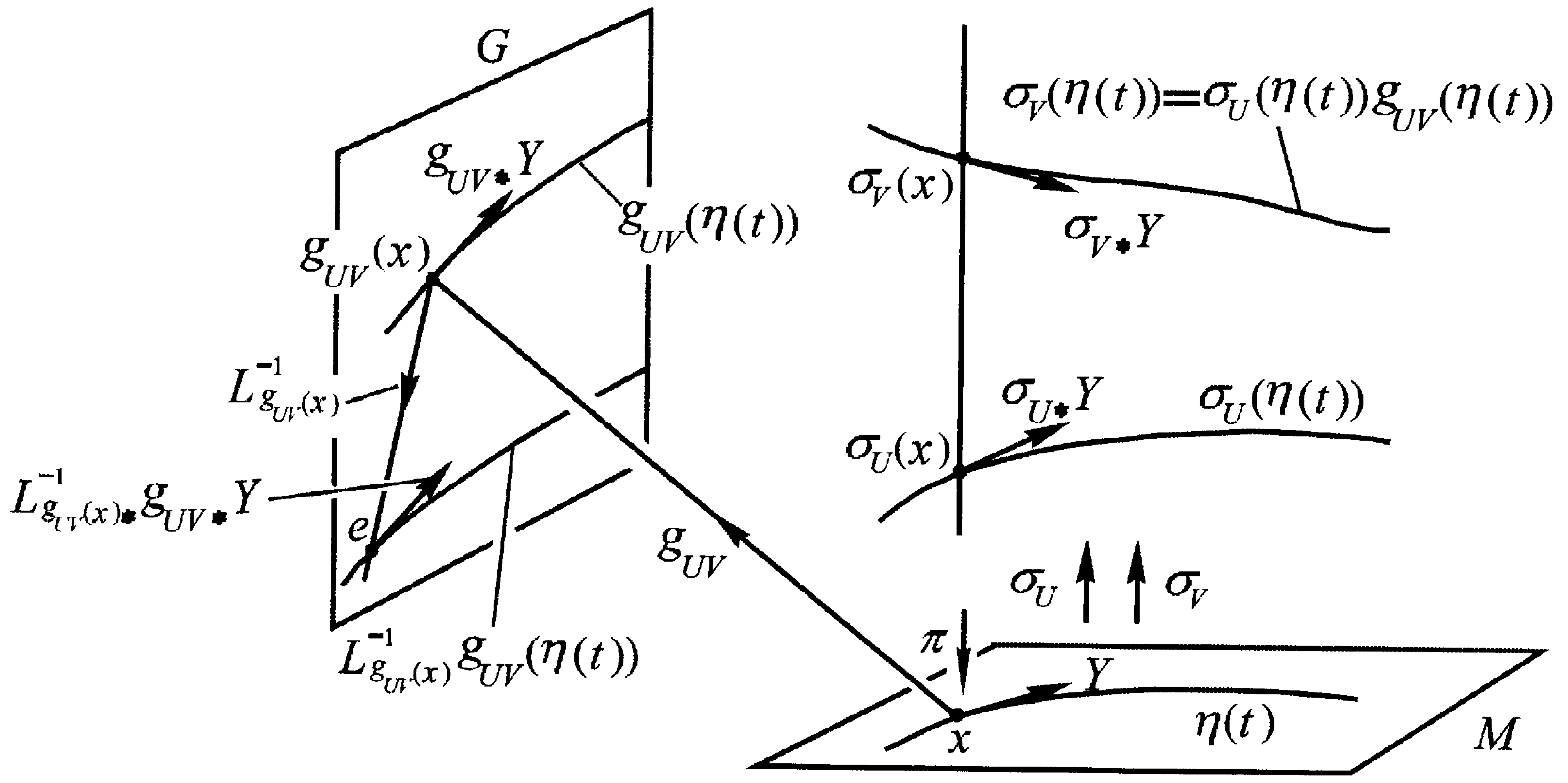


图 I-8 本图有助于弄清公式中每个符号代表哪个流形中的什么量

其中第二步用到“曲线切矢的像等于曲线像的切矢”，第三步用到式(I-1-12)，第四步用到的“莱布尼茨律”的证明见注 7 . 右边第一项方括号内是群元 $g_{UV}(x)$ 对 P 的

点$\sigma_U(\eta(t))$(若t固定)右作用的结果, 可改写为$R_{g_{UV}(x)}\sigma_U(\eta(t))$, 故

$$\text{式(I-2-7)右边第一项} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[R_{g_{UV}(x)}\sigma_U(\eta(t))]$$

$$= R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\eta(t) = R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}(Y)\ .$$

再次用式(I-1-12)可把式(I-2-7)右边第二项方括号内改为$\sigma_V(x)g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\eta(t))$, 其中$g_{UV}(x)^{-1}$是$g_{UV}(x)$的逆元, 它对群元$g_{UV}(\eta(t))$左乘相当于对后者作左平移, 故

$$g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\eta(t)) = L_{g_{UV}(x)^{-1}}g_{UV}(\eta(t)) = L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t))\ ,$$

于是

$$\text{式(I-2-7)右边第二项} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\sigma_V(x)L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t))] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[R_{\sigma_V(x)}L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t))]$$

$$= R_{\sigma_V(x)*}\left[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\eta(t)\right] = R_{\sigma_V(x)*}[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)] = [L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}\ ,$$

其中第二个等号后面的$R_{\sigma_V(x)}$是§I.1 注 5 的映射R_p的特例[$\sigma_V(x)$可看作某点$p\in P$], 最末一步用到$A^*_p \equiv R_{p*}A$. [由图 I-8 可知$L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)$是点$e\in G$的矢量, 可看作$A\in\mathscr{G}$.] 于是式(I-2-7)给出

$$\sigma_{V*}Y = R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}(Y) + [L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}\ . \qquad \text{(I-2-8)}$$

代入式(I-2-6)得

$$\text{式(I-2-5)左边} = \tilde{\omega}\,[R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}(Y)] + \tilde{\omega}\,[(L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}Y)^*_{\sigma_V(x)}]$$

$$= \mathscr{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}\tilde{\omega}\,(\sigma_{U*}Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)$$

$$= \mathscr{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}(\sigma^*_U\,\tilde{\omega})\,(Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) = \text{式(I-2-5)右边},$$

其中第二步用到定义 2 条件(b)(对第一项)和(a)(对第二项), 最末一步用到$\sigma^*_U\,\tilde{\omega} = \omega_U$.

(B) (定义3$\Rightarrow$定义2)设$T_U \mapsto \omega_U$是定义3的联络, $\sigma_U: U\to P$是与T_U对应的局域截面.

(B1) 在$\pi^{-1}[U]$上定义一个$\mathscr{G}$值1形式场$\tilde{\omega}^U$. [请注意$\tilde{\omega}^U$不同于ω_U, 后者是

定义 3 意义下的联络；前者实质上是定义 2 意义下的联络(只不过定义域不是全 P).] 为此应对 $\pi^{-1}[U]$ 的任一点定义一个 $\tilde{\omega}^U$ 值. 这些点可分两类：在截面(指 $\sigma_U[U]$)上的点(记作 p)和不在截面上的点(记作 p'). 对 p 的任一矢量 X，令 $Y \equiv \pi_* X$，$Z \equiv X - \sigma_{U*}Y$，则

$$\pi_* Z = \pi_* X - \pi_* \sigma_{U*} Y = Y - (\pi \circ \sigma_U)_* Y = Y - Y = 0,$$

所以 $Z \in V_p$ (见图 I-9)，因而有唯一的 $A \in \mathscr{G}$ 使 $Z = A_p^*$. 于是

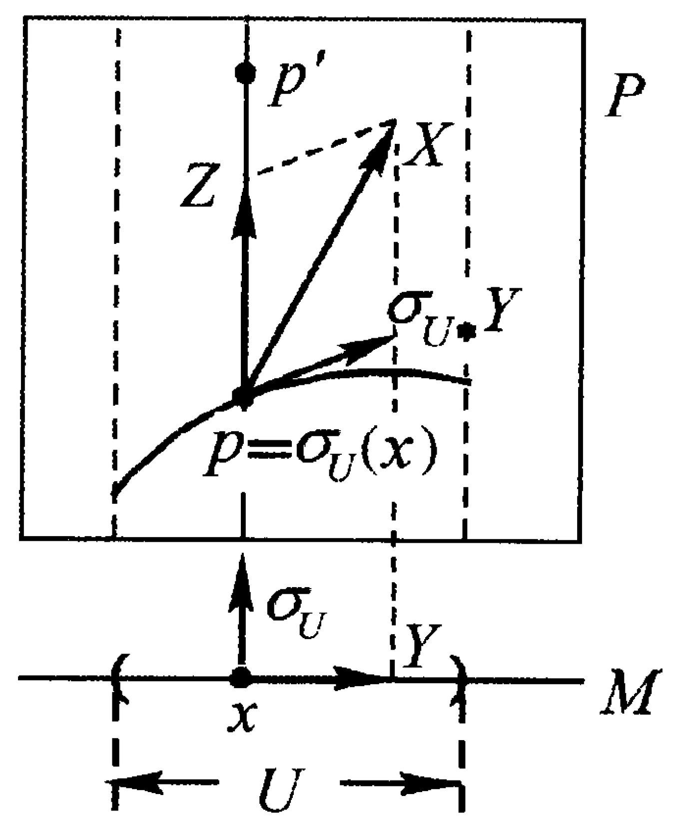


图 I-9　把 $X \in T_p P$ 分解为 $Z \in V_p$ 和切于截面的分量 $\sigma_{U*}Y$

$$X = A_p^* + \sigma_{U*} Y. \tag{I-2-9}$$

请注意在这种分解中分量 A_p^* 依赖于截面 σ_U. 现在就可用下式定义 p 点的 $\tilde{\omega}^U$：

$$\tilde{\omega}^U|_p\,(X) = \tilde{\omega}^U|_p\,(A_p^* + \sigma_{U*}Y) := A + \omega_U\,|_{\pi(p)}\,(Y). \tag{I-2-10}$$

对不在截面上的点 $p' \in \pi^{-1}[U]$，令 $p \equiv \sigma_U(\pi(p'))$，则有唯一的 $g \in G$ 使 $p' = pg$. 用下式定义 p' 点的 $\tilde{\omega}^U$：

$$\tilde{\omega}^U|_{p'}\,(X') := \mathscr{Ad}_{g^{-1}}\,\tilde{\omega}^U|_p\,(R_{g^{-1}*}X'), \quad \forall X' \in T_{p'}P. \tag{I-2-11}$$

(B2)把 $\pi^{-1}[U]$ 看作平凡主丛 $\pi^{-1}[U](U,G)$ 的丛流形，我们来证明上面定义的 $\tilde{\omega}^U$ 是 $\pi^{-1}[U]$ 上的满足定义 2 的联络. 为此应验证它是 C^∞ 的，并且满足定义 2 条件(a)和(b). C^∞ 性的证明颇长，从略. 下面验证条件(a)和(b).

(a)设 $A \in \mathscr{G}$. 对截面上的点 p，把 A_p^* 看作 X，有 $Y \equiv \pi_* X = 0$，故由式(I-2-10)得 $\tilde{\omega}^U|_p(A_p^*) = A + \omega_U\,|_{\pi(p)}(0) = A$. 对不是截面上的点 $p' = pg$，由式(I-2-11)得

$$\tilde{\omega}^U\,|_{p'}\,(A_{p'}^*) = \mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}^U\,|_p\,(R_{g^{-1}*}A_{p'}^*). \tag{I-2-12}$$

而由式(I-2-5)得 $R_{g^{-1}*}A_{p'}^* = (\mathscr{Ad}_g A)_p^*$，代入式(I-2-12)便有

$$\tilde{\omega}^U|_{p'}\,(A_{p'}^*) = \mathscr{Ad}_{g^{-1}}\,\tilde{\omega}^U|_p\,[(\mathscr{Ad}_g A)_p^*] = \mathscr{Ad}_{g^{-1}}(\mathscr{Ad}_g A) = A.$$

[其中第二步用到式(I-2-10).] 可见 $\tilde{\omega}^U$ 满足定义 2 条件(a).

(b)点 $p \equiv \sigma_U(x)$ 可充当定义 2 条件(b′)中所要的点，而式(I-2-11)表明对 p 而言式(I-2-2′)的确成立.

于是我们证明了按(B1)的做法由 ω_U 定义的 $\tilde{\omega}^U$ 的确是 $\pi^{-1}[U]$ 上的、满足定义 2 的联络. 既然如此，这 $\tilde{\omega}^U$ 又可按(A)的做法在 U 上诱导一个按定义 3 意义的联络，不难证明两者一样：

$$(\sigma_U^* \tilde{\omega}^U)(Y) = \tilde{\omega}^U(\sigma_{U*}Y) = \omega_U(Y), \quad \forall x \in U, Y \in T_x U, \tag{I-2-13}$$

[其中第二步用到式(I-2-10).] 所以$\sigma_U^* \tilde{\omega}^U = \omega_U$.

(B3)设$U \cap V \neq \varnothing$，则在$\pi^{-1}[U \cap V]$上既有由$T_U$定义的$\tilde{\omega}^U$又有由$T_V$定义的$\tilde{\omega}^V$，只有$\tilde{\omega}^V = \tilde{\omega}^U$在交域上成立才能在$P$上得到一个统一的、满足定义2的联络. 注意到式(I-2-11), 只须验证$\tilde{\omega}^V = \tilde{\omega}^U$在截面$\sigma_V[V]$上成立. 每一纤维

$$\pi^{-1}[x] \subset \pi^{-1}[U \cap V]$$

含有两个“特殊点” $p \equiv \sigma_U(x)$和$p' \equiv \sigma_V(x)$. 把式(I-1-11)中的$g_{UV}(x)$简记为g，便有

$$\sigma_V(x) = \sigma_U(x)g, \quad \text{即 } p' = pg. \tag{I-2-14}$$

为验证$\tilde{\omega}^V = \tilde{\omega}^U$在$pg$点成立只须证明$\omega^V(X') = \omega^U(X')$ $\forall X' \in T_{pg}P$. 把式(I-2-9)用于pg点得$X' = A^*_{pg} + \sigma_{V*}Y$，其中$Y \equiv \pi_* X'$，所以只须证明

$$\tilde{\omega}^V(A^*_{pg} + \sigma_{V*}Y) = \tilde{\omega}^U(A^*_{pg} + \sigma_{V*}Y),$$

注意到$\tilde{\omega}^V(A^*_{pg}) = A = \tilde{\omega}^U(A^*_{pg})$，便知只须证明

$$\tilde{\omega}^V_{pg}(\sigma_{V*}Y) = \tilde{\omega}^U_{pg}(\sigma_{V*}Y). \tag{I-2-15}$$

(为明确起见，$\tilde{\omega}^V$和$\tilde{\omega}^U$都已加下标pg.) 利用$\sigma_{V*}Y$的表达式(I-2-8)得

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^U_{pg}(\sigma_{V*}Y) &= \tilde{\omega}^U_{pg}(R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y) + \tilde{\omega}^U_{pg}[(L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}Y)^*_{pg}] \\
&= \mathscr{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}\tilde{\omega}^U_p(\sigma_{U*}Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) \\
&= \mathscr{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}\omega_U(Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) = \omega_V(Y) = \tilde{\omega}^V_{pg}(\sigma_{V*}Y),
\end{aligned}$$

其中第二步用到定义2条件(b)及(a), 第三、五步用到$\sigma_U^* \tilde{\omega}^U = \omega_U$[式(I-2-13)下行]及$\sigma_V^* \tilde{\omega}^V = \omega_V$，第四步用到定义3的条件[式(I-2-5)]. 于是式(I-2-15)得证. □

注7 现在补证式(I-2-7)最末一个等号. 令$p(t) \equiv \sigma_U(\eta(t))$，$g(t) \equiv g_{UV}(\eta(t))$，则曲线$C(t) \equiv \sigma_U(\eta(t))g_{UV}(\eta(t))$可简记为$C(t) = p(t)g(t)$. 由于$P$至少是局域平凡的, 而且我们只关心$C(t)$在点$C(0) = \sigma_V(x)$的切矢, 所以可用坐标语言. 设$U \subset M$上有坐标系$\{x^\mu(\mu = 1, \cdots, \dim M)\}$，$O \subset G$上有坐标系$\{y^\alpha(\alpha = 1, \cdots, \dim G)\}$，则

$$T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$$

便在$T_U{}^{-1}[U \times O]$上诱导出坐标系$\{x^\mu, y^\alpha\}$. 不妨认为$C(t)$位于坐标域$T_U{}^{-1}[U \times O]$中. 再考虑域内的如下两条曲线: $C_1(t) \equiv p(t)g(0)$，$C_2(t) = p(0)g(t)$，则$C(t)$，$C_1(t)$

和 $C_2(t)$ 的参数式可分别表为 $(x^\mu(t), y^\alpha(t))$, $(x^\mu(t), y^\alpha(0))$ 和 $(x^\mu(0), y^\alpha(t))$. 于是它们在点 $p(0)g(0)$ 的切矢分别为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} C(t) = \left.\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\sigma_V(x)} + \left.\frac{\mathrm{d}y^\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma_V(x)},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} C_1(t) = \left.\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\sigma_V(x)}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} C_2(t) = \left.\frac{\mathrm{d}y^\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right|_{\sigma_V(x)},$$

从而有 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, C(t) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, C_1(t) + \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, C_2(t)$. 这就是所要证明的.

定理 I-2-3 若结构群 G 是矩阵群, 则式(I-2-5)可表为如下简化形式:

$$\omega_V = g_{UV}^{-1}\omega_U g_{UV} + g_{UV}^{-1}\mathrm{d}g_{UV}, \tag{I-2-16}$$

注 8 对上式应有正确理解. G 是矩阵群意指它的元素是 $N\times N$ 矩阵, 故其李代数元也是 $N\times N$ 矩阵. 令 $\mathscr{V} \equiv \{N\times N\ 矩阵\}$, 则 $\mathscr{V}$ 为矢量空间, 而且 $G\subset\mathscr{V}$, $\mathscr{G}\subset\mathscr{V}$. 既然 ω_U 和 ω_V 都是 $U\cap V$ 上的 $\mathscr{G}$ 值 1 形式场, 便有 $\omega_U, \omega_V \in \Lambda_{U\cap V}(1,\mathscr{V})$ (见 §C.1 定义 1 至 3), 所以式(I-2-16)是 $\mathscr{V}$ 值 1 形式场等式. 另一方面, 因为

$$g_{UV}: U\cap V \to G\subset\mathscr{V},$$

所以 $g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$, 而式(I-2-16)右边的 g_{UV}^{-1} 则是 $U\cap V$ 上按如下要求定义的 $\mathscr{V}$ 值 0 形式场: $\forall x\in U\cap V$, $g_{UV}^{-1}(x)$ 是 $g_{UV}(x)$ 的逆矩阵. 于是式(I-2-16)右边第一项是 3 个 $\mathscr{V}$ 值形式场的连乘积(楔积), 暂记作 $\boldsymbol{\Phi}\equiv g_{UV}^{-1}\omega_U g_{UV}$, 它是 $U\cap V$ 上的 $\mathscr{V}$ 值 1 形式场, 在指定 $x\in U\cap V$ 及 $Y\in \mathrm{T}_x M$ 后给出一个 $N\times N$ 矩阵, 即

$$\boldsymbol{\Phi}_x(Y) \equiv g_{UV}^{-1}(x)\omega_U(Y)g_{UV}(x).$$

再看式(I-2-16)右边第二项(暂记作 $\boldsymbol{\Psi}$). $g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$ 导致 $\mathrm{d}g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(1,\mathscr{V})$, 故

$$\boldsymbol{\Psi} \equiv g_{UV}^{-1}\mathrm{d}g_{UV} \in \Lambda_{U\cap V}(1,\mathscr{V}),$$

准确含义是

$$\boldsymbol{\Psi}_x(Y) \equiv g_{UV}^{-1}(x)\,\mathrm{d}g_{UV}(Y), \quad \forall x\in U\cap V,\ Y\in \mathrm{T}_x M.$$

证明 把式(I-2-5)的 $g_{UV}(x)$ 及 $\omega_U(Y)$ 分别简记为 g 和 A, 则

$$g\in G\subset\mathscr{V}, \qquad A\in\mathscr{G}\subset\mathscr{V},$$

故由公式 $\mathscr{Ad}_g A = gAg^{-1}$ (见附录 G 习题 19)可知

$$式(I-2-5)右边第一项 = g_{UV}(x)^{-1}\omega_U(Y)g_{UV}(x). \tag{I-2-17}$$

另一方面, 令曲线 $\eta: I\to U\cap V$ 满足 $\eta(0)=x$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\eta(t)=Y$, 则

$$\text{式(I-2-5)右边第二项} = L_{g_{UV}(x)^{-1}*}g_{UV*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\eta(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[L_{g_{UV}(x)^{-1}}g_{UV}(\eta(t))]$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\eta(t))] = g_{UV}(x)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g_{UV}(\eta(t))\,. \tag{I-2-18}$$

以 $\{e_r\}$ 代表 $\mathscr{V}$ 的一组基矢，$g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$ 表明 g_{UV} 可用基矢展开：$g_{UV}=f^r e_r$，其中 $f^r\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathbb{R})$ (对复矩阵群则把 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{C}$)，即 f^r 是 $U\cap V$ 上的实(复)标量场. 于是式(I-2-18)右边的第二因子又可表为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g_{UV}(\eta(t)) = e_r\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^r(\eta(t))\,. \tag{I-2-19}$$

$\forall t\in I$，$\eta(t)$ 是 $U\cap V$ 的一点，$f^r(\eta(t))$ 是实(复)数[即实(复)标量场 f^r 在点 $\eta(t)$ 的值]，于是由曲线切矢的定义式(2-2-6′)得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^r(\eta(t)) = Y(f^r) = (\mathrm{d}f^r)(Y)\,, \tag{I-2-20}$$

其中末步用到函数 f 的外微分 $\mathrm{d}f$ 的定义式(2-3-7). 所以式(I-2-19)又可表为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g_{UV}(\eta(t)) = e_r(\mathrm{d}f^r)(Y) = (\mathrm{d}g_{UV})(Y)\,.$$

代入式(I-2-18)得

$$\text{式(I-2-5)右边第二项} = g_{UV}(x)^{-1}(\mathrm{d}g_{UV})(Y)\,,$$

故式(I-2-5)在 G 为矩阵群时可以表为

$$\omega_V(Y) = g_{UV}(x)^{-1}\omega_U(Y)g_{UV}(x) + g_{UV}(x)^{-1}\mathrm{d}g_{UV}(Y),\quad \forall x\in U\cap V,\ Y\in \mathrm{T}_x M\,, \tag{I-2-21}$$

式(I-2-16)于是得证. □

I.2.2 水平提升矢量场和水平提升曲线

设在主丛 P 上给定联络，则 $\forall x\in M$，$p\in\pi^{-1}[x]$，推前映射 π_* : $\mathrm{H}_p\to\mathrm{T}_x M$ 是同构映射(见注 2)，因此 $\forall Y\in\mathrm{T}_x M$ 有唯一的 $\pi_*{}^{-1}(Y)\in\mathrm{H}_p$，称为矢量 Y 在 p 点的**水平提升** (horizontal lift)**矢量**. 既然任一 $p\in\pi^{-1}[x]$ 都有 Y 的一个水平提升矢量，全纤维 $\pi^{-1}[x]$ 上便有 Y 的一个水平提升矢量场. 进一步，设 $\bar{Y}$ 是 M 上的 C^∞ 矢量场，则 P 上便有唯一的 C^∞ 矢量场 $\tilde{Y}$，满足

$$\tilde{Y}_p\in\mathrm{H}_p \quad 及 \quad \pi_*(\tilde{Y}_p) = \bar{Y}_{\pi(p)},\qquad \forall p\in P\,.$$

这个 $\tilde{Y}$ 称为矢量场 $\bar{Y}$ 的**水平提升矢量场**.

定理 I-2-4 设 $\tilde{Y}$ 是水平提升矢量场, 则 $\forall p \in P, g \in G$ 有

$$R_{g*}(\tilde{Y}_p) = \tilde{Y}_{pg}. \qquad \text{(I-2-22)}$$

证明 注意到 $R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} \in \mathrm{H}_{pg}$, 欲证 $R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} = 0$ 只须证明

$$R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} \in \mathrm{V}_{pg},$$

而这是显然的, 因为

$$\pi_*(R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg}) = (\pi \circ R_g)_*\tilde{Y}_p - \pi_*\tilde{Y}_{pg} = \pi_*\tilde{Y}_p - \pi_*\tilde{Y}_{pg} = \bar{Y}_{\pi(p)} - \bar{Y}_{\pi(p)} = 0. \qquad \square$$

注 9 因 $R_g: P \to P$ 是微分同胚, 故 R_{g*} 把 P 上的任一矢量场映为 P 上的矢量场. 上式表明 R_{g*} 把矢量场 $\tilde{Y}$ 映为自身, 即

$$R_{g*}\tilde{Y} = \tilde{Y}. \qquad \text{(I-2-22}')$$

定理 I-2-5 设 $A \in \mathscr{G}$, $\tilde{Y}$ 是 M 上矢量场 $\bar{Y}$ 的水平提升, 则 P 上矢量场 A^* 与 $\tilde{Y}$ 的对易子为零: $[A^*, \tilde{Y}] = 0$.

证明 由矢量场的李导数公式(4-2-6)及李导数定义式(4-2-1)得

$$[A^*, \tilde{Y}]_p = (\mathscr{L}_{A^*}\tilde{Y})_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\phi_{-t*}\tilde{Y})_p - \tilde{Y}_p], \qquad \text{(I-2-23)}$$

其中 $\{\phi_t: P \to P\}$ 是矢量场 A^* 产生的单参微分同胚群. 令 $g \equiv \exp(tA)$, 则由式(I-1-18) 知 $\forall p \in P$ 有 $\phi_t(p) = pg = R_g(p)$, 故 $\phi_t = R_g$. 而 $g \equiv \exp(tA)$ 又导致 $g^{-1} \equiv \exp(-tA)$, 所以 $\phi_{-t} = R_{g^{-1}}$, 于是 $(\phi_{-t*}\tilde{Y})_p = (R_{g^{-1}*}\tilde{Y})_p = \tilde{Y}_p$ [第二步用到式(I-2-22′)]. 代入式(I-2-23)便得 $[A^*, \tilde{Y}]_p = 0$. $\square$

设 I 是 $\mathbb{R}$ 的区间, $\tilde{\eta}: I \to P$ 称为曲线 $\eta: I \to M$ 的**水平提升曲线**, 若 $\tilde{\eta}(t)$ 每点的切矢都是水平矢量, 且 $\pi(\tilde{\eta}(t)) = \eta(t)\ \forall t \in I$.

定理 I-2-6 设 $\eta: [0,1] \to M$ 是曲线, $x \equiv \eta(0)$, 则 $\forall p \in \pi^{-1}[x] \subset P$, $\exists \eta(t)$ 的唯一水平提升曲线 $\tilde{\eta}: I \to P$, 满足 $\tilde{\eta}(0) = p$.

证明 先讨论较简单的情况, 即 $\eta(t)$ 不是自相交曲线且点点切矢都非零. 这时 $\eta(t)$ 可看作 M 中某非零矢量场 $\bar{Y}$ 的积分曲线, 其水平提升矢量场 $\tilde{Y}$ 过 p 的积分曲线便是所要的 $\tilde{\eta}(t)$. 然而, 当 $\eta(t)$ 是自相交曲线或(和)存在切矢为零的点时证明不再如此简单, 见 Spivak(1979)Vol. 2, P. 363-365. $\square$

定理 I-2-7 设 $P(M,G)$ 是主丛, $\tilde{\eta}: I \to P$ 是曲线 $\eta: I \to M$ 的水平提升, 则

$$\tilde{\eta}': I \to P \text{ 是曲线 } \eta \text{ 的水平提升} \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ 使 } \tilde{\eta}'(t) = \tilde{\eta}(t)g.$$

证明 习题. 提示:利用定理I-2-4及I-2-6. □

本书第3章早已讲过流形 M 上联络的概念——M 的一个联络就是一个导数算符 ∇. 现在又讲了主丛上的联络. 自然要问:这两种联络有什么关系?答案是:第3章的联络是一个特殊主丛[标架丛 $FM(M, GL(n))$]上的联络在底流形 M 上诱导的结果(可以是有挠联络). 准确说来有如下定理.

定理 I-2-8 标架丛 FM 的底流形 M 上的一个导数算符 ∇ 给出 FM 上的一个联络,反之亦然.

证明

(A) M 上的给定导数算符 ∇ 决定一个(曲线依赖的)平移法则. 设 $\eta: I \to M$ 是曲线, $x \equiv \eta(0)$. 在 T_xM 中指定一个标架 $\{e_\mu\}$, 便得 FM 的一点 $p = (x, e_\mu)$. 把 $\{e_\mu\}$ 沿 $\eta(t)$ 平移便得 $\eta(t)$ 上的一个标架场 $\{\bar{e}_\mu\}$. $\forall t \in I$, $(\eta(t), \bar{e}_\mu|_{\eta(t)})$ 是 FM 的一点, 当 t 活动时就成为 FM 上的一条曲线 $\tilde{\eta}(t)$, 满足 $\tilde{\eta}(0) = p$ 及 $\pi(\tilde{\eta}(t)) = \eta(t)$. 借此便可对每点 $p \in FM$ 的切空间 T_pFM 指定一个子集 H_p, 具体说, $\forall p = (x, e_\mu)$ 定义

$$H_p := \{X \in T_pFM \mid M \text{上有曲线} \eta(t) \text{满足} x = \eta(0), X = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, \tilde{\eta}(t),$$

$$\text{其中} \tilde{\eta}(t) \text{是由} \{e_\mu\} \text{沿} \eta(t) \text{平移在} FM \text{上诱导的曲线}\}. \tag{I-2-24}$$

为证明这样定义的 H_p 的确是 T_pFM 的水平子空间, 应先证 H_p 是 T_pFM 的子空间(证明见选读I-2-2), 再证 H_p 满足定义1对 H_p 的三项要求, 证明如下.

(a)欲证 $T_pFM = V_p \oplus H_p$. $\forall X \in T_pFM$, 令 $Y \equiv \pi_* X$, 则有曲线 $\eta: I \to M$ 使 $x = \eta(0)$, $Y = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, \eta(t)$. 令 $X_2 \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, \tilde{\eta}(t)$, 则 $X_2 \in H_p$. 再令 $X_1 \equiv X - X_2$, 则

$$\pi_* X_1 \equiv \pi_* X - \pi_* X_2 = Y - \pi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t)$$

$$= Y - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \pi(\tilde{\eta}(t)) = Y - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \eta(t) = Y - Y = 0,$$

故 $X_1 \in V_p$. 这就证明了任一 $X \in T_pFM$ 总可分解为水平和竖直分量. 分解唯一性的证明留做练习.

(b)欲证 $R_{g*}[H_p] = H_{pg}$ 只须证明 $R_{g*}[H_p] \subset H_{pg}$ [由此出发证明 $R_{g*}[H_p] \supset H_{pg}$ 的方法可参看定理I-2-1的证明(A)], 为此只须证明 $R_{g*}X \in H_{pg}$ $\forall X \in H_p$. 因为 $p = (x, e_\mu)$, 所以 $pg = (x, e_\nu g^\nu{}_\mu)$. 根据式(I-2-24), $X \in H_p$ 说明 M 上有曲线 $\eta(t)$ 满足 $x = \eta(0)$, $X = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, \tilde{\eta}(t)$, 其中 $\tilde{\eta}(t)$ 是 $\eta(t)$ 在 FM 上诱导的曲线. 就是说, 若以 $\{\bar{e}_\mu\}$ 代表把 x 点的标架 $\{e_\mu\}$ 沿 $\eta(t)$ 平移所得的标架场, 则 $\tilde{\eta}(t) = (\eta(t), \bar{e}_\mu|_{\eta(t)})$. 因

$g^\nu{}_\mu$ 与 t 无关, 从 $\bar{e}_\mu$ 满足平移方程(§3.2 定义 1 的 $T^b\nabla_b v^a=0$)可知 $\bar{e}_\nu g^\nu{}_\mu$ 满足平移方程, 故 $\{\bar{e}_\nu g^\nu{}_\mu\}$ 是把 x_0 的新标架 $\{e_\nu g^\nu{}_\mu\}$ 沿 $\eta(t)$ 平移而得的新标架场, 它在 FM 上诱导出曲线

$$\tilde{\eta}'(t)=(\eta(t),\ \bar{e}_\nu|_{\eta(t)}\, g^\nu{}_\mu)=R_g(\tilde{\eta}(t)),$$

于是

$$R_{g*}X=R_{g*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\tilde{\eta}(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}R_g\tilde{\eta}(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\tilde{\eta}'(t)\in \mathrm{H}_{pg}.$$

(c)因基底场 $\{\partial/\partial x^\mu-\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}y^\sigma{}_\tau\partial/\partial y^\nu{}_\tau\}$ (见选读I-2-2)是 n 个光滑的局域矢量场, 故 H_p 光滑地依赖于 p.

(B)现在证明逆命题, 即FM 上的一个联络 $\tilde{\omega}$ 在 M 上给出一个导数算符 ∇. 先对 M 上任一光滑矢量场 v 定义它沿任一点 $x_0\in M$ 的任一矢量 T^b 的协变导数 $T^b\nabla_b v^a$. 为简化公式, 去掉抽象指标而把 $T^b\nabla_b v^a$ 简记作 $\nabla_T v$. 我们借用一条曲线 $\eta: I\to M$, 要求它满足 $\eta(0)=x_0$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\eta(t)=T$. 设 $\tilde{\eta}$ 是 η 在FM 上的任一水平提升线, 则

$$\tilde{\eta}(t)=(\eta(t),e_\mu|_{\eta(t)}),\quad \forall t\in I.$$

故 $v|_{\eta(t)}$ 可用标架场展开为

$$v|_{\eta(t)}=e_\mu(t)v^\mu(t),\ \text{其中}\ e_\mu(t)\ \text{和}\ v^\mu(t)\ \text{分别是}\ e_\mu|_{\eta(t)}\ \text{和}\ v^\mu(\eta(t))\ \text{的简写}. \tag{I-2-25}$$

借此就可定义 $\nabla_T v$ 为

$$\nabla_T v:=e_\mu(0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}v^\mu(t). \tag{I-2-26}$$

此定义借助了两个人为选择的因素: ① $\eta(t)$ [满足 $\eta(0)=x_0$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\eta(t)=T$ 的 $\eta(t)$ 很多]; ② $\eta(t)$ 的水平提升线 $\tilde{\eta}(t)$ (也很多). 为保证式(I-2-26)的合法性, 必须证明 $\nabla_T v$ 不依赖于 $\eta(t)$ 及 $\tilde{\eta}(t)$ 的选择. 选定 $\eta(t)$ 后, 不难证明 $\nabla_T v$ 与 $\tilde{\eta}(t)$ 的选择无关. [留作习题. 提示: 利用定理I-2-7 和式(I-1-13).] $\nabla_T v$ 不依赖于 $\eta(t)$ 的证明则比较迂回, 我们将在下个定理证明后补证. 一旦做了补证, 利用 x_0 和 $T\in \mathrm{T}_{x_0}M$ 的任意性就定义了 ∇_b 对矢量场 v^a 的作用结果 $\nabla_b v^a$. 再把 ∇_b 对标量场 f 的作用定义为 $\nabla_b f:=(\mathrm{d}f)_b$, 并进一步规定 ∇_b 对张量积的作用满足 Leibnitz 律而且与缩并可交换, 便得到 M 上的一个(未必无挠的)导数算符. 不难验证, 若首先在 M 上给定这个 ∇_b 再按(A)的做法决定FM 上的联络, 则它必定是(B)开头时的联络 $\tilde{\omega}$.

鉴于目前尚未证明式(I-2-26)的 $\nabla_T v$ 的曲线无关性, 暂时还不能说 ∇ 是导数算

符, 所以将它暂时记作 $\breve{\nabla}$, 即把式(I-2-26)暂时写成

$$\breve{\nabla}_T v := e_\mu(0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} v^\mu(t)\,. \qquad \text{(I-2-26}')$$

定理 I-2-9　设在 FM 上给定联络 $\tilde{\omega}$, 在 $U\subset M$ 上给定截面 $\sigma: U\to \mathrm{F}M$, 令 $\omega\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$, 则

$$\breve{\nabla}_b (e_\mu)^a = \omega^\nu{}_{\mu b}(e_\nu)^a\,, \qquad \text{(I-2-27)}$$

其中 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 σ 在 U 上给出的标架场, $\breve{\nabla}_b$ 是定理 I-2-8 证明(B)中定义的“导数算符”, $\omega^\nu{}_{\mu b}$ 的意义见注 10.

注 10　截面 $\sigma: U\to\mathrm{F}M$ 给出 U 上的标架场 $\{e_\mu\}$, 与 $\omega\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$ 结合又给出 U 上的一组 $\mathscr{G}$ 值 0 形式场 $\omega_\tau\equiv\omega(e_\tau)$, $\tau=1,\cdots,n$. 于是 $\forall x\in U$ 有 $\omega_\tau(x)\in\mathscr{G}$, 将其矩阵元记作 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}$ (ν 为行 μ 为列), 再以 $\{(e^\mu)_b\}$ 代表 $\{(e_\mu)^b\}$ 的对偶标架场, 便有 $\omega^\nu{}_{\mu b}\equiv\omega^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_b$, 此即式(I-2-27)右边的 $\omega^\nu{}_{\mu b}$.

证明　$\forall x_0\in U$, $T\in \mathrm{T}_{x_0}M$, 令 $\eta: I\to U$ 为曲线, 满足

$$\eta(0)=x_0,\qquad \mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}\,\eta(t)=T\,.$$

再令 $V=U$, 另选截面 $\sigma': V\to\mathrm{F}M$ 使满足 $\sigma'[(\eta(t))]=\tilde{\eta}(t)$ [代表 $\eta(t)$ 的任一水平提升线], 即 $\tilde{\eta}=\sigma'\circ\eta$. 记 $\omega'\equiv\sigma'^*\tilde{\omega}$, 则

$$0=\tilde{\omega}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\eta}(t)\right]=\tilde{\omega}\left[\sigma'_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t)\right]=(\sigma'^*\tilde{\omega})\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t)\right]=\omega'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t)\right],\quad \forall t\in I\,,$$

特别地, 当 $t=0$ 时有 $\omega'(T)=0$. 把式(I-2-16)(即定理 I-2-3)用于现在得

$$\omega'=g^{-1}\omega g+g^{-1}\mathrm{d}g\,,\quad \text{其中 } g \text{ 是 } g_{UV} \text{ 的简写.} \qquad \text{(I-2-28)}$$

上式作用于 T 得

$$0=g(x_0)^{-1}\omega(T)g(x_0)+g(x_0)^{-1}\mathrm{d}g(T)\,. \qquad \text{(I-2-29)}$$

以 $g(x_0)$ 左乘上式后再以 $g(x_0)^{-1}$ 右乘得

$$[\mathrm{d}g(T)]g(x_0)^{-1}=-\,\omega(T)\in\mathscr{G}\,. \qquad \text{(I-2-30)}$$

另一方面, 把式(I-1-12)用于现在得

$$\sigma'(x)=\sigma(x)g(x)\,,\qquad \forall x\in U\,,$$

利用 $\sigma(x)=(x,e_\mu|_x)$, $\sigma'(x)=(x,e'_\mu|_x)$ 及式(I-1-13)又得

$$e'_\mu|_x=e_\nu|_x\,g^\nu{}_\mu(x)\,,\quad \text{其中 } g^\nu{}_\mu(x) \text{ 是 } g(x)\in G \text{ 的矩阵元.} \qquad \text{(I-2-31)}$$

记$h^{\mu}{}_{\sigma} \equiv (g^{-1})^{\mu}{}_{\sigma}$，即$g^{\nu}{}_{\mu}(x)h^{\mu}{}_{\sigma}(x) = \delta^{\nu}{}_{\sigma}$，以$h^{\mu}{}_{\sigma}(x)$乘式(I-2-31)得

$$e_{\nu}\,|_{x} = e'_{\mu}\,|_{x}\, h^{\mu}{}_{\nu}(x)\,. \tag{I-2-32}$$

将上式的x用于曲线$\eta(t)$上的点，并把$e_{\nu}\,|_{\eta(t)}$及$h^{\mu}{}_{\nu}(\eta(t))$分别简记为$e_{\nu}(t)$及$h^{\mu}{}_{\nu}(t)$，则上式给出

$$e_{\nu}(t) = e'_{\mu}(t)h^{\mu}{}_{\nu}(t)\,, \tag{I-2-32$'$}$$

故由式(I-2-26′)得

$$\breve{\nabla}_{T} e_{\nu} = e'_{\mu}(0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} h^{\mu}{}_{\nu}(t)\,. \tag{I-2-33}$$

上式右边的导数可借用$h^{\mu}{}_{\sigma}(t)g^{\sigma}{}_{\rho}(t) = \delta^{\mu}{}_{\rho}$计算：对此式求导得

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[h^{\mu}{}_{\sigma}(t)g^{\sigma}{}_{\rho}(t)] = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} h^{\mu}{}_{\sigma}(t)\right]g^{\sigma}{}_{\rho}(0) + h^{\mu}{}_{\sigma}(0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^{\sigma}{}_{\rho}(t)\,.$$

两边同乘$h^{\rho}{}_{\nu}(0)$得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} h^{\mu}{}_{\nu}(t) = -\,h^{\mu}{}_{\sigma}(0)\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^{\sigma}{}_{\rho}(t)\right]h^{\rho}{}_{\nu}(0)\,. \tag{I-2-34}$$

另一方面，由注8可知$g \equiv g_{UV} \in \Lambda_{U}(0,\mathscr{V})$，$\mathrm{d}g \in \Lambda_{U}(1,\mathscr{V})$，故

$$\mathrm{d}g(T) = T(g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) \in \mathscr{V}\,,$$

补上矩阵元指标则为

$$[\mathrm{d}g(T)]^{\sigma}{}_{\rho} = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)\right]^{\sigma}{}_{\rho} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^{\sigma}{}_{\rho}(t)\,,$$

所以式(I-2-34)右边后两个因子之积为

$$\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right| g^{\sigma}{}_{\rho}(t)\right]h^{\rho}{}_{\nu}(0) = [\mathrm{d}g(T)]^{\sigma}{}_{\rho}h^{\rho}{}_{\nu}(0) = [\mathrm{d}g(T)h(0)]^{\sigma}{}_{\nu}\,. \tag{I-2-35}$$

于是式(I-2-33)就可表为

$$\breve{\nabla}_{T} e_{\nu} = -\,e'_{\mu}(0)h^{\mu}{}_{\sigma}(0)\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^{\sigma}{}_{\rho}(t)\right]h^{\rho}{}_{\nu}(0) = -\,e_{\sigma}(0)[\mathrm{d}g(T)h(0)]^{\sigma}{}_{\nu} = e_{\sigma}(0)\omega^{\sigma}{}_{\nu}(T)\,, \tag{I-2-36}$$

[其中第一步用到式(I-2-34)，第二步用到式(I-2-32′)及(I-2-35)，第三步用到式

(I-2-30).] 上式又可用抽象指标表为

$$T^b\breve{\nabla}_b(e_\nu)^a = (e_\sigma)^a|_{x_0}\ \omega^\sigma{}_{\nu b}T^b, \tag{I-2-37}$$

再由 x_0 及 T^b 的任意性便得待证等式(I-2-27). □

注 11　式(I-2-27)表明 $\breve{\nabla}_b(e_\mu)^a$ 与曲线 $\eta(t)$ 无关, 所以 $\breve{\nabla}_b$ 对任一矢量场 v^a 的作用 $\breve{\nabla}_b v^a$ (因而 $T^b\breve{\nabla}_b v^a$, 即 $\breve{\nabla}_T v^a$)也与曲线无关. 于是定理 I-2-8 证明(B)中遗留的待证问题自然得到补证, 可见 $\breve{\nabla}_b$ 的确就是导数算符 ∇_b (只是未必无挠). 从此就可给 $\breve{\nabla}_b$ "摘掉帽子", 并把定理 I-2-9 的结论改写为

$$\nabla_b(e_\mu)^a = \omega^\nu{}_{\mu b}(e_\nu)^a. \tag{I-2-27$'$}$$

[选读 I-2-1]

让我们从标架丛的观点"居高临下"地重新审视§5.7 开头的一段(那时根本不知道有纤维丛). 该段首先给定:①流形 M 上的一个导数算符 ∇_a ; ②开集 $U\subset M$ 上的一个基底场 $\{(e_\mu)^a\}$. 现在, 这两点用丛语言可以表述如下:①在标架丛 FM 上指定了一个联络 $\tilde{\omega}$ (因而 M 上有 ∇_a); ②在 U 上选定了一个截面 $\sigma: U\to$ FM (因而 U 上有标架场 $\{(e_\mu)^a\}$). §5.7 该段接着又用 $(e_\tau)^b\nabla_b(e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau}(e_\sigma)^a$ [式(5-7-1)]引入一组联络系数 $\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$, 再用它定义一组联络 1 形式场 $\omega_\mu{}^\nu{}_a := -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$ [式(5-7-4)]. 与此对应, 在丛语言中 $\tilde{\omega}$ 同 σ 结合给出联络 1 形式场 $\omega\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$, 与§5.7 的那组联络 1 形式场 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$ 的区别在于现在虽然只有一个 ω, 但却是个 $\mathscr{G}$ 值 1 形式场, 它在任一 $x_0\in U$ 的值作用于标架 $\{e_\mu|_{x_0}\}$ 的第 τ 基矢 $e_\tau|_{x_0}$ 给出 $\mathscr{G}$ 的一个元素 $\omega_\tau(x_0)$. 因 FM 的结构群 $G=\mathrm{GL}(n)$, 故 $\omega_\tau(x_0)\in\mathscr{G}$ 是 $n\times n$ 矩阵, 其矩阵元可记作 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$ (ν 为行 μ 为列), 配上对偶基矢便有 $\omega^\nu{}_{\mu a}|_{x_0} = \omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)(e^\tau)_a|_{x_0}$, 与式(5-7-4)的 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$ 在 x_0 的值对应. 这可看作是用丛语言对§5.7 第一段的重新表述.

然而应该提出这样的问题: 在 FM 上指定联络 $\tilde{\omega}$ 以及在 $U\subset M$ 上选定截面 $\sigma: U\to$ FM 后, 原则上可以通过以下两条途径分别给每一 $x_0\in U$ 生出一组数来. 途径(a): 令 $\omega\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$, 与由 $\sigma: U\to$ FM 决定的 $\{e_\mu\}$ 结合便给每一 $x_0\in U$ 生出一组数 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$, 这里根本不涉及 M 上的导数算符 ∇ ; 途径(b): $\tilde{\omega}$ 在 M 上按定理 I-2-8 诱导一个导数算符 ∇, 它按照§5.7 与 $\{e_\mu\}$ 结合后给每一 $x_0\in U$ 生出一组数 $\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$. 自然要问: 从 $\tilde{\omega}$ 出发经由这两条途径得到的两组数[即 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$ 和 $\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$]是否相等(是否"殊途同归")?答案是肯定的, 证明如下. 以 $(e^\tau)_c$ 缩并式(5-7-1)给出

$$\nabla_c(e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau}(e^\tau)_c(e_\sigma)^a. \tag{I-2-38}$$

下一步有些微妙：§5.7 曾借 $\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 定义一组联络 1 形式场 $\omega_\mu{}^\nu{}_a \equiv -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$ [式(5-7-4)], 右边负号的引入出于某种微妙的考虑(稍后将做说明). 暂时去掉负号而用下式定义一组 $\omega(\nabla)^\nu{}_{\mu a}$ (加 ∇ 旨在强调这一 ω 实质上是用 ∇ 定义的):

$$\omega(\nabla)^\nu{}_{\mu a} := \gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a\,, \tag{I-2-39}$$

再利用由 $\tilde{\omega}$ 经 $\omega \equiv \sigma^* \tilde{\omega}$ (而不经 ∇)定义的 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}$ 构造一组 $\omega^\nu{}_{\mu a} \equiv \omega^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$ (见注 10), 则欲证殊途同归只须证明 $\omega(\nabla)^\nu{}_{\mu a} = \omega^\nu{}_{\mu a}$. 而这是水到渠成的: 式(I-2-38)同(I-2-39)结合给出

$$\nabla_b (e_\mu)^a = \omega(\nabla)^\nu{}_{\mu b}(e_\nu)^a\,, \tag{I-2-40}$$

与式(I-2-27′)对比便知 $\omega(\nabla)^\nu{}_{\mu a} = \omega^\nu{}_{\mu a}$, 因而的确是殊途同归.

最后说明在§5.7 中添加一个“别扭”的负号来引入一个“别扭”的 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$ [现在应记作 $\omega(\nabla)_\mu{}^\nu{}_a$]的原因. 关键只有一点：本书把黎曼张量写成 $R_{abc}{}^d$ [上标排在最后而非最前, 与 Wald(1984) 同, 但有别于许多文献], 对应于一组 2 形式场

$$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu \equiv R_{ab\mu}{}^\nu \equiv R_{abc}{}^d (e_\mu)^c (e^\nu)_d\,,$$

为使嘉当第二方程中的 $\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$ 与 $\omega(\nabla)_\mu{}^\nu$ 指标对应, 本书从一开始定义 1 形式场 $\omega(\nabla)_\mu{}^\nu{}_a$ 时就不得不补个负号, 即 $\omega_\mu{}^\nu{}_a := -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$ [式(5-7-4)], 于是殊途同归性就体现为“别扭”等式 $\omega^\nu{}_{\mu a} = -\omega(\nabla)_\mu{}^\nu{}_a$. 不过, 当底流形 M 上有度规时, 用度规(在刚性标架的分量)降指标可得

$$\omega_{\nu\mu a} = -\omega(\nabla)_{\mu\nu a} = \omega(\nabla)_{\nu\mu a}\,,$$

“别扭”性就被消除.　**[选读 I-2-1 完]**

[选读 I-2-2]

现在补证由式(I-2-24)定义的子集 H_p 是矢量空间 $\mathrm{T}_p FM$ 的子空间. 设 (O, x^μ) 是 M 上的坐标系, $\eta(t) \subset O$. 以 $\bar{e}^\nu{}_\mu$ 代表 $\bar{e}_\mu$ 的坐标分量, 即 $\bar{e}_\mu = \bar{e}^\nu{}_\mu \partial/\partial x^\nu$, 则 $\{\bar{e}_\mu\}$ 沿 $\eta(t)$ 平移对应于[见上册式(3-2-5)]

$$\frac{\mathrm{d}\bar{e}^\nu{}_\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma}(\eta(t))\frac{\mathrm{d}x^\rho(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\bar{e}^\sigma{}_\mu(\eta(t)) = 0\,. \tag{I-2-41}$$

由§I.1 例 4 可知 $\{x^\mu\}$ 在 $\pi^{-1}[O]$ 上自然诱导坐标系 $\{x^\mu, y^\nu{}_\mu\}$, 其中 $y^\nu{}_\mu$ 就是展开式 $\bar{e}_\mu = \bar{e}^\nu{}_\mu \partial/\partial x^\nu$ 中的 $\bar{e}^\nu{}_\mu$. 曲线 $\tilde{\eta}(t)$ 的切矢可用此坐标系表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\eta}(t) = \frac{\mathrm{d}x^\mu(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\mathrm{d}y^\nu{}_\mu(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y^\nu{}_\mu} = \frac{\mathrm{d}x^\mu(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}y^\sigma{}_\tau\frac{\partial}{\partial y^\nu{}_\tau}\right), \tag{I-2-42}$$

其中第二步用到式(I-2-41). 令

$$E_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} y^\sigma{}_\tau \frac{\partial}{\partial y^\nu{}_\tau} \right)\bigg|_p ,$$

则由式(I-2-42)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \tilde{\eta}(t) = \frac{\mathrm{d}x^\mu(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} E_\mu . \tag{I-2-43}$$

以 π_* 作用于两边, 注意到 $\pi_*(\partial/\partial x^\mu) = \partial/\partial x^\mu$ 和 $\pi_*(\partial/\partial y^\nu{}_\tau) = 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \eta(t) = \frac{\mathrm{d}x^\mu(\eta(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \tag{I-2-44}$$

这是自然的, 因为 $[\mathrm{d}x^\mu(\eta(t))/\mathrm{d}t]_{t=0}$ 本来就是矢量 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \eta(t)$ 的坐标分量. 若取 x^ν 坐标线为 $\eta(t)$ (这时 $t = x^\nu$), 则式(I-2-43)给出 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \tilde{\eta}(t) = \delta^\mu{}_\nu E_\mu = E_\nu$, 故 $E_\nu \in H_p$, 于是式(I-2-24)同(I-2-43)结合表明任一 $X \in \mathrm{H}_p$ 都可用 $\{E_\mu \mid \mu = 1, \cdots, n\}$ 线性展开, 与式(I-2-44)对比还知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \tilde{\eta}(t) \text{ 用 } \{E_\mu\} \text{ 的展开系数} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \eta(t) \text{ 的坐标分量}. \tag{I-2-45}$$

如果还能反过来证明 $\{E_\mu\}$ 的任一线性组合 $\alpha^\mu E_\mu$(其中 $\alpha^\mu \in \mathbb{R}$) 都在 H_p 之内, 即 $\alpha^\mu E_\mu \in \mathrm{H}_p$, 便可肯定 H_p 是矢量空间 $\mathrm{T}_p\mathrm{F}M$ 的子空间, 而且 $\{E_\mu\}$ 是 H_p 的一个基底. 为此, 选曲线 $\gamma : I \to M$ 使 $\gamma(0) = x_0$ 且 $\gamma(t)$ 在 x_0 的切矢为 $\pi_*(\alpha^\mu E_\mu)$, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \gamma(t) = \pi_*(\alpha^\mu E_\mu) = \alpha^\mu \pi_* E_\mu = \alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \tag{I-2-46}$$

所以 α^μ 是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \gamma(t)$ 的坐标分量. 以 $\tilde{\gamma}(t)$ 代表由 $\{e_\mu\}$ 沿 $\gamma(t)$ 平移所诱导的曲线, 则

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \tilde{\gamma}(t) \text{ 用 } \{E_\mu\} \text{ 的展开系数} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \gamma(t) \text{ 的坐标分量} = \alpha^\mu ,$$

故 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\ \tilde{\gamma}(t) = \alpha^\mu E_\mu$, 由式(I-2-24)便可断言 $\alpha^\mu E_\mu \in \mathrm{H}_p$. **[选读 I-2-2 完]**

§I.3 与主丛相伴的纤维丛(伴丛)

设 $P(M,G)$ 是主丛, F 是流形, 且 G 对 F 有左作用 $\chi : G \times F \to F$ (不要求 χ 为自由作用). 对 $g \in G, f \in F$, 把 $\chi_g(f)$ 简记作 gf . 群 G 对 P 的自由右作用 R 以

及G对F的左作用χ联合诱导出G对$P\times F$的自由右作用

$$\xi:(P\times F)\times G\to P\times F,$$

定义为

$$\xi_g(p,f):=(pg,g^{-1}f)\in P\times F,\quad \forall g\in G,p\in P,f\in F. \tag{I-3-1}$$

以$\tau: P\times F\to P$代表自然的投影映射, 即

$$\tau(p,f):=p,\quad \forall p\in P,f\in F,$$

把ξ在$P\times F$上的每一轨道看作一个元素便得集合$Q\equiv(P\times F)/\sim$, 其中$\sim$代表等价关系($P\times F$的两点称为等价的当且仅当它们属于同一轨道), 于是任一元素$q\in Q$都是$P\times F$上的一条轨道. 下面将逐步地证明Q是个流形, 并指出它正是本节的主角——伴丛.

既然$q\in Q$是一条轨道, 就可借用这条轨道的任一点(p,f)作为q的代表点并把q简记为$q\equiv p\cdot f$. 若(p',f')是轨道q的另一点, 则又有$q=p'\cdot f'$. 由轨道定义可知$\exists g\in G$使$p'=pg$, $f'=g^{-1}f$. 另一方面又有$q=p\cdot f=p\cdot gg^{-1}f$, 可见

$$pg\cdot g^{-1}f=p\cdot gg^{-1}f,\quad 即\quad pg\cdot\bar f=p\cdot g\bar f,\ (其中\bar f\equiv g^{-1}f)$$

就是说, 点乘号紧左边的g可移至紧右边. 在q给定时, 由于右作用R的自由性, 指定p后就有唯一的f使$q=p\cdot f$. 但左作用χ不一定自由, 故指定f后可能有不止一个p使$q=p\cdot f$.

存在下列两个同Q有关的自然的投影映射(图 I-10):

(1)$\hat\tau: P\times F\to Q$, 定义为$\hat\tau(p,f):=p\cdot f\in Q$. 由此便可给$Q$自然地定义拓扑: $\Phi\subset Q$为开当且仅当$\hat\tau^{-1}[\Phi]\subset P\times F$为开. 于是$Q$是拓扑空间, $\hat\tau$是连续映射.

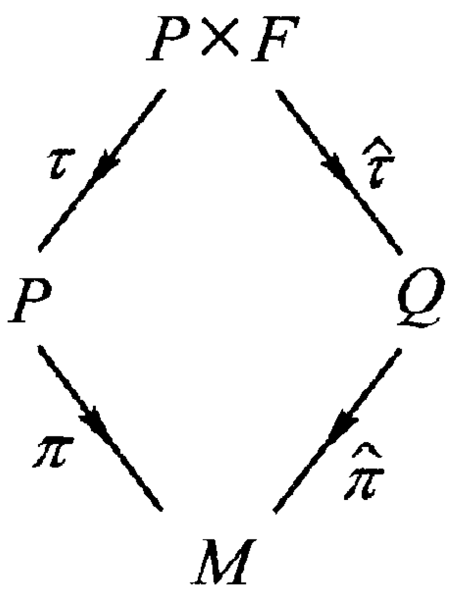


图 I-10　各个投影映射示意

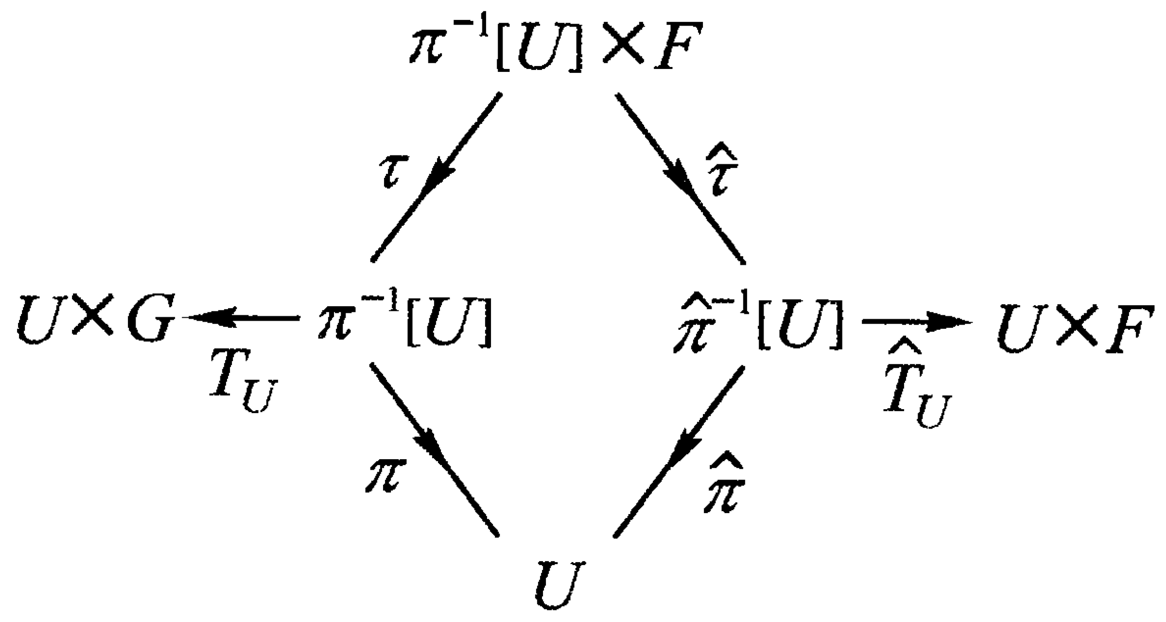


图 I-11　对平凡主丛的图 I-10

(2)$\hat\pi: Q\to M$, 定义为

$$\hat\pi(q):=\pi(p)\in M,\qquad \forall q=p\cdot f\in Q, \tag{I-3-2}$$

若取同一轨道的另一代表点(p',f'), 即把q表为$q=p'\cdot f'$, 则不难证明由式(I-3-2)求得的$\hat\pi(q)$仍等于$\pi(p)$, 可见式(I-3-2)与代表点的选择无关, 上述定义合法.

注 1　$\hat{\pi}: Q\to M$ 的上述定义保证：给定 $p\in P$ 后有 $p\cdot f\in\hat{\pi}^{-1}[x]\ \forall f\in F$，其中 $x\equiv\pi(p)$，可见每点 $p\in P$ 决定 Q 的一条纤维 $\hat{\pi}^{-1}[x]$（于是 P 的纤维一一对应于 Q 的纤维），作为结果，映射 $\hat{\tau}: P\times F\to Q$ 在 p 给定后所诱导的映射 $\hat{\tau}_p: F\to Q$ 也可更明确地写成 $\hat{\tau}_p: F\to\hat{\pi}^{-1}[x]$．在证明完 Q 是流形之后，还可进一步证明（略）$\hat{\tau}_p: F\to\hat{\pi}^{-1}[x]\subset Q$ 是个嵌入映射，所以 F 的流形结构可被带到 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 上，① 并使 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 成为 Q 的嵌入子流形，而且 $\hat{\tau}_p: F\to\hat{\pi}^{-1}[x]$ 成为微分同胚．

设 $T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$ 是主丛 $P(M,G)$ 的一个局域平凡，则 $\pi^{-1}[U]$ 配以底流形 U 和结构群 G 便是一个平凡主丛．在此情况下图 I-10 成为图 I-11．该图还提供如下暗示：正如存在微分同胚 $T_U: \pi^{-1}[U]\to U\times G$ 那样，也存在微分同胚（证明见稍后）$\hat{T}_U: \hat{\pi}^{-1}[U]\to U\times F$（也称此映射为局域平凡），它是由 T_U 诱导的映射，定义为

$$\hat{T}_U(q) := (\hat{\pi}(q), \breve{f}_U),\quad \forall q\in\hat{\pi}^{-1}[U],\tag{I-3-3}$$

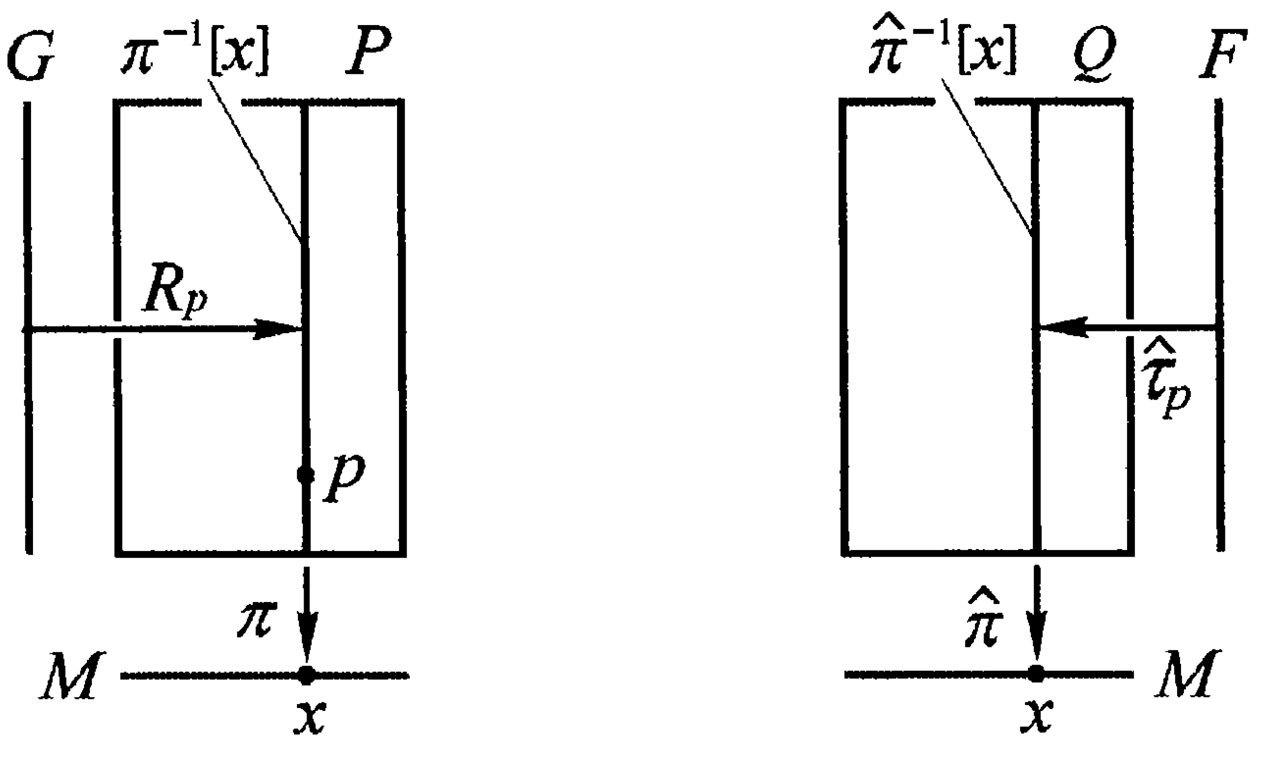


图 I-12　主丛 P 及其伴丛 Q 示意．映射 $\hat{\tau}_p: F\to\hat{\pi}^{-1}[x]$ 使 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 成为 Q 的嵌入子流形

其中 $\breve{f}_U$ 满足 $q=\breve{p}_U\cdot\breve{f}_U$，而 $\breve{p}_U$ 则是由 T_U 在纤维 $\pi^{-1}[\hat{\pi}(q)]$ 上决定的"特殊点"（刚才已指出 $\breve{p}_U$ 决定唯一的 $\breve{f}_U$）．不难证明 $\hat{\tau}^{-1}[\hat{\pi}^{-1}[U]]=\pi^{-1}[U]\times F$，所以 $\hat{\pi}^{-1}[U]\subset Q$ 是 Q 的开子集，配以诱导拓扑就是拓扑空间，于是很想知道 $\hat{T}_U: \hat{\pi}^{-1}[U]\to U\times F$ 是否为同胚映射．答案是肯定的，为此只须证明：① $\hat{T}_U$ 是一一到上映射（读者不难验证）；② $\hat{T}_U$ 及 $\hat{T}_U^{-1}$ 都是连续映射（证略）．利用这一同胚就可把 $U\times F$ 的坐标系诱导到 $\hat{\pi}^{-1}[U]\subset Q$ 上并使之成为流形，而且 $\hat{T}_U$ 成为微分同胚．再借助于足够多的局域平凡就可在 Q 上生成唯一的微分结构，从而使 Q 成为流形，而且容易验证 $\hat{\tau}: P\times F\to Q$ 和 $\hat{\pi}: Q\to M$ 都是光滑映射．与 P 类似，Q 也是以 M 为底流形、以 G

---

① $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 由此获得的流形结构与 p 的选取无关，因为若改用 $p'\in\pi^{-1}[x]$，则有 $g\in G$ 使 $p'=pg$，易见 $\hat{\tau}_{p'}=\hat{\tau}_p\circ\chi_g$，而 χ_g 是 F 上的微分同胚，所以 $\hat{\tau}_{p'}$ 与 $\hat{\tau}_p$ 给 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 赋予同一微分结构．

为结构群的纤维丛(图 I-12).[①] 任一$x\in M$既对应于P的一条纤维$\pi^{-1}[x]$(与G微分同胚),又对应于Q的一条纤维$\hat{\pi}^{-1}[x]$(与F微分同胚).流形Q配以由P, M, G, R, F, χ所决定的上述结构称为**与主丛$P(M, G)$相伴的纤维丛**[fiber bundle associated to principal fiber bundle $P(M, G)$],简称为主丛P的**伴丛**,简记作$Q=(P\times F)/\sim$.流形F称为伴丛Q的**典型纤维**(typical fiber).主丛P的一个局域平凡T_U: $\pi^{-1}[U]\to U\times G$自然给出伴丛Q的一个局域平凡$\hat{T}_U$: $\hat{\pi}^{-1}[U]\to U\times F$.设$T_V$: $\pi^{-1}[V]\to V\times G$是另一局域平凡,$x\in U\cap V$, $q\in\hat{\pi}^{-1}[x]$,则由$\hat{T}_U(q)=(x,\breve{f}_U)$, $\hat{T}_V(q)=(x,\breve{f}_V)$及式(I-1-9)易见

$$\breve{f}_U = g_{UV}(x)\breve{f}_V . \tag{I-3-4}$$

仿照主丛P的局域截面也可定义其伴丛Q的局域截面,它是C^∞映射$\hat{\sigma}$: $U\to Q$,满足$\hat{\pi}(\hat{\sigma}(x))=x\ \ \forall x\in U$.

例1 对任一主丛$P(M,G)$,可取$F=G$并定义左作用χ: $G\times F\to F$(即$G\times G\to G$)为左平移,[即$\chi_g(h) := gh\ \ \forall g,h\in G$.] 这时任一$q\in Q$都可表为$q=p\cdot g$(其中$p\in P, g\in G$),用下式定义映射$\nu$: $Q\to P$:

$$\nu(q) := pg\in P, \qquad \forall q=p\cdot g\in Q,$$

则不难证明ν: $Q\to P$是微分同胚,可见任一主丛都可被看作自己的伴丛.

例2 把§I.1例3的非平凡主丛记作$S^1(S^1,Z_2)$.令$F=\mathbb{R}$,定义Z_2对$\mathbb{R}$的左作用χ: $Z_2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为平凡作用,即$\chi_e(f)=\chi_h(f) := f\ \ \forall f\in\mathbb{R}$(这是非自由左作用的一例),则右作用$\xi$: $(S^1\times\mathbb{R})\times Z_2\to S^1\times\mathbb{R}$满足

$$\xi_e(p_\theta,f) := (p_\theta,f), \qquad \xi_h(p_\theta,f) := (p_{\theta+\pi},f).$$

过(p_θ,f)的轨道只含两点,即(p_θ,f)和$(p_{\theta+\pi},f)$(图I-13),认同后便得Q的一点q.图I-13的另一对点(p_θ,f')和$(p_{\theta+\pi},f')$对应于Q的另一点q'.圆周的每一对"对径点"认同的结果在拓扑上仍是S^1(见图I-6或I-7),所以Q的拓扑结构是$S^1\times\mathbb{R}$,与$M\times F$一样(现在的M也是S^1).事实上,存在从Q到$M\times F$的微分同胚$\hat{T}_M$: $Q\to M\times F$,定义为

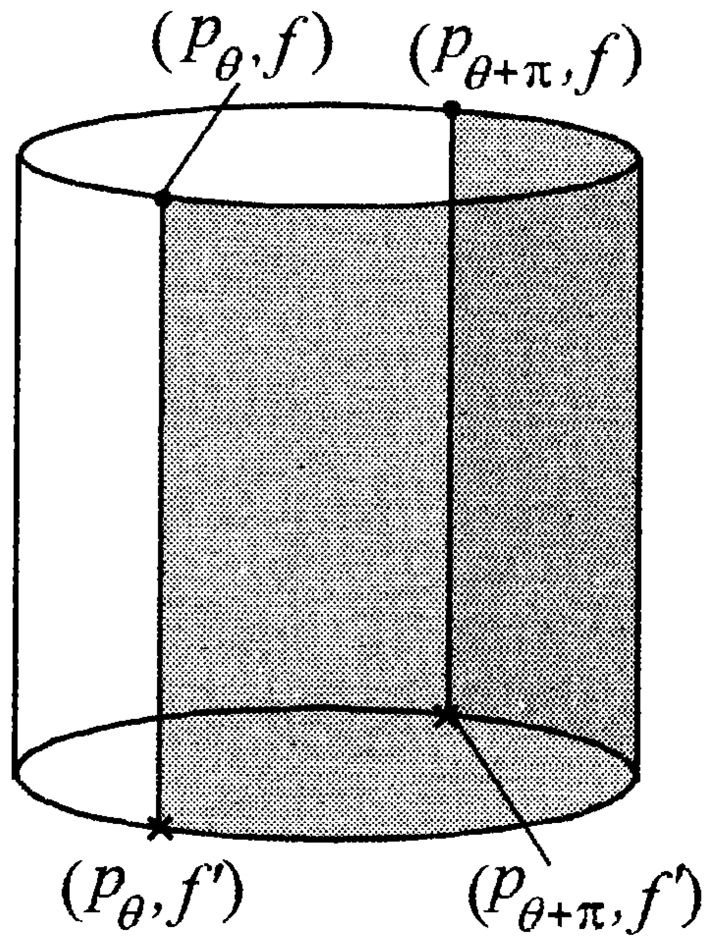


图 I-13 圆柱面代表$P\times F$.上面两点认同得q,下面两点认同得q',以此类推.灰色的半个圆柱面(两竖直边线要认同)可代表Q,其拓扑也是$S^1\times\mathbb{R}$

① 我们并未介绍纤维丛的准确定义(该定义包含对局域平凡及转换函数的要求,可在适当参考书查到).可以验证正文构造的Q满足纤维丛的准确定义.

$$\hat{T}_M(q) := (\pi(p_\theta), f), \quad \forall q = p_\theta \cdot f.$$

可见这样得到的伴丛$Q = M \times F$是平凡伴丛.

上例还可推广. 对任一主丛$P(M, G)$, 取F为任意流形并定义$\chi: G \times F \to F$为平凡作用, 即

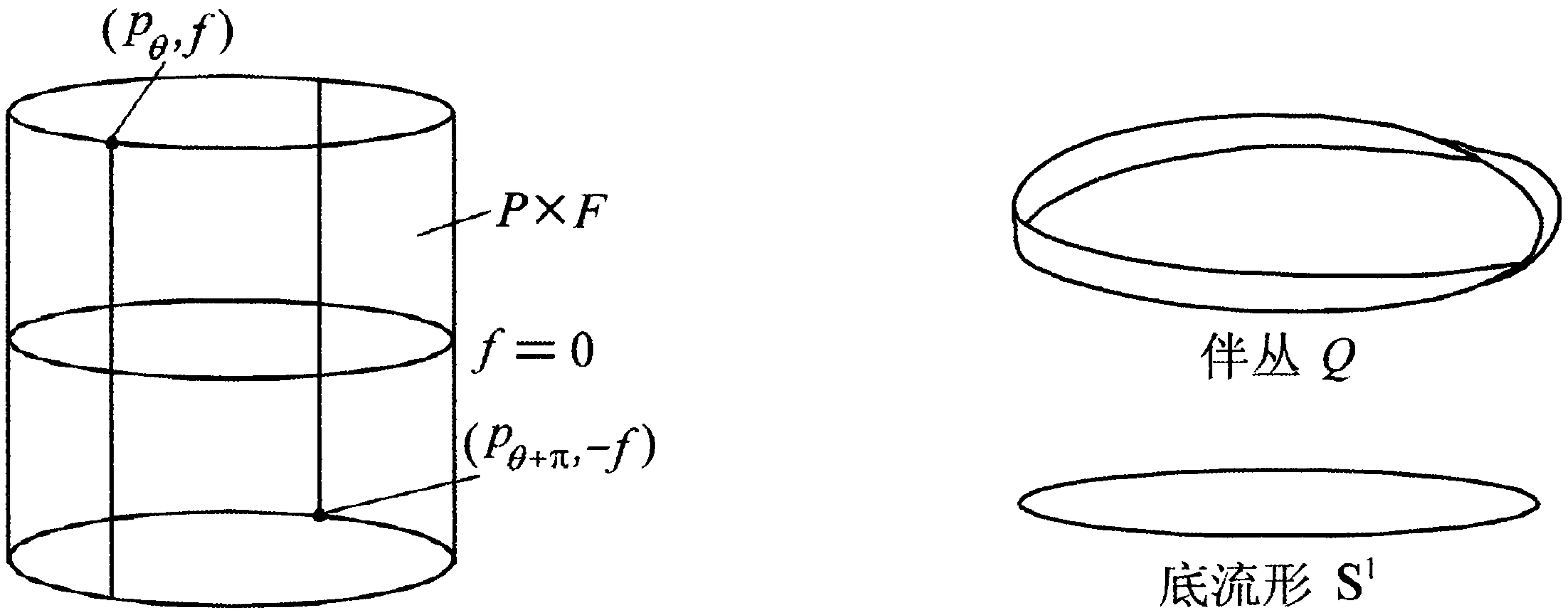
$$\chi_g(f) := f, \quad \forall g \in G, f \in F,$$

则$\forall q \in Q$有$p \in P, f \in F$使$q = \{(pg, f) \mid g \in G\} \subset P \times F$. 这时可自然地定义映射$\hat{T}_M: Q \to M \times F$为$\hat{T}_M(q) := (\pi(p), f)$ $\forall q = p \cdot f$, 而且可验证$\hat{T}_M$是微分同胚. 可见这种程序给出的伴丛Q是平凡伴丛.

例 3 主丛仍是上例的$S^1(S^1, Z_2)$, 并仍取$F = \mathbb{R}$, 但左作用$\chi: Z_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$改定义为

$$\chi_e(f) := f, \quad \chi_h(f) := -f, \quad \forall f \in \mathbb{R},$$

于是过(p_0, f)点的轨道所含的两个点现在是(p_θ, f)和$(p_{\theta+\pi}, -f)$ [图 I-14(a)]. 这种"颠倒头尾"式的认同结果(伴丛Q)就是莫比乌斯带, 它局域地像(微分同胚于)柱面$S^1 \times \mathbb{R}$, 但整体上不像. 只要转满一圈, 就会发现那条$\mathbb{R}$纤维出现一个"底朝天"的变换. 为帮助想像, 不妨用一个开区间代替$\mathbb{R}$并画出图 I-14(b).



(a) 圆柱面代表$P \times F$. 现在要认同的点是(p_θ, f)和$(p_{\theta+\pi}, -f)$, 结果是一条莫比乌斯带

(b) 为便于想像, 不妨用一个开区间代替$\mathbb{R}$, 从而画出本图的莫比乌斯带

图 I-14 例 3 用图

例 4(切丛) 维数是n的底流形M的标架丛FM的结构群$G = GL(n)$. 取流形$F = \mathbb{R}^n$, 则F是矢量空间, $f \in F$可表为由n个实数$f^1, \cdots, f^n$排成的列矩阵. 定义左作用$\chi: G \times F \to F$为

$$(\chi_g(f))^\mu := g^\mu{}_\nu f^\nu, \quad \forall g \in GL(n), f \in F, \tag{I-3-5}$$

则$Q \equiv (FM \times F)/\sim$是$FM$的伴丛, 其中右作用$\xi: (FM \times F) \times G \to FM \times F$按式(I-1-13)和(I-3-1)应为

$$\xi_g(x, e_\mu; f^\rho) = (x, e_\nu g^\nu{}_\mu; (g^{-1})^\rho{}_\sigma f^\sigma), \quad \forall g \in G. \tag{I-3-6}$$

每点 $(x, e_\mu; f^\rho) \in \mathrm{F}M \times F$ 自然伴随着点 $x \in M$ 的一个矢量

$$v \equiv e_\mu f^\mu \in \mathrm{T}_x M, \tag{I-3-7}$$

设 $v' \equiv e'_\mu f'^\mu$ 是伴随于另一点 $(x, e'_\mu; f'^\rho) \in \mathrm{F}M \times F$ 的矢量，则不难证明(习题) $v' = v$ 当且仅当 $(x, e'_\mu; f'^\rho)$ 与 $(x, e_\mu; f^\rho)$ 属于同一轨道，即

$$(x, e'_\mu) \cdot f'^\rho = (x, e_\mu) \cdot f^\rho,$$

因而对应于同一 $q \in Q$. 这表明 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 与 $\mathrm{T}_x M$ 存在一一对应关系：每一 $q \in \hat{\pi}^{-1}[x]$ 是 $\mathrm{F}M \times F$ 中的一条轨道，任取此轨道的一点 $(x, e_\mu; f^\rho)$ 便可构造 x 点的矢量 $v \equiv e_\mu f^\mu$；反之，每一 $v \in \mathrm{T}_x M$ 可用 $\mathrm{T}_x M$ 的任一基底 $\{e_\mu\}$ 展开，即 $v \equiv e_\mu f^\mu$，由此得 $\mathrm{F}M \times F$ 的一点 $(x, e_\mu; f^\rho)$，它所在的轨道就是 v 在 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 中的对应点 q. 索性用等号表示这种对应关系，把 $q \leftrightarrow v$ 改写为 $q = v$，即

$$(x, e_\mu) \cdot f^\mu = e_\mu f^\mu, \tag{I-3-8}$$

于是 Q 就可看作 M 的切丛 $\mathrm{T}M$，从而任一截面 $\hat{\sigma}: U \to Q$ 就是 $U \subset M$ 上的一个矢量场.

例 5 (余切丛) 仍令 $P = \mathrm{F}M$. 把 $\mathbb{R}^n$ 看作矢量空间，选 F 为其对偶空间，即

$$F = (\mathbb{R}^n)^* \equiv \{\text{线性映射 } f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}, \tag{I-3-9}$$

则 $f \in F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对偶矢量，可记作 $(f_1, \cdots, f_n)$，其中 f_μ 是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标基的分量. 定义 $\chi: G \times F \to F$ 为

$$(\chi_g(f))_\mu := (g^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu, \quad \forall g \in \mathrm{GL}(n), f \in F, \tag{I-3-10}$$

现在每点 $(x, e_\mu; f_\rho) \in \mathrm{F}M \times F$ 自然伴随着点 $x \in M$ 的一个对偶矢量

$$\beta \equiv e^\mu f_\mu \in \mathrm{T}_x^* M, \quad \text{其中 } \{e^\mu\} \text{ 是 } \{e_\mu\} \text{ 的对偶基底}. \tag{I-3-11}$$

上式中的 $\mathrm{T}_x^* M$ 代表 $\mathrm{T}_x M$ 的对偶空间. 设 $\beta' \equiv e'^\mu f'_\mu$ 是伴随于另一点 $(x, e'_\mu; f'_\rho) \in \mathrm{F}M \times F$ 的矢量，则不难证明 $\beta' = \beta$ 当且仅当 $(x, e'_\mu; f'_\rho)$ 与 $(x, e_\mu; f_\rho)$ 属于同一轨道，可见所得伴丛 Q 就是 M 上的余切丛(对偶矢量丛) $\mathrm{T}^* M$，任一截面 $\hat{\sigma}: U \to Q$ 就是 $U \subset M$ 上的一个对偶矢量场.

余切丛的左作用为什么用式(I-3-10)定义？为便于讲解，先把式(I-3-5)和(I-3-10)中的 f 分别改记作 v 和 β，即 $(\chi_g v)^\mu = g^\mu{}_\nu v^\nu$，$(\chi_g \beta)_\mu = (g^{-1})^\nu{}_\mu \beta_\nu$. 再把式(I-3-7)

和(I-3-11)改写为$v^a = (e_\mu)^a v^\mu$和$\beta_a = (e^\mu)_a \beta_\mu$，其中$v^a$和$\beta_a$是点$x \in M$的矢量和对偶矢量. g对$(x, e_\mu) \in \mathrm{F}M$的作用无非是$x$点的一个基底变换，为保证$v^a \beta_a$不变，在$v^\mu$变为$g^\mu{}_\nu v^\nu$的前提下就必须令$\beta_\mu$变为$(g^{-1})^\nu{}_\mu \beta_\nu$.

例 6 [(1,1)型张量丛] 仍以标架丛FM为主丛，令

$$F = \{\mathbb{R}^n\text{上}(1,1)\text{型张量}\} \equiv \{\text{双线性映射} f: (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}. \qquad \text{(I-3-12)}$$

以$f^\mu{}_\nu$代表f在$\mathbb{R}^n$的自然坐标基的分量，定义$\chi: G \times F \to F$为

$$(\chi_g(f))^\mu{}_\nu := g^\mu{}_\alpha (g^{-1})^\beta{}_\nu f^\alpha{}_\beta, \quad \forall g \in \mathrm{GL}(n), f \in F. \qquad \text{(I-3-13)}$$

现在每点$(x, e_\mu; f^\rho{}_\sigma) \in \mathrm{F}M \times F$自然伴随着点$x \in M$的一个(1,1)型张量(加上抽象指标更易识别)

$$T^a{}_b \equiv f^\mu{}_\nu (e_\mu)^a (e^\nu)_b, \quad \text{其中}\{(e^\nu)_b\}\text{是}\{(e_\mu)^a\}\text{的对偶基底}, \qquad \text{(I-3-14)}$$

而且，设$T'^a{}_b \equiv f'^\mu{}_\nu (e'_\mu)^a (e'^\nu)_b$是伴随于另一点$(x, e'_\mu; f'^\rho{}_\sigma) \in \mathrm{F}M \times F$的张量，则不难证明$T'^a{}_b = T^a{}_b$当且仅当$(x, e'_\mu; f'^\rho{}_\sigma)$与$(x, e_\mu; f^\rho{}_\sigma)$属于同一轨道，可见所得伴丛$Q$就是$M$上的(1,1)型张量丛，任一截面$\hat{\sigma}: U \to Q$就是$U \subset M$上的一个(1,1)型张量场.

给定主丛$P(M,G)$后，定义伴丛的关键一步是选择F以及G在F上的左作用χ. 令$\hat{G} \equiv \{\chi_g: F \to F \mid g \in G\}$，则$\hat{G}$其实就是$F$上的李变换群，而且由$g \mapsto \chi_g$定义的映射$\rho: G \to \hat{G}$是同态(见§G.7). 当流形$F$是(实或复)矢量空间而且$\chi_g$: $F \to F$ ($\forall g \in G$)是线性变换时(这时$\hat{G} \equiv \{\chi_g\}$是$G$的一个表示，$F$是表示空间)，相应的伴丛$Q$称为**伴矢丛**(associated vector bundle)，也简称为**矢丛**.[①] 就是说，伴矢丛是满足以下条件的伴丛：①其典型纤维F是矢量空间；②其$\chi_g: F \to F$是线性变换$\forall g \in G$. 切丛、余切丛以及所有(k, l)型张量丛都是伴矢丛.

矢丛的定义要求其典型纤维F是矢量空间，这就保证每一纤维$\hat{\pi}^{-1}[x]$都是矢量空间，这是因为：任选$p \in \pi^{-1}[x]$后，$\forall q_1, q_2 \in \hat{\pi}^{-1}[x]$便有唯一的$f_1, f_2 \in F$使$q_1 = p \cdot f_1$及$q_2 = p \cdot f_2$，故可定义加法和数乘为

$$q_1 + q_2 := p \cdot (f_1 + f_2), \quad \alpha q_1 := p \cdot \alpha f_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\text{或}\mathbb{C}). \qquad \text{(I-3-15)}$$

$\hat{\pi}^{-1}[x]$的零元(也记作0)就是$p \cdot 0$(其中0是F的零元). 不难验证这些定义与所选的$p \in \pi^{-1}[x]$无关，所以每一纤维$\hat{\pi}^{-1}[x]$都是矢量空间，而且都与矢量空间F同

① 矢丛是这样的纤维丛，其每一纤维都是一个矢量空间. 对任一矢丛Q总有主丛P使Q是P的伴矢丛.

构.[①] 可见Q的每一纤维都有一个特殊元素，即零元.(请注意与主丛的区别，主丛的一条纤维不存在可以自然充当恒等元e的点.) 非平凡主丛不存在整体截面，但任意矢丛都有一个整体截面$\hat{\sigma}$，称为**零截面**，定义为$\hat{\sigma}(x)\equiv 0\in\hat{\pi}^{-1}[x]\ \ \forall x\in M$.

§I.4 物理场的整体规范不变性

I.4.1 阿贝尔情况下的整体规范不变性

设ϕ_1和ϕ_2是闵氏时空$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$中两个互相独立的、有相同质量参数m的实标量场，则两者分别服从Klein-Gordon方程：

$$\partial^a\partial_a\phi_1-m^2\phi_1=0,\quad \partial^a\partial_a\phi_2-m^2\phi_2=0. \tag{I-4-1}$$

两者的总拉氏密度为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2=-\frac{1}{2}[(\partial^a\phi_1)\partial_a\phi_1+m^2\phi_1^{\ 2}+(\partial^a\phi_2)\partial_a\phi_2+m^2\phi_2^{\ 2}]. \tag{I-4-2}$$

引入复标量场

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)\text{ 及其复数共轭 }\overline{\phi}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2), \tag{I-4-3}$$

便可用独立变量组$\{\phi,\overline{\phi}\}$代替$\{\phi_1,\phi_2\}$，这时Klein-Gordon方程成为

$$\partial^a\partial_a\phi-m^2\phi=0,\quad \partial^a\partial_a\overline{\phi}-m^2\overline{\phi}=0. \tag{I-4-1$'$}$$

式(I-4-2)则可改写为

$$\mathscr{L}=-[(\partial^a\overline{\phi})\partial_a\phi+m^2\phi\overline{\phi}]. \tag{I-4-2$'$}$$

如果对复标量场$\{\phi,\overline{\phi}\}$按下式做“场变换”$\phi\mapsto\phi'$：

$$\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi,\qquad \overline{\phi}'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\overline{\phi}, \tag{I-4-4}$$

(其中θ是常实数，q是整数.) 则

$$\partial_a\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\partial_a\phi,\qquad \partial_a\overline{\phi}'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\partial_a\overline{\phi}, \tag{I-4-5}$$

故

$$-[(\partial^a\overline{\phi}')\partial_a\phi'+m^2\phi'\overline{\phi}']=-[(\partial^a\overline{\phi})\partial_a\phi+m^2\phi\overline{\phi}],$$

---

① 这也就是由映射$\hat{\tau}_p$：$F\to\hat{\pi}^{-1}[x]$ [见式(I-3-4)前一段的脚注①]给$\hat{\pi}^{-1}[x]$诱导的线性结构.

可见拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在式(I-4-4)的场变换下不变. 这种不变性称为场的**内部对称性**(internal symmetry), 以区别于由 Killing 矢量场所代表的**时空对称性**(spacetime symmetry). 相应地, 场变换(I-4-4)也称为**内部变换**. 根据 Noether 定理(见附录H), 时空对称性和内部对称性都会导致守恒律. 具体说, 对现在的情况有如下定理.

定理 I-4-1　复标量场 ϕ 的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在式(I-4-4)的内部变换下的不变性导致一个守恒律(物理上解释为电荷守恒律).

证明　以 ϕ_0 代表我们关心的复标量场, 即式(I-4-4)中的 ϕ, 则该式的全体 ϕ' 的集合是一个单参复标量场族 $\{\phi(\theta):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}\}$, 其中 $\phi(\theta)\equiv e^{-iq\theta}\phi_0$. 由式(I-4-2′)可知 $\mathscr{L}$ 是 $\phi, \partial_a\phi, \bar{\phi}, \partial_a\bar{\phi}$ 的局域函数, 现在因 ϕ 依赖于 θ 又可表为 θ 的一元函数:

$$\mathscr{L}(\theta)=\mathscr{L}(\phi(\theta),\partial_a\phi(\theta);\bar{\phi}(\theta),\partial_a\bar{\phi}(\theta)), \tag{I-4-6}$$

其中 $\partial_a\phi(\theta)$ 代表标量场 $\phi(\theta)$ 被导数算符 ∂_a 作用而得的余矢场. 于是 $\mathscr{L}$ 在式(I-4-4)的内部变换下的不变性就是指 $d\mathscr{L}(\theta)/d\theta=0$, 特别地,

$$0=\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}\mathscr{L}(\theta)$$

$$=\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi(\theta))}\frac{d(\partial_a\phi(\theta))}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\phi}(\theta)}\frac{d\bar{\phi}(\theta)}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\bar{\phi}(\theta))}\frac{d(\partial_a\bar{\phi}(\theta))}{d\theta}\right]_{\theta=0}. \tag{I-4-7}$$

上式右边第一项的第二因子显然为

$$\left.\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}(e^{-iq\theta}\phi_0)=-iqe^{-iq\theta}\,|_{\theta=0}\,\phi_0=-iq\phi_0. \tag{I-4-8}$$

另一方面, $\partial\mathscr{L}/\partial\phi(\theta)$ 是 $\mathscr{L}(\phi(\theta),\partial_a\phi(\theta);\bar{\phi}(\theta),\partial_a\bar{\phi}(\theta))$ 对第一宗量 $\phi(\theta)$ 求偏导, 故 $\partial\mathscr{L}/\partial\phi(\theta)\,|_{\theta=0}$ 就是 $\mathscr{L}(\phi_0,\partial_a\phi_0;\bar{\phi}_0,\partial_a\bar{\phi}_0)$ 对第一宗量求偏导, 即 $\partial\mathscr{L}/\partial\phi_0$, 因而 $\partial\mathscr{L}/\partial\phi(\theta)\,|_{\theta=0}=\partial\mathscr{L}/\partial\phi_0$, 与式(I-4-8)结合便得

$$\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=0}=-iq\phi_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_0}=-iq\phi_0\,\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}, \tag{I-4-9}$$

其中末步用到拉氏方程(15-1-19). 式(I-4-7)右边后三项可类似求得, 所以式(I-4-7)成为

$$0=\left.\frac{d\mathscr{L}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}=-iq\left[\phi_0\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}+(\partial_a\phi_0)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}-\bar{\phi}_0\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\bar{\phi}_0)}-(\partial_a\bar{\phi}_0)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\bar{\phi}_0)}\right]$$

$$=-\mathrm{i}q\,\partial_a\left[\phi_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}-\bar{\phi}_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\bar{\phi}_0)}\right]=\mathrm{i}q\,\partial_a(\phi\,\partial^a\bar{\phi}-\bar{\phi}\,\partial^a\phi),\qquad\text{(I-4-10)}$$

其中末步用到式(I-4-2′)并把ϕ_0简记为ϕ. 令

$$J^a\equiv\mathrm{i}eq(\phi\partial^a\bar{\phi}-\bar{\phi}\partial^a\phi),\quad(\text{其中}\,e\,\text{代表基本电荷})\qquad\text{(I-4-11)}$$

则式(I-4-10)给出$0=\partial_a J^a$, 故J^a代表某种守恒流密度. □

注1 ①物理上把J^0解释为场(系统)的电荷密度, 因而$\partial_\mu J^\mu=0$反映电荷守恒. ②量子化后的复标量场可看作大量量子组成的系统, m是每个量子的质量, q是每个量子的电荷与基本电荷e的比值. ③式(I-4-4)代表的场变换叫做**规范变换**(gauge transformation). 因为式(I-4-4)中的θ不随时空点而变(不是时空坐标x的函数), 式(I-4-4)的变换又称为**整体(global)规范变换**, 以区别于后面要讲的局域规范变换.

上述整体规范变换还可推广. 考虑含有N个复分量的复场$\{\phi_n, n=1,\cdots,N\}$, 其$\mathscr{L}$满足: 每一含ϕ_n的项必含$\bar{\phi}_n$, 且该项所含ϕ_n和$\bar{\phi}_n$的形式为$\phi_n\bar{\phi}_n$(不对n取和); 每一含$\partial_a\phi_n$的项必含$\partial^a\bar{\phi}_n$, 且所含$\partial_a\phi_n$和$\partial^a\bar{\phi}_n$的形式为$(\partial_a\phi_n)\partial^a\bar{\phi}_n$, 则不难证明

(1) $\mathscr{L}$在如下的整体规范变换下不变:

$$\phi_n'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n\theta}\phi_n,\quad \bar{\phi}_n'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_n\theta}\bar{\phi}_n,\quad n=1,\cdots,N\;(\text{不对}\,n\,\text{取和});\qquad\text{(I-4-12)}$$

(其中θ是常实数, $q_1,\cdots,q_N$是整数.)

(2)也给出守恒律, 守恒流密度为

$$J^a\equiv-\mathrm{i}\,e\sum_{n=1}^N q_n\left[\phi_n\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_n)}-\bar{\phi}_n\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\bar{\phi}_n)}\right].\qquad\text{(I-4-13)}$$

守恒荷密度J^0仍解释为电荷密度.

式(I-4-12)也可表为如下的矩阵等式:

$$\begin{bmatrix}\phi_1'\\ \vdots\\ \phi_N'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\theta} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_N\end{bmatrix},\qquad\text{(I-4-14a)}$$

$$[\bar{\phi}_1',\cdots,\bar{\phi}_N']=[\bar{\phi}_1,\cdots,\bar{\phi}_N]\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\theta} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_N\theta}\end{bmatrix},\qquad\text{(I-4-14b)}$$

即变换矩阵是对角矩阵, 可简记为$\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\theta},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\theta})$和$\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\theta},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_N\theta})$.

从群论角度看, 全体形如式(I-4-4)的内部变换的集合$\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}$在$q\neq0$时

是酉群 U(1)(见小节 G.5.4 例 1), 因此说式(I-4-4)的内部变换群在 $q \neq 0$ 时是 U(1). 事实上, 变换(I-4-14)的内部变换群在 $q_1,\cdots,q_N$ 不全为零时也是 U(1), 因为不难证明(习题)集合

$$\hat{G} \equiv \{\operatorname{diag}(e^{-iq_1\theta},\cdots,e^{-iq_N\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \tag{I-4-15}$$

是群, 而且同态映射

$$\rho: \ \mathrm{U}(1) \to \hat{G}, \qquad e^{-i\theta} \mapsto \operatorname{diag}(e^{-iq_1\theta},\cdots,e^{-iq_N\theta})$$

是 U(1) 群的表示(当 $q_1,\cdots,q_N$ 的最大公约数为 1 时 ρ 还是忠实表示). $\hat{G}$ 的群元是 $N\times N$ 复矩阵, 所以是复矩阵群, 因而是 U(1) 群的复 N 维表示群(指表示空间的维数). 请注意分清李群的维数及其表示的维数, 对本例, 前者是 1 [因 $\dim \mathrm{U}(1)=1$], 后者的复维数是 N.

I.4.2 非阿贝尔情况下的整体规范不变性

上小节的整体规范变换只涉及阿贝尔群 U(1), 比较简单. 物理上还遇到许多涉及非阿贝尔群的规范变换. 例如, 注意到核力(强力)与粒子所带电荷的无关性, 海森伯(Heisenberg)于 1932 年提出质子和中子可看作同一粒子——核子(nucleon)——的两种不同状态(同位旋态). 与电子的自旋波函数类似, 核子的同位旋态也可用波函数 $\phi=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}$ 描述. 核力在任意两个同位旋态之间的变换 $\phi\mapsto\phi'=\begin{bmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{bmatrix}$ 下保持不变, 这种波函数变换由一个 2×2 复矩阵描写, 变换的一般形式为

$$\begin{bmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}, \qquad U_{11},\ U_{12},\ U_{21},\ U_{22}\in\mathbb{C}. \tag{I-4-16}$$

以 U 代表变换矩阵, 则 $\phi'=U\phi$. 由概率的归一化条件得

$$(\phi,\phi)=1=(\phi',\phi')=(U\phi,U\phi)=(U^\dagger U\phi,\phi),$$

表明 $U^\dagger U=I$ (单位矩阵), 所以 $U\in\mathrm{U}(2)$ (见小节 G.5.4). 再由

$$1=\det I=\det(U^\dagger U)=\overline{\det U}\,\det U=|\det U|^2$$

得 $\det U=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. 令 $U=U_1U_2$, 其中 $U_2\equiv\operatorname{diag}(e^{i\alpha/2},e^{i\alpha/2})$. 因 $\det U_2=e^{i\alpha}$, 故 $\det U_1=1$. 由于 $U_2\phi=e^{i\alpha}\phi$ 与 ϕ 代表同一量子态(见小节 B.1.5), 所以可把 $\phi'=U\phi=U_1U_2\phi$ 理解为 $\phi'=U_1\phi$, 即以 U_1 代替 U 作为波函数的变换矩阵, 但仍记

作U，即仍写$\phi'=U\phi$，只是现在$\det U=1$，因而$U\in SU(2)$．[①]

ϕ在量子力学中代表波函数而在经典场论中代表场量(在量子场论中则成为场算符)，因此$\phi'=U\phi$是场变换(内部变换)．核子系统的拉氏密度$\mathscr{L}$在这一内部变换[其中$U\in SU(2)$]下不变，相应的守恒律就是同位旋守恒．[②] 守恒流表达式的推导与式(I-4-10)相仿．李群SU(2)的李代数$\mathscr{SU}(2)$有如下一组基矢[见式(G-6-13)]：

$$E_1=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=-\frac{i}{2}\tau_1,\quad E_2=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=-\frac{i}{2}\tau_2,\quad E_3=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-\frac{i}{2}\tau_3, \tag{I-4-17}$$

(其中τ_1，τ_2，τ_3是泡利矩阵．) 故任一李代数元$A\in\mathscr{SU}(2)$可表为

$$A=-\frac{i}{2}(\theta^1\tau_1+\theta^2\tau_2+\theta^3\tau_3)\equiv-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}, \tag{I-4-18}$$

[其中$\theta^1,\theta^2,\theta^3\in\mathbb{R}$，式(I-4-18)最右边是常用的简记法．] 因此SU(2)的任一群元可表为

$$U(\vec{\theta})=\mathrm{Exp}(A)=e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}\in SU(2). \tag{I-4-19}$$

因τ_1,τ_2,τ_3是2×2复矩阵，故$e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}$也是，把群元写成$e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}$其实是采用了3维李群SU(2)的(复)2维表示(自身表示)．根据不同的物理需要，还会用到SU(2)[或SU(3)，SU(4)，…等]的其他维表示．一般地说，规范场论涉及一个李群(内部变换群)G和一个(或多个)矩阵李群$\hat{G}$，而且存在同态$\rho: G\to\hat{G}$，因而$\hat{G}$是G的表示．设$R\equiv\dim G$，以$\{e_1,\cdots,e_R\}$代表李群G的李代数$\mathscr{G}$的一组基矢，则任一$A\in\mathscr{G}$可表为

$$A=\theta^1 e_1+\cdots+\theta^R e_R=\theta^r e_r\equiv\vec{\theta}\cdot\vec{e},\quad \theta^1,\cdots,\theta^R\in\mathbb{R}, \tag{I-4-20}$$

故群元$g\in G$可表为$g=\exp(\theta^r e_r)$．(即使g不可表为这种指数形式，以下讨论的实质性内容及结论仍成立．) 以V代表$\rho: G\to\hat{G}$的表示空间，设$N\equiv\dim V$，默认在V中已选定基底，则$\hat{G}$的元素可表为$N\times N$矩阵．以$\hat{\mathscr{G}}$代表$\hat{G}$的李代数，则同态$\rho: G\to\hat{G}$在恒等元$e\in G$的推前映射$\rho_*: \mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$是李代数同态(定理G-3-2)．令$U(\vec{\theta})\equiv\rho(g)\in\hat{G}$，则

① 在把ϕ看作量子场(而不是量子力学的量子态)的情况下，这个论证是缺乏说服力的．不过，引入本例的主旨是要把规范变换推广至非阿贝尔群，U究竟是否属于SU(2)在这里并不重要，而SU(2)比U(2)更简单，所以就把U按SU(2)群元处理．

② 严格说，只当考虑纯的强相互作用(电磁作用被“关掉”)时质子和中子才完全一样，所以这种“同位旋对称性”天生就是近似的．

$$U(\vec{\theta}) = \mathrm{E\,xp}[\rho_*(\theta^r e_r)] = \mathrm{E\,xp}(\theta^r \rho_* e_r)\,, \tag{I-4-21}$$

其中第一步是因为由 $g = \exp(\theta^r e_r)$ 可得 $\rho(g) = \mathrm{E\,xp}[\rho_*(\theta^r e_r)]$(见附录G 习题10)，第二步用到推前映射的线性性. 引入符号

$$-\mathrm{i}L_r \equiv \rho_* e_r \in \hat{\mathscr{G}}\,, \tag{I-4-22}$$

则 $-\mathrm{i}L_r$ 可表为 $N\times N$ 矩阵，于是式(I-4-21)又可改写为(但 $\{-\mathrm{i}L_r \mid r = 1,\cdots,R\}$ 未必线性独立)

$$U(\vec{\theta}) = \mathrm{Exp}(-\mathrm{i}L_r\theta^r) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}}\,,\quad (N\times N\ \text{矩阵等式}) \tag{I-4-21$'$}$$

相应的整体规范变换可以表为(第二式的证明见选读 I-5-2 末)

$$\phi' = U(\vec{\theta})\,\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}}\phi, \qquad \bar{\phi}' = \bar{\phi}\,U(\vec{\theta})^{-1} = \bar{\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}}\,, \tag{I-4-23}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}\in V$ 代表有 N 个复分量的场量(场算符)，可看作由 $\phi_1,\cdots,\phi_N$ 排成的列阵；而 $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ 则是由 $\bar{\phi}_1,\cdots,\bar{\phi}_N$ 排成的行阵(默认 $\hat{G}$ 是酉群，非酉群的情形见选读 I-5-2).

注 2　①在同位旋守恒的特例中 G 和 $\hat{G}$ 相同，都是李群 SU(2)．②式(I-4-4)也可作为式(I-4-23)的特例被纳入，这时 $G = \mathrm{U}(1)$, $\hat{G} = \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$，故 $R = N = 1$，$\vec{L}\cdot\vec{\theta} = L_1\theta^1$，而且 L_1 是 1×1 实矩阵，可与 q 认同，即 $L_1 = q$.

注 3　本节和下节专为讲授纤维丛理论在规范场论的应用而设，只打算介绍为此而必备的物理知识，对若干虽然重要但在此不直接用到的物理内容(例如各种内部对称性所给出的守恒量)只能是点到为止.

§I.5　物理场的局域规范不变性

在量子力学中，波函数 $\psi(x)$ 的整体规范变换 $\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\psi(x)$ 无非是使波函数整体改变一个相位("整体"是指 θ 与时空点无关)，这种变换不会导致任何物理效应，或者说，量子力学系统在这种变换下是不变的. 自然要问：如果 θ 依赖于时空点(局域规范变换)，结果又会如何？还有不变性吗？这一问题远不如整体规范变换那样简单. 首先，整体规范变换不导致物理效应是哥本哈根阐释的必然结果，然而却没有任何依据足以保证系统在局域规范变换下也没有物理效应(也具有不变性)；其次，时间和空间的地位在非相对论量子力学中截然不同，波函数 $\psi(x)\equiv\psi(t,\vec{x})$ 实际上只是抽象的态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 在坐标表象中的表达式，如果改用别的表象，空间坐标 $\vec{x}$ 就不一定出现. 例如，动量表象中的波函数 $\tilde{\psi}(t,\vec{p}) = \langle\vec{p}|\psi(t)\rangle$ 就不含空间坐标. 所以，如果一定要在非相对论量子力学中引入局域规范变换，那么比较自然的想法应该是变换参数 θ 只依赖于时间(而不是时空点).

不过, 量子力学建立后物理学的发展过程早就给局域规范变换的出场作好了铺垫. 因此, 尽管存在着上述问题, 局域规范变换的观念甫一出现就还是立刻被物理学界所接受. 下面对这个背景作一简介.

电动力学具有 Poincaré 变换(时空变换)和规范变换(内部变换)下的不变性, 前者被爱因斯坦发展为相对论, 但是人们对后者的认识则较为迟滞[见 Gross(1992)和 <http://en. wikipedia. org/wiki/Gauge_transformation>]. 大数学家和物理学家 Weyl 在对广义相对论作尝试性突破时, 认为标准钟和标准尺的选择应当是局域的[见泡利(1979)], 并在1918 年给出了一个理论, 该理论认为, 当 g_{ab} 是一个物理上有意义的度规时, 对它作共形变换而得到的 $g'_{ab}=\Omega^2 g_{ab}$ 也是一个物理上有意义的度规. Weyl 把对 Ω 的选择的改变叫做规范(gauge)或尺度(scale)的改变, 这就是规范变换一词的最初来历. 从这一想法出发, Weyl 的理论竟能神奇地把电磁场和引力场统一到一起, 详见泡利(1979). 然而, 爱因斯坦指出 Weyl 理论具有一个在实验上不可接受的推论[见泡利(1979)], 这成了该理论的一大难题. 量子力学建立起来之后, Fock(1926) , London(1927) 和 Weyl (1928, 1929)等随即注意到了量子力学中的 $\partial_\mu - \mathrm{i}(qe/h)A_\mu$ [即式(I-5-5)]与 Weyl 理论的无限小平移算符非常像, 区别只在于一个虚单位 i . 他们把现代意义的局域规范变换引进了量子力学[见 Gross(1992) , 泡利 (1979) , Jackson and Okun(2001)], 而且这一做法还可以被原封不动地推广到量子场论中. 从此, 局域规范变换的观念成为现代物理学的基石之一. 泡利在这些方面起了巨大的作用. 以上就是 U(1) 局域规范理论的大概由来, 小节 I.5.1 将介绍这一理论.

杨振宁(简称 Yang)和 Mills 在1954 年进一步把这一思想推广到同位旋空间[见 Yang and Mills (1954)]. 从物理上看来, 海森伯提出的同位旋空间内的变换相当于在一个时空点上规定了质子和中子的区分标准之后其他时空点的区分标准也就随之而定, 但 Yang 和 Mills 觉得这有悖于局域场的概念, 而局域场概念是物理理论的基础. 他们认为不同时空点的同位旋轴的取向不应该相互关联, 即认为 $\phi(x)$ 与 $\phi'(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\cdot\vec{\theta}(x)}\phi(x)$ (现在的 $\vec{\theta}$ 依赖于时空点的坐标 x)在物理上等价(前提是配以适当的称为规范势的场, 见小节 I.5.2), 这就把局域规范变换从阿贝尔情况[U(1) 群]推广到了非阿贝尔情况[SU(2)群].

本节默认已在 4 维闵氏时空中选定了一个洛伦兹坐标系 $\{x^\mu\}$, 所有张量的坐标分量都是指在该系的分量.

I.5.1 阿贝尔情况下的局域规范不变性

以 $\phi(x)$ 代表复标量场 ϕ 与坐标系结合而得的 4 元函数. 前已看到 ϕ [因而 $\phi(x)$]的 $\mathscr{L}$ 在整体规范变换(I-4-4)下不变, 现在要问它在如下的局域规范变换下是否改变:

$$\phi'(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\phi(x),\quad \bar{\phi}'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta(x)}\bar{\phi}(x)\ .\text{(请特别注意现在的}\theta\text{是}x\text{的函数)}\tag{I-5-1}$$

$\mathscr{L}$ 表达式(I-4-2′)中的 $m^2\phi\bar{\phi}$ 项的不变性是显然的，问题出在该式的另一项 $[\partial^\mu\bar{\phi}(x)]\partial_\mu\phi(x)$，因为当 θ 依赖于 x 时 $\partial_\mu\phi'(x)$ 及 $\partial^\mu\bar{\phi}'(x)$ 会出现含 $\partial_\mu\theta(x)$ 及 $\partial^\mu\theta(x)$ 的附加项，由此导致不变性的丢失：

$$[\partial^\mu\bar{\phi}'(x)]\,\partial_\mu\phi'(x)=[\partial^\mu\bar{\phi}(x)]\,\partial_\mu\phi(x)+\cdots\neq[\partial^\mu\bar{\phi}(x)]\,\partial_\mu\phi(x)\ .\tag{I-5-2}$$

物理上这是可以理解的，因为复标量粒子既然带电，就必然伴有电磁场，所以应期待的是两场耦合系统的总拉氏密度在式(I-5-1)下不变. 以下改用 $\mathscr{L}_0$ 代表复标量场 $\phi(x)$ 自身(自由复标量场)的拉氏密度，即 $\mathscr{L}_0=-[(\partial^\mu\bar{\phi})\partial_\mu\phi+m^2\phi\bar{\phi}]$，而总拉氏密度 $\mathscr{L}$ 则应为三项之和：

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{\text{int}}+\mathscr{L}_{\text{EM}}\ ,\tag{I-5-3}$$

其中 $\mathscr{L}_{\text{EM}}=-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 是电磁场 F_{ab} 的拉氏密度[见式(15-1-22)]，$\mathscr{L}_{\text{int}}$ 代表 ϕ 与 F_{ab} 的相互作用(interaction)对 $\mathscr{L}$ 的贡献. 令 $\mathscr{L}_1\equiv\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{\text{int}}$，为找到 $\mathscr{L}_1$ 的合理表达式可从如下讨论获得启发. 在非相对论量子力学中，为求得电磁场中带电粒子的运动方程只须从自由粒子的薛定谔方程出发做如下替代(式中的 φ 和 $\vec{A}$ 分别是电磁场的标势和矢势)：

$$\text{(a)}\ \partial/\partial t\mapsto\partial/\partial t+\mathrm{i}\hbar^{-1}eq\varphi,\qquad\text{(b)}\ \vec{\nabla}\mapsto\vec{\nabla}-\mathrm{i}\hbar^{-1}eq\vec{A}\ .\tag{I-5-4}$$

把这一做法推广到相对论性场论并用 4 维语言改写，便得到 4 维闵氏时空中 $\partial_\mu=(\partial_0,\vec{\nabla})$ 的如下替代法则：

$$\partial_\mu\mapsto\partial_\mu-\mathrm{i}eqA_\mu\ .\ \text{(已改用自然单位制，其中}\hbar=1)\tag{I-5-5}$$

于是伴有电磁场的复标量场的拉氏密度 $\mathscr{L}_1$ 应是自由复标量场拉氏密度 $\mathscr{L}_0$ 按上式做替代的结果，准确地说就是

$$\mathscr{L}_1=-[(\mathrm{D}^\mu\bar{\phi})\mathrm{D}_\mu\phi+m^2\phi\bar{\phi}]\ ,\tag{I-5-6}$$

其中 D_μ 叫**协变导数**(covariant derivative)**算符**(理由见§I.9 例 4 末)，由下式定义：

$$\mathrm{D}_\mu\phi(x)\equiv(\partial_\mu-\mathrm{i}eqA_\mu)\phi(x),\quad \mathrm{D}_\mu\bar{\phi}(x)\equiv(\partial_\mu+\mathrm{i}eqA_\mu)\bar{\phi}(x)\ .\tag{I-5-7}$$

所以

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_{\text{EM}}=-[(\mathrm{D}^\mu\bar{\phi})\mathrm{D}_\mu\phi+m^2\phi\bar{\phi}]-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ .\tag{I-5-8}$$

如果 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_{\text{EM}}$ 各自在式(I-5-1)下不变，$\mathscr{L}$ 自然不变. 有这等好事吗?有的. $\mathscr{L}_1$ 是把 $\mathscr{L}_0$ 中的 $\partial_\mu\phi$ 和 $\partial_\mu\bar{\phi}$ 换为 $\mathrm{D}_\mu\phi$ 和 $\mathrm{D}_\mu\bar{\phi}$ 的结果，虽然 $(\partial^\mu\bar{\phi}')\partial_\mu\phi'\neq(\partial^\mu\bar{\phi})\partial_\mu\phi$，但如果

$D_\mu\phi(x)$ 和 $D_\mu\bar{\phi}(x)$ 在式(I-5-1)的变换下按下式变换：

$$\text{(a) } D'_\mu\phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}D_\mu\phi(x), \qquad \text{(b) } D'^\mu\bar{\phi}'(x) = e^{iq\theta(x)}D^\mu\bar{\phi}(x), \tag{I-5-9}$$

便有 $(D'^\mu\bar{\phi}')D'_\mu\phi' = (D^\mu\bar{\phi})D_\mu\phi$，从而 $\mathscr{L}_1' = \mathscr{L}_1$. 而 $D_\mu\phi(x)$ 之所以可能按上式变换，是因为 D_μ 中含有 A_μ [式(I-5-7)]. 令 A_μ 在式(I-5-1)下按适当方式变换就可保证式(I-5-9)成立. 具体说，因为

$$\begin{aligned}\text{式(I-5-9a)左边} &= [\partial_\mu - ieqA'_\mu(x)]\,\phi'(x) = [\partial_\mu - ieqA'_\mu(x)]\,e^{-iq\theta(x)}\phi(x)\\ &= e^{-iq\theta(x)}\partial_\mu\phi(x) - iq\,[\partial_\mu\theta(x)]\,e^{-iq\theta(x)}\phi(x) - i\,eqA'_\mu(x)\,e^{-iq\theta(x)}\phi(x),\end{aligned}$$

$$\text{式(I-5-9a)右边} = e^{-iq\theta(x)}\partial_\mu\phi(x) - ieqA_\mu(x)\,e^{-iq\theta(x)}\phi(x),$$

[类似的讨论也适用于式(I-5-9b).] 所以为使式(I-5-9)成立只须下式成立：

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - e^{-1}\partial_\mu\theta(x). \tag{I-5-10}$$

上式起到“一箭双雕”的作用：首先，它保证 $\mathscr{L}_1$ 在式(I-5-1)的变换下不变；其次，因为它无非是熟知的电磁4势的规范变换式(与小节6.6.5的 $\tilde{A} \equiv A + d\chi$ 实质一样)，$A_\mu(x)$ 按此式变换时自然有 $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$，于是 $\mathscr{L}'_{EM} = \mathscr{L}_{EM}$. 可见，只要 $A_\mu(x)$ 在式(I-5-1)的变换下按式(I-5-10)变换，就可保证 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_{EM}$ (从而 $\mathscr{L}$)不变.

以上虽然以复标量场为例讨论，但其结论适用于所有带电粒子场与电磁场的耦合系统，包括人们最熟悉的电子、质子(Dirac场)与电磁场的耦合系统.① 关键结论是：当以下三个条件满足时，系统的总拉氏密度 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_{EM}$ 在局域规范变换(I-5-1)下不变：

(1)自由带电粒子场 $\phi(x)$ 的拉氏密度 $\mathscr{L}_0$ 在整体规范变换(I-4-4)下不变；

(2)与带电粒子场相应的电磁4势 $A_\mu(x)$ 在局域规范变换下按式(I-5-10)变换；

(3) $\mathscr{L}_1$ 是用 D_μ 取代自由带电粒子场的 $\mathscr{L}_0$ 中的 ∂_μ 的结果. 例如，设

$$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_0(\phi(x), \partial_\mu\phi(x);\ \bar{\phi}(x), \partial_\mu\bar{\phi}(x)),$$

则

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0(\phi(x), D_\mu\phi(x);\ \bar{\phi}(x), D_\mu\bar{\phi}(x)).$$

这种由 $\mathscr{L}_0$ 求 $\mathscr{L}_1$ 的做法称为**最小替代**(minimal replacement)**法则**或**最小耦合原理**(principle of minimal coupling).

其实这种讨论可以说是对我们熟悉的电磁理论的一种“倒装式”的讨论. 我们

① 在粒子物理学的早期，人们认为质子(及中子)场也是Dirac场.

熟悉的理论是：设闵氏时空中存在带电粒子流(4 电流密度为 J^a)(最常见的是电子、质子流)，则它们激发电磁场 F_{ab}. 如果用4势 A_a 描述，则对同一 F_{ab} 而言 A_a 并不唯一，两个4势 A_a 和 A'_a 对应于同一 F_{ab} 当且仅当 A_a 和 A'_a 满足规范变换条件 $A'_a = A_a + (\mathrm{d}\chi)_a$ [即式(I-5-10)]. 在电磁理论的这种"正装式"讲法中，我们早已知道一旦存在带电粒子场就必然存在电磁场，两者之间有相互作用(总体的能、动量守恒而各自的能、动量不守恒). 反之，在现在这种"倒装式"的讨论中，我们暂时(假装不懂得"正装式"的理论)只知道有带电粒子场而不知道它伴有电磁场，并发现其 $\mathscr{L}_0$ 在局域规范变换下不可能不变；然而从物理角度考虑，$\mathscr{L}$ 应有局域规范变换下的不变性，正是这种局域规范不变性"逼"出了电磁场的存在性，同时还"逼"出其4势 A_μ 必须按式(I-5-10)变换. 这种思考对于推广到更复杂的情况(内部变换群为非阿贝尔群)大有裨益. 这一讨论方式还有一个副产品. 自由复标量场的 $\mathscr{L}_0$ 含有两项，第一项 $-(\partial^\mu\bar{\phi})\partial_\mu\phi$ 是场量的一阶导数的平方项，可称为"动能项"，第二项 $-m^2\phi\bar{\phi}$ 可称为"质量项". 与此不同，电磁场的

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu)\,\partial^{[\mu}A^{\nu]}$$

只含动能项而不含质量项，这意味着其相应的量子(光子)的静质量为零. 正是因为 $\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ 只含动能项才使 $\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ 在 A_μ 的规范变换[式(I-5-10)]下不变，只要补上与 $m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ 成正比的非零质量项，这种不变性便告消失. 可见，局域规范不变性还"逼"出了光子静质量为零这一重要结论.

[选读 I-5-1]

从经典场的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 出发用变分原理可求得该场的运动方程，小节15.1.2曾分别对自由实标量场和无源电磁场导出过运动方程 $\partial^\mu\partial_\mu\phi - m^2\phi = 0$ (KG 方程)和 $\partial^\nu\partial_\nu A_\mu = 0$. 现在关心复标量场. 既然复标量粒子带电，其所在空间就有电磁场，因此更实际的情况不是自由复标量场而是复标量场与电磁场并存的耦合系统. 式(I-5-8)的 $\mathscr{L}$ 正是这个系统的总拉氏密度. 从这个 $\mathscr{L}$ 出发对 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 做变分得

$$[(\partial^\mu - \mathrm{i}eqA^\mu)(\partial_\mu - \mathrm{i}eqA_\mu) - m^2]\phi = 0 \quad 和 \quad [(\partial^\mu + \mathrm{i}eqA^\mu)(\partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu) - m^2]\bar{\phi} = 0. \qquad (\text{I-5-11})$$

这就是与电磁场耦合的复标量场的运动方程，当 $A_\mu = 0$ 时回到KG方程. 从式(I-5-8)的 $\mathscr{L}$ 出发对 A_μ 做变分(并利用洛伦兹条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$)则得 A_μ 的运动方程

$$\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = 4\pi[-\mathrm{i}eq(\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \bar{\phi}\partial^\mu\phi) + 2e^2q^2\phi\bar{\phi}A^\mu]. \qquad (\text{I-5-12})$$

与有源电磁场的运动方程 $\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = -4\pi J^\mu$ [式(6-6-31)]对比可知上式右边扮演电磁场源的角色，相应的4电流密度为

$$J^\mu = \mathrm{i}eq(\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \bar{\phi}\partial^\mu\phi) - 2e^2q^2\phi\bar{\phi}A^\mu, \tag{I-5-13}$$

当 $A_\mu = 0$ 时回到式(I-4-11). 既然电磁场与复标量场组成耦合系统, 物理上不难相信这电磁场的源就是复标量粒子的电荷及其相应的电流, 所以对式(I-5-13)右边第一大项不难理解. 比较费解的是第二大项, 它除了含有 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 外还涉及 A^μ 自身. 不过此项非有不可, 因为缺少它就不能保证 ① J^μ 的规范不变性; ②电荷的守恒性($\partial_\mu J^\mu = 0$). 事实上, 由 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 可知 ∂_μ 作用于式(I-5-12)左边得零, 但借式(I-5-11)可知 ∂_μ 作用于式(I-5-12)左边第一项不为零, 补上第二项才有 $\partial_\mu J^\mu = 0$. 不难验证式(I-5-13)可改写为

$$J^\mu = \mathrm{i}eq(\phi \mathrm{D}^\mu\bar{\phi} - \bar{\phi}\mathrm{D}^\mu\phi), \tag{I-5-13′}$$

这正是对无电磁场时的式(I-4-11)做替代 $\partial_\mu \mapsto \mathrm{D}_\mu$ 的结果. **[选读 I-5-1 完]**

I.5.2 非阿贝尔情况下的局域规范不变性(Yang-Mills 理论)

现在把上小节的复标量场推广为小节 I. 4. 2 中的多分量粒子场 $\phi(x)$, 并仍假定它的自由拉氏密度 $\mathscr{L}_0$ 在整体规范变换(I-4-23)下不变, 然后关心系统在局域规范变换

$$\phi'(x) = U(\vec{\theta}(x))\phi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}\phi(x), \quad \overline{\phi'}(x) = \bar{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} = \bar{\phi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)} \tag{I-5-14}$$

下是否还有不变性, 其中 $U(\vec{\theta}(x)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}$ 是式(I-4-21′)的局域化, 内部变换群及其表示群仍分别记作 G 和 $\hat{G}$. 上小节的复标量场 $\phi(x)$ 是现在情况的特例, 在那里, 为了保证系统在局域规范变换下的不变性, 必须认为 $\phi(x)$ 场伴有一个附加场(电磁场), 其4势 A_a 以适当方式变换. 受此启发, 我们做如下猜想:

(1)多分量复粒子场 $\phi(x)$ 也伴有 $R(\equiv \dim G)$ 个附加场, 称为**规范场**(gauge field)或 YM 场(Yang-Mills 场的简称), 相应地也有 R 个4势(叫**规范势**), 这是闵氏时空中的 R 个余矢场 $\{A_a^r \mid r = 1,\cdots,R\}$, 其坐标分量记作 $A_\mu^r(x)$.

(2)全系统的总拉氏密度 $\mathscr{L}$ 也可以表为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}, \tag{I-5-15}$$

其中 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ 是 YM 场的拉氏密度(稍后将给出表达式), $\mathscr{L}_1$ 则取如下形式:

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0(\phi(x),\ \mathrm{D}_\mu\phi(x);\ \bar{\phi}(x),\ \mathrm{D}_\mu\bar{\phi}(x)), \tag{I-5-16}$$

即是以 $\mathrm{D}_\mu\phi(x)$ 和 $\mathrm{D}^\mu\bar{\phi}(x)$ 分别代替 $\mathscr{L}_0$ 中的 $\partial_\mu\phi(x)$ 和 $\partial_\mu\bar{\phi}(x)$ (最小替代)的结果, 式中协变导数算符 D_μ 对 $\phi(x)$ 和 $\bar{\phi}(x)$ 的作用分别定义为

$$\mathrm{D}_\mu\phi(x) \equiv \partial_\mu\phi(x) - \mathrm{i}k\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)\phi(x), \tag{I-5-17a}$$

$$\mathrm{D}_{\mu}\bar{\phi}(x) \equiv \partial_{\mu}\bar{\phi}(x) + \mathrm{i}k\bar{\phi}(x)\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x), \tag{I-5-17b}$$

其中 k 为耦合常数①[当 $G=\mathrm{U}(1)$ 时 $k=e$],

$$\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x) \equiv L_1 A^1_{\mu}(x)+\cdots+L_R A^R_{\mu}(x) \equiv L_r A^r_{\mu}(x). \tag{I-5-18}$$

于是, 如果 $\mathrm{D}_{\mu}\phi(x)$ 和 $\mathrm{D}^{\mu}\bar{\phi}(x)$ 在式(I-5-14)的变换下按

$$\text{(a) } \mathrm{D}'_{\mu}\phi'(x) = U(\vec{\theta}(x))\,\mathrm{D}_{\mu}\phi(x), \quad \text{(b) } \mathrm{D}'_{\mu}\bar{\phi}'(x) = [\mathrm{D}_{\mu}\bar{\phi}(x)]\,U(\vec{\theta}(x))^{-1} \tag{I-5-19}$$

变换, 则 $\mathscr{L}_1$ 在式(I-5-14)的变换下不变. 现在的问题仍然是: 为保证式(I-5-19)成立, $A^r_{\mu}(x)$ 应以怎样的方式变换?

式(I-5-19a)左边 $=\partial_{\mu}[U(\vec{\theta}(x))\phi(x)] - \mathrm{i}k\vec{L}\cdot\vec{A}'_{\mu}(x)U(\vec{\theta}(x))\phi(x)$

$$= U(\vec{\theta}(x))\partial_{\mu}\phi(x) + [\partial_{\mu}U(\vec{\theta}(x))]\phi(x) - \mathrm{i}k\vec{L}\cdot\vec{A}'_{\mu}(x)U(\vec{\theta}(x))\phi(x),$$

式(I-5-19a)右边 $= U(\vec{\theta}(x))\partial_{\mu}\phi(x) - \mathrm{i}kU(\vec{\theta}(x))\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x)\phi(x)$,

所以, 要使式(I-5-19a)成立只须下式成立: ②

$$-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{A}'_{\mu}(x) = U(\vec{\theta}(x))\,(-\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x))\,U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}[\partial_{\mu}U(\vec{\theta}(x))]\,U(\vec{\theta}(x))^{-1}. \tag{I-5-20}$$

引入简化记号

$$\hat{A}_{\mu}(x) \equiv -\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x) \equiv -\mathrm{i}L_r A^r_{\mu}(x) \in \hat{\mathscr{G}}, \tag{I-5-21}$$

则式(I-5-20)成为

$$\hat{A}'_{\mu}(x) = U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_{\mu}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}[\partial_{\mu}U(\vec{\theta}(x))]\,U(\vec{\theta}(x))^{-1}. \tag{I-5-20′}$$

可见式(I-5-20′)成立保证式(I-5-19a)成立. 不难验证它也保证式(I-5-19b)成立, 因而保证 $\mathscr{L}_1' = \mathscr{L}_1$. 当 $G=\mathrm{U}(1)$, $\hat{G} \equiv \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$ 时

$$U(\vec{\theta}(x)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}, \quad \hat{A}_{\mu}(x) = -\mathrm{i}L_1 A^1_{\mu}(x) = -\mathrm{i}qA^1_{\mu}(x), \quad k=e,$$

故式(I-5-20′)归结为 $A'^1_{\mu}(x) = A^1_{\mu}(x) - e^{-1}\partial_{\mu}\theta(x)$, 这就是式(I-5-10).

最后, 为保证 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ 在变换(I-5-20′)下不变, 还要找到 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ 的适当定

---

① 对 $G=G_1\times G_2$ 的情况, D_{μ} 可以是 $\mathrm{D}_{\mu}\equiv\partial_{\mu} - \mathrm{i}k_1\vec{L}^{(1)}\cdot\vec{A}^{(1)}_{\mu} - \mathrm{i}k_2\vec{L}^{(2)}\cdot\vec{A}^{(2)}_{\mu}$, 即可以存在两个耦合常数, 详见戴元本(2005).

② 式(I-5-20)左边是 $\hat{\mathscr{G}}$ 的元素, 右边第一项也是. (它可简记为 gBg^{-1}, 其中 $B\equiv -\mathrm{i}\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x)\in\hat{\mathscr{G}}$, 而由附录G习题19知 $gBg^{-1} = \mathscr{Ad}_g B \in \hat{\mathscr{G}}$.) 为保证式(I-5-20)有意义, 右边第二项也应是 $\hat{\mathscr{G}}$ 的元素. 可证(略)的确如此.

义. 这可从电磁场的 $\mathscr{L}_{\text{EM}} = -(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 得到启发. 既然在 YM 场的情况下已引入 R 个规范势 $A^r_\mu(x)$, 相应地就应有 R 个规范场强 $F^r_{\mu\nu}(r=1,\cdots,R)$, 定义它们为

$$F^r_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A^r_\nu(x) - \partial_\nu A^r_\mu(x) + k\sum_{s,t=1}^{R} C^r{}_{st}A^s_\mu(x)A^t_\nu(x), \quad r=1,\cdots,R, \tag{I-5-22}$$

其中 $C^r{}_{st}$ 是 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 在基底 $\{e_r\}$ 下的结构常数. [当 $G=\text{U}(1), \hat{\mathscr{G}}=\mathscr{U}(1)$ 时 $R=1$, $C^r{}_{st}=0$, 上式退化为电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 与 4 势的熟知关系式 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.] 再把 $\mathscr{L}_{\text{EM}} = -(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 作自然推广便得 $\mathscr{L}_{\text{YM}}$ 的定义:

$$\mathscr{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{16\pi}\sum_{r=1}^{R}F^r_{\mu\nu}F^{r\mu\nu}, \text{①} \quad (\text{对}\ \mu,\nu\ \text{的取和已默认}) \tag{I-5-23}$$

其中 $F^{r\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F^r_{\alpha\beta}$. 所余任务就是证明 $\mathscr{L}_{\text{YM}}$ 在变换(I-5-20)下不变. 引入简化记号

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) \equiv -\mathrm{i}L_r F^r_{\mu\nu}(x) \in \hat{\mathscr{G}}, \tag{I-5-24}$$

则式(I-5-22)可改写为(证明留作习题)

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(x) + k[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x)], \tag{I-5-25}$$

其中 $[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x)]$ 是李代数元 $\hat{A}_\mu(x)$ 与 $\hat{A}_\nu(x)$ 的李括号, 意义明确. 由此可证(习题) $\hat{F}_{\mu\nu}(x)$ 在式(I-5-14)及(I-5-20′)的联合变换下的变换关系为

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) \mapsto \hat{F}'_{\mu\nu}(x) = U(\vec{\theta}(x))\hat{F}_{\mu\nu}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1}, \tag{I-5-26}$$

不妨简写为

$$\hat{F}'_{\mu\nu} = U\hat{F}_{\mu\nu}U^{-1}. \tag{I-5-26′}$$

由此就可证明 $\mathscr{L}_{\text{YM}}$ 在变换(I-5-20′)下不变, 即 $\mathscr{L}'_{\text{YM}}(x) = \mathscr{L}_{\text{YM}}(x)$. 见选读 I-5-3.

注 1[选读]　如前所述, 一般的规范场论涉及一个内部变换群 G 及其一个或数个(设为 I 个)表示群 $\hat{G}_i\ (i=1,\cdots,I)$, 即存在 I 个同态映射 $\rho_i: G\to\hat{G}_i$. 小节 I.4.1 末提供了一个简单的例子, 其中 $G=\text{U}(1)$, 表示群只有一个, 即

$$\hat{G} = \{\text{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\theta},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\theta} \mid \theta\in\mathbb{R}\}.$$

这一例子又可分为两种情况: ① $q_1,\cdots,q_N$ 不全为零, 这时 $\rho: \text{U}(1)\to\hat{G}$ 是同构($\hat{G}$

---

① 因 $C^r{}_{st}$ 依赖于 $\mathscr{G}$ 的基底 $\{e_r\}$, 故由式(I-5-25)定义的 $F^r_{\mu\nu}$ 也依赖于基底. 定义式(I-5-23)中的 $F^r_{\mu\nu}$ 应为正交归一基底 $\{e_r\}$ (含义及理由见选读 I-5-3)所定义的 $F^r_{\mu\nu}$.

是忠实表示); ② $q_1=\cdots=q_N=0$, 这时 $\hat{G}$ 只含恒等元 $\hat{e}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1)$, ρ 是同态而非同构. 情况②虽然没有什么实用意义, 但可作为一个最简单、最极端的例子帮助读者想像 $\rho: G\to\hat{G}$ 不是同构的情况. 现在回到本注记开头的最一般情况. 虽然无法保证所有 $\rho_i: G\to\hat{G}_i$ 都是同构(甚至无法保证至少有一个 ρ_i 是同构), 但不妨认为规范场论是在如下默认前提下讨论的:

默认前提 若 $g\in G$ 满足 $\rho_i(g)=\hat{e}_i\in\hat{G}_i$, $i=1,\cdots,I$, 则 $g=e\in G$.

下面说明默认这一前提的理由. 假定这一前提不成立, 即 G 包含满足如下条件的非独点子集 $N\subset G$:

$$g\in N \Leftrightarrow \rho_i(g)=\hat{e}_i\in\hat{G}_i,\quad i=1,\cdots,I,$$

则易证 N 是 G 的正规子群(定义见§G.1). 由于真正用来作用于粒子场 $\phi(x)$ 的群元都是表示群(而非 G 本身)的元素, 所以, 假定 G 包含了满足上述条件的正规子群 N, 就应认为当初把 G 选为内部变换群时取得“太大”了, 完全可以用“较小”的商群 $G'\equiv G/N$ 代替(用正规子群构造商群的做法类似于用理想构造商代数的做法, 后者见选读 G-3-1), 相应地可以自然定义同态映射 $\rho'_i: G'\to\hat{G}_i$. 此举即可保证 G' 和全部的 ρ'_i 满足上面的默认前提. 由此, 利用正规子群与理想的对应关系(见选读 G-3-1 注 2), 就可保证

$$\rho'_{i*}(A)=0,\quad i=1,\cdots,I \Rightarrow A=0\in\mathscr{G},\quad \text{其中}\ \mathscr{G}\ \text{是}\ G\ \text{的李代数.} \tag{I-5-27}$$

此式在不少情况下都很有用, 例如, 见式(I-7-8)后第一行.

[选读 I-5-2]

为帮助读者更好地理解正文的内容, 本选读介绍笔者对与规范场论有关的部分数学问题的认识, 特别是, 例如, 对 $\overline{\phi}(x)$ 的理解. 规范场论总要涉及内部变换李群 G 及其表示群 $\hat{G}$ (一个或多个). 所谓“$\hat{G}$ 的表示空间是 N 维复矢量空间 V”, 是指任一 $\hat{g}\in\hat{G}$ 都是从 V 到 V 的可逆线性映射, 即 $\hat{g}\in\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ (见中册小节 G.5.4 开头). 为适应规范场论的需要, 还须对 V 和 $\hat{G}$ 提出某些要求. 通常要求 V 是(复)内积空间(见中册§B.1 定义 1), 而且 $\hat{g}$ 的作用保内积, 于是 $\hat{G}$ 就是酉群 $\mathrm{U}(N)$ 或其李子群. 然而, 某些物理场(如 Dirac 场)的规范理论不满足这一要求, 为了把这些物理场也纳入我们的理论框架, 本附录把对 V 的要求略加放宽: 保留§B.1 定义 1 的条件(a), (b), (c)而把条件(d)弱化为只要求内积非退化而不要求内积正定, 对 $\hat{g}$ 则仍要求保内积. 以 $\tilde{\mathrm{U}}(V)$ 代表 V 上全体这样的保内积映射构成的群[也是 $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ 的李子群], 则我们要求 $\hat{G}$ 是 $\tilde{\mathrm{U}}(V)$ 或其李子群. 一个微妙的问题是 $\overline{\phi}(x)$ 的含义. $\dim V=1$ 时 $\phi(x)$ 是复数, $\overline{\phi}(x)$ 自然定义为 $\phi(x)$ 的共轭复数. 但在 $\dim V>1$ 时尚未给 $\overline{\phi}(x)$ 下过定义. 既然 $\phi(x)\in V$, 我们就规定 $\overline{\phi}(x)\in V^*$ (其中 V^* 是 V 的对偶空间), 其定义是

[以下把$\phi(x)$和$\bar{\phi}(x)$简记作ϕ和$\bar{\phi}$]

$$\bar{\phi}(\psi) := (\phi,\psi),\ \forall \psi \in V. \quad [(\phi,\psi)\text{代表}\phi\text{与}\psi\text{的内积}] \tag{I-5-28}$$

根据中册命题B-1-1(用于有限维的V), 式(I-5-28)定义了一个从V到V^*的一一到上映射, 即$\phi \mapsto \bar{\phi}$ ($\bar{\phi}$与ϕ的关系就是左、右矢的关系), 故V^*的任一元素都可表为$\bar{\phi}$, 其中$\phi \in V$. 于是V上的内积自然在V^*上诱导一个内积, 定义为

$$(\bar{\phi},\bar{\psi}) := (\psi,\phi)\ \forall \bar{\phi},\bar{\psi} \in V^*.$$

因为G的表示群$\hat{G}$是$\tilde{\mathrm{U}}(V)$或其李子群, 所以存在同态$\rho : G \to \tilde{\mathrm{U}}(V)$. 这$\rho$又自然诱导出映射$\bar{\rho} : G \to \mathscr{L}(V^*)$, 定义为

$$\bar{\rho}(g)\bar{\phi} := \overline{\rho(g)\phi},\quad \forall g \in G,\ \bar{\phi} \in V^*. \tag{I-5-29}$$

其中$\bar{\rho}(g)\bar{\phi}$代表$\bar{\rho}(g) \in \mathscr{L}(V^*)$对$\bar{\phi} \in V^*$的作用结果, $\overline{\rho(g)\phi}$代表$\rho(g) \in \tilde{\mathrm{U}}(V)$对$\phi \in V$的作用结果所对应的左矢[读者不难验证$\bar{\rho}(g)$对$\bar{\phi}$的作用的确是线性的]. $\rho(g)$保内积导致$\bar{\rho}(g)$也保内积, 因为$\forall \bar{\phi},\bar{\psi} \in V^*$有

$$(\bar{\rho}(g)\bar{\phi}, \bar{\rho}(g)\bar{\psi}) = (\overline{\rho(g)\phi}, \overline{\rho(g)\psi}) = (\rho(g)\psi, \rho(g)\phi) = (\psi,\phi) = (\bar{\phi},\bar{\psi}),$$

[其中第一步用到式(I-5-29), 第二、四步用到$(\bar{\phi},\bar{\psi}) \equiv (\psi,\phi)$, 第三步是因为$\rho(g)$保内积.] 于是$\bar{\rho}(g) \in \tilde{\mathrm{U}}(V^*)$, 故可写$\bar{\rho} : G \to \tilde{\mathrm{U}}(V^*)$.

命题 I-5-1 $\bar{\rho} : G \to \tilde{\mathrm{U}}(V^*)$是同态, 因而也是$G$的表示.

证明 因$\forall \phi,\psi \in V$有

$$\begin{aligned}[\bar{\rho}(g)\bar{\phi}](\psi) &= \overline{\rho(g)\phi}\,(\psi) = (\rho(g)\phi,\psi) = (\rho(g)^{-1}\rho(g)\phi,\ \rho(g)^{-1}\psi) \\ &= (\phi, \rho(g)^{-1}\psi) = \bar{\phi}(\rho(g)^{-1}\psi) = [\bar{\phi} \circ \rho(g)^{-1}](\psi),\end{aligned} \tag{I-5-30}$$

[其中第一步用到式(I-5-29), 第二、五步用到式(I-5-28), 第三步用到$\rho(g)$保内积.] 所以

$$\bar{\rho}(g)\bar{\phi} = \bar{\phi} \circ \rho(g)^{-1}. \tag{I-5-31}$$

于是$\forall g_1, g_2 \in G, \bar{\phi} \in V^*$有

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(g_1)[\bar{\rho}(g_2)\bar{\varphi}] &= [\bar{\rho}(g_2)\bar{\varphi}] \circ \rho(g_1)^{-1} = [\bar{\varphi} \circ \rho(g_2)^{-1}] \circ \rho(g_1)^{-1} \\ &= \bar{\varphi} \circ [\rho(g_2)^{-1} \circ \rho(g_1)^{-1}] = \bar{\varphi} \circ [\rho(g_1) \circ \rho(g_2)]^{-1} = \bar{\varphi} \circ \rho(g_1 g_2)^{-1} = \bar{\rho}(g_1 g_2)\bar{\varphi},\end{aligned}$$

[其中第一、二、六步用到式(I-5-31), 第五步用到ρ的同态性.] 可见

$$\bar{\rho}(g_1 g_2) = \bar{\rho}(g_1)\bar{\rho}(g_2). \qquad \square$$

在表示空间V中选定基底$\{\varepsilon_n\}$后，$\phi \in V$就可表为列阵，故$\bar{\phi} \in V^*$是行阵(参见§2.3 例 1)，而且似乎应有$\bar{\phi} = [\bar{\phi}_1,\cdots,\bar{\phi}_N]$．然而应强调此式只在满足一定条件时成立．令$\phi^\dagger \equiv [\bar{\phi}_1,\cdots,\bar{\phi}_N]$，我们来看在什么条件下有$\bar{\phi} = \phi^\dagger$．把$\phi$和$\psi$用基矢展开：

$$\phi = \sum\nolimits_{n=1}^N \phi_n \varepsilon_n, \quad \psi = \sum\nolimits_{m=1}^N \psi_m \varepsilon_m ,$$

则

$$\bar{\phi}(\psi) = (\sum\nolimits_{n=1}^N \phi_n \varepsilon_n, \sum\nolimits_{m=1}^N \psi_m \varepsilon_m) = \sum\nolimits_{n,m=1}^N \bar{\phi}_n \psi_m (\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sum\nolimits_{n,m=1}^N \bar{\phi}_n \psi_m H_{nm} , \quad \text{(I-5-32)}$$

其中$H_{nm} \equiv (\varepsilon_n, \varepsilon_m)$．如果内积正定，则可选正交归一基底$\{\varepsilon_n\}$使$H_{nm} = \delta_{nm}$，这时式(I-5-32)简化为$\bar{\phi}(\psi) = \sum\nolimits_{n=1}^N \bar{\phi}_n \psi_n = \phi^\dagger(\psi)$，因而$\bar{\phi} = \phi^\dagger$．然而，如果内积非正定，则对任何基底都不会有$H_{nm} = \delta_{nm}$．把$\psi$和$\phi^\dagger$分别看作列阵和行阵，即

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \qquad \phi^\dagger = [\bar{\phi}_1, \cdots, \bar{\phi}_N],$$

便知ψ和$\phi^\dagger$的矩阵元(复数)可分别表为$\psi_{m1} = \psi_m$，${\phi^\dagger}_{1n} = \bar{\phi}_n$，故式(I-5-32)可改写为

$$\bar{\phi}(\psi) = \sum\nolimits_{n,m=1}^N {\phi^\dagger}_{1n} H_{nm} \psi_{m1} = \sum\nolimits_{m=1}^N (\phi^\dagger H)_{1m} \psi_{m1} = (\phi^\dagger H)\psi , \quad \text{(I-5-33)}$$

所以

$$\bar{\phi} = \phi^\dagger H . \qquad \text{(行阵等式)} \quad \text{(I-5-34)}$$

当内积正定且基底正交归一时$H = I$(单位阵)，上式才回到$\bar{\phi} = \phi^\dagger$．仿照

$$(\phi, \psi) = \bar{\phi}(\psi) = \phi^\dagger H \psi$$

可写出

$$(\rho(g)\phi, \rho(g)\psi) = [\rho(g)\phi]^\dagger H \rho(g)\psi = \phi^\dagger \rho(g)^\dagger H \rho(g)\psi , \quad \text{(I-5-35)}$$

[第一个等号左边的$\rho(g)$是线性变换，右边的$\rho(g)$是该变换的矩阵.] 故保内积条件$(\phi,\psi) = (\rho(g)\phi, \rho(g)\psi)$可改写为

$$\phi^\dagger H \psi = \phi^\dagger \rho(g)^\dagger H \rho(g)\psi , \quad \text{(I-5-36)}$$

因而$H = \rho(g)^\dagger H \rho(g)$，于是

$$\rho(g)^{-1} = H^{-1} \rho(g)^\dagger H, \quad \forall g \in G . \quad \text{(I-5-37)}$$

这就是保内积条件的矩阵表述．当内积正定而且基底正交归一时上式回到$\rho(g)^{-1} = \rho(g)^\dagger$，即$\rho(g)$是酉矩阵．这是当然的，因为这时$\hat{G}$是酉群$\mathrm{U}(V)$或其李

子群.

我们曾用式(I-5-14)定义局域规范变换$\phi'=U\phi$, $\overline{\phi'}=\bar{\phi}U^{-1}$. 现在可看出第二式其实是第一式的产物, 因为

$$\overline{\phi'}=\phi'^{\dagger}H=(U\phi)^{\dagger}H=\phi^{\dagger}U^{\dagger}H=(\phi^{\dagger}H)(H^{-1}U^{\dagger}H)=\bar{\phi}U^{-1}, \qquad \text{(I-5-38)}$$

其中第一步用到式(I-5-34), 最末一步用到式(I-5-34)和(I-5-37)[式(I-5-37)中的$\rho(g)$就是U]. 式(I-5-38)其实就是(I-5-31)的矩阵形式[用式(I-5-29)把(I-5-31)改写为$\overline{\rho(g)\phi}=\bar{\phi}\circ\rho(g)^{-1}$就易于看出]. **[选读 I-5-2 完]**

[选读 I-5-3]

本选读补证$\mathscr{L}'_{\text{YM}}=\mathscr{L}_{\text{YM}}$. 物理学中常见的内部变换群$G$通常可分为简单的和复杂的两种, 前者指$G$为U(1)或单紧李群, 后者指$G$为若干个U(1)和(或)若干个单紧李群的直积. 规范场论教材(含本书)通常只介绍简单情况下$\mathscr{L}'_{\text{YM}}=\mathscr{L}_{\text{YM}}$的证明, 据此, 原则上可"组装"出复杂情况的证明(但还需要进一步的知识). $G=\text{U}(1)$的情况已在小节I.5.1中解决, 现在要对G为单紧李群的情况给出证明. 场论中遇到的单紧李群G的李代数$\mathscr{G}$通常有负定的嘉当度规K(见中册§G.8), 即$\mathscr{G}$有正交归一基$\{e_r\}$使$K(e_r,e_s)=-\delta_{rs}$. 规范场论可以涉及不止一个物质场(记作A,B,$\cdots$), 每个场(例如A)相应于一个表示, 即$\rho_{\text{A}}: G\to\hat{G}_{\text{A}}$, 总拉氏密度$\mathscr{L}$等于物质场的拉氏密度$\mathscr{L}_{\text{A}},\mathscr{L}_{\text{B}},\cdots$以及YM场的拉氏密度$\mathscr{L}_{\text{YM}}$之和. 由定义式(I-5-23)可知$\mathscr{L}_{\text{YM}}$与表示无关, 故可任选一个表示以助证明. 由$G$是单李群可证上述表示要么是忠实的要么是平凡的[指$\rho(g)=\hat{e}\in\hat{G}\ \forall g\in G$], 而所有表示中必有非平凡者(否则"这个场论的内部变换群是G"的提法就毫无意义), 因此总可选一个忠实表示, 就记作$\rho: G\to\hat{G}$. 但$\hat{G}$是矩阵群保证$\hat{G}=\text{GL}(V)$[即附录G的GL(m)], 故也可写ρ: $G\to\text{GL}(V)$, 于是$\rho_*: \mathscr{G}\to\mathscr{GL}(V)=\mathscr{L}(V)$就是$\mathscr{G}$的一个表示, 而且$\rho$为忠实表示导致$\rho_*$为忠实表示. 可以证明, 单李群$G$的李代数$\mathscr{G}$的忠实表示的广义嘉当度规(见中册§G.8末)$\tilde{K}$满足$\tilde{K}=\lambda_\rho K$, 其中$K$为$\mathscr{G}$的嘉当度规, λ_ρ是非零实数. 设$\{e_r\}$是正交归一基底, 令$F_{\mu\nu}(x)\equiv e_rF^r_{\mu\nu}(x)\in\mathscr{G}$并简记作$F_{\mu\nu}$, 则$\rho_*F_{\mu\nu}=\hat{F}_{\mu\nu}\in\hat{\mathscr{G}}$. 为证$\mathscr{L}'_{\text{YM}}=\mathscr{L}_{\text{YM}}$可先证下式(稍后补证):

$$16\pi\lambda_\rho\mathscr{L}_{\text{YM}}=\text{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}), \quad (\text{右边是矩阵}\ \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}\ \text{的迹}) \qquad \text{(I-5-39)}$$

然后再证$\text{tr}(\hat{F}'_{\mu\nu}\hat{F}'^{\mu\nu})=\text{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu})$. 这很容易, 因为

$$\text{tr}(\hat{F}'_{\mu\nu}\hat{F}'^{\mu\nu})=\text{tr}(U\hat{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\hat{F}^{\mu\nu}U^{-1})=\text{tr}(U^{-1}U\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu})=\text{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}),$$

其中第一步用到式(I-5-26′), 第二步用到tr号下矩阵的轮换性.

最后补证式(I-5-39):

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}) &= \mathrm{tr}[(\rho_* F_{\mu\nu})(\rho_* F^{\mu\nu})] = \mathrm{tr}[(\rho_* \textstyle\sum_{r=1}^R F^r_{\mu\nu} e_r)(\rho_* \sum_{s=1}^R F^{s\mu\nu} e_s)] \\ &= \textstyle\sum_{r,s=1}^R F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \mathrm{tr}[(\rho_* e_r)(\rho_* e_s)] = \sum_{r,s=1}^R F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \tilde{K}(e_r, e_s) \\ &= \lambda_\rho \textstyle\sum_{r,s=1}^R F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} K(e_r, e_s) = -\lambda_\rho \sum_{r,s=1}^R F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \delta_{rs} = 16\pi \lambda_\rho \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}\,,\end{aligned}$$

其中第四步用到式(G-8-20)[请注意 $\rho_*(e_r) = \beta(e_r)$], 第五步用到 $\tilde{K} = \lambda_\rho K$, 第六步用到 $K(e_r, e_s) = -\delta_{rs}$. 第七步用到式(I-5-23).

以上证明过程对内部变换群的范围作了限制, 其实取消这种限制也能证明 $\mathscr{L}'_{\mathrm{YM}} = \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$, 不过 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ 不再用式(I-5-23)定义, 略. **[选读 I-5-3 完]**

§I.6 截面的物理意义

本节(及下两节)要用丛语言重新表述 4 维闵氏时空的规范场论. 设理论的内部变换群为 G, 其表示群为 $\hat{G}$ (存在同态映射 $\rho: G \to \hat{G}$), 表示空间是复 N 维矢量空间 V (默认 V 中已选基底, 故可用矩阵语言). 为了用丛语言表述这一理论, 先以 $\mathbb{R}^4$ 为底流形、G 为结构群构造平凡主丛 $P = \mathbb{R}^4 \times G$, 其中 G 对 P 的自由右作用

$$R: (\mathbb{R}^4 \times G) \times G \to \mathbb{R}^4 \times G$$

由下式定义: $\forall g_1 \in G$, 定义 $R_{g_1}: \mathbb{R}^4 \times G \to \mathbb{R}^4 \times G$ 为

$$R_{g_1}(x, g_2) := (x, g_2 g_1), \quad \forall (x, g_1) \in \mathbb{R}^4 \times G\,.$$

设 $\sigma: \mathbb{R}^4 \to P$ 和 $\sigma': \mathbb{R}^4 \to P$ 是 P 的两个(整体)截面, 则 $\forall x \in \mathbb{R}^4$ 存在唯一的 $g(x) \in G$ 使

$$\sigma'(x) = \sigma(x) g(x)^{-1}\,. \tag{I-6-1}$$

这表明主丛的一个截面变换 $\sigma \mapsto \sigma'$ 给出 $\mathbb{R}^4$ 上的一个“群元场” g, 即映射 $g: \mathbb{R}^4 \to G$. 自然想到用群元 $g(x)$ 构造一个局域规范变换, 从而在丛理论与规范场论之间架起桥梁. 具体说, 令 $U(x) \equiv \rho(g(x)) \in \hat{G}$, 以 $U(x)$ 充当式(I-5-14)的 $U(\vec{\theta}(x))$ 作用于粒子场 $\phi(x) \in V$, 便得局域规范变换

$$\phi'(x) = U(x)\phi(x) = \rho(g(x))\phi(x)\ (\text{方阵乘列阵}). \tag{I-6-2}$$

可见主丛的一个截面变换 $\sigma \mapsto \sigma'$ 给出 $\mathbb{R}^4$ 上的粒子场 $\phi(x)$ 的一个局域规范变换 $\phi \mapsto \phi'$, 反之亦然. 为了得到进一步的物理结果, 再给 P 配上一个伴丛. 令 $F = V$ (ρ 的表示空间), 则任一 $f_1 \in F$ 都可看作一个 $N \times 1$ 的列阵. 再定义左作用 χ: $G \times F \to F$ 为

$$\chi_{g_1}(f_1) := \rho(g_1)(f_1) \text{ [方阵 } \rho(g_1) \text{ 乘以列阵 } f_1 \text{]}, \quad \forall g_1 \in G, f_1 \in F, \qquad \text{(I-6-3)}$$

便得到一个伴矢丛 Q . 因为 $\sigma(x) \in \pi^{-1}[x] \subset P$, 所以对 $\mathbb{R}^4$ 上的任一 F 值函数 f : $\mathbb{R}^4 \to F$ 有 $\sigma(x) \cdot f(x) \in \hat{\pi}^{-1}[x] \subset Q$. 我们记

$$\Phi(x) \equiv \sigma(x) \cdot f(x) \in Q .$$

既然 P 上的一个截面变换 $\sigma \mapsto \sigma'$ 给出一个群元场 $g : \mathbb{R}^4 \to G$, 而 $g(x)$ 又诱导出一个 $f'(x) \equiv \chi_{g(x)} f(x)$, 所以又可构造出另一个 $\Phi'(x) \equiv \sigma'(x) \cdot f'(x) \in Q$. 不过下式表明 $\Phi'(x) = \Phi(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &\equiv \sigma'(x) \cdot f'(x) = \sigma(x) g(x)^{-1} \cdot \chi_{g(x)} f(x) \\ &= \sigma(x) \cdot g(x)^{-1} \chi_{g(x)} f(x) \equiv \sigma(x) \cdot g(x)^{-1} g(x) f(x) \equiv \Phi'(x), \end{aligned}$$

其中第四步用到§I.3开头关于“把 $\chi_{g_1}(f_1)$ 简记作 $g_1 f_1$ ”的约定. 可能会提出质疑: 难道不用此简化记号就没有结论 $\Phi'(x) = \Phi(x)$ 吗?当然不是. 在上式的推导中除了这一简化记号外还用了另一简化记号, 即§I.3所说的“点乘号紧左边的 g_1 可移至紧右边”, 而这一结论的得出是以“把 $\chi_{g_1}(f_1)$ 简记作 $g_1 f_1$ ”为前提的. 同时使用这两个简化记号就会得出正确结果. 不用这些简化记号当然也可证明 $\Phi'(x) = \Phi(x)$, 为此只须证明 $\Phi'(x)$ 与 $\Phi(x)$ (作为 $P \times F$ 上的轨道)是同一轨道.

以上讨论说明 $\Phi(x)$ 与式(I-3-7)中的 v 的非常类似性. 前面已经指出该式可改写为 $v(x) \equiv (x, e_\mu|_x) \cdot f^\mu(x)$, 再把 (x, e_μ) 看作 x 点在某个截面映射下的像 $\sigma(x)$, 则 $v(x) = \sigma(x) \cdot f(x)$ 非常类似于现在的 $\Phi(x) = \sigma(x) \cdot f(x)$. 符号 $v(x)$ 代表 x 点的一个切矢(时空矢量), $f^\mu(x)$ 是 $v(x)$ 在标架 $e_\mu|_x$ 的分量, 当标架变为 $e'_\mu|_x$ 时分量相应地变为 $f'^\mu(x)$, 但矢量 $v(x)$ 不变(是绝对的). 类似地, 不妨把 $\Phi(x) = \sigma(x) \cdot f(x)$ 看作 x 点的一个“内部矢量”, 把 $\sigma(x)$ 看作 x 点的一个“**内部标架**(internal frame)”, 再把 $f(x) \in F = V$ 自然地改写为 $\phi(x) \in V$ 并把 $\phi(x)$ 看作 $\Phi(x)$ 在此标架的分量, 则当内部标架变为 $\sigma'(x)$ 时分量变为 $\phi'(x)$, 但内部矢量 $\Phi(x)$ 不变(因而是绝对的). 前已讲过, $\phi(x)$ 场[配以相应的规范势 $A_\mu(x)$]的总 $\mathscr{L}$ 在局域规范变换

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = U(x)\phi(x) \quad \text{[配以相应的变换 } \hat{A}_\mu(x) \mapsto \hat{A}'_\mu(x) \text{]}$$

下不变, 也可以说粒子场的状态在这一变换下不变, 现在看到 $\Phi(x)$ 正好描述这一状态, 因此最好把 $\Phi(x)$ 称为粒子场. 规范变换 $\phi(x) \mapsto \phi'(x)$ 所改变的只是粒子场的分量 $\phi(x)$ 而不是粒子场 $\Phi(x)$ 本身. 事实上, 在 $\phi(x)$ 变换为 $\phi'(x)$ 的同时内部标架也从 $\sigma(x)$ 变为 $\sigma'(x) = \sigma(x) g(x)^{-1}$, 而且这两种变换的搭配是如此适当, 以致于(绝对的)粒子场 $\Phi(x)$ 不变. 我们在§I.5中已经看到, 为了保证总拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在局域规范

变换(现在也可说主丛 P 的截面变换)下的不变性, 必须引入规范势 $A_\mu(x)$, 而且它在规范变换下必须按适当方式从 $A_\mu(x)$ 变为 $A'_\mu(x)$. 既然刚才已认识到 $\phi(x)$ 的规范变换 $\phi(x)\mapsto\phi'(x)$ 对应于一个绝对的(不变的)事物 $\Phi(x)$, 自然要问: 规范势的变换 $A_\mu(x)\mapsto A'_\mu(x)$ 是否也对应于一个绝对的事物?答案是肯定的, 详见下节(那里将证明规范势对应于主丛的联络). 进一步说, 为了保证总 $\mathscr{L}$ 不变, $\mathscr{L}_1$ 中涉及的、对 $\phi(x)$ 的导数应为协变导数 $\mathrm{D}_\mu\phi(x)$ [而不是偏导数 $\partial_\mu\phi(x)$], 它在规范变换下也要按适当方式变换, 所以还应追问: $\mathrm{D}_\mu\phi(x)$ 的变换是否也对应于一个绝对的事物?答案也是肯定的, 详见§I.9.

可见, 当 $P=\mathbb{R}^4\times G$ 中的 G 代表物理上的内部变换群时, 主丛 P 及其相应伴丛 Q 的截面有如下简单而重要的物理意义: 伴丛的一个截面 $\hat\sigma:\mathbb{R}^4\to Q$ 代表底流形上的一个粒子场, 主丛的一个截面 $\sigma:\mathbb{R}^4\to P$ 则代表对规范(体现为对内部标架)的一种选择, 见图 I-15. 其实这一结论也适用于非平凡主丛 $P(M,G)$ (其中 M 是4维流形)及其相应伴丛, 只不过截面前应加"局域"一词.

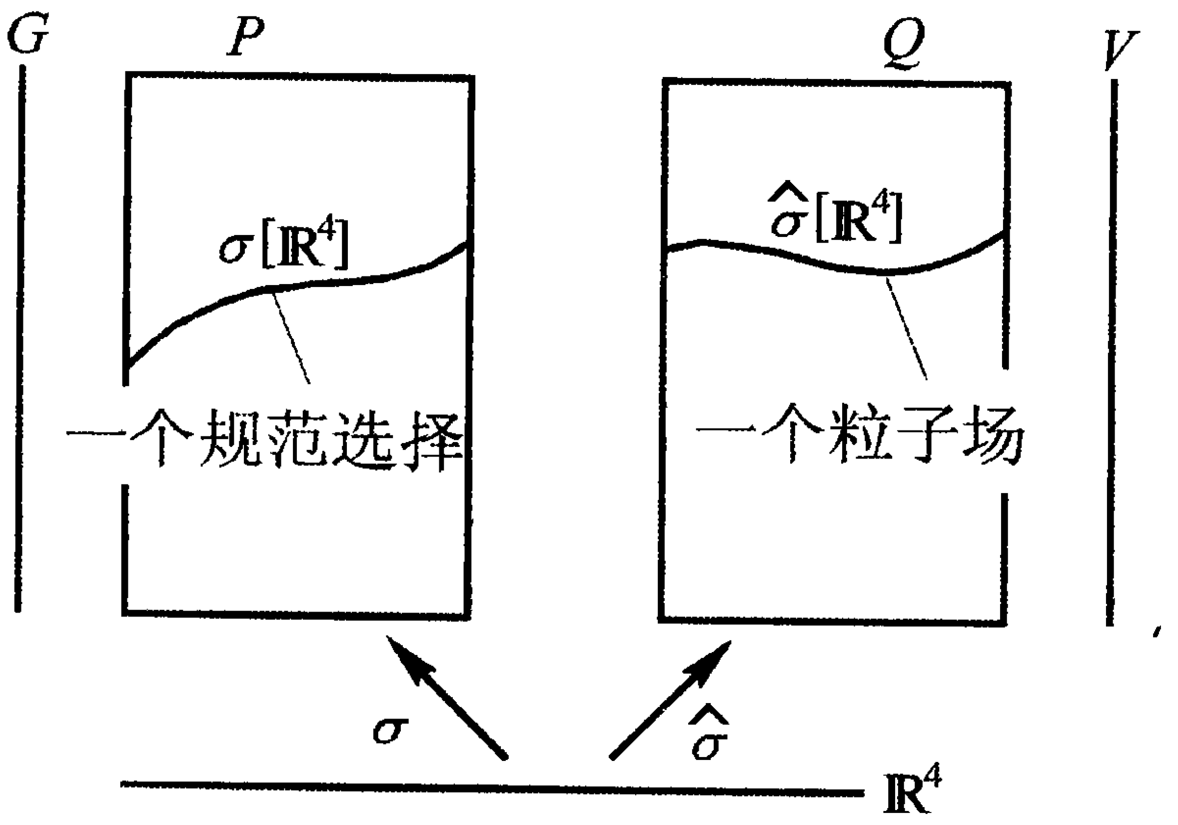


图 I-15 主丛 P 的截面是规范选择, 伴丛 Q 的截面是粒子场

§I.7 规范势与联络

本节在上节的基础上说明 Yang-Mills 规范势对应于主丛的联络. 先讨论平凡主丛 $P=\mathbb{R}^4\times G$, 即是用丛语言重新审视小节 I.5.2 的物理问题. 以 $\{e_r\}$ 代表内部变换群 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 的基底, 令

$$\omega_\mu(x)\equiv k e_r A^r_\mu(x),\quad (k\text{ 为耦合常数})\quad \forall x\in\mathbb{R}^4, \tag{I-7-1}$$

则由 $A^r_\mu(x)\in\mathbb{R}$ 及 $e_r\in\mathscr{G}$ 可知 $\omega_\mu(x)\in\mathscr{G}$, 因而 $\omega_\mu\in\Lambda_{\mathbb{R}^4}(0,\mathscr{G})$. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 的洛伦兹系, 则 $\omega\equiv\omega_\mu\mathrm{d}x^\mu\in\Lambda_{\mathbb{R}^4}(1,\mathscr{G})$. 设 $\tilde\omega$ 是 P 上的联络, $U\subset\mathbb{R}^4$ 和 $V\subset\mathbb{R}^4$ 都是开子集, $U\cap V\neq\varnothing$, $\sigma_U:U\to P$ 和 $\sigma_V:V\to P$ 都是截面, 则由 §I.2 知 $\omega_U\equiv{\sigma_U}^*\tilde\omega$ 和 $\omega_V\equiv{\sigma_V}^*\tilde\omega$ 构成 $U\cup V$ 上的联络(按 §I.2 定义 3), 两者间的变换关系就是式(I-2-5). 以 σ 和 σ' 分别代表 σ_U 和 σ_V, 则 $\forall x\in U\cap V$ 存在唯一的 $g(x)\in G$ 使

$$\sigma'(x) = \sigma(x)g(x)^{-1}. \qquad [式(I-6-1)]$$

这个 $g(x)$ 又自然给出一个规范变换 $\phi'(x) = \rho(g(x))\phi(x)$ [式(I-6-2)], 从而导致4势变换 $A_\mu^r(x) \mapsto A_\mu'^r(x)$, 再由式(I-7-1)及 $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$ 便知这又导致从 ω 到 ω' 的变换. 如能证明这一变换满足联络的变换式(I-2-5)(以 ω 和 ω' 分别充当该式的 ω_U 和 ω_V), 便可证明 ω 的确是联络. 对比式(I-6-1)与(I-1-12)可知式(I-2-5)的 g_{UV} 相当于现在的 g^{-1} [是指由 $g^{-1}(x) := (g(x))^{-1} \in G \ \forall x \in \mathbb{R}^4$ 定义的映射 $g^{-1}: \mathbb{R}^4 \to G$], 故式(I-2-5)现在可以表为

$$\omega'(Y) = \mathscr{Ad}_{g(x_0)}\omega(Y) + L_{g(x_0)*}\, g^{-1}{}_*(Y), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^4, Y \in \mathrm{T}_{x_0}\mathbb{R}^4. \qquad \text{(I-7-2)}$$

若 $Y = \partial/\partial x^\mu |_{x_0}$, 则上式成为

$$\omega'_\mu(x_0) = \mathscr{Ad}_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0) + L_{g(x_0)*}\, g^{-1}{}_*(\partial/\partial x^\mu |_{x_0}), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^4. \qquad \text{(I-7-2')}$$

反之, 如能验证上式对任一 μ 成立, 则式(I-7-2)成立. 既然 $\omega_\mu(x) = k e_r A_\mu^r(x)$, 为验证式(I-7-2')自然要用规范4势 A_μ^r 的变换式(I-5-20), 式中的 $U(\vec{\theta}(x))$ [简记作 $U(x)$]应理解为 $U(x) = \rho(g(x))$ (见上节). 令

$$\hat{\omega}_\mu(x) \equiv k\hat{A}_\mu(x) \equiv -\mathrm{i}kL_r A_\mu^r(x) \in \hat{\mathscr{G}}, \quad \hat{\omega}'_\mu(x) \equiv k\hat{A}'_\mu(x) \in \hat{\mathscr{G}}, \qquad \text{(I-7-3)}$$

则由式(I-5-20')得

$$\hat{\omega}'_\mu(x) = U(x)\hat{\omega}_\mu(x)U(x)^{-1} - [\partial_\mu U(x)]U(x)^{-1}. \qquad \text{(I-7-4)}$$

因 $U(x)U(x)^{-1} = I$ (单位矩阵), 故由 $\partial_\mu I = 0$ 得 $U(x)\partial_\mu U(x)^{-1} = -[\partial_\mu U(x)]U(x)^{-1}$, 于是式(I-7-4)可改写为

$$\hat{\omega}'_\mu(x) = U(x)\hat{\omega}_\mu(x)U(x)^{-1} + U(x)\partial_\mu U(x)^{-1}. \qquad \text{(I-7-4')}$$

把上式用于点 $x_0 \in \mathbb{R}^4$ 并以 $\rho(g(x_0))$ 代替 $U(x_0)$ 得

$$\hat{\omega}'_\mu(x_0) = \rho(g(x_0))\hat{\omega}_\mu(x_0)\rho(g(x_0))^{-1} + \rho(g(x_0))\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{x_0} \rho(g(x))^{-1}, \qquad \text{(I-7-4'')}$$

其中 $\partial/\partial x^\mu |_{x_0}\ \rho(g(x))^{-1}$ 代表对矩阵 $\rho(g(x))^{-1}$ 沿 $\partial/\partial x^\mu |_{x_0}$ 求导. 把过 x_0 点的 x^μ 坐标线记作 $\eta(t)$ (其中 $t \equiv x^\mu$), 则 $\partial/\partial x^\mu |_{x_0} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t |_{t=0}\ \eta(t)$. 再令 $g(t) \equiv g(\eta(t))$, 则

$$式(I-7-4'')右边第二项 = \rho(g(x_0))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \rho(g(t))^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} [\rho(g(x_0))\rho(g(t))^{-1}]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}[L_{\rho(g(x_0))}\rho(g(t)^{-1})]=L_{\rho(g(x_0))*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)^{-1})=L_{\rho(g(x_0))*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\rho[g^{-1}(\eta(t))]$$

$$=L_{\rho(g(x_0))*}\rho_* g^{-1}{}_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\eta(t)=L_{\rho(g(x_0))*}\rho_* g^{-1}{}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{x_0}\right)=\rho_*\left[L_{g(x_0)*}g^{-1}{}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{x_0}\right)\right], \qquad \text{(I-7-5)}$$

其中第二步是因为矩阵 $\rho(g(x_0))$ 不含 t，第三步用到左平移的定义及 ρ 的同态性，第四步是把求导 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$ 看作求切矢，第八步用到附录 G 习题 20(b)．另一方面，由式(I-7-3)得

$$\hat{\omega}_\mu \equiv k\hat{A}_\mu = k(-\mathrm{i}L_r)A^r_\mu = k\rho_*(e_r)A^r_\mu = \rho_*(ke_rA^r_\mu), \qquad \text{(I-7-6)}$$

与式(I-7-1)结合得 $\hat{\omega}_\mu=\rho_*(\omega_\mu)$，类似地还有 $\hat{\omega}'_\mu=\rho_*(\omega'_\mu)$．于是

$$\text{式(I-7-4}''\text{)右边第一项}=\mathscr{Ad}_{\rho(g(x_0))}\hat{\omega}_\mu(x_0)=\mathscr{Ad}_{\rho(g(x_0))}\rho_*[\omega_\mu(x_0)]=\rho_*[\mathscr{Ad}_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0)], \qquad \text{(I-7-7)}$$

其中第一步用到中册附录 G 习题 19，第三步用到附录 G 习题 20(a)．把式(I-7-7)和(I-7-5)代入式(I-7-4″)得

$$\hat{\omega}'_\mu(x_0)=\rho_*[\mathscr{Ad}_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0)+L_{g(x_0)*}g^{-1}{}_*(\partial/\partial x^\mu|_{x_0})], \qquad \text{(I-7-8)}$$

与 $\hat{\omega}'_\mu=\rho_*(\omega'_\mu)$ 比较[并注意到式(I-5-27)]便得到待验证的式(I-7-2′)．可见 $\boldsymbol{\omega}$ 的确是联络．令 $\boldsymbol{A}\equiv e_rA^r_\mu\mathrm{d}x^\mu$，便有 $\boldsymbol{\omega}=k\boldsymbol{A}$，故言 YM 规范势对应于联络．多数物理学家喜欢说 $\{A^r_\mu(x)\}$ 代表 R 个规范势 $A^1_\mu(x),\cdots,A^R_\mu(x)$，数学家则更常说它是一个规范势(一个联络)(的 R 个分量)．又因从 $\boldsymbol{\omega}$ 可构造 P 上的、与规范选择无关的联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ (满足 $\boldsymbol{\omega}\equiv\sigma^*\tilde{\boldsymbol{\omega}},\ \boldsymbol{\omega}'=\sigma'^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}$)，所以索性就把 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 称为**规范势**．于是得出结论：P 上的联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 在物理上可解释为规范势．虽然规范势 $A^1_\mu(x),\cdots,A^R_\mu(x)$ 在规范变换下要变，但万变不离其宗，这个"宗"就是 P 上的联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$．这就回答了 §I.6 倒数第二段之末所提出的"规范势的变换是否也对应于一个绝对的事物"这一问题，这个事物就是 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$．

刚才的讨论还可推广到非平凡主丛 $P(M,G)$ (其中 M 是 4 维流形)，关键差别是现在不存在整体截面，因此规范势只能局域地定义．设 $\{U,V,\cdots\}$ 是 M 的一个开覆盖，而且其中的每一个开集都可以定义局域平凡(如 T_U,T_V)，则在 $U,V,\cdots$ 上可以定义 $\boldsymbol{\omega}_U,\boldsymbol{\omega}_V,\cdots$，合起来便给出 P 上的一个联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$．

以上只讨论了规范势 $\boldsymbol{A}$，还应进一步讨论规范场强．对电磁场来说，规范势 $\boldsymbol{A}$ 对应的规范场强就是电磁场张量(亦称电磁场强) $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}$．我们早已熟知电磁场强 $\boldsymbol{F}$ 在 4 势 $\boldsymbol{A}$ 的规范变换下不变．既然电磁 4 势 $\boldsymbol{A}$ 对应于联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$，这一事实也可用底流形 $\mathbb{R}^4$ 上的联络 $\boldsymbol{\omega}$ 在截面变换下的变换关系[式(I-7-2)]再次验证．电磁场涉及

的是阿贝尔群U(1),其群元的乘法可交换,由此可知式(I-2-16)可简化为

$$\omega' = \omega + g^{-1}\mathrm{d}g\,.$$

ω 和 ω' 分别与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 成正比,且比例系数相同,故由 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}'=\mathrm{d}\boldsymbol{A}'$ 可知为了证明 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$ 只须证明 $\mathrm{d}\omega'=\mathrm{d}\omega$,为此又只须证明 $\mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g)=0$. 由 $g(x)^{-1}g(x)=I$ 得

$$(\mathrm{d}g^{-1})|_x\, g(x) = -g^{-1}(x)\,\mathrm{d}g|_x\,,$$

以 $g^{-1}(x)$ 乘两边并利用乘法可交换性便得 $\mathrm{d}g^{-1}=-g^{-1}g^{-1}\mathrm{d}g$,因而

$$\mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g)=\mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g = g^{-1}g^{-1}\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g=0\,.$$

但情况对非阿贝尔群的YM场却不如此简单. 从式(I-5-22)已经看到当内部变换群的结构常数 $C^r{}_{st}\neq 0$ 时 $F'^r_{\mu\nu}\neq F^r_{\mu\nu}$,即 $\boldsymbol{F}'^r\neq\boldsymbol{F}^r$. 既然规范势在丛语言中对应于联络,那么规范场强也对应于某种几何对象吗?答案是肯定的:规范场强对应于主丛上的曲率(而且它是规范不变的). 详见下节.

§I.8 规范场强与曲率

设 K 是流形,$\mathscr{G}$ 是李代数,则 $\Lambda_K(i,\mathscr{G})$(i 为正整数或零)是矢量空间[$\Lambda_K(i,\mathscr{G})$ 的定义见中册§C.1 定义2].

定义1 $\forall\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G})$, $\psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$,定义括号 $[\varphi,\psi]\in\Lambda_K(i+j,\mathscr{G})$ 为

$$[\varphi,\psi](X_1,\cdots,X_{i+j}) := \frac{1}{i!\,j!}\sum_\pi \delta_\pi[\varphi(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(i)}),\ \psi(X_{\pi(i+1)},\cdots,X_{\pi(i+j)})]\,, \tag{I-8-1}$$

其中 $X_1,\cdots,X_{i+j}$ 是 K 上的任意矢量场,π 代表 $(1,\cdots,i+j)$ 的排列,$\delta_\pi=\pm1$,(偶排列取 $+1$,奇排列取 -1.) 右边的方括号代表 $\mathscr{G}$ 的李括号.

例1 设 $\varphi\in\Lambda_K(2,\mathscr{G})$, $\psi\in\Lambda_K(1,\mathscr{G})$,则

$$\begin{aligned}&[\varphi,\psi](X_1,X_2,X_3)\\&=\frac{1}{2!1!}\{[\varphi(X_1,X_2),\ \psi(X_3)]-[\varphi(X_2,X_1),\psi(X_3)]+[\varphi(X_2,X_3),\psi(X_1)]\\&\quad-[\varphi(X_3,X_2),\psi(X_1)]+[\varphi(X_3,X_1),\psi(X_2)]-[\varphi(X_1,X_3),\psi(X_2)]\}\,.\end{aligned} \tag{I-8-2}$$

注1 设 $\omega\in\Lambda_K(1,\mathscr{G})$,则 $[\omega,\omega]\in\Lambda_K(2,\mathscr{G})$ 按式(I-8-1)应满足

$$[\omega,\omega](X_1,X_2)=[\omega(X_1),\omega(X_2)]-[\omega(X_2),\omega(X_1)]=2\,[\omega(X_1),\omega(X_2)]\,, \tag{I-8-3}$$

可见$[\omega,\omega]$一般非零.

按照§C.1定义2, 任何$\varphi \in \Lambda_K(i,\mathscr{G})$都可表为$\varphi = e_r \varphi^r$, 其中$\{e_r \mid r=1,\cdots,R\}$是$\mathscr{G}$的基底, $\varphi^r \in \Lambda_K(i,\mathbb{R}或\mathbb{C})$. 就是说, 设$\dim\mathscr{G}=R$, 则$\varphi$可表为$R$项之和, 每项都取$A\alpha$的形式, 其中$A\in\mathscr{G}$, $\alpha \in \Lambda_K(i,\mathbb{R}或\mathbb{C})$.

定理 I-8-1 设$A,B\in\mathscr{G}$, $\alpha\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}或\mathbb{C})$, $\beta\in\Lambda_K(j,\mathbb{R}或\mathbb{C})$, 则

$$[A\alpha, B\beta]=[A,B](\alpha\wedge\beta), \tag{I-8-4}$$

式中左边的[,]是按式(I-8-1)定义的括号, 右边的$[A,B]$是$A,B\in\mathscr{G}$的李括号.

证明 习题. □

流形K上全体$\mathscr{G}$值形式场的集合配以定义1的括号运算称为一个**阶化李代数**(graded Lie algebra), 此括号有两个与李括号相似但不同的性质, 关键差别在于它要关心参与运算的对象的"阶数"i,j,k, 见如下定理.

定理 I-8-2 $\forall\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G})$, $\psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$, $\rho\in\Lambda_K(k,\mathscr{G})$, 有

(a) $[\varphi,\psi]=-(-1)^{ij}[\psi,\varphi]$, (I-8-5a)

(b) $(-1)^{ik}[[\varphi,\psi],\rho]+(-1)^{kj}[[\rho,\varphi],\psi]+(-1)^{ji}[[\psi,\rho],\varphi]=0$. (I-8-5b)

证明 留作习题. 提示: 把φ和ψ分别写成R项之和, 每项取$A\alpha$和$B\beta$的形式, 再用式(I-8-4)、(5-1-3)、(G-3-2)(雅可比恒等式)以及楔积所满足的结合律. □

引理 I-8-3 设M,N是流形, $\mathscr{G}$是李代数, $A\in\mathscr{G}$, $f: M\to N$是C^∞映射, $\alpha\in\Lambda_N(i,\mathbb{R}或\mathbb{C})$, 则

(a) $\mathrm{d}(A\alpha)=A\mathrm{d}\alpha$, (b) $f^*(A\alpha)=Af^*\alpha$, (c) $f^*(\mathrm{d}\alpha)=\mathrm{d}(f^*\alpha)$, (I-8-6)

其中$f^*(A\alpha)$是$A\alpha$的拉回, 其定义仿照上册§4.1定义3.

证明 由§C.1定义3及$f^*(A\alpha)$的定义易证(a)和(b). 再仿照命题16-3-1的证明又可证明(c). □

定理 I-8-4 设$\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G})$, $\psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$, 则

$$\mathrm{d}[\varphi,\psi]=[\mathrm{d}\varphi,\psi]+(-1)^i[\varphi,\mathrm{d}\psi]. \tag{I-8-7}$$

证明 留作习题. 提示: 把φ和ψ分别写成R项之和, 注意到式(I-8-4)及(I-8-6a), 可知只须证$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^i\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$, 而这不难从式(5-1-12)出发证实. □

定理 I-8-5 设$f: M\to N$是C^∞映射, $\varphi\in\Lambda_N(i,\mathscr{G})$, $\psi\in\Lambda_N(j,\mathscr{G})$, 则

(a) $f^*[\varphi,\psi]=[f^*\varphi,f^*\psi]$, (b) $\mathrm{d}(f^*\varphi)=f^*(\mathrm{d}\varphi)$. (I-8-8)

证明 留作练习. 提示: (a)由式(I-8-6b)可知只须证$f^*(\alpha\wedge\beta)=f^*\alpha\wedge f^*\beta$. (b)

利用式(I-8-6). □

定义 2　设 $P(M,G)$ 是带联络 $\tilde{\omega}$ 的主丛.

(a) $\forall \varphi \in \Lambda_P(i,\mathscr{G})$，定义 $\varphi^{\mathrm{H}} \in \Lambda_P(i,\mathscr{G})$ 为

$$\varphi^{\mathrm{H}}(X_1,\cdots,X_i) := \varphi(X_1{}^{\mathrm{H}},\cdots,X_i{}^{\mathrm{H}}), \tag{I-8-9}$$

其中 $X_1,\cdots,X_i$ 是 P 上任意矢量场，$X_1^{\mathrm{H}},\cdots,X_i^{\mathrm{H}}$ 是 $X_1,\cdots,X_i$ (用 $\tilde{\omega}$ 判断)的水平分量.

(b) $\varphi \in \Lambda_P(i,\mathscr{G})$ 的**协变外微分**(exterior covariant differential) $\mathrm{D}\varphi$ 定义为

$$\mathrm{D}\varphi := (\mathrm{d}\varphi)^{\mathrm{H}} \in \Lambda_P(i+1,\mathscr{G}). \tag{I-8-10}$$

(c)联络 $\tilde{\omega} \in \Lambda_P(1,\mathscr{G})$ 的**曲率** $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 定义为

$$\tilde{\Omega} := \mathrm{D}\tilde{\omega} \equiv (\mathrm{d}\tilde{\omega})^{\mathrm{H}} \in \Lambda_P(2,\mathscr{G}). \tag{I-8-11}$$

定理 I-8-6 (嘉当第二结构方程)

$$\tilde{\Omega} = \mathrm{d}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]. \tag{I-8-12}$$

证明[选读]

注意到场的等式 $[\tilde{\omega},\tilde{\omega}](X_1,X_2)/2 = [\tilde{\omega}(X_1),\ \tilde{\omega}(X_2)]$ [式(I-8-3)]及

$$\tilde{\Omega}(X_1,X_2) = (\mathrm{d}\tilde{\omega})^{\mathrm{H}}(X_1,X_2) = \mathrm{d}\tilde{\omega}(X_1{}^{\mathrm{H}},X_2{}^{\mathrm{H}}),$$

只须证明 $\forall p \in P$ 及 $X,Y \in \mathrm{T}_pP$ 有

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}|_p(X^{\mathrm{H}},Y^{\mathrm{H}}) = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_p(X,Y) + [\tilde{\omega}_p(X),\ \tilde{\omega}_p(Y)]. \tag{I-8-13}$$

利用上式对 X 和 Y 的双线性性，只须就以下三种情况给出证明.

情况 A (X 和 Y 都水平，即 $X,Y \in \mathrm{H}_p$) 这时 $\tilde{\omega}_p(X) = 0 = \tilde{\omega}_p(Y)$，故式(I-8-13)右边第二项为零. 又因现在 $Y^{\mathrm{H}} = Y,\ X^{\mathrm{H}} = X$，式(I-8-13)显然成立.

情况 B (X 和 Y 都竖直，即 $X,Y \in \mathrm{V}_p$) 这时 $X^{\mathrm{H}} = Y^{\mathrm{H}} = 0$，故 $\mathrm{d}\tilde{\omega}|_p(X^{\mathrm{H}},Y^{\mathrm{H}}) = 0$. 此外，$X,Y \in \mathrm{V}_p$ 保证 $\exists A,B \in \mathscr{G}$ 使 $X = A_p^*,\ Y = B_p^*$，所以为证式(I-8-13)只须证明

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}|_p(A_p^*,B_p^*) = -[\tilde{\omega}_p(A_p^*),\ \tilde{\omega}_p(B_p^*)]. \tag{I-8-14}$$

作为 P 上的实值形式场，$\tilde{\omega}$ 及 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ 都可用 $\mathscr{G}$ 的基底 $\{e_r\}$ 展为 $\tilde{\omega} = e_r\tilde{\omega}^r$ 及 $\mathrm{d}\tilde{\omega} = e_r\mathrm{d}\tilde{\omega}^r$，其中分量 $\tilde{\omega}^r$ 及 $\mathrm{d}\tilde{\omega}^r$ 都是 P 上的实值形式场，把第 5 章习题 5 的结论用于现在便有

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^r(A^*,B^*) = A^*(\tilde{\omega}^r(B^*)) - B^*(\tilde{\omega}^r(A^*)) - \tilde{\omega}^r([A^*,B^*]). \tag{I-8-15}$$

这是 P 上的实值标量场等式，乘以 e_r 后给出 P 上的 $\mathscr{G}$ 值标量场等式

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}(A^*,B^*) = e_rA^*(\tilde{\omega}^r(B^*)) - e_rB^*(\tilde{\omega}^r(A^*)) - \tilde{\omega}([A^*,B^*]). \tag{I-8-15'}$$

上式右边第一项可改写为

$$e_r A^*(\tilde{\omega}^r(B^*)) = A^*(\tilde{\omega}(B^*)), \tag{I-8-16}$$

其中 $A^*(\tilde{\omega}(B^*))$ 代表 P 上矢量场 A^* 对 P 上 $\mathscr{G}$ 值标量场 $\tilde{\omega}(B^*)$ 的作用结果, 此处应先补上这种作用的定义: 流形上的任一矢量场 X 对任一 $\mathscr{G}$ 值标量场 F 的作用定义为

$$X(F) := \mathrm{d}F(X) \in \mathscr{G}. \tag{I-8-17}$$

借此定义便不难证明式(I-8-16). 于是式(I-8-15′)又可改写为

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}(A^*, B^*) = A^*(\tilde{\omega}(B^*)) - B^*(\tilde{\omega}(A^*)) - \tilde{\omega}([A^*, B^*]). \tag{I-8-15″}$$

由联络定义 2 条件(a)可知上式右边第一项括号内的 $\tilde{\omega}(B^*)$ 在 P 上每点的值都是 $B \in \mathscr{G}$ [常 $\mathscr{G}$ 值标量场], 故由式(I-8-17)便得 $A^*(\tilde{\omega}(B^*)) = 0$. 同理还有 $B^*(\tilde{\omega}(A^*)) = 0$. 于是式(I-8-15″)最终简化为

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}(A^*,B^*) = -\tilde{\omega}([A^*,B^*]) = -\tilde{\omega}([A,B]^*) = -[A,B], \tag{I-8-18}$$

其中第二步用到定理 I-1-8. 把上式在 p 点取值, 注意到 $A = \tilde{\omega}_p(A_p^*), B = \tilde{\omega}_p(B_p^*)$, 便得待证的式(I-8-14).

情况 C ($X \in \mathrm{V}_p, Y \in \mathrm{H}_p$) 这时 $\exists A \in \mathscr{G}$ 使 $X = A_p^*$. 设 $\tilde{Z}$ 是点 $\pi(p)$ 的某邻域上的某矢量场 Z 的水平提升, 且 $Y = \tilde{Z}_p$, 则

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}(A^*, \tilde{Z}) = A^*(\tilde{\omega}(\tilde{Z})) - \tilde{Z}(\tilde{\omega}(A^*)) - \tilde{\omega}([A^*, \tilde{Z}]) = A^*(0) - \tilde{Z}(A) - \tilde{\omega}(0) = 0,$$

[其中第一步用到式(I-8-15), 第二步依次用到 $\tilde{Z}$ 的水平性、联络定义 2 条件(a)及定理 I-2-5.] 于是

$$\text{式(I-8-13)右边} = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_p (A_p^*, \tilde{Z}_p) + [\tilde{\omega}_p(A_p^*),\ \tilde{\omega}_p(\tilde{Z}_p)] = 0 + [A,0] = 0,$$

$$\text{式(I-8-13)左边} = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_p (X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{H}}) = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_p (0, Y^{\mathrm{H}}) = 0,$$

可见式(I-8-13)成立. □

定理 I-8-7 (Bianchi 恒等式)

$$\mathrm{D}\tilde{\Omega} = 0. \tag{I-8-19}$$

证明 $\mathrm{D}\tilde{\Omega} \equiv (\mathrm{d}\tilde{\Omega})^{\mathrm{H}}$, 而由定理 I-8-6、I-8-4 及 I-8-2(a)可知

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = \mathrm{d}(\mathrm{d}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{d}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}] = \frac{1}{2}\{[\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}] + (-1)^1[\tilde{\omega},\mathrm{d}\tilde{\omega}]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{[\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}] + (-1)^{1\times 2}[\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\} = [\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}], \tag{I-8-20}$$

故对P上任意矢量场X, Y, Z有

$$\mathrm{D}\tilde{\Omega}(X,Y,Z)=(\mathrm{d}\tilde{\Omega})^{\mathrm{H}}(X,Y,Z)=\mathrm{d}\tilde{\Omega}(X^{\mathrm{H}},Y^{\mathrm{H}},Z^{\mathrm{H}})\,. \qquad \text{(I-8-21)}$$

由式(I-8-20)及(I-8-2)可知上式右边是6个李括号(如$[\mathrm{d}\tilde{\omega}(X^{\mathrm{H}},Y^{\mathrm{H}}),\ \tilde{\omega}(Z^{\mathrm{H}})]$)的代数和, 而$\tilde{\omega}(Z^{\mathrm{H}})=\tilde{\omega}(X^{\mathrm{H}})=\tilde{\omega}(Y^{\mathrm{H}})=0$, 故$\mathrm{D}\tilde{\Omega}(X,Y,Z)=0$, 因而$\mathrm{D}\tilde{\Omega}=0$. □

定理 I-8-8 $$\mathrm{d}\tilde{\Omega}=[\tilde{\Omega},\tilde{\omega}]\,. \qquad \text{(I-8-22)}$$

证明 $[\tilde{\Omega},\tilde{\omega}]=[\mathrm{d}\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}],\ \tilde{\omega}]=[\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}]+\frac{1}{2}[[\tilde{\omega},\tilde{\omega}],\tilde{\omega}]=[\mathrm{d}\tilde{\omega},\tilde{\omega}]=\mathrm{d}\tilde{\Omega}$,

其中第一步用到式(I-8-12), 第三步是因为由定理I-8-2(b)可得$[[\tilde{\omega},\tilde{\omega}],\tilde{\omega}]=0$, 第四步用到式(I-8-20). □

定理 I-8-9 $R_g^*\tilde{\omega}=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\circ\tilde{\omega}$, $\forall g\in G$. (P上$\mathscr{G}$值1形式场等式) (I-8-23)

注 2 等号右边也常简写作$\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}$.

证明 $\forall\, g\in G,\ p\in P,\ X\in \mathrm{T}_pP$有

$$(R_g^*\,\tilde{\omega}_{pg})(X)=\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X)=(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\circ\tilde{\omega}_p)(X)\,,$$

[其中第二步用到联络$\tilde{\omega}$定义2条件(b).] 故有式(I-8-23). □

定理 I-8-10 $R_g^*\tilde{\Omega}=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\circ\tilde{\Omega}$, $\forall g\in G$. (P上$\mathscr{G}$值2形式场等式) (I-8-24)

证明 $R_g^*\tilde{\Omega}=R_g^*(\mathrm{d}\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}])=\mathrm{d}(R_g^*\tilde{\omega})+\frac{1}{2}[R_g^*\tilde{\omega},R_g^*\tilde{\omega}]$

$$=\mathrm{d}(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega})+\frac{1}{2}[\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega},\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}]=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}(\mathrm{d}\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}])=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\Omega}\,,$$

其中第一、五步用到定理I-8-6, 第二步用到定理I-8-5, 第三步用到定理I-8-9, 第四步用到等式

$$\mathrm{d}(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega})=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{d}\tilde{\omega} \qquad 和 \qquad [\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega},\ \mathscr{Ad}_{g^{-1}}\tilde{\omega}]=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\,,$$

以上两式的证明留做练习. 提示: 用$\mathscr{G}$的基矢$\{e_\mu\}$把$\tilde{\omega}$展为$\tilde{\omega}=e_r\tilde{\omega}^r$; 证第二个等式时还要用到$\mathscr{Ad}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$是李代数同构(附录G习题23). □

设U是M的开子集, $\sigma_U: U\to P$是局域截面, 则如前所述, $\omega_U\equiv\sigma_U{}^*\tilde{\omega}$在物理上代表规范势. 类似地, 若令$\Omega_U\equiv\sigma_U{}^*\tilde{\Omega}$, 则下面将证明$\Omega_U$在物理上代表规范场强(gauge field strength).

定理 I-8-11 $$\Omega_U=\mathrm{d}\omega_U+\frac{1}{2}[\omega_U,\omega_U]\,. \qquad \text{(I-8-25)}$$

证明

$$\boldsymbol{\Omega}_U \equiv \sigma_U{}^* \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \sigma_U{}^*(\mathrm{d}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]) = \mathrm{d}(\sigma_U{}^*\tilde{\omega}) + \frac{1}{2}[\sigma_U{}^*\tilde{\omega}, \sigma_U{}^*\tilde{\omega}] = \mathrm{d}\omega_U + \frac{1}{2}[\omega_U, \omega_U],$$

其中第二步用到定理I-8-6，第三步用到定理I-8-5. □

定理 I-8-12 式(I-8-25)对应于式(I-5-22).

证明 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 ω 简记 $\boldsymbol{\Omega}_U$ 和 ω_U，由式(I-7-1)得 $\omega = ke_r A^r_\mu \mathrm{d}x^\mu$，代入式(I-8-25)给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \mathrm{d}(ke_r A^r_\mu \mathrm{d}x^\mu) + \frac{1}{2}[ke_s A^s_\mu \mathrm{d}x^\mu, ke_t A^t_\nu \mathrm{d}x^\nu] \\ &= ke_r \mathrm{d}(A^r_\mu \mathrm{d}x^\mu) + \frac{1}{2}[e_s, e_t]\, k^2 A^s_\mu A^t_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= ke_r (\mathrm{d}A^r_\mu) \wedge \mathrm{d}x^\mu + \frac{1}{2} C^r{}_{st} e_r k^2 A^s_\mu A^t_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= ke_r [(\partial_\nu A^r_\mu)\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu + \frac{1}{2} k C^r{}_{st} A^s_\mu A^t_\nu\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu] \\ &= \frac{1}{2} ke_r (\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu + kC^r{}_{st} A^s_\mu A^t_\nu)\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,\end{aligned} \tag{I-8-26}$$

其中第二步用到定理 I-8-1. 只要令 $F^r_{\mu\nu}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 以如下公式相联系:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} ke_r F^r_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \tag{I-8-27}$$

则显然就有

$$F^r_{\mu\nu} = \partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu + kC^r{}_{st} A^s_\mu A^t_\nu,$$

此即式(I-5-22). □

注 3 用 $\mathscr{G}$ 的基底 $\{e_\mu\}$ 把 ω 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 分别展为 $\omega = e_r \omega^r$ 和 $\boldsymbol{\Omega} = e_r \boldsymbol{\Omega}^r$，则 ω^r 和 $\boldsymbol{\Omega}^r$ 依次是 U 上的(实值) 1 形式场和 2 形式场. 再以 ω^r_μ 和 $\Omega^r_{\mu\nu}$ 分别代表 ω^r 和 $\boldsymbol{\Omega}^r$ 在坐标基底 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ 的分量, 即

$$\omega^r_\mu \equiv \omega^r(\partial/\partial x^\mu), \qquad \Omega^r_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{\Omega}^r(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu),$$

则由式(I-7-1)及(I-8-27)不难验证

$$\omega^r_\mu = kA^r_\mu, \qquad \Omega^r_{\mu\nu} \equiv kF^r_{\mu\nu}, \tag{I-8-28}$$

可见 ω^r_μ 和 $\Omega^r_{\mu\nu}$ 分别是规范势 A^r_μ 和规范场强 $F^r_{\mu\nu}$ 的 k 倍, 因此 ω 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 在物理上的确分别代表规范势和规范场强.

物理中用到的李群大多是矩阵群, 所以有必要找出在矩阵群情况下括号运算

[,] 的表达式. 设 $\mathscr{G}$ 的元素是 $N\times N$ 实(复)矩阵, $\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}),\ \psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$, 则 $\varphi(X_1,\cdots,X_i)$ 和 $\psi(X_1,\cdots,X_j)$ 都是 $N\times N$ 实(复)矩阵. 以 $N=2$ 为例, 有

$$\varphi(X_1,\cdots,X_i)=\begin{bmatrix}\varphi(X_1,\cdots,X_i)^1{}_1 & \varphi(X_1,\cdots,X_i)^1{}_2\\ \varphi(X_1,\cdots,X_i)^2{}_1 & \varphi(X_1,\cdots,X_i)^2{}_2\end{bmatrix}\in\mathscr{G}. \tag{I-8-29}$$

定义 $\varphi^\mu{}_\nu\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}\text{ 或 }\mathbb{C})$ 为

$$\varphi^\mu{}_\nu(X_1,\cdots,X_i):=\varphi(X_1,\cdots,X_i)^\mu{}_\nu \quad [\text{指式(I-8-29)中的矩阵元}], \tag{I-8-30}$$

则在 $N=2$ 的情况下 φ 可表为一个以实(复)值 i 形式为矩阵元的矩阵:

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi^1{}_1 & \varphi^1{}_2\\ \varphi^2{}_1 & \varphi^2{}_2\end{bmatrix}\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}), \tag{I-8-31}$$

此式的自然含义是

$$\varphi(X_1,\cdots,X_i)=\begin{bmatrix}\varphi^1{}_1(X_1,\cdots,X_i) & \varphi^1{}_2(X_1,\cdots,X_i)\\ \varphi^2{}_1(X_1,\cdots,X_i) & \varphi^2{}_2(X_1,\cdots,X_i)\end{bmatrix}\in\mathscr{G}. \tag{I-8-32}$$

上面以 $N=2$ 为例的讨论可推广至 N 为任意非零自然数的情况, **结论**: $\mathscr{G}$ 值 i 形式 φ 也可表为矩阵, 不过矩阵元是实(复)值 i 形式 $\varphi^\mu{}_\nu$. 于是有如下定义:

定义 3a　设 $\mathscr{G}$ 是矩阵李代数. $\mathscr{G}$ 值形式 $\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}),\ \psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$ 的楔积 $\varphi\wedge\psi$ 定义为矩阵"乘积", 只是其中矩阵元的"乘积"是楔积.

例如, 在 $N=2$ 的情况下有

$$\varphi\wedge\psi\equiv\begin{bmatrix}\varphi^1{}_1 & \varphi^1{}_2\\ \varphi^2{}_1 & \varphi^2{}_2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\psi^1{}_1 & \psi^1{}_2\\ \psi^2{}_1 & \psi^2{}_2\end{bmatrix}$$

$$\equiv\begin{bmatrix}\varphi^1{}_1\wedge\psi^1{}_1+\varphi^1{}_2\wedge\psi^2{}_1 & \varphi^1{}_1\wedge\psi^1{}_2+\varphi^1{}_2\wedge\psi^2{}_2\\ \varphi^2{}_1\wedge\psi^1{}_1+\varphi^2{}_2\wedge\psi^2{}_1 & \varphi^2{}_1\wedge\psi^1{}_2+\varphi^2{}_2\wedge\psi^2{}_2\end{bmatrix}\in\Lambda_K(i+j,\mathscr{GL}(2)).$$

下面是 $\varphi\wedge\psi$ 的等价定义:

定义 3b　设 $\{e_r\,|\,r=1,\cdots,R\}$ 是 $\mathscr{G}$ 的基底, 把 φ 和 ψ 分别写成 $\varphi=e_r\varphi^r$ 和 $\psi=e_s\psi^s$ (对 r 和 s 都从 1 到 R 取和), 其中 $\varphi^r\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}\text{或}\mathbb{C})$, $\psi^s\in\Lambda_K(j,\mathbb{R}\text{或}\mathbb{C})$, 则 $\varphi\wedge\psi$ 又可定义为

$$\varphi\wedge\psi:=e_re_s(\varphi^r\wedge\psi^s). \quad (\text{其中 } e_re_s \text{ 代表矩阵 } e_r \text{ 与 } e_s \text{ 之积}) \tag{I-8-33}$$

作为练习, 请读者补证 $\varphi\wedge\psi$ 的这两个定义的等价性.

定理 I-8-13　设 $\mathscr{G}$ 是矩阵李代数, $\varphi\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}),\ \psi\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$, 则

$$[\varphi,\psi]=\varphi\wedge\psi-(-1)^{ij}\psi\wedge\varphi. \tag{I-8-34}$$

注 4 请注意与普通矩阵φ,ψ的对易子$[\varphi,\psi]=\varphi\psi-\psi\varphi$的类似性和区别.

证明 把φ和ψ分别写成$\varphi=e_r\varphi^r$和$\psi=e_s\psi^s$，由式(I-8-33)得

$$式(I-8-34)右边=e_re_s(\varphi^r\wedge\psi^s)-(-1)^{ij}e_se_r(\psi^s\wedge\varphi^r)=(e_re_s-e_se_r)(\varphi^r\wedge\psi^s)$$

$$=[e_r,e_s](\varphi^r\wedge\psi^s)=[e_r\varphi^r,e_s\psi^s]=[\varphi,\psi],$$

其中第二步用到式(5-1-3), 第四步用到式(I-8-4). □

定理 I-8-14 设G是矩阵李群, 则

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tag{I-8-35}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_U=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_U+\boldsymbol{\omega}_U\wedge\boldsymbol{\omega}_U. \tag{I-8-36}$$

证明 由定理 I-8-6 知$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}+[\tilde{\boldsymbol{\omega}},\tilde{\boldsymbol{\omega}}]/2$. 注意到$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\in\Lambda_P(1,\mathscr{G})$, 由定理 I-8-13 得

$$\frac{1}{2}[\tilde{\boldsymbol{\omega}},\tilde{\boldsymbol{\omega}}]=\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}-(-1)^{1\times1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}})=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}},$$

故得式(I-8-35). 同理可证式(I-8-36). □

定理 I-8-15 设$g_{UV}: U\cap V\to G$是局域平凡T_U与T_V之间的转换函数, 则在$U\cap V$上有

$$\boldsymbol{\Omega}_V=\mathscr{Ad}_{g_{UV}^{-1}}\boldsymbol{\Omega}_U, \tag{I-8-37}$$

含义是

$$\boldsymbol{\Omega}_V(X,Y)=\mathscr{Ad}_{g_{UV}^{-1}(x)}\boldsymbol{\Omega}_U(X,Y),\quad \forall x\in U\cap V,\ X,Y\in T_xM. \tag{I-8-38}$$

证明 以σ_U和σ_V分别代表与T_U和T_V相应的局域截面, 则

$$\boldsymbol{\Omega}_V(X,Y)\equiv(\sigma_V{}^*\tilde{\boldsymbol{\Omega}})(X,Y)=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(\sigma_{V*}X,\sigma_{V*}Y). \tag{I-8-39}$$

而$\sigma_{V*}X$和$\sigma_{V*}Y$可借式(I-2-8)分别用$\sigma_{U*}X$和$\sigma_{U*}Y$表出:

$$\sigma_{V*}X=R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}X+[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(X)]^*_{\sigma_V(x)}, \tag{I-8-40a}$$

$$\sigma_{V*}Y=R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y+[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}. \tag{I-8-40b}$$

把式(I-8-40a)右边一、二项依次记作Z_1,Z_2, 式(I-8-40 b)一、二项记作W_1,W_2, 则

$$\boldsymbol{\Omega}_V(X,Y)=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(Z_1+Z_2,W_1+W_2)=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(Z_1,W_1)+\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(Z_1,W_2)+\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(Z_2,W_1)+\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(Z_2,W_2).$$

上式右边后三项的作用对象中都有一个竖直矢量(Z_2或W_2), 故每项都为零, 例如

$$\tilde{\Omega}(Z_1,W_2)\equiv(\mathrm{d}\tilde{\omega})^{\mathrm{H}}(Z_1,W_2)\equiv(\mathrm{d}\tilde{\omega})(Z_1{}^{\mathrm{H}},W_2{}^{\mathrm{H}})=(\mathrm{d}\tilde{\omega})(Z_1{}^{\mathrm{H}},0)=0\,.$$

令 $g\equiv g_{UV}(x)$，便有

$$\begin{aligned}\Omega_V(X,Y)&=\tilde{\Omega}(Z_1,W_1)=\tilde{\Omega}(R_{g*}\sigma_{U*}X,\,R_{g*}\sigma_{U*}Y)=(R_g{}^*\tilde{\Omega})(\sigma_{U*}X,\,\sigma_{U*}Y)\\&=(\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\circ\tilde{\Omega})(\sigma_{U*}X,\sigma_{U*}Y)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}(\sigma_U{}^*\tilde{\Omega})(X\,Y)=\mathscr{Ad}_{g^{-1}}\Omega_U(X,Y)\,.\end{aligned}$$

此即式(I-8-38). □

定理 I-8-16 当结构群为矩阵群时，式(I-8-37)又可表为

$$\Omega_V=g_{UV}^{-1}\Omega_U g_{UV}\,. \tag{I-8-41}$$

证明 由式(I-8-37)得

$$\Omega_V(X,Y)=\mathscr{Ad}_{g_{UV}^{-1}(x)}\Omega_U(X,Y)=g_{UV}^{-1}(x)\Omega_U(X,Y)g_{UV}(x)\,,$$

其中第二步用到附录G 习题19 . 于是式(I-8-41)得证. □

注 5 式(I-8-41)对应于式(I-5-26′).

[选读 I-8-1]

标架丛上的联络称为**线性(linear)联络**. 我们重点关心两个问题，即线性联络的曲率和挠率，并与上册§3.1 、§3.4 及§5.7 相呼应.

把带联络主丛的曲率定义 $\tilde{\Omega}=\mathrm{D}\tilde{\omega}$ 用于标架丛就得到线性联络的曲率，与§3.4 定义的曲率实质相同. 如定理I-2-8 所述，标架丛FM上的联络 $\tilde{\omega}$ 对应于底流形 M 上的导数算符 ∇，而根据§5.7，∇_a 配以 $U\subset M$ 上的一个标架场 $\{(e_\mu)^a\}$ 给出 U 上的一组联络 1 形式场 $\{\omega(\nabla)_\beta{}^\mu\}$ (此符号见选读 I-2-1). 其实这很自然：选定 $U\subset M$ 上的标架场相当于选定局域截面 $\sigma: U\to\mathrm{F}M$，因而可从FM的联络 $\tilde{\omega}$ 得到 U 上的联络 $\omega=\sigma^*\tilde{\omega}$ (ω 是 ω_U 的简写). 但是仍然存在一个问题：ω 是 U 上的 $\mathscr{G}$ 值1 形式场，而§5.7 的 $\omega(\nabla)_\beta{}^\mu$ 却是 U 上的实值1 形式场. 要使两者完全“对得上号”，只须注意标架丛的结构群GL(n) 是矩阵群，式(I-8-32)下一行的结论成立，即联络1 形式 ω 可表为矩阵，因而与一组实值1 形式 $\{\omega(\nabla)_\beta{}^\mu\}$ 实质一致，只是由于选读I-2-1 末所提到的微妙原因(即本书的黎曼张量写成 $R_{abc}{}^d$ 而非 $R^d{}_{abc}$)，才导致等式 $\omega^\mu{}_\beta=-\omega(\nabla)_\beta{}^\mu$. 同理可知§5.7 的曲率 2 形式 $\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$ 与现在的 $\Omega_U\equiv\sigma_U^*\tilde{\Omega}$ (简写为 $\Omega\equiv\sigma^*\tilde{\Omega}$)实质一致，体现为 $\Omega^\nu{}_\mu=-\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$. 因此，§5.7 的嘉当第二结构方程(5-7-8)无非就是方程(I-8-36)的特例. 自然要问：嘉当第一结构方程(5-7-6)对应于现在的什么方程?要回答这个问题就要介绍线性联络的挠率. FM 的任一点 $p=(x,e_\mu)$ 可以看作一个映射 $p:\mathbb{R}^n\to\mathrm{T}_xM$，定义为

$$p(v^1,\cdots,v^n):=e_\mu v^\mu,\quad\forall(v^1,\cdots,v^n)\in\mathbb{R}^n\,.$$

定义 4　FM 上的**正则形式**(canonical form) $\tilde{\theta}$ 是 FM 上的 $\mathbb{R}^n$ 值 1 形式场，定义为

$$\tilde{\theta}_p(X) := p^{-1}(\pi_* X) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall p \in \mathrm{F}M, \ X \in \mathrm{T}_p\mathrm{F}M,$$

其中 p^{-1} 是映射 $p: \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_x M$ 之逆.

设 $\sigma: U \to \mathrm{F}M$ 是局域截面，则 $\theta \equiv \sigma^* \tilde{\theta}$ 是 U 上的 $\mathbb{R}^n$ 值 1 形式场，有非常直观的意义. $\forall x \in U$，令 $p = (x, e_\mu) = \sigma(x)$，则 $\forall\, v \in \mathrm{T}_x M$ 有

$$\theta_x(v) = (\sigma^* \tilde{\theta}_p)(v) = \tilde{\theta}_p(\sigma_* v) = p^{-1}(\pi_* \sigma_* v) = p^{-1}(v) = (v^1, \cdots, v^n), \qquad \text{(I-8-42)}$$

其中 $v^1, \cdots, v^n$ 是 v 在标架 $\{e_\mu\}$ 的分量. 以 $\{E_\mu \mid \mu = 1, \cdots, n\}$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标基底，即 $E_\mu = (0, \cdots, 1, \cdots, 0\}$ (唯一的非零元素 1 在第 μ 槽)，由 $\theta \equiv E_\mu \theta^\mu$ 定义的 θ^μ 是 U 上的实值 1 形式场)，满足 $\theta(v) = (\theta^1(v), \cdots, \theta^n(v))$，与式(I-8-42)对比得

$$\theta^\mu(v) = v^\mu = e^\mu(v) \ \forall \mu = 1, \cdots, n,$$

因而 $\theta^\mu = e^\mu$. 可见 θ 代表 x 点的与标架 $\{e_\mu\}$ 对偶的标架 $\{e^\mu\}$.

定义 5　FM 上的联络 $\tilde{\omega}$ 的**挠率形式**(torsion form) $\tilde{\Theta}$ 定义为 $\tilde{\Theta} := \mathrm{D}\tilde{\theta}$，其中 D 是联络 $\tilde{\omega}$ 的协变外微分.

注 6　正则形式和挠率形式只对标架丛才可定义，而且是在丛上整体定义的.

定理 I-8-17(嘉当第一结构方程)　设 $\tilde{\omega}, \tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\Theta}$ 分别是 FM 的联络形式、正则形式和挠率形式，则

$$\mathrm{d}\tilde{\theta}(X,Y) = -\{\tilde{\omega}(X)\tilde{\theta}(Y) - \tilde{\omega}(Y)\tilde{\theta}(X)\} + \tilde{\Theta}(X,Y), \quad \forall X, Y \ (\mathrm{F}M \text{ 上矢量场}), \qquad \text{(I-8-43)}$$

其中 $\tilde{\omega}(X)\tilde{\theta}(Y)$ 代表方阵 $\tilde{\omega}(X) \in \mathscr{G}$ 乘以列阵 $\tilde{\theta}(Y) \in \mathbb{R}^n$ 所得的列阵.

证明　见，例如，Spivak(1979)Vol.II, P.376. □

设 $\sigma: U \to \mathrm{F}M$ 是局域截面，则 $\Theta \equiv \sigma^* \tilde{\Theta}$ 称为 $U \subset M$ 上的挠率形式. 不难证明对 U 上的 ω，θ 和 Θ 也有类似于式(I-8-43)的等式，即

$$\mathrm{d}\theta(v,u) = -\{\omega(v)\theta(u) - \omega(u)\theta(v)\} + \Theta(v,u), \quad \forall v, u \ (U \subset M \text{ 上矢量场}), \qquad \text{(I-8-44)}$$

上式每项都是 $n \times 1$ 的列阵，其 ν 行 1 列矩阵元等式为

$$\mathrm{d}\theta^\nu(v,u) = -\{\omega^\nu{}_\mu(v)\theta^\mu(u) - \omega^\nu{}_\mu(u)\theta^\mu(v)\} + \Theta^\nu(v,u) = -(\omega^\nu{}_\mu \wedge \theta^\mu)(v,u) + \Theta^\nu(v,u).$$

上式对任意 v, u 成立，故

$$\mathrm{d}\theta^\nu = -\omega^\nu{}_\mu \wedge \theta^\mu + \Theta^\nu. \qquad \text{(I-8-45)}$$

对无挠联络($\Theta = 0$)有 $\mathrm{d}\theta^\nu = -\omega^\nu{}_\mu \wedge \theta^\mu$，改用本书的记号则为 $\mathrm{d}\theta^\nu = -\theta^\mu \wedge \omega_\mu{}^\nu$.

注意到$\theta^\mu = e^\mu$，便有$\mathrm{d}e^\nu = -e^\mu \wedge \omega_\mu{}^\nu$，此即§5.7的嘉当第一结构方程(5-7-6).

[选读 I-8-1 完]

§I.9 矢丛上的联络和协变导数

与主丛P类似，矢丛Q的任意点q的切空间$\mathrm{T}_q Q$也存在一个天生的竖直子空间$\mathrm{V}_q \subset \mathrm{T}_q Q$，定义为$\mathrm{V}_q := \{X \in \mathrm{T}_q Q \mid \hat{\pi}_*(X) = 0\}$. 但若还要问及$X \in \mathrm{T}_q Q$是否水平，就要引入矢丛$Q$上的联络. 矢丛的每一纤维$\hat{\pi}^{-1}[x]$都是实(或复)矢量空间，用实(或复)数$c$对$\hat{\pi}^{-1}[x]$任一点$q$的数乘结果$cq$仍是$\hat{\pi}^{-1}[x]$的点. 设$c \neq 0$，定义映射$\zeta_c$为$\zeta_c(q) := cq \quad \forall q \in Q$，则$\zeta_c : Q \to Q$是同胚.

定义1 矢丛Q上的一个**联络**是对每点$q \in Q$指定一个**水平子空间**$\mathrm{H}_q \subset \mathrm{T}_q Q$，满足

(a) $\mathrm{T}_q Q = \mathrm{V}_q \oplus \mathrm{H}_q, \quad \forall q \in Q$,

(b) $\zeta_{c*}[\mathrm{H}_q] = \mathrm{H}_{\zeta_c(q)} = \mathrm{H}_{cq}, \quad \forall q \in Q,\ c \in \mathbb{R}(\text{或}\mathbb{C}),\ c \neq 0$,

(c) H_q光滑地依赖于q.

定理 I-9-1 设Q为矢丛，$q \in Q$，以X^{V}代表$X \in \mathrm{T}_q Q$的竖直分量，则

$$(c_1 X_1 + c_2 X_2)^{\mathrm{V}} = c_1 X_1{}^{\mathrm{V}} + c_2 X_2{}^{\mathrm{V}}, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathrm{T}_q Q,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\text{或}\mathbb{C}). \qquad \text{(I-9-1)}$$

证明 这是线性代数中直和分解理论的一个结论，建议读者作为习题自我证明. □

带联络的矢丛Q上的曲线$\hat{\eta} : I \to Q$称为底流形M上的曲线$\eta : I \to M$的**水平提升曲线**，若$\hat{\eta}(t)$每点的切矢都是水平矢量，且$\hat{\pi}(\hat{\eta}(t)) = \eta(t) \quad \forall t \in I$.

定理 I-9-2 设Q是带联络的矢丛，$\eta : I \to M$是底流形上的曲线，$x_0 \equiv \eta(0)$，则$\forall q \in \hat{\pi}^{-1}[x_0] \subset Q$，$\exists \eta(t)$的唯一水平提升曲线$\hat{\eta}(t)$，满足$\hat{\eta}(0) = q$.

证明 类似于定理I-2-6的证明. □

上册第3章早已讲过矢量场的协变导数. 设M是流形，∇_a是M上的导数算符，v^a是开集$U \subset M$上的矢量场，则v^a在任一$x_0 \in U$沿任一矢量$T^a \in \mathrm{T}_{x_0} M$的协变导数$T^b \nabla_b v^a$有意义. 具体说，设$I$是$\mathbb{R}$的开区间，$\eta : I \to U$是曲线，$x_0 \equiv \eta(0)$，$T \equiv \mathrm{d}\eta(t)/\mathrm{d}t|_{t=0}$，则$T^b \nabla_b v^a$(也记作$\nabla_T v^a$)可表为[见式(3-2-14)]

$$\nabla_T v^a \equiv T^b \nabla_b v^a = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(\tilde{v}^a|_{\eta(s)} - v^a|_{x_0}), \qquad \text{(I-9-2)}$$

其中$\tilde{v}^a|_{x_0}$是$v^a|_{\eta(s)}$沿曲线$\eta(t)$平移至x_0点的结果. 这里的关键是矢量场沿曲线平

移的概念. 如果 M 上给定 ∇_a, 自然就有平移法则；如果 M 上没给 ∇_a, 但 M 的切丛 TM (作为一个矢丛)上给了联络, 则也可借此给 M 自然地定义一个沿曲线的平移法则. 首先, $U \subset M$ 上的一个矢量场 v^a 相当于一个截面 $\hat{\sigma}: U \to \mathrm{T}M$ (见 §I.3 例 4), $\hat{\sigma}[\eta(t)]$[简记作 $\hat{\sigma}(t)$]则代表该矢量场在曲线 $\eta(t)$ 上的取值, 故 $\hat{\sigma}(s)$ $(\forall s \in I)$ 就是 $v^a|_{\eta(s)}$, 再以 $\hat{\eta}_s(t)$ 代表 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$ 的水平提升(图 I-16[①]), 便可把 $\hat{\eta}_s(0)$ 自然地解释为 $v^a|_{\eta(s)}$ 沿 $\eta(t)$ 平移至 x_0 点的结果, 即式(I-9-2)中的 $\tilde{v}^a|_{x_0}$, 而 $\hat{\eta}_0(0) = \hat{\sigma}(0)$ 则对应于 $v^a|_{x_0}$. 于是式(I-9-2)在去掉抽象指标后可改写为

$$\nabla_T v = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0) - \hat{\eta}_0(0)]. \tag{I-9-3}$$

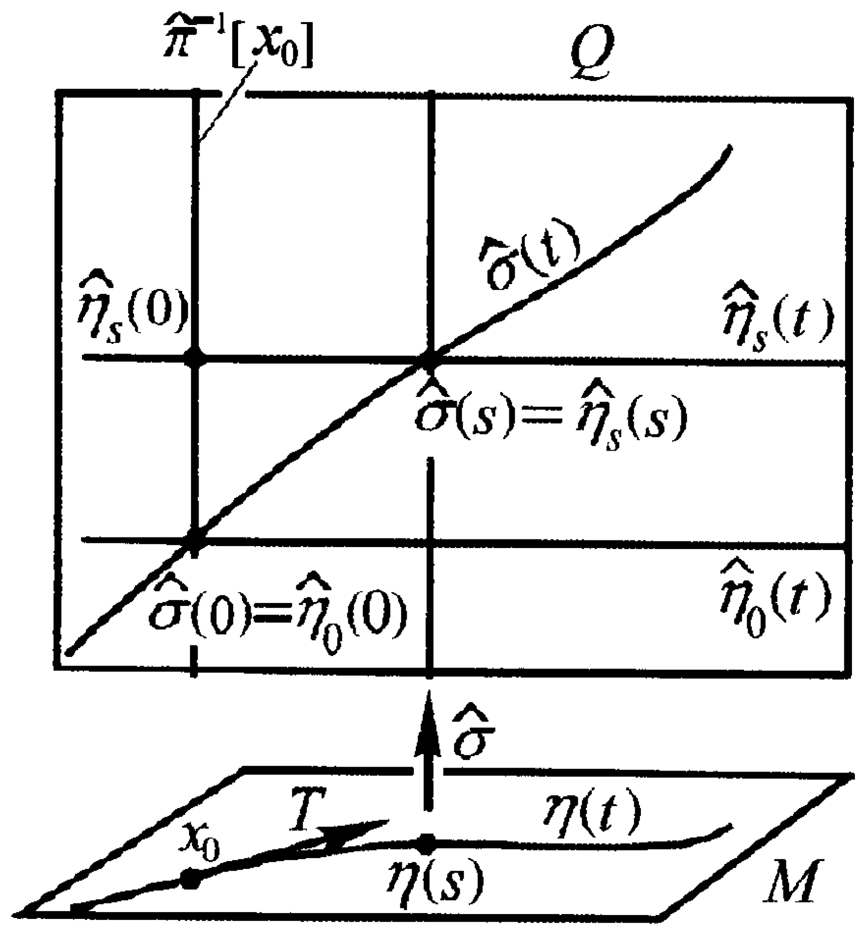


图 I-16　矢丛截面的协变导数

任何矢丛 Q 的每一纤维 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 都是一个矢量空间, 其中两个元素 $q_1, q_2 \in \hat{\pi}^{-1}[x]$ 之和(差) $(q_1 \pm q_2) \in \hat{\pi}^{-1}[x]$ 有意义, 因而上式右边对任意带联络的矢丛都有意义. 至于左边的 v, 它无非是截面映射 $\hat{\sigma}: U \to Q$ 的像, 当 $Q = \mathrm{T}M$ (切丛)时是 U 上的矢量场, 当 Q 是 M 上的 (k,l) 型张量丛时是 U 上的 (k,l) 型张量场, 当 Q 是 M 上的任一矢丛时, 不妨认为 $\hat{\sigma}$ 也代表 U 上的某种场, 因而也可推广式(I-9-3)以定义"截面场" $\hat{\sigma}$ 的协变导数 $\nabla_T \hat{\sigma}$：

定义 2　设 Q 是带联络的矢丛, $\hat{\sigma}: U \to Q$ 是局域截面. 为定义 $\hat{\sigma}$ 沿点 $x_0 \in U$ 的矢量 $T \in \mathrm{T}_{x_0}U$ 的协变导数 $\nabla_T \hat{\sigma}$, 取曲线 $\eta: I \to U$ 使 $x_0 \equiv \eta(0)$, $T \equiv \mathrm{d}\eta(t)/\mathrm{d}t|_{t=0}$, 把 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 的水平提升记作 $\hat{\eta}_s(t)$, 则

$$\nabla_T \hat{\sigma} := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0) - \hat{\eta}_0(0)]. \tag{I-9-4}$$

注 1　由上式可知 $\nabla_T \hat{\sigma}$ 是纤维 $\hat{\pi}^{-1}[x_0]$ 的一点, 但因 $\hat{\pi}^{-1}[x_0]$ 是矢量空间, 也可把 $\nabla_T \hat{\sigma}$ 认同为点 $\hat{\sigma}(0) \in \hat{\pi}^{-1}[x_0]$ 的一个切于 $\hat{\pi}^{-1}[x_0]$ 的矢量. 为此, 先做如下复习. 设 V 是 n 维矢量空间, $\{e_\mu\}$ 是 V 的选定基底, 则每一 $v \in V$ 有 n 个分量 $\{v^\mu\}$, 故 V 可看作流形 $\mathbb{R}^n$, 而 v^μ 则充当坐标(改记作 x^μ). 坐标系 $\{x^\mu\}$ 在流形 V 上有坐标基底场 $\{\partial/\partial x^\mu\}$. 作为流形 V 的一点, v 有切空间 $\mathrm{T}_v V$. 把 $\mathrm{T}_v V$ 的 $\partial/\partial x^\mu|_v$ 与 V 的 e_μ 相对应(认同)可建立同构关系 $\mathrm{T}_v V \leftrightarrow V$, 因而可把点 $v \in V$ 的切矢量与 V 的点自

① 图 I-16 和 I-21 的优点是直观, 但要防止它可能的误导. 例如, 当 $\eta(t)$ 是自相交曲线时 $\hat{\eta}_s(t)$ 与一条纤维可能交于不止一点, 而图中却看不出这种可能性.

然认同(还可证明这一认同与基底$\{e_\mu\}$的选择无关). 设$\gamma(t)$是V中曲线, 其在坐标系$\{x^\mu\}$的参数式为$x^\mu(t)$, 则它在点$\gamma(0)$的切矢

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)=\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{v_0}\left.\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{I-9-5}$$

上式中的d/dt是求切矢记号. 但矢量空间有加法又保证以下的求导公式有意义:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)\equiv\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[\gamma(t)-\gamma(0)]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[e_\mu x^\mu(t)-e_\mu x^\mu(0)]$$

$$=e_\mu\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[x^\mu(t)-x^\mu(0)]=e_\mu\left.\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \tag{I-9-6}$$

请注意上式左端的$\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\,\gamma(t)$代表对$t$求导. 然而, 式(I-9-5)和(I-9-6)右边的基矢$(\partial/\partial x^\mu)|_{\gamma(0)}$和$e_\mu\in V$可以认同, 所以式(I-9-5)和(I-9-6)左边相等, 就是说, 在矢量空间的情况下对记号d/dt既可理解为切矢又可理解为求导, 两种理解可交替使用.

注2　为了给截面$\hat\sigma$沿x_0点的矢量T的协变导数$\nabla_T\hat\sigma$下定义(即定义2), 刚才曾借助于一条切于T的曲线$\eta(t)$. 虽然这样的曲线很多, 但是下面的定理I-9-3保证由定义2给出的$\nabla_T\hat\sigma$与曲线的选择无关, 因而合法.

定理 I-9-3　　$\nabla_T\hat\sigma=(\hat\sigma_*T)^{\mathrm{V}}$.　(右边代表$\hat\sigma_*T$的竖直分量)　(I-9-7)

注3　$\nabla_T\hat\sigma$本是$\hat\pi^{-1}[x_0]$的一点, 但可认同为点$\hat\sigma(x_0)$的一个矢量, 定理断言它等于点$\hat\sigma(x_0)$的竖直矢量$(\hat\sigma_*T)^{\mathrm{V}}$.

证明[选读]　设$\eta: I\to U$是含x_0的开集$U\subset M$中的曲线, 满足$\eta(0)=x_0$, $\mathrm{d}\eta(t)/\mathrm{d}t|_{t=0}=T$. 定义映射$\phi$: $I\times I\,(\subset\mathbb{R}^2)\to\hat\pi^{-1}[U]$如下:

$$\phi(t,s):=\hat\eta_s(t),\quad\forall(t,s)\in I\times I.\quad[\hat\eta_s(t)\text{ 的含义同前}]$$

令$\nu(s)\equiv\hat\eta_s(0)=\phi(0,s)$, 则$\nu(s)$是$\hat\pi^{-1}[x_0]$中的曲线, 由式(I-9-4)得

$$\nabla_T\hat\sigma=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[\nu(s)-\nu(0)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\nu(s)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\phi(0,s)=\phi_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(0,s)\right]. \tag{I-9-8}$$

以$\lambda(t)$代表正方形$I\times I$的一条对角线, 即$\lambda(t)\equiv(t,t)$, 则它在原点$(0,0)$的切矢可用自然坐标系$\{t,s\}$的基矢展开为[其中$(t,0)$和$(0,s)$分别代表纵横轴]

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\lambda(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(t,0)+\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(0,s)\in\mathrm{T}_{(0,0)}\mathbb{R}^2, \tag{I-9-9}$$

故

$$\phi_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\lambda(t)\right]=\phi_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(t,0)\right]+\phi_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(0,s)\right]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\phi(t,0)+\nabla_T\hat{\sigma}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\hat{\eta}_0(t)+\nabla_T\hat{\sigma}, \tag{I-9-10}$$

其中第二步用到式(I-9-8), 第三步用到ϕ的定义. 另一方面又有

$$\phi_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\lambda(t)\right]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\hat{\sigma}(\eta(t))=\hat{\sigma}_*\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\eta(t)\right)=\hat{\sigma}_*T, \tag{I-9-11}$$

其中第二步是因为$\phi(\lambda(t))\equiv\phi(t,t)\equiv\hat{\eta}_t(t)=\hat{\sigma}(t)\equiv\hat{\sigma}(\eta(t))$. 式(I-9-10)右边第一、二项分别属于$\mathrm{H}_{\hat{\sigma}(0)}$和$\mathrm{V}_{\hat{\sigma}(0)}$, 所以式(I-9-11)和(I-9-10)联立导致式(I-9-7). □

注 4 虽然用式(I-9-4)给$\nabla_T\hat{\sigma}$下定义时借用过曲线$\eta(t)$, 但定理 I-9-3 表明$\nabla_T\hat{\sigma}$只取决于$T\in\mathrm{T}_{x_0}M$而与曲线$\eta(t)$无关.

定理 I-9-4 设Q是带联络的矢丛, $\eta: I\to M$是曲线, $x_1\equiv\eta(t_1)$, $x_2\equiv\eta(t_2)$, 则矢量空间$\hat{\pi}^{-1}[x_1]$与$\hat{\pi}^{-1}[x_2]$之间存在同构映射$\beta_{12}: \hat{\pi}^{-1}[x_1]\to\hat{\pi}^{-1}[x_2]$, 定义如下:

$\forall q\in\hat{\pi}^{-1}[x_1]$, 以$\hat{\eta}(t)$代表$\eta(t)$满足$\hat{\eta}(t_1)=q$的水平提升, 则$\beta_{12}(q):=\hat{\eta}(t_2)$.

证明 见 Spivak(1979)vol.II, P.399 . 难点是证明映射的线性性, 该书有高招. □

设Y是$U\subset M$上的矢量场, 则还可把$\nabla_T\hat{\sigma}$推广而得到截面$\hat{\sigma}$沿Y的协变导数$\nabla_Y\hat{\sigma}$, 它也是U上的一个局域截面, 即$\nabla_Y\hat{\sigma}: U\to Q$(容易看出此映射满足截面定义), 含义是: $(\nabla_Y\hat{\sigma})(x)\equiv\nabla_T\hat{\sigma}\ \forall x\in U$, 其中$T\equiv Y|_x$. 进一步说, 设$\hat{\sigma}: U\to Q$和$\hat{\sigma}': U\to Q$都是截面, λ是U上的函数, 则$\hat{\sigma}+\hat{\sigma}'$和$\lambda\hat{\sigma}$也都是$U$上的截面, 即$\hat{\sigma}+\hat{\sigma}': U\to Q$, $\lambda\hat{\sigma}: U\to Q$, 定义为

$$(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')(x):=\hat{\sigma}(x)+\hat{\sigma}'(x)\ (\text{右边是矢量空间}\hat{\pi}^{-1}[x]\text{中的加法}),\ \forall x\in U, \tag{I-9-12}$$

$$(\lambda\hat{\sigma})(x):=\lambda(x)\hat{\sigma}(x)\ (\text{右边是矢量空间}\hat{\pi}^{-1}[x]\text{中的数乘}),\ \forall x\in U. \tag{I-9-13}$$

定理 I-9-5 设$\hat{\sigma}: U\to Q$和$\hat{\sigma}': U\to Q$都是截面, λ是U上的函数, Y和Y'都是U上的矢量场, 则

(a) $\nabla_{Y+Y'}\hat{\sigma}=\nabla_Y\hat{\sigma}+\nabla_{Y'}\hat{\sigma}$; (I-9-14a)

(b) $\nabla_Y(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')=\nabla_Y\hat{\sigma}+\nabla_Y\hat{\sigma}'$; (I-9-14b)

(c) $\nabla_{\lambda Y}\hat{\sigma}=\lambda\nabla_Y\hat{\sigma}$; (I-9-14c)

(d) $\nabla_Y(\lambda\hat{\sigma})=\lambda\nabla_Y\hat{\sigma}+Y(\lambda)\hat{\sigma}$, $Y(\lambda)$代表Y作用于λ所得的函数. (I-9-14d)

证明 留作习题. 提示:①只须证明各式对任一$x\in U$成立. ②为证(a)和(c)可

用式(I-9-7)和(I-9-1)；为证(b)和(d)可利用定理I-9-4.

定理I-9-6 主丛P上的任一联络在其伴矢丛Q上自然诱导一个联络.

证明 每一$f\in F$自然伴有一个映射$\psi_f: P\to Q$，定义为$\psi_f(p) := p\cdot f\in Q$. 利用这一映射就可借助于$p\in P$的水平子空间$\mathrm{H}_p$定义$q\equiv p\cdot f\in Q$的水平子空间：$\mathrm{H}_q := \psi_{f*}[\mathrm{H}_p]$. 然而，若取轨道$q$的另一点$(p',f')$，则又有$q=\psi_{f'}(p')$. 仿照上式，岂非又可给$q$点定义另一水平子空间$\mathrm{H}_q' := \psi_{f'*}[\mathrm{H}_{p'}]$？好在$p,p'$同纤维保证$\exists g\in G$使$p'=pg$以及$\psi_f=\psi_{f'}\circ R_g$，从而不难证明$\mathrm{H}_q'=\mathrm{H}_q$：

$$\mathrm{H}_q' = \psi_{f'*}[R_{g*}\mathrm{H}_p] = (\psi_{f'*}\circ R_{g*})[\mathrm{H}_p] = (\psi_{f'}\circ R_g)_*[\mathrm{H}_p] = \psi_{f*}[\mathrm{H}_p] = \mathrm{H}_q .$$

可见H_q与f的选择无关，$\mathrm{H}_q := \psi_{f*}[\mathrm{H}_p]$是$\mathrm{H}_q$的合法定义. 下面验证这一定义满足定义1的各条件. 设$q=p\cdot f=\psi_f(p)$，则

(a) $\forall X\in \mathrm{T}_qQ$，令$Y\equiv\hat\pi_* X$，以$\tilde Y$代表$Y$在$p$的水平提升，令$X_2\equiv\psi_{f*}\tilde Y\in \mathrm{H}_q$，$X_1\equiv X-X_2$，则

$$\hat\pi_* X_1 = \hat\pi_* X - \hat\pi_* X_2 = Y-(\hat\pi_*\circ\psi_{f*})(\tilde Y) = Y-(\hat\pi\circ\psi_f)_*(\tilde Y) = Y-\pi_*\tilde Y = Y-Y=0,$$

故$X_1\in \mathrm{V}_q$，即X可被表为竖直分量X_1和水平分量X_2之和. 不难验证分解的唯一性，为此只须证明$\mathrm{H}_q\cap \mathrm{V}_q=0\in \mathrm{T}_qQ,\ \forall q\in Q$.

(b)由$q=p\cdot f$得$cq=p\cdot cf=\psi_{cf}(p)$，由$\zeta_c(q)\equiv cq$又得$\psi_{cf}=\varsigma_c\circ\psi_f$，故

$$\mathrm{H}_{cq}\equiv\psi_{cf*}[\mathrm{H}_p] = (\varsigma_c\circ\psi_f)_*[\mathrm{H}_p] = \varsigma_{c*}[\psi_{f*}[\mathrm{H}_p]]\equiv\varsigma_{c*}[\mathrm{H}_q].$$

(c)略. □

注5 在任一矢丛Q上指定任一联络H(按定义1)后，必有带联络$\tilde\omega$的主丛P使得Q是P的伴矢丛，而且H是由$\tilde\omega$按定理I-9-6诱导的联络. 证明见Spivak (1979) vol.II, P.397～401.

定理 I-9-7 设伴矢丛Q的联络由主丛P的联络诱导而得，$\tilde\eta(t)$是曲线$\eta(t)$在P上的水平提升曲线，则

$$\hat\eta(t)\text{是}\eta(t)\text{在}Q\text{上的水平提升曲线}\Leftrightarrow\exists f\in F\text{使}\hat\eta(t)=\tilde\eta(t)\cdot f .$$

证明 (A)($\Leftarrow$) 由$\hat\eta(t)=\tilde\eta(t)\cdot f=\psi_f(\tilde\eta(t))$得$\hat\pi(\hat\eta(t))=\pi(\tilde\eta(t))=\eta(t)$和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat\eta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_f(\tilde\eta(t))=\psi_{f*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde\eta(t)\in \mathrm{H}_{\hat\eta(t)},$$

[最末一步用到$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\tilde\eta(t)\in \mathrm{H}_{\tilde\eta(t)}$.] 可见$\hat\eta(t)$是$\eta(t)$在$Q$上的水平提升.

(B)($\Rightarrow$) 令$q\equiv\hat\eta(0)$，$p\equiv\tilde\eta(0)$，则$\exists f\in F$使得$q=p\cdot f$，于是由(A)可知

$\mu(t) \equiv \tilde{\eta}(t) \cdot f$ 是 $\eta(t)$ 在 Q 上的水平提升，且 $\mu(0) = \tilde{\eta}(0) \cdot f = p \cdot f = q$. 由水平提升曲线的唯一性(定理 I-9-2)便可肯定 $\hat{\eta}(t) = \mu(t) = \tilde{\eta}(t) \cdot f$. □

协变导数 $\nabla_T \hat{\sigma}$ 还可表为更便于计算的形式. 在 P 上任取截面 σ 作为辅助，不妨认为 σ 与 $\hat{\sigma}$ 有相同定义域，即 $\hat{\sigma}: U \to Q$，$\sigma: U \to P$，如此便有映射 $f: U \to F$ 使

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot f(x), \quad \forall x \in U . \tag{I-9-15}$$

[解释：$\forall x \in U$ 有 $\hat{\sigma}(x) \in \hat{\pi}^{-1}[x] \subset Q$ 和 $\sigma(x) \in \pi^{-1}[x] \subset P$，因而有唯一的 $f(x) \in F$ 满足式(I-9-15).] 仍以 $\eta: I \to U$ 代表定义 $\nabla_T \hat{\sigma}$ 时借用的曲线，$\forall s \in I$，以 $\tilde{\eta}_s(t)$ 代表 $\eta(t)$ 过点 $\sigma(s) \equiv \sigma(\eta(s))$ 的水平提升线，则 $\tilde{\eta}_s(s) = \sigma(s)$ (图 I-17). 把 $\eta(s)$ 看作式(I-9-15)的 x，则该式给出

$$\hat{\sigma}(\eta(s)) = \sigma(\eta(s)) \cdot f(\eta(s)), \quad \text{简写为}\ \hat{\sigma}(s) = \sigma(s) \cdot f(s), \tag{I-9-15$'$}$$

令

$$\mu_s(t) \equiv \tilde{\eta}_s(t) \cdot f(s), \tag{I-9-16}$$

则定理 I-9-7 保证 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 在 Q 上的水平提升线. 又因

$$\mu_s(s) = \tilde{\eta}_s(s) \cdot f(s) = \sigma(s) \cdot f(s) = \hat{\sigma}(s), \quad [\text{末步用到式(I-9-15}')]$$

故 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$ 的水平提升线，因而 $\mu_s(t) = \hat{\eta}_s(t)$，与式(I-9-16)结合便得

$$\hat{\eta}_s(t) = \tilde{\eta}_s(t) \cdot f(s), \tag{I-9-16$'$}$$

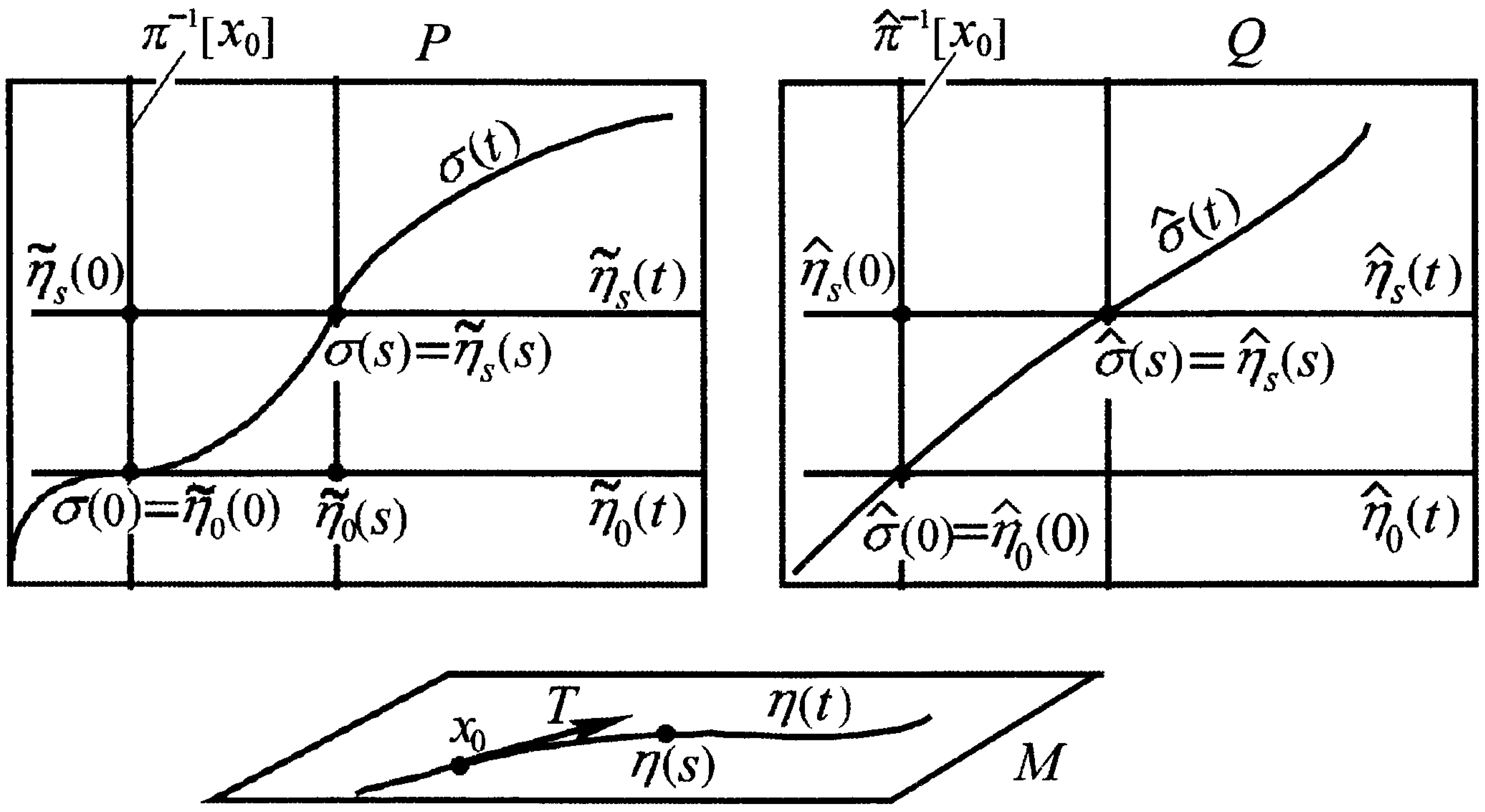


图 I-17　借助主丛的辅助截面 σ 计算伴矢丛截面 $\hat{\sigma}$ 的协变导数

特别地，

$$\hat{\eta}_s(0) = \tilde{\eta}_s(0) \cdot f(s) . \tag{I-9-17}$$

既然 $\tilde{\eta}_s(0)$ 与 $\sigma(0)$ 同属纤维 $\pi^{-1}[x_0]$，就存在映射 $g: I \to G$ 使

$$\tilde{\eta}_s(0)=\sigma(0)g(s),\quad \forall s\in I,\tag{I-9-18}$$

而且 $g(0)=e$. 于是式(I-9-18)导致 $\hat{\eta}_s(0)=\sigma(0)g(s)\cdot f(s)=\sigma(0)\cdot g(s)f(s)$, 因而式(I-9-4)现在可改写为

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[g(s)f(s)-g(0)f(0)]=\sigma(0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[g(s)f(s)].$$

[第一步用到由式(I-3-15)定义的加法.] 式中的 $g(s)f(s)$ 代表群元 $g(s)$ 对 $f(s)$ 的左作用, 即 $\chi_{g(s)}f(s)$, 故

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\chi_{g(t)}f(t)].\tag{I-9-19}$$

使用上式计算 $\nabla_T\hat{\sigma}$ 时首先要选定辅助截面 $\sigma: U\to P$ [式中的 $\sigma(0), g(t)$ 及 $f(t)$ 都与 σ 有关]. 但式(I-9-4)表明 $\nabla_T\hat{\sigma}$ 不因 σ 的选择而变. 现在的 Q 不但是 $P(M,G)$ 的伴丛而且是伴矢丛, 所以全体 χ_g 的集合 $\hat{G}\equiv\{\chi_g: F\to F\,|\,g\in G\}$ 是群 G 的表示群(见§I.3倒数第二段), 即存在同态 $\rho: G\to\hat{G}$, 满足 $\rho(g)=\chi_g$, 因而式(I-9-19)又可改写为

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\rho(g(t))f(t)].\tag{I-9-19'}$$

在表示空间 V 中选定基底后, 每一 $f\in F$ 的全体分量可排成列阵, 而 $\hat{G}$ 的每个元素 $\rho(g)$ 都是方阵. 但刚才[式(I-9-18)上行]以 g 代表映射 $I\to G$ 而不是群元, 群元应记作 $g(t)$, 因此准确地应说每个 $\rho(g(t))$ 都是方阵. 式(I-9-19')的求导可利用 $\rho(g(0))=\rho(e)=\hat{e}\in\hat{G}$ 而展开为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\rho(g(t))f(t)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f(t)+\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho(g(t))\right]f(0).\tag{I-9-20}$$

令 $V=U$, 选另一截面 $\sigma': V\to P$ 使 $\sigma'[\eta(t)]=\tilde{\eta}_0(t)$. 以 $\tilde{\omega}$ 代表 P 上的联络, 则 $\omega\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$ 和 $\omega'\equiv\sigma'^*\tilde{\omega}$ 分别是 U 和 V 上的联络, 两者的关系服从式(I-2-5), 用于曲线 η 的任一点 $\eta(t)$ 及该点切于 η 的切矢 $Y(t)$ 就是

$$\omega'(Y(t))=\mathscr{Ad}_{g_{UV}(\eta(t))^{-1}}\omega(Y(t))+L_{g_{UV}(\eta(t))^{-1}*}g_{UV*}(Y(t)),\tag{I-9-21}$$

式中的 $g_{UV}(\eta(t))$ 满足式(I-1-12), 即

$$\sigma_V(\eta(t))=\sigma_U(\eta(t))g_{UV}(\eta(t)).\tag{I-9-22}$$

另一方面, 把式(I-9-18)改写为 $\tilde{\eta}_0(0)=\tilde{\eta}_s(0)g(s)^{-1}$, 由定理I-2-7可知这又导致

$$\tilde{\eta}_0(t)=\tilde{\eta}_s(t)g(s)^{-1},$$

故

$$\tilde{\eta}_0(s)=\tilde{\eta}_s(s)g(s)^{-1}=\sigma(s)g(s)^{-1},$$

也可写成

$\tilde{\eta}_0(t)=\sigma(t)g^{-1}(t)$，其中映射 $g^{-1}: I\to G$ 定义为 $g^{-1}(t):=\ g(t)^{-1}, \forall t\in I$. (I-9-22′)

注意到 $\sigma(t)=\sigma_U(\eta(t))$, $\tilde{\eta}_0(t)=\sigma'(\eta(t))=\sigma_V(\eta(t))$，对比式(I-9-22′)与(I-9-22)可知 $g_{UV}(\eta(t))=g^{-1}(t)$. 于是式(I-9-21)成为

$$\omega'(Y(t))=\mathscr{Ad}_{g(t)}\omega(Y(t))+L_{g(t)*}g_{UV*}(Y(t)). \qquad \text{(I-9-21′)}$$

而 $\omega'(Y(t))=(\sigma'^*\tilde{\omega})(Y(t))=\tilde{\omega}(\sigma'_*Y(t))=0$ (因 σ'_*Y 水平), 故

$$0=\mathscr{Ad}_{g(t)}\omega(Y(t))+L_{g(t)*}g_{UV*}(Y(t)). \qquad \text{(I-9-21″)}$$

上式每项都是 $\mathscr{G}$ 的元素. 用 $\rho: G\to\hat{G}$ 在点 $e\in G$ 的推前映射 $\rho_*: \mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$ 作用于上式两边便得 $\hat{\mathscr{G}}$ 的元素等式

$$\rho_*[L_{g(t)*}g_{UV*}(Y(t))]=-\rho_*[\mathscr{Ad}_{g(t)}\omega(Y(t))]=-\mathscr{Ad}_{\rho(g(t))}[\rho_*(\omega(Y(t)))], \qquad \text{(I-9-23)}$$

其中第二步用到附录G 习题20(a). 而上式左边又可表为

$$\rho_*[L_{g(t)*}g_{UV*}(Y(t))]=\rho_*[L_{g(t)*}g_{UV*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\eta(t+s)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\{\rho[L_{g(t)}g_{UV}(\eta(t+s))]\}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\{\rho[g(t)g^{-1}(t+s)]\}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[\rho(g(t))\rho(g(t+s)^{-1})]$$

$$=\rho(g(t))\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\rho(g(t+s))^{-1}=\rho(g(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(g(t))^{-1}, \qquad \text{(I-9-24)}$$

其中第四、五步用到 ρ 的同态性, 第五步还用到 $\rho(g(t))$ 是矩阵(因而求切矢可归结为求导). 式(I-9-23)与(I-9-24)结合给出

$$\rho(g(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(g(t))^{-1}]=-\mathscr{Ad}_{\rho(g(t))}[\rho_*(\omega(Y(t)))]=-\rho(g(t))[\rho_*(\omega(Y(t)))]\rho(g(t))^{-1},$$

其中第二步用到附录G 习题19. 于是

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\rho(g(t))^{-1}=-[\rho_*(\omega(Y(t)))]\rho(g(t))^{-1},$$

特别地,

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}\ \rho(g(t))^{-1} = -[\rho_*(\omega(T))].$$

而由 $\rho(g(t))^{-1}\rho(g(t)) = I$ 可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t))^{-1} = -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t)), \tag{I-9-25}$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t)) = \rho_*(\omega(T)), \tag{I-9-26}$$

代入式(I-9-20)后再代入式(I-9-19′)便得

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(t) + [\rho_*(\omega(T))]f(0)\right\}. \tag{I-9-27}$$

式(I-9-27)右边的 $f(t)$ 和 $f(0)$ 都是列阵, $\rho_*(\omega(T))$ 是方阵, 故花括号内第二项是由方阵乘列阵所得的列阵.

我们举五例说明上式的应用. 例1(及1′)至例3的主丛都是 $P = \mathrm{F}M$, 伴矢丛依次为 $Q_1 = \mathrm{T}M$ (切丛), $Q_2 = \mathrm{T}^*M$ (余切丛), $Q_3 = (1,1)$ 型张量丛. 默认 P 上已指定联络 $\tilde{\omega}$, 因而各伴矢丛上都有相应的诱导联络.

例1 $P = \mathrm{F}M$, $Q_1 = \mathrm{T}M$. 令 $\hat{\sigma}: U \to Q_1$ 为待求导的截面, 不妨设 U 也是 M 中某坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域. 选辅助截面 $\sigma: U \to P$ 使

$$\sigma(x) = (x, \partial/\partial x^\mu|_x),\ \forall x \in U. \text{(此截面就是}U\text{上的坐标基底场)} \tag{I-9-28}$$

本例中 $G = \hat{G}_1 = \mathrm{GL}(n)$, 同态 $\rho_1: G \to \hat{G}_1$ 是恒等映射. 把式(I-9-27)用于本例, 补上矩阵元编号指标 μ, ν 后成为

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0} \cdot \left\{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f^\mu(t) + [\rho_{1*}(\omega(T))]^\mu{}_\nu f^\nu(0)\right\}, \tag{I-9-29}$$

上式的 $\omega(T) \in \mathscr{G}$ 可表为 $\omega_\sigma(x_0)T^\sigma$, 其中 T^σ 和 $\omega_\sigma(x_0)$ 分别是 T 和 ω 的坐标分量, 即

$$T^\sigma \equiv \mathrm{d}x^\sigma(T) \in \mathbb{R}, \quad \omega_\sigma(x_0) \equiv \omega(\partial/\partial x^\sigma|_{x_0}) \in \mathscr{G},$$

故

$$[\rho_{1*}(\omega(T))]^\mu{}_\nu = [\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0)T^\sigma)]^\mu{}_\nu = T^\sigma[\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0))]^\mu{}_\nu \in \hat{\mathscr{G}}_1. \tag{I-9-30}$$

上式右边是 n 项之和, 每项是实数 T^σ 与第 σ 个方阵(元) $[\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0))]^\mu{}_\nu$ 之积. $\rho_1: G \to \hat{G}_1$ 是恒等映射导致 $\rho_{1*}: \mathscr{G} \to \hat{\mathscr{G}}_1$ 是恒等映射, 故

$$[\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0))]^\mu{}_\nu = (\omega_\sigma(x_0))^\mu{}_\nu.$$

以 $\omega^\mu{}_{\nu\sigma}(x_0)$ 简记第 σ 个方阵元, 即

$$\omega^\mu{}_{\nu\sigma}(x_0) \equiv (\omega_\sigma(x_0))^\mu{}_\nu = [\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0))]^\mu{}_\nu , \tag{I-9-31}$$

则式(I-9-29)成为

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \left(x_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0} \right) \cdot \left.\left(\frac{\mathrm{d}f^\mu}{\mathrm{d}t} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma f^\nu \right)\right|_{x_0} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left(\frac{\mathrm{d}f^\mu}{\mathrm{d}t} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma f^\nu \right) \right]_{x_0} , \tag{I-9-32}$$

其中第二步用到式(I-3-8). 以 v^a 代表 $\hat{\sigma}$ 对应的矢量场, 则 $\nabla_T \hat{\sigma} = T^b \nabla_b v^a$, 再把式(I-9-32)中的 f 改记为 v, 便有

$$T^b \nabla_b v^a = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left(\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu \right) \right]_{x_0} . \tag{I-9-33}$$

把上式同式(3-2-1)对比就得到 $\omega^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu$,① 再由 T^a 和 v^a 的任意性又得 $\omega^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$. 可见, 由主丛 FM 的联络 $\tilde{\omega}$ 经截面 $\sigma : U \to P$ 在 U 上诱导的 $\omega \equiv \sigma^* \tilde{\omega}$ 对应的那组数 $\omega^\mu{}_{\nu\sigma}$ 就是熟知的克氏符 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$.

式(I-9-33)的 $\mathrm{d}v^\mu / \mathrm{d}t$ 还残留有曲线的痕迹, 但只要把 $\mathrm{d}v^\mu / \mathrm{d}t$ 改写为 $T^\sigma \partial v^\mu / \partial x^\sigma$, 全式就可改写为与所选曲线明显无关的形式:

$$T^b \nabla_b v^a = T^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu \right) \right]_{x_0} . \tag{I-9-33′}$$

此外, 若开始时选另一坐标系 $\{x'^\mu\}$ 及其相应截面 $\sigma'(x) = (x, \partial/\partial x'^\mu|_x)$, 则式(I-9-33′)右边改为

$$T'^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a \left(\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\sigma} + \omega'^\mu{}_{\nu\sigma} v'^\nu \right) \right]_{x_0} ,$$

这无非是同一矢量 $T^b \nabla_b v^a$ 在另一坐标系的分量表达式. 选截面 σ 无非是在 U 上选基底场(包括非坐标基底), 对 $T^b \nabla_b v^a$ 当然无实质性影响. 下面是一个用非坐标基底的例子.

例 1′ 上例讨论的是矢量场 v 沿 x_0 点的矢量 T 的协变导数. 作为一个有用的特例, 本例讨论 $U \subset M$ 上的任一标架场 $\{e_\alpha\}$ (可以不是坐标基底场)的第 μ 基矢场

---

① 只要从一开始就把 $C^c{}_{ab}$ 的定义式(3-1-5)右边改为 $C^c{}_{ba}\omega_c|_p$ (非实质性改动), 则式(3-2-1)右边末项就改为 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu$, 故有正文中的 $\omega^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu$.

e_μ 沿 x_0 点的第 τ 基矢 $e_\tau|_{x_0}$ 的协变导数. 就是说, 在任意指定截面 $\sigma: U \to \mathrm{F}M$ (因而 U 上有标架场 $\{e_\alpha\}$)后, 我们特意选

$$(\text{a})\, v|_U = e_\mu|_U\,; \qquad (\text{b}) T|_{x_0} = e_\tau|_{x_0}\,, \tag{I-9-34}$$

然后要找出 $\nabla_T v$ [即 $(\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0}$] 的表达式. 将式(I-9-27)用于本例并补上指标后给出.

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0) \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f^\nu(t) + [\rho_*(\omega(T))]^\nu{}_\sigma f^\sigma(0) \right\}, \tag{I-9-35}$$

其中的 $f^\nu(t) \equiv f^\nu(\eta(t))$ 应满足式(I-9-15), 即

$$\hat{\sigma}(\eta(t)) = \sigma(\eta(t)) \cdot f(\eta(t)) = (\eta(t)), e_\lambda|_{\eta(t)}) \cdot f^\lambda(\eta(t)) = e_\lambda|_{\eta(t)} f^\lambda(\eta(t))\,, \tag{I-9-36}$$

上式对任意截面 $\hat{\sigma}: U \to \mathrm{T}M$ 及 $\sigma: U \to \mathrm{F}M$ 都成立, 左边无非是 U 上的某个矢量场 v. 由上式不难验证 v 满足式(I-9-34)当且仅当 $f^\sigma(\eta(t)) = \delta^\sigma{}_\mu$, 故式(I-9-35)右边花括号内第一项为零, 第二项则为

$$[\rho_*(\omega(T))]^\nu{}_\lambda f^\lambda(0) = [\rho_*(\omega(e_\tau|_{x_0}))]^\nu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\mu = [\rho_*(\omega_\tau(x_0))]^\nu{}_\mu = \omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)\,,$$

所以式(I-9-35)具体化为

$$(\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0} = (x_0, e_\nu|_{x_0}) \cdot \omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0) = [(e_\nu)^a \omega^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0}\,, \tag{I-9-37}$$

其中 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}(x_0)$ 是 $\omega_\tau(x_0) \equiv \omega(e_\tau|_{x_0}) \in \mathscr{G}$ 的第 ν, μ 矩阵元, 故 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}$ 就是选读 I-2-1 的 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}$. 另一方面,

$$(\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0} = [(e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a]_{x_0} \equiv [(e_\nu)^a \gamma^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0}\,, \tag{I-9-37$'$}$$

其中含 $\equiv$ 的一步无非是用基矢把矢量 $[(e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a]_{x_0}$ 展开[见式(5-7-1)]. 对比式(I-9-37)和(I-9-37′)便得 $\omega^\nu{}_{\mu\tau} = \gamma^\nu{}_{\mu\tau}$. 严格说来, 式(I-9-37)第二步和式(I-9-37′)第一步都存在着抽象指标不平衡的问题. 后面的式(I-9-42)也有同样问题. 若要坚持平衡, 表达就会更复杂. 好在现在的写法其实并无实质性错误, 故此将就.

注 6　主丛 $P = \mathrm{F}M$ 上的联络 $\tilde{\omega}$ 可以通过下列两个途径在底流形 M 上诱导出导数算符. 途径①: $\mathrm{F}M$ 上的 $\tilde{\omega}$ 按定理 I-2-8 在 M 上诱导出一个导数算符; 途径②: $\mathrm{F}M$ 上的 $\tilde{\omega}$ 先按定理 I-9-6 在伴丛 $Q = \mathrm{T}M$ 上诱导一个联络, 此联络又按本节定义 2 [即式(I-9-4)]在 M 上定义一个导数算符. 于是出现另一个殊途同归问题(第一个殊途同归问题见选读 I-2-1): 这两个途径得到的导数算符是否相等?例 1′ 的结果 $\omega^\nu{}_{\mu\tau} = \gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 对此给出了肯定的答案.

例 2　$P = \mathrm{F}M$, $Q_2 = \mathrm{T}^*M$, 结构群 G 仍是 $\mathrm{GL}(n)$, 但表示群为[见式(I-3-10)]

$$\hat{G}_2 = \{方阵\,(g^{-1})^\mu{}_\nu \mid g \in \mathrm{GL}(n)\}. \tag{I-9-38}$$

由于$(g^{-1})^\mu{}_\nu$也属于$\mathrm{GL}(n)$，故$\hat{G}_2 = \mathrm{GL}(n) = \hat{G}_1$.（作为集合，$\hat{G}_2$与$\hat{G}_1$可认为相等.）

利用式(I-3-5)和(I-3-10)不难验证(前提是把被作用的f_μ排成列阵)

$$\rho_2(g) = \rho_1(g^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad \forall g \in G. \quad (上标\,\mathrm{T}\,代表矩阵的转置) \tag{I-9-39}$$

令$\hat{\sigma}: U \to Q_2$为待求导的截面，仍用例1的辅助截面σ和坐标系$\{x^\mu\}$. 把式(I-9-27)用于本例，补上μ, ν后成为

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f_\mu(t) + [\rho_{2*}(\omega(T))]_\mu{}^\nu f_\nu(0) \right\}. \tag{I-9-40}$$

与式(I-9-27)后面的说明一样，上式右边的$f_\mu(t)$和$f_\nu(0)$都是列阵，花括号内第二项中μ, ν, ν的顺序(是$\mu\nu\nu$而非$\nu\mu\nu$)保证第二项的确代表方阵乘列阵. 简记$B \equiv \omega(T) \in \mathscr{G}$，则

$$\rho_{2*} B = \rho_{2*}\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{Exp}\, sB) \right] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \rho_2(\mathrm{Exp}\, sB) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} [\rho_1((\mathrm{Exp}\, sB)^{-1})]^{\mathrm{T}}$$

$$= \left[\rho_{1*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (-\mathrm{Exp}\, sB) \right]^{\mathrm{T}} = -(\rho_{1*} B)^{\mathrm{T}}, \tag{I-9-41}$$

[其中第三步用到式(I-9-39)，第四步用到中册式(G-5-5)下行的$\mathrm{Exp}(A)\mathrm{Exp}(-A) = I$.] 所以

$$[\rho_{2*}(\omega(T))]_\mu{}^\nu = -[\rho_{1*}(\omega(T))]^\nu{}_\mu = -T^\sigma [\rho_{1*}(\omega_\sigma(x_0))]^\nu{}_\mu = -T^\sigma \omega^\nu{}_{\mu\sigma}(x_0), \tag{I-9-42}$$

其中第二、三步依次用到式(I-9-30)和(I-9-31). 于是式(I-9-40)成为

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \left(x_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0} \right) \cdot \left. \left(\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}t} - \omega^\nu{}_{\mu\sigma} T^\sigma f_\nu \right) \right|_{x_0} = \left[(\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}t} - \omega^\nu{}_{\mu\sigma} T^\sigma f_\nu \right) \right]_{x_0}, \tag{I-9-43}$$

其中第二步用到式(I-3-11). 故

$$T^b \nabla_b f_a = \left[(\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}t} - \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} T^\sigma f_\nu \right) \right]_{x_0}, \tag{I-9-44}$$

也可改写为与曲线明显无关的形式：

$$T^b \nabla_b f_a = T^\sigma \left[(\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} f_\nu \right) \right]_{x_0}. \tag{I-9-44$'$}$$

式(I-9-44)与用第3章的初等方法求得的$T^b \nabla_b f_a$表达式实质一致.

例 3[选读] $P = FM$, $Q_3 = (1,1)$ 型张量丛(见§I.3 例 6). 这时的结构群 G 仍是 $\mathrm{GL}(n)$, 但表示群为 $\hat{G}_3 = \{g^\mu{}_\alpha(g^{-1})^\beta{}_\nu \mid g \in \mathrm{GL}(n)\}$. 以 F_3 代表 Q_3 的典型纤维, 仍把 $\mathbb{R}^n$ 记作 V, 则 $F_3 = \mathscr{T}_V(1,1)$ [见式(I-3-12)]. 以 ρ_1, ρ_2, ρ_3 依次代表从 G 到 $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$ 的同态映射, 则 $\forall g \in G$ 有

$$\rho_1(g) \in \hat{G}_1, \quad \rho_2(g) \in \hat{G}_2, \quad \rho_3(g) \in \hat{G}_3. \tag{I-9-45}$$

$\rho_3(g) \in \hat{G}_3$ 的作用对象是 F_3 的元素, 而 $F_3 = \mathscr{T}_V(1,1)$ 是 n^2 维矢量空间. 利用 $V \equiv \mathbb{R}^n$ 的自然坐标基底可构造 F_3 的一个自然基底, 任一 $f \in F_3$ 的 n^2 个分量可排成一个 $n^2 \times 1$ 的列阵, $\rho_3(g)$ 对 f 的作用结果 $\rho_3(g)f$ 则可看作 $n^2 \times n^2$ 的方阵 $\rho_3(g)$ 与 $n^2 \times 1$ 的列阵 f 的矩阵乘积. 以 $n = 2$ 为例, 令 $f \in F_3$, $\hat{g} \equiv \rho_3(g) \in \hat{G}_3$, 则

$$f = \begin{bmatrix} f^1{}_1 \\ f^1{}_2 \\ f^2{}_1 \\ f^2{}_2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{g} \equiv \rho_3(g) = \begin{bmatrix} \hat{g}^1{}_{11}{}^1 & \hat{g}^1{}_{11}{}^2 & \hat{g}^1{}_{12}{}^1 & \hat{g}^1{}_{12}{}^2 \\ \hat{g}^1{}_{21}{}^1 & \hat{g}^1{}_{21}{}^2 & \hat{g}^1{}_{22}{}^1 & \hat{g}^1{}_{22}{}^2 \\ \hat{g}^2{}_{11}{}^1 & \hat{g}^2{}_{11}{}^2 & \hat{g}^2{}_{12}{}^1 & \hat{g}^2{}_{12}{}^2 \\ \hat{g}^2{}_{21}{}^1 & \hat{g}^2{}_{21}{}^2 & \hat{g}^2{}_{22}{}^1 & \hat{g}^2{}_{22}{}^2 \end{bmatrix}. \tag{I-9-46}$$

另一方面, 从 $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$ 的定义式出发通过论证可知方阵 $\rho_3(g)$ 等于方阵 $\rho_1(g)$ 与 $\rho_2(g)$ 的张量积, 即

$$\rho_3(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g), \qquad \forall g \in G. \tag{I-9-47}$$

此处给出方阵张量积的计算公式: 设 P, Q 是同阶方阵, 则它们的张量积 $P \otimes Q$ 的矩阵元为

$$(P \otimes Q)^\mu{}_{\nu\alpha}{}^\beta = P^\mu{}_\alpha \, Q_\nu{}^\beta. \tag{I-9-48}$$

仍记 $B \equiv \omega(T) \in \mathscr{G}$, 便有

$$\begin{aligned}
\rho_{3*}B &= \rho_{3*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\exp sB) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \rho_3(\exp sB) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} [\rho_1(\exp sB) \otimes \rho_2(\exp sB)] \\
&= \rho_1(e) \otimes \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \rho_2(\exp sB) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \rho_1(\exp sB)\right] \otimes \rho_2(e) \\
&= \rho_1(e) \otimes \rho_{2*}B + \rho_{1*}B \otimes \rho_2(e) = -\rho_1(e) \otimes (\rho_{1*}B)^{\mathrm{T}} + \rho_{1*}B \otimes \rho_2(e),
\end{aligned} \tag{I-9-49}$$

其中第三步用到式(I-9-47), 第六步用到式(I-9-41). 于是由式(I-9-48)可得 $\rho_{3*}B$ 的矩阵元表达式

$$(\rho_{3*}B)^\mu{}_{\nu\alpha}{}^\beta = -\delta^\mu{}_\alpha (\rho_{1*}B)^\beta{}_\nu + (\rho_{1*}B)^\mu{}_\alpha \delta_\nu{}^\beta. \tag{I-9-50}$$

将式(I-9-27)用于本例得

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)+(\rho_{3*}B)^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}(0)\right]$$

$$=\sigma(0)\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)-\delta^{\mu}{}_{\alpha}(\rho_{1*}B)^{\beta}{}_{\nu}f^{\alpha}{}_{\beta}(0)+(\rho_{1*}B)^{\mu}{}_{\alpha}\delta_{\nu}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}(0)\right]$$

$$=\sigma(0)\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)-(\rho_{1*}B)^{\beta}{}_{\nu}f^{\mu}{}_{\beta}(0)+(\rho_{1*}B)^{\mu}{}_{\alpha}f^{\alpha}{}_{\nu}(0)\right]$$

$$=\sigma(0)\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)-T^{\sigma}\omega^{\beta}{}_{\nu\sigma}(x_0)f^{\mu}{}_{\beta}(0)+T^{\sigma}\omega^{\mu}{}_{\alpha\sigma}(x_0)f^{\alpha}{}_{\nu}(0)\right]$$

$$=\left(x_0,\left.\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right|_{x_0}\right)\cdot\left.\left(\frac{\mathrm{d}f^{\mu}{}_{\nu}}{\mathrm{d}t}+\omega^{\mu}{}_{\alpha\sigma}T^{\sigma}f^{\alpha}{}_{\nu}-\omega^{\beta}{}_{\nu\sigma}T^{\sigma}f^{\mu}{}_{\beta}\right)\right|_{x_0}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^{a}(\mathrm{d}x^{\nu})_{b}\left(\frac{\mathrm{d}f^{\mu}{}_{\nu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}T^{\sigma}f^{\alpha}{}_{\nu}-\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma}T^{\sigma}f^{\mu}{}_{\beta}\right)\right]_{x_0},\qquad\text{(I-9-51)}$$

其中第二步用到式(I-9-50), 第四步用到式(I-9-30)和(I-9-31).

上式也可改写为与曲线明显无关的形式:

$$\nabla_T\hat{\sigma}=T^{\sigma}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^{a}(\mathrm{d}x^{\nu})_{b}\left(\frac{\partial f^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}f^{\alpha}{}_{\nu}-\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma}f^{\mu}{}_{\beta}\right)\right]_{x_0}.\qquad\text{(I-9-51')}$$

式(I-9-51)与用第3章的初等方法求得的 $T^c\nabla_c f^a{}_b$ 表达式实质一致.

例 4 在平凡主丛 $P=\mathbb{R}^4\times\mathrm{U}(1)$ 上指定联络 $\tilde{\omega}$, 令 $F=\mathbb{C}$, 在 F 上定义左作用 χ : $\mathrm{U}(1)\times F\to F$ 为

$$\chi_g(\phi):=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi\ \ (\text{其中}\,q\,\text{为整数}),\quad\forall g=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\in\mathrm{U}(1),\ \phi\in F,$$

所得的伴矢丛 Q 就是§I.6 的伴丛在 $G=\mathrm{U}(1), N=1$ 时的特例. χ_g 的上述定义说明表示群 $\hat{G}=G=\mathrm{U}(1)$, 而且同态 ρ : $G\to\hat{G}$ 是同构 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mapsto\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}$. 为求得截面 $\hat{\sigma}$: $\mathbb{R}^4\to Q$ 的协变导数可任选辅助截面 σ : $\mathbb{R}^4\to P$, 它与 $\hat{\sigma}$ 结合决定一个映射 ϕ : $\mathbb{R}^4\to F$, 满足[见式(I-9-15)]

$$\hat{\sigma}(x)=\sigma(x)\cdot\phi(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}^4.\qquad\text{(I-9-52)}$$

依照§I. 6, 这 $\hat{\sigma}(x)$ 可改写为 $\varPhi(x)$, 代表 $\mathbb{R}^4$ 上的一个(绝对的)复标量场(内部矢量

场), 而 $\phi(x)$ 则解释为 $\Phi(x)$ 在内部标架 $\sigma(x)$ 的分量. 把式(I-9-27)用于现在的情况得

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\phi(t)+[\rho_*(\omega(T))]\phi(0)\right\}, \tag{I-9-53}$$

借用 $\mathbb{R}^4$ 上的洛伦兹坐标系 $\{x^\mu\}$ 又得 $\omega(T)=\omega_\mu(x_0)T^\mu$ 及

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\phi(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\phi(x^\mu(t))=\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right|_{x_0}\left.\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right|_{x_0}T^\mu, \tag{I-9-54}$$

故

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0)\cdot T^\mu[\partial_\mu\phi+\rho_*(\omega_\mu)\phi]_{x_0}.$$

再把联络 ω 与规范势 A^r 的关系 $\omega_\mu(x)=ke_rA^r_\mu(x)$ [式(I-7-1)]及 $\rho_*(e_r)=-\mathrm{i}L_r$ [式(I-4-22)]用于 $G=\hat{G}=\mathrm{U}(1)$ 的情况得 $\rho_*(\omega_\mu)=-\mathrm{i}eqA_\mu$ [因当 $\hat{G}=\mathrm{U}(1)$ 时 $k=e, L_1=q$], 于是

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0)\cdot T^\mu(\partial_\mu\phi-\mathrm{i}eqA_\mu\phi)_{x_0}=\sigma(0)\cdot T^\mu(\mathrm{D}_\mu\phi)_{x_0}. \ [\mathrm{D}_\mu \text{ 由式(I-5-7)定义}] \tag{I-9-55}$$

因 $\sigma(0)$ 可解释为内部标架, 故 $T^\mu\mathrm{D}_\mu\phi$ 对应于 $\nabla_T\Phi$ 的内部分量, 于是

$$\text{复标量场}\Phi\text{的协变导数(的内部分量)}=T^\mu\mathrm{D}_\mu\phi. \tag{I-9-56}$$

这正是§I.5 中把 D_μ 称为"协变导数算符"的缘由. 在规范变换下, 虽然 ϕ, A_μ 和 $\mathrm{D}_\mu\phi$ 都要变, 但是由于 Φ 有规范不变性, ∇_T 也有规范不变性(它由主丛的联络 $\tilde{\omega}$ 决定, 而 $\tilde{\omega}$ 当然是规范不变的), 所以 $\nabla_T\Phi$ 是规范不变的. 这就回答了§I.6 倒数第二段之末所提出的" $\mathrm{D}_\mu\phi$ 的变换是否也对应于一个绝对的事物"的问题, 这个事物就是 $\nabla_T\Phi$.

例 5 与 ϕ 场共轭的 $\bar{\phi}$ 场应看作 $P\equiv\mathbb{R}^4\times\mathrm{U}(1)$ 的另一伴矢丛 $\bar{Q}$ 的截面. 为定义 $\bar{Q}$, 选 $F=\mathbb{C}^*$, 但 $\chi: G\times F\to F$ 定义为

$$\chi_g(\bar{\phi}) := \bar{\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}, \quad \forall g=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\in\mathrm{U}(1), \ \bar{\phi}\in F,$$

仿照例 4 及例 2 便得

$$\text{复标量场}\bar{\Phi}\text{的协变导数(的分量)}=T^\mu(\partial_\mu\bar{\phi}+\mathrm{i}eqA_\mu\bar{\phi})_{x_0}=T^\mu\mathrm{D}_\mu\bar{\phi}. \tag{I-9-57}$$

[选读 I-9-1]

为适用于非阿贝尔规范理论, 本选读介绍例 4 和例 5 的推广. 设理论的内部变换群为 G, 涉及表示 $\rho: G\to\hat{G}$, 表示空间是复矢量空间 V (选定基底后 $\hat{G}$ 的元素是方阵), 便可构造主丛 $P=\mathbb{R}^4\times G$, 并以 V 为典型纤维构造复伴矢丛 Q, 其中左作

用 χ 定义为

$$\chi_g(\phi) := \rho(g)\phi, \text{(方阵乘以列阵)} \qquad \forall g \in G, \phi \in V. \tag{I-9-58}$$

仍把截面 $\hat{\sigma}$ 改记作 Φ，从 $\nabla_T \hat{\sigma}$ 的一般表达式(I-9-27)出发，利用 $\omega_\mu(x) \equiv k e_r A^r_\mu(x)$ 及 $\rho_*(e_r) = -\mathrm{i}L_r$ 不难求得

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0) \cdot T^\mu (\partial_\mu \phi - \mathrm{i}k\vec{L} \cdot \vec{A}_\mu \phi)_{x_0} = \sigma(0) \cdot T^\mu (\mathrm{D}_\mu \phi)_{x_0}, \tag{I-9-59}$$

[其中 D_μ 由式(I-5-17a)定义.] 于是

$$\text{复场}\,\Phi\,\text{的协变导数(的分量)} = T^\mu \mathrm{D}_\mu \phi. \tag{I-9-60}$$

这就是例4向非阿贝尔情况的推广. 为推广例5，应先复习选读I-5-2. 场论中通常要求表示空间 V 上有内积(但允许非正定)，而且 G (通过 $\hat{G}$)对 V 的作用要保内积. 所以 $\hat{G}$ 是群 $\tilde{\mathrm{U}}(V)$ 或其李子群. 同态 $\rho: G \to \tilde{\mathrm{U}}(V)$ 按式(I-5-29)自然诱导出保内积同态 $\bar{\rho}: G \to \tilde{\mathrm{U}}(V^*)$. 以 V^* 为典型纤维构造复伴矢丛 $\bar{Q}$，其中左作用 $\bar{\chi}_g: V^* \to V^*$ 定义为

$$\bar{\chi}_g(\bar{\phi}) := \bar{\rho}(g)\bar{\phi}, \quad \forall g \in G, \bar{\phi} \in V^*. \tag{I-9-61}$$

将式(I-9-19)用于现在的情况得

$$\begin{aligned}
\nabla_T \bar{\Phi} &= \sigma(0) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [\bar{\chi}_{g(t)} \bar{\phi}(t)] = \sigma(0) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [\bar{\rho}(g(t))\bar{\phi}(t)] \\
&= \sigma(0) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [\bar{\phi}(t)\rho(g(t))^{-1}] \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bar{\phi}(t) \right] \rho(g(0))^{-1} + \bar{\phi}(0) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t))^{-1} \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bar{\phi}(t) + \bar{\phi}(0) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t))^{-1} \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bar{\phi}(t) - \bar{\phi}(0) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t)) \right\},
\end{aligned} \tag{I-9-62}$$

其中第三步用到式(I-5-31)，末步用到 $\rho(g(t))\rho(g(t))^{-1} = I$.

另一方面，若把式(I-9-19)用于求 $\nabla_T \Phi$，将有

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi(t) + \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g(t)) \right] \phi(0) \right\}, \tag{I-9-63}$$

与式(I-9-59)对比得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho(g(t)) = -\mathrm{i}kT^{\mu}\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x_0), \tag{I-9-64}$$

再代入式(I-9-62)便得

$$\nabla_T\bar{\Phi} = \sigma(0)\cdot T^{\mu}(\partial_{\mu}\bar{\phi} + \mathrm{i}k\bar{\phi}\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu})|_{x_0} = \sigma(0)\cdot T^{\mu}(\mathrm{D}_{\mu}\bar{\phi})|_{x_0}, \tag{I-9-65}$$

[其中 D_{μ} 由式(I-5-17b)定义.] 于是

$$\text{复场 } \bar{\Phi} \text{ 的协变导数(的分量)} = T^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\bar{\phi}. \tag{I-9-66}$$

[选读 I-9-1 完]

习 题

~1. 试证式(I-1-4), 即映射 $S_U: \pi^{-1}[x]\to G$ 与 $R_{\tilde{p}_U}: G\to\pi^{-1}[x]$ 互逆.

~2. 试证式(I-1-5), 即 $R_g\circ R_p = R_{pg}\circ I_{g^{-1}}$, $\forall p\in P, g\in G$.

~3. 试证定理 I-1-1.

~4. 试证由式(I-1-7)定义的 ~ 的确是等价关系.

5. 完成§I.1 例 4 的(1)和(3)中的两道习题, 即证明:① GL(n) 的群元把基底 $\{e_{\mu}\}$ 变为基底 $\{e_{\nu}g^{\nu}{}_{\mu}\}$;(这是线性代数的结论, 建议读者作为习题自我证明.) ② S_U 满足 $S_U(pg) = S_U(p)g$ $\forall g\in G$.

~6. 试证式(I-1-15), 即 $R_{pg} = R_p\circ L_g$ $\forall p\in P, g\in G$.

7. 试给定理 I-1-6 的证明补全.

8. 试证§I.2 定义 2 条件(b)可等价地表述为条件(b′), 亦即

(b′) $\forall x\in M$, $\exists\, p\in\pi^{-1}[x]$ 使

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X), \quad \forall\, g\in G,\ X\in \mathrm{T}_pP.$$

9. 补证定理 I-2-1 证明(A)(a)中的分解 $X = X_1 + X_2$ 的唯一性.

10. 试证定理 I-2-7 .

~11. 定理 I-2-8 证明(B)中借用了一条曲线 $\eta(t)$ 及其水平提升线 $\tilde{\eta}(t)$. 试补证:当 $\eta(t)$ 选定后, $\nabla_T v$ 与 $\tilde{\eta}(t)$ 的选择无关.

~12. 补证 §I.3 例 4 的待证命题: $v' = v$ 当且仅当 $(x, e'_{\mu}; f'^{\rho})$ 与 $(x, e_{\mu}; f^{\rho})$ 属于同一轨道.

13. 试证式(I-4-15)的 $\hat{G}\equiv\{\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\theta}, \cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\theta})\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}$ 是群, 而且同态映射

$$\rho: \mathrm{U}(1)\to\hat{G}, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mapsto \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\theta}, \cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\theta})$$

是 U(1) 群的表示(当 $q_1,\cdots,q_N$ 的最大公约数为 1 时 ρ 还是忠实表示).

~14. 试证式(I-5-25), 即 $\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}\hat{A}_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\hat{A}_{\mu}(x) + k[\hat{A}_{\mu}(x), \hat{A}_{\nu}(x)]$. 提示:利用 $-\mathrm{i}L_r \equiv \rho_*(e_r)$, 而且 $\rho:\ G\to\hat{G}$ 为同态保证 $\rho_*: \mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$ 为同态.

15. 试证式(I-5-26)，即 $\hat{F}'_{\mu\nu}(x)=U(\vec{\theta}(x))\hat{F}_{\mu\nu}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1}$.

16. 试证定理 I-8-1、I-8-2 和 I-8-4.

17. 试证定理 I-9-1 和 I-9-5.

附录 J　德西特时空和反德西特时空

§J.1　常曲率空间

定义 1　度规 g_{ab} 称为常曲率度规, 若存在常数 K 使

$$R_{abcd} = 2K g_{c[a} g_{b]d} , \tag{J-1-1}$$

其中 $R_{abcd} = g_{de} R_{abc}{}^{e}$, 而 $R_{abc}{}^{e}$ 是 g_{ab} 的黎曼张量.

以 n 代表流形的维数, $R_{ac} \equiv R_{abc}{}^{b}$, $R \equiv g^{ac} R_{ac}$, 则由式(J-1-1)易证常曲率度规满足

$$\text{(a)}\, R_{ac} = K(n-1) g_{ac} , \qquad \text{(b)}\, R = Kn(n-1) . \tag{J-1-2}$$

设 G_{ab} 是 $n=4$ 的、有洛伦兹号差的常曲率度规的爱因斯坦张量, 则由式(J-1-2)易得 $G_{ab} = -R g_{ab} / 4$, 与带宇宙因子项的爱因斯坦方程 $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 比较发现常曲率度规可看作宇宙因子 $\Lambda = R/4$ 的真空爱因斯坦方程 $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$ 的特解. 注意到式(J-1-2b)在 $n=4$ 时给出 $R = 12K$, 便得常曲率度规的 K 与相应的 Λ 的如下关系:

$$\Lambda = 3K . \tag{J-1-3}$$

命题 J-1-1　($n \geqslant 3$ 的)常曲率度规的 Weyl 张量 $C_{abcd} = 0$.

证明　练习. □

定义 2　广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 称为常曲率空间(space of constant curvature), 若 g_{ab} 是常曲率度规.

定义 3　广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 与 (M', g'_{ab}) 称为有相同局域几何的, 若① $\forall p \in M, \exists\, p$ 的邻域 $O \subset M$ 和开子集 $O' \subset M'$ 以及微分同胚 $\phi : O \to O'$, 满足 $\phi_*(g_{ab}|_O) = g'_{ab}|_{O'}$; ② $\forall p' \in M', \exists\, p'$ 的邻域 $O' \subset M'$ 和开子集 $O \subset M$ 以及微分同胚 $\phi' : O' \to O$, 满足 $\phi'_*(g'_{ab}|_{O'}) = g_{ab}|_O$.

注 1　由定义 3 易得如下结论(对本节的具体问题很有用): $\forall p \in M, q \in M'$, 若有 p 的邻域 $O \subset M$ 和 q 的邻域 $O' \subset M'$ 以及微分同胚 $\phi : O \to O'$, 满足

$$\phi_*(g_{ab}|_O) = g'_{ab}|_{O'} ,$$

则 (M, g_{ab}) 与 (M', g'_{ab}) 有相同的局域几何.

命题 J-1-2　(a)流形维数、度规号差及 K 值相同的两个常曲率空间有相同的

局域几何. (b)常曲率空间有最高对称性, 即其等度规群(可能只是局部群)的维数(亦即独立 Killing 矢量场的个数)是$n(n+1)/2$, 其中n是空间的维数.

证明　见选读 J-1-1. □

命题 J-1-2(a)配以式(J-1-2b)表明, 维数及号差给定的常曲率度规可按其标量曲率R值分类. $R=0$的常曲率度规就是平直度规. 在$n=4$的洛伦兹号差的前提下, $R>0$和$R<0$的常曲率度规分别称为 **de Sitter(德西特)度规**和 **anti-de Sitter(反德西特)度规**. 这是两个有最高对称性但又不平直的度规, 对宇宙论、弯曲时空量子场论和量子引力论的研究都有重要意义.

[选读 J-1-1]

本选读的目的之一是证明命题 J-1-2. 这一证明颇有难度, 为便于理解, 先证明几个引理, 由此导出一个命题(命题 J-1-8), 在此基础上命题 J-1-2 的证明就变得容易.[1] 利用命题 J-1-8 还可方便地补证上册§3.4 (及中册§12.1)讲而未证的定理 3-4-9 (及命题 12-1-8).

由于证明中涉及多个几何量在两个不同坐标系的分量, 为清晰区分起见, 我们将使用两套具体(分量)指标, 即$i, j, k, l, \cdots$和$\mu, \nu, \sigma, \rho, \cdots$(都可从 1 取到$n$), 只把$a, b, c, d, \cdots$等少数最前面几个拉丁字母留作抽象指标.

引理 J-1-3　给定广义黎曼空间(M, g_{ab})和(M', g'_{ab}), 若存在微分同胚ϕ: $M \to M'$使$\phi_* g_{ab} = g'_{ab}$, 则存在"坐标变换"(加引号的含义见证明)$\{x^i\} \mapsto \{x'^\mu\}$使标量场

$$g_{ij} \equiv g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b \quad 和 \quad g'_{\mu\nu} \equiv g'_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b \tag{J-1-4}$$

所对应的n元函数$g_{ij}(x)$和$g'_{\mu\nu}(x')$满足

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{ij}(x(x'))\frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^j(x')}{\partial x'^\nu}, \tag{J-1-5}$$

其中$x^i(x')$代表与"坐标变换"$\{x^i\} \mapsto \{x'^\mu\}$相应的$n$个$n$元函数, 即$x^i(x'^\mu)$, 但括号中的指标一律省略.

证明　以(O, x^i)和(O', x'^i)分别代表M和M'上的坐标系(O和O'代表坐标域), 设$O \cap \phi^{-1}[O'] \neq \varnothing$. 令$z^\mu \equiv \phi^* x'^\mu$, 则$O \cap \phi^{-1}[O']$上既有坐标$\{x^i\}$又有坐标$\{z^\mu\}$, 故有坐标变换$\{x^i\} \mapsto \{z^\mu\}$. $\forall p \in O \cap \phi^{-1}[O']$, 令$q \equiv \phi(p)$, 则

$$x^i(p) = x^i(z(p)) = x^i(x'(q)), \tag{J-1-6}$$

① 主要参考文献是 Eisenhart(1949). 感谢中科院数学所邝志全研究员帮助笔者彻底弄懂这一证明.

上式第二个等号两边的$x^i(\ )$代表(相同的)函数关系，而且自变数$z^\mu(p)$与自变数$x'^\mu(q)$等值. 于是坐标变换$\{x^i\}\mapsto\{z^\mu\}$诱导出n个n元函数$x^i(x')$，不妨把变换$\{x^i\}\mapsto\{x'^\mu\}$也称为"坐标变换"，虽然这两组坐标定义在不同的流形上. 式(J-1-6)给出

$$\left.\frac{\partial x^i(z)}{\partial z^\mu}\right|_p=\left.\frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^\mu}\right|_q. \tag{J-1-7}$$

由式(J-1-4)及$\phi_* g_{ab}=g'_{ab}$得

$$\begin{aligned}g'_{\mu\nu}|_q&=\left[(\phi_* g)_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b\right]_q=g_{ab}|_p\,\phi^{-1}{}_*\left[\left.\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\right|_q\right]\phi^{-1}{}_*\left[\left.\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b\right|_q\right]\\&=\left[g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right)^b\right]_p=\left[g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\frac{\partial x^i}{\partial z^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b\frac{\partial x^j}{\partial z^\nu}\right]_p=\left[g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial z^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial z^\nu}\right]_p,\end{aligned} \tag{J-1-8}$$

其中第三步用到式(4-1-4). 以$x: O\to\mathbb{R}^n$及$x': O'\to\mathbb{R}^n$代表定义坐标x^i和x'^μ的同胚映射(即§2.1定义1中的ψ_α)，$F_{ij}(x)$及$F'_{\mu\nu}(x')$分别代表由标量场$g_{ij}: O\to\mathbb{R}$及$g'_{\mu\nu}: O'\to\mathbb{R}$自然诱导出的$n$元函数，即$g_{ij}=F_{ij}\circ x$，$g'_{\mu\nu}=F'_{\mu\nu}\circ x'$，则

$$g'_{\mu\nu}|_q=F'_{\mu\nu}(x'(q)),\qquad g_{ij}|_p=F_{ij}(x(p))=F_{ij}(x(x'(q))),$$

其中第二式的第二步用到式(J-1-6). 为了清晰区分标量场$g'_{\mu\nu}$与由它诱导出的n元函数，刚才特意引入符号$F'_{\mu\nu}(x')$代表后者. 懂得这一区别后就不妨按惯例把$F'_{\mu\nu}(x')$记作$g'_{\mu\nu}(x')$. 于是

$$g'_{\mu\nu}|_q=g'_{\mu\nu}(x'(q)),\qquad g_{ij}|_p=g_{ij}(x(x'(q))). \tag{J-1-9}$$

去掉上式中的(q)并与式(J-1-7)一同代入式(J-1-8)便得式(J-1-5). □

反之，给定两个对称、非退化的二次型$g_{ij}(x)$和$g'_{\mu\nu}(x')$，如果存在坐标变换$\{x^i\}\mapsto\{x'^\mu\}$使它们满足式(J-1-5)，则$g_{ij}(x)$和$g'_{\mu\nu}(x')$可看作两个度规场g_{ab}和g'_{ab}分别在$\{x^i\}$和$\{x'^\mu\}$系的分量，而且可构造局域微分同胚ϕ使$\phi_* g_{ab}=g'_{ab}$，因而描述相同的局域几何. 所以称满足式(J-1-5)的$g_{ij}(x)$和$g'_{\mu\nu}(x')$是互相**等价的**. 给定两个对称二次型$g_{ij}(x)$和$g'_{\mu\nu}(x')$，当它们满足什么更具体的条件时两者等价? 出于证明命题J-1-2的需要，此处只讨论这一问题的一些特殊情况. 我们先证明，如果式(J-1-5)成立，则g_{ij}和$g'_{\mu\nu}$相应的克氏符$\Gamma^l{}_{ij}$和$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu}$满足如下关系式:

$$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^l}{\partial x'^\lambda}=\Gamma^l{}_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}+\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}. \tag{J-1-10}$$

(右边第二项的存在说明 $\Gamma^l{}_{ij}$ 和 $\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu}$ 不是同一张量在两个坐标系的分量.) 证明如下.

对式(J-1-5)求导给出

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}+g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\nu\partial x'^\sigma}+\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\mu\partial x'^\sigma}\right), \quad \text{(J-1-11a)}$$

适当交换指标又得

$$\frac{\partial g'_{\sigma\nu}}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}+g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}+\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\mu\partial x'^\sigma}\right), \quad \text{(J-1-11b)}$$

及

$$\frac{\partial g'_{\mu\sigma}}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}+g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\nu\partial x'^\sigma}+\frac{\partial x^j}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\right). \quad \text{(J-1-11c)}$$

从式(J-1-11b)、(J-1-11c)之和中减去(J-1-11a)并乘以 $g'^{\sigma\lambda}(\partial x^l/\partial x'^\lambda)/2$ (对重复指标还要求和), 经计算便得式(J-1-10).

对称二次型 g_{ij} 和 $g'_{\mu\nu}$ 等价的充要条件是存在坐标变换 $\{x^i\}\mapsto\{x'^\mu\}$ [即存在函数组 $\{x^i(x'), i=1,\cdots,n\}$]使式(J-1-5)成立. 寻找这一函数组的第一步是写出它应满足的偏微分方程组. 形式地以 p^i_μ 代表偏导数 $\partial x^i/\partial x'^\mu$ [因而 p^i_μ 是 x'^σ 的函数, 即 $p^i_\mu(x')$]:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}=p^i_\mu, \quad \text{(J-1-12)}$$

把 i 改为 l 并对 x'^σ 求导, 注意到式(J-1-10), 得

$$\frac{\partial p^l_\mu}{\partial x'^\sigma}=\Gamma'^\lambda{}_{\mu\sigma}p^l_\lambda-\Gamma^l{}_{ij}p^i_\mu p^j_\sigma. \quad \text{(J-1-13)}$$

在 $g_{ij}(x)$ 及 $g'_{\mu\nu}(x')$ 给定后 $\Gamma^l{}_{ij}(x)$ 及 $\Gamma'^\lambda{}_{\mu\sigma}(x')$ 是已知函数, 因此式(J-1-12)、(J-1-13)是关于 $n+n^2$ 个待定 n 元函数 $x^i(x')$ $(i=1,\cdots,n)$ 及 $p^i_\mu(x')$ $(i,\mu=1,\cdots,n)$ 的偏微分方程组. g_{ij} 与 $g'_{\mu\nu}$ 的等价性同这个方程组的可积(有解)性密切相关, 于是想到 Frobenius 定理(见附录 F). 定理 F-2 对现在的讨论有重要帮助, 该定理只涉及两个自变量 x, y 的一个函数 $u(x,y)$, 但不难推广到涉及 n 个自变量 $x'^1,\cdots,x'^n$ 的 m 个函数 $u^1(x'),\cdots,u^m(x')$ 的情况, 其待解方程组为

$$\frac{\partial u^i}{\partial x'^\sigma} = F^i_\sigma(x', u), \quad i = 1, \cdots, m, \quad \sigma = 1, \cdots, n. \tag{J-1-14}$$

定理证明中用到的两个矢量场现在推广为n个矢量场:

$$(w_\sigma)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\right)^a + F^i_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^a, \quad \sigma = 1, \cdots, n. \tag{J-1-15}$$

用于我们关心的情况[式(J-1-12)和(J-1-13)], 则函数$u^i(x')$可分成两组, 一组是$x^i(x')$, 共n个, 其指标为i; 一组是$p^i_\mu(x')$, 共n^2个, 其指标为${}^i_\mu$, 故$m = n + n^2$. 相应的F^i_σ也分成两组, 一组是$F^i_\sigma = p^i_\sigma$, 一组是

$$F^l_{\mu\sigma} = \Gamma'^\lambda{}_{\mu\sigma} p^l_\lambda - \Gamma^l{}_{ij} p^i_\mu p^j_\sigma. \tag{J-1-16}$$

于是方程组(J-1-14)具体化为{(J-1-12), (J-1-13)}, 式(J-1-15)则具体化为

$$(w_\sigma)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\right)^a + p^i_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a + F^l_{\mu\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial p^l_\mu}\right)^a. \tag{J-1-17}$$

这是定义在平凡流形$\mathbb{R}^{n+(n+n^2)}$的某个同维子流形U上的矢量场,[①] n个x'^μ, n个x^i和n^2个p^i_μ都看作独立的自然坐标. $\{(w_1)^a, \cdots, (w_n)^a\}$构成$U$上的一个$n$维分布, 记作$W$.

引理 J-1-4　若

$$[w_\sigma, w_\nu]^a = 0, \quad \sigma, \nu = 1, \cdots, n, \tag{J-1-18}$$

则$\forall q_0 = (x'^\mu{}_0, x^i{}_0, p^i_{\mu 0}) \in U$存在方程组{(J-1-12), (J-1-13)}的一个解

$$\{x^i(x'), p^i_\mu(x')\},$$

满足$x^i(x'_0) = x^i{}_0$, $p^i_\mu(x'_0) = p^i_{\mu 0}$.

证明　只须把定理 F-2 的证明做自然推广.　□

引理 J-1-4 表明$[w_\sigma, w_\nu]^a = 0$是方程组{(J-1-12), (J-1-13)}的可积条件. 下面介绍这一条件的一个重要的等价表述.

引理 J-1-5　可积条件$[w_\sigma, w_\nu]^a = 0$等价于

$$R'_{\nu\sigma\mu}{}^\lambda p^l_\lambda = R_{kji}{}^l p^k_\nu p^j_\sigma p^i_\mu, \tag{J-1-19}$$

---

① 把两个坐标域在$\mathbb{R}^n$中的像分别记作$\tilde{O}$和$\tilde{O}'$, 则$U = \tilde{O}' \times \tilde{O} \times \mathrm{GL}(n)$, U的点可写作(x'^μ, x^i, p^i_μ), 其中$p^i_\mu \in \mathrm{GL}(n)$保证$p^i_\mu$为非退化矩阵.

其中 $R_{kji}{}^{l}$ 和 $R'_{\nu\sigma\mu}{}^{\lambda}$ 分别是与 $g_{ij}(x)$ 和 $g'_{\mu\nu}(x')$ 相应的黎曼张量分量，各自是 x^i 和 x'^{μ} 的函数.

证明 以 ∂_b 代表自然坐标系 $\{x'^{\mu}, x^i, p^i_{\mu}\}$ 的普通导数算符，注意到

$$\partial_b\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)^a = \partial_b\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)^a = \partial_b\left(\frac{\partial}{\partial p^l_{\mu}}\right)^a = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\right)^b \partial_b p^l_{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b \partial_b p^l_{\nu} = 0 \quad (\text{各自然坐标互相独立})$$

以及

$$\left(\frac{\partial}{\partial p^k_{\rho}}\right)^b \partial_b p^l_{\nu} = \delta^l_k \delta^{\rho}_{\nu},$$

由式(J-1-17)得

$$(w_{\sigma})^b \partial_b (w_{\nu})^a = \left(\frac{\partial}{\partial p^l_{\mu}}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} F^l_{\mu\nu} + p^i_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i} F^l_{\mu\nu} + F^k_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial p^k_{\rho}} F^l_{\mu\nu}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)^a F^k_{\rho\sigma}\delta^l{}_k \delta^{\rho}{}_{\nu}. \tag{J-1-20}$$

把式(J-1-16)代入上式求导，由 $[w_{\sigma}, w_{\nu}]^a = (w_{\sigma})^b \partial_b (w_{\nu})^a - (w_{\nu})^b \partial_b (w_{\sigma})^a$ 得

$$\begin{aligned}[w_{\sigma}, w_{\nu}]^a = (\partial/\partial p^l_{\mu})^a [(\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\sigma,\nu}) p^l_{\lambda} + \Gamma^l{}_{ij,k} p^i_{\mu}(-p^j_{\nu} p^k_{\sigma} + p^j_{\sigma} p^k_{\nu}) \\ + (\Gamma'^{\tau}{}_{\lambda\sigma}\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma'^{\tau}{}_{\lambda\nu}\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\sigma}) p^l_{\tau} + \Gamma^i{}_{mn}\Gamma^l{}_{ij} p^m_{\mu}(p^n_{\sigma} p^j_{\nu} - p^n_{\nu} p^j_{\sigma})].\end{aligned} \tag{J-1-21}$$

另一方面，由式(3-4-20′)得

$$R'_{\nu\sigma\mu}{}^{\lambda} p^l_{\lambda} = (\Gamma'^{\lambda}{}_{\nu\mu,\sigma} - \Gamma'^{\lambda}{}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma'^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma'^{\lambda}{}_{\sigma\rho} - \Gamma'^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma'^{\lambda}{}_{\nu\rho}) p^l_{\lambda}, \tag{J-1-22}$$

$$R_{kji}{}^{l} p^k_{\nu} p^j_{\sigma} p^i_{\mu} = (\Gamma^l{}_{ki,j} - \Gamma^l{}_{ji,k} + \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^l{}_{jm} - \Gamma^m{}_{ij}\Gamma^l{}_{km}) p^k_{\nu} p^j_{\sigma} p^i_{\mu}. \tag{J-1-23}$$

适当改写参与求和的具体指标便可看出

$$R'_{\nu\sigma\mu}{}^{\lambda} p^l_{\lambda} - R_{kji}{}^{l} p^k_{\nu} p^j_{\sigma} p^i_{\mu} = [w_{\sigma}, w_{\nu}]^a \text{ 在坐标基矢 } (\partial/\partial p^l_{\mu})^a \text{ 的分量},$$

因此 $[w_{\sigma}, w_{\nu}]^a = 0$ 等价于式(J-1-19). □

因为我们所关心的是 g_{ij} 与 $g'_{\mu\nu}$ 等价的具体条件，而等价时存在坐标变换 $\{x^i\} \mapsto \{x'^{\mu}\}$ 使式(J-1-5)成立，因此可以只关心流形 U 中满足条件 $g'_{\mu\nu} = g_{ij} p^i_{\mu} p^j_{\nu}$ 的

点构成的子流形，记作S_H．具体说，令

$$H_{\mu\nu}(x',x,p)\equiv g'_{\mu\nu}(x')-g_{ij}(x)p^i_\mu p^j_\nu,\quad \mu,\nu=1,\cdots,n, \tag{J-1-24}$$

则由

$$H_{\mu\nu}=0,\quad \mu,\nu=1,\cdots,n \tag{J-1-25}$$

定义的子流形就是S_H．每给定一对μ,ν值，$H_{\mu\nu}=0$就给出U中的一张超曲面．因为$H_{\mu\nu}=H_{(\mu\nu)}$，而且利用矩阵p^i_μ的非退化性[见式(J-1-17)后的脚注]又可证明$\mathrm{d}H_{\mu\nu}(\mu\leqslant\nu)$在$U$的各点为线性独立，故式(J-1-25)给出$(n^2+n)/2$张超曲面，它们的交集就是$S_H\subset U$．可见

$$\dim S_H=(n+n+n^2)-\frac{1}{2}(n^2+n)=n+\frac{1}{2}(n^2+n)>n\,.$$

从现在起只限制在S_H上探讨方程组{(J-1-12), (J-1-13)}的可积条件．然而这种做法的可行性的必要前提是由式(J-1-17)定义的矢量场$(w_1)^a,\cdots,(w_n)^a$在U上所给出的n维分布W也给出S_H上的n维分布(n维子空间场)，而这实质上就是要求每个$(w_\sigma)^a$都切于S_H．下面的引理表明情况的确如此．

引理 J-1-6　因为式(J-1-17)的n个矢量场中的每一个都与S_H相切，所以$\{(w_1)^a,\cdots,(w_n)^a\}$给出$S_H$上的一个$n$维子空间场($n$维分布)．

证明　$\partial_a H_{\mu\nu}$是由$H_{\mu\nu}=0$定义的那张超曲面的法余矢．欲证每个$(w_\sigma)^a$切于S_H只须证每个$(w_\sigma)^a$都满足

$$[(w_\sigma)^a\partial_a H_{\mu\nu}]|_{S_H}=0,\quad \mu,\nu=1,\cdots,n\,. \tag{J-1-26}$$

由式(J-1-17)及(J-1-24)得

$$\begin{aligned}(w_\sigma)^a\partial_a H_{\mu\nu}&=\left(\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\right)^a\partial_a H_{\mu\nu}+p^i_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\partial_a H_{\mu\nu}+F^l_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial p^l_\rho}\right)^a\partial_a H_{\mu\nu}\\&=\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}+p^i_\sigma\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x^i}+F^l_{\rho\sigma}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial p^l_\rho}\\&=g'_{\mu\nu,\sigma}-p^i_\sigma g_{mn,i}p^m_\mu p^n_\nu-F^l_{\rho\sigma}g_{ij}(p^i_\mu\delta^j_l\delta^\rho_\nu+\delta^i_l\delta^\rho_\mu p^j_\nu)\,.\end{aligned}$$

(再次提醒：x'^μ, x^i和p^i_μ被看作互相独立的坐标，对$H_{\mu\nu}$求偏导数时除一个坐标外的坐标都应看作常数．)

上式最右边末项$=-F^l_{\rho\sigma}g_{ij}\delta^i_l 2p^j_{(\mu}\delta^\rho_{\nu)}=-2g_{ij}(p^i_\lambda p^j_{(\mu}\Gamma'^\lambda{}_{\nu)\sigma}-\Gamma^i{}_{mn}p^n_\sigma p^j_{(\mu}p^m_{\nu)})$，

在 S_H 上 $H_{\mu\nu}=0$ 保证 $g_{ij}p^i_\lambda p^j_\mu = g'_{\lambda\mu}$，故

$$[(w_\sigma)^a\partial_a H_{\mu\nu}]|_{S_H} = g'_{\mu\nu,\sigma} - p^i_\sigma g_{mn,i}p^m_\mu p^n_\nu - 2g'_{\lambda(\mu}\Gamma'^\lambda{}_{\nu)\sigma} + 2g_{ij}\Gamma^i{}_{mn}p^n_\sigma p^j_{(\mu}p^m_{\nu)}.$$

上式右边第四项又可化为

$$2g_{ij}\Gamma^i{}_{mn}p^n_\sigma p^j_{(\mu}p^m_{\nu)} = g_{ij}g^{ik}(g_{km,n}+g_{nk,m}-g_{mn,k})p^n_\sigma p^j_{(\mu}p^m_{\nu)}$$

$$=(g_{jm,n}+g_{nj,m}-g_{mn,j})p^n_\sigma p^{(j}_\mu p^{m)}_\nu = g_{jm,n}p^n_\sigma p^j_\mu p^m_\nu.$$

类似的操作也适用于第三项，结果为 $-2g'_{\lambda(\mu}\Gamma'^\lambda{}_{\nu)\sigma} = -g'_{\mu\nu,\sigma}$，于是

$$[(w_\sigma)^a\partial_a H_{\mu\nu}]|_{S_H} = g'_{\mu\nu,\sigma} - g_{mn,i}p^m_\mu p^n_\nu p^i_\sigma - g'_{\mu\nu,\sigma} + g_{jm,n}p^n_\sigma p^j_\mu p^m_\nu = 0.$$ □

引理 J-1-7　可积条件 $[w_\sigma, w_\nu]^a = 0$ 在 S_H 上等价于

$$R'_{\nu\sigma\mu\tau} = R_{kjih}p^k_\nu p^j_\sigma p^i_\mu p^h_\tau. \tag{J-1-27}$$

证明　注意到引理 J-1-5，只须证明式(J-1-27)与(J-1-19)在 S_H 上等价.

(A) 由式(J-1-24)、(J-1-25)可知在 S_H 上有

$$g'_{\lambda\tau} = g_{lh}p^l_\lambda p^h_\tau. \tag{J-1-28}$$

以 $g_{lh}p^h_\tau$ 乘式(J-1-19)并对 l 求和便得式(J-1-27). 故由式(J-1-19)可推得式(J-1-27).

(B) 把 p^i_μ 看作矩阵的第 i,μ 个元素，并改记作 $p^i{}_\mu$(上下指标左右错开). 则式(J-1-28)可改写为矩阵等式 $g'=p^{\mathrm{T}}gp$ (其中 p^{T} 代表 p 的转置矩阵). 由此又得 $g'^{-1}=p^{-1}g^{-1}(p^{\mathrm{T}})^{-1}$，因而 $pg'^{-1}p^{\mathrm{T}}=g^{-1}$，于是有

$$g^{ij} = g'^{\mu\nu}p^i{}_\mu p^j{}_\nu. \tag{J-1-29}$$

把上式改写为 $g^{lh}=g'^{\lambda\tau}p^l{}_\lambda p^h{}_\tau$，以 $g'^{\lambda\tau}p^l{}_\lambda$ 乘式(J-1-27)(并对 τ 求和)，便得式(J-1-19). 故由式(J-1-27)可推得式(J-1-19). □

在上述各引理的基础上并参考定理 F-2 的证明便可证明如下的重要命题：

命题 J-1-8　设式(J-1-27)在 S_H 上成立，则 $\forall q_0=(x'^\mu{}_0, x^i{}_0, p^i_{\mu 0})\in S_H$，存在 W 的含 q_0 的 n 维积分子流形 $S\subset S_H$，代表方程组{(J-1-12), (J-1-13)}的一个解 $\{x^i(x'), p^i_\mu(x')\}$，满足 $x^i(x'_0)=x^i{}_0$，$p^i_\mu(x'_0)=p^i_{\mu 0}$ 以及式(J-1-5).

注 2　① "式(J-1-27)在 S_H 上成立" 是指 $\forall q_1=(x'^\mu{}_1, x^i{}_1, p^i_{\mu 1})\in S_H$，数值 $R_{kjih}(x_1)$，$R'_{\nu\sigma\mu\tau}(x'_1)$ 及 $p^i_{\mu 1}$ 满足式(J-1-27)，其中 $R_{kjih}(x_1)$ 是由 $g_{ij}(x)$ 求得的函数 $R_{kjih}(x)$ 当自变数 $x^i=x^i{}_1$ 时的函数值，$R'_{\nu\sigma\mu\tau}(x'_1)$ 意义仿此. ②命题 J-1-8 的一个重

要应用是证明命题 J-1-2 .

证明　引理 J-1-6 表明式(J-1-17)的 $(w_1)^a,\cdots,(w_n)^a$ 是 S_H 上的 n 维分布(记作 W_H), 而式(J-1-27)在 S_H 上成立时有(见引理 J-1-7) $[w_\sigma,w_\nu]^a|_{S_H}=0$, $\sigma,\nu=1,\cdots,n$, 所以 Frobenius 定理(见中册附录 F)保证 $\forall q_0=(x'^\mu{}_0,x^i{}_0,p^i_{\mu 0})\in S_H$ 存在 W_H 的、含 q_0 的积分子流形 $S\subset S_H$. 此外, $[w_\sigma,w_\nu]^a|_{S_H}=0$ 还保证 S_H 上存在局域坐标系 $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^n\}$ 使

$$w_\sigma|_S=\frac{\partial}{\partial\alpha^\sigma},\quad \sigma=1,\cdots,n.\ \text{(略去抽象指标)} \tag{J-1-30}$$

不妨约定该系的坐标域含 q_0, 而且 $\alpha^\sigma(q_0)=x'^\sigma{}_0$, $\sigma=1,\cdots,n$. 作为 S_H 的子流形, S 有"参数式" (但"参数"是 n 个 α^σ)

$$x'^\mu=x'^\mu(\alpha),\quad x^i=x^i(\alpha),\quad p^i{}_\mu=p^i{}_\mu(\alpha), \tag{J-1-31}$$

满足

$$H_{\mu\nu}(x'(\alpha),x(\alpha),p(\alpha))=g'_{\mu\nu}(x'(\alpha))-g_{ij}(x(\alpha))p^i{}_\mu(\alpha)p^j{}_\nu(\alpha)=0,\ \forall(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\in\Omega, \tag{J-1-32}$$

(其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是坐标系 $\{\alpha^\sigma\}$ 的值域.) 故

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^\sigma}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial\alpha^\sigma}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\bigg|_S+\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_S+\frac{\partial p^l{}_\mu}{\partial\alpha^\sigma}\frac{\partial}{\partial p^l{}_\mu}\bigg|_S. \tag{J-1-33}$$

将上式代入式(J-1-30)后再式(J-1-17)对比得

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial\alpha^\sigma}=\delta^\mu{}_\sigma,\quad \frac{\partial x^i}{\partial\alpha^\sigma}=p^i{}_\sigma(\alpha),\quad \frac{\partial p^l{}_\mu}{\partial\alpha^\sigma}=F^l{}_{\mu\sigma}(x'(\alpha),x(\alpha),p(\alpha)). \tag{J-1-34}$$

由第一式和 $\alpha^\sigma(q_0)=x'^\sigma{}_0$ 可知式(J-1-31)的第一式成为 $x'^\sigma=\alpha^\sigma$, 故其第二、三式可改写为

$$x^i=x^i(x'),\quad p^i{}_\mu=p^i{}_\mu(x')=\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}, \tag{J-1-35}$$

它们刚好给出方程组{(J-1-12), (J-1-13)}在定解条件 $x^i(x'_0)=x^i{}_0$, $p^i_\mu(x'_0)=p^i_{\mu 0}$ 下的解. 把 $\alpha^\sigma=x'^\sigma$ 及式(J-1-35)代入式(J-1-32)便得式(J-1-5). □

命题 J-1-2(a)的证明　设 (M,g_{ab}) 与 (M',g'_{ab}) 有相同维数和号差, 而且两者的黎曼张量分别满足

$$\text{(a)}\ R_{abcd}=2Kg_{c[a}g_{b]d},\quad \text{(b)}\ R'_{abcd}=2Kg'_{c[a}g'_{b]d},\ \text{(两式中的}K\text{相同)} \tag{J-1-36}$$

欲证它们有相同局域几何. $\forall p \in M, q \in M'$, 选坐标系 (O, x^i) 和 (O', x'^μ) 使 $p \in O$, $q \in O'$, 则 g_{ab} 和 g'_{ab} 的坐标分量给出如下两组 n 元函数:

$$g_{ij}(x) = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b \quad 和 \quad g'_{\mu\nu}(x') = g'_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b,$$

取 $x^i{}_0 \equiv x^i(p)$, $x'^\mu{}_0 \equiv x'^\mu(q)$, 并任取满足 $g'_{\mu\nu}(x'_0) - g_{ij}(x_0)p^i_{\mu 0}p^j_{\nu 0} = 0$ 的 $p^i_{\mu 0}$ 以保证 $(x'^\mu{}_0, x^i{}_0, p^i_{\mu 0}) \in S_H$. 式(J-1-36)导致 R_{abcd} 和 R'_{abcd} 的坐标分量满足

$$R_{kjih}(x) = 2Kg_{i[k}(x)g_{j]h}(x), \quad R'_{\nu\sigma\mu\tau}(x') = 2Kg'_{\mu[\nu}(x')g'_{\sigma]\tau}(x'). \qquad \text{(J-1-37)}$$

借式(J-1-28)不难证明满足上式的 R_{kjih} 和 $R'_{\nu\sigma\mu\tau}$ 在 S_H 上满足式(J-1-27), 于是命题 J-1-8 保证方程组{(J-1-12), (J-1-13)}有解 $\{x^i(x'), p^i_\mu(x')\}$, 满足 $x^i(x'(q)) = x^i(p)$ 和 $\partial x^i(x')/\partial x'^\mu|_q = p^i_{\mu 0}$. 可见 $g_{ij}(x)$ 和 $g'_{\mu\nu}(x')$ 满足式(J-1-5), 因而等价. 具体说, 把引理 J-1-3 的证明反推便可得结论: 存在开邻域 $O_1 \subset M$, $O'_1 \subset M'$ (满足 $p \in O_1$, $q \in O'_1$)和微分同胚 $\phi: O_1 \to O'_1$ 使 $\phi(p) = q$, $\phi_*(g_{ab}|_{O_1}) = g'_{ab}|_{O'_1}$, 因此说 (M, g_{ab}) 与 (M', g'_{ab}) 有相同局域几何. □

命题 J-1-2(b)的证明　设 (M, g_{ab}) 是常曲率空间, 欲证它有最高对称性. 由命题 J-1-2(a) 的证明可知每一初值 $(x'^\mu{}_0, x^i{}_0, p^i_{\mu 0}) \in S_H$ 确定一个解 $\{x^i(x'), p^i_\mu(x')\}$, 其前一部分代表 n 个 n 元函数 $x^i(x')$, 对应于一个局域微分同胚 $\phi: O_1 \to O'_1$, 满足 $\phi_*(g_{ab}|_{O_1}) = g'_{ab}|_{O'_1}$. 现在只有一个常曲率空间 (M, g_{ab}), 可以看作上述证明在 $M' = M$, $g'_{ab} = g_{ab}$ 情况下的特例, 因此有 $\phi_*(g_{ab}|_{O_1}) = g_{ab}|_{O'_1}$, 可见 ϕ 是等度规映射. 而等度规群的维数等于决定方程组{(J-1-12), (J-1-13)}的一个解所需的独立参数的个数. 为了确定这一维数, 仍先看定理 F-2 这一简单例子. 该定理称: 若 $[w_1, w_2]^a = 0$, 则 $\forall$ 初值 $q_0 = (x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$ 存在分布 W 的含 q_0 的积分子流形, 代表方程组 (F-2) 的一个满足初值的解 $u(x, y)$. 若只给定 (x_0, y_0), 则任取实数 u_0 就有初值点 q_0, 从而有一个解. 可见方程组 (F-2) 存在一个单参解族(参数为 u). 把这一讨论推广到命题 J-1-2(a)证明之末, $\mathbb{R}^3$ 推广为 S_H, 自变数 (x, y) 推广为 $(x'^1, \cdots, x'^n)$. 注意到 $\dim S_H = n + (n^2 + n)/2$, 可知给定 n 个自变数 $(x'^1_0, \cdots, x'^n_0)$ 后要决定一个初值点 $q_0 = (x'^\mu{}_0, x^i{}_0, p^i_{\mu 0})$ 还须指定 $n(n+1)/2$ 个实数, 因此常曲率空间允许 $n(n+1)/2$ 个独立的等度规映射, 对应于一个 $n(n+1)/2$ 维等度规(局部)群, 故有最高对称性. □

若度规 g_{ab} 在某坐标系的分量为常数, 则由式(3-4-20′)易见 g_{ab} 的 $R_{abcd} = 0$, 因而可看作 $K = 0$ 的常曲率度规. 于是, 作为命题 J-1-2(a)在 $K = 0$ 的特例, 我们有

如下推论:

推论 J-1-9 度规场g_{ab}是(局域)平直的(即其$R_{abc}{}^{d}=0$)当且仅当存在坐标系使g_{ab}的坐标分量全部为常数.

注 3 这其实就是上册定理 3-4-9 .

命题 J-1-10 设g_{ab}为$n=4$的洛伦兹号差的常曲率度规, 则存在坐标系$\{t,x,y,z\}$使其线元可表为如下的标准形式[正名为黎曼形式(Riemannian form)]:

$$\mathrm{d}s^2=\left[1+\frac{K}{4}(-t^2+x^2+y^2+z^2)\right]^{-2}(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)\,,\qquad \text{(J-1-38)}$$

注 4 对维数是n、号差任意的常曲率度规, 上式的一般形式为

$$\mathrm{d}s^2=\left[1+\frac{K}{4}(\varepsilon_1(x^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x^n)^2)\right]^{-2}[\varepsilon_1(\mathrm{d}x^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(\mathrm{d}x^n)^2]\,,\qquad \text{(J-1-39)}$$

其中$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$代表$+1$或$-1$.

证明 由命题 J-1-1 可知常曲率度规必共形平直, 即存在共形因子Ω及坐标系$\{x^\mu\}$使g_{ab}可表为

$$\mathrm{d}s^2=\Omega^2\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\,.\qquad \text{(J-1-40)}$$

上式与式(J-1-1)结合, 借助于式(12-1-7), 经一番推导得

$$\begin{aligned}K(\eta_{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu-\eta_{\sigma\nu}\delta^\rho{}_\mu)=&-\delta^\rho{}_\mu\omega\omega_{,\nu\sigma}+\delta^\rho{}_\nu\omega\omega_{,\mu\sigma}+\eta^{\rho\lambda}\eta_{\sigma\mu}\omega\omega_{,\nu\lambda}\\&-\eta^{\rho\lambda}\eta_{\sigma\nu}\omega\omega_{,\mu\lambda}-(\eta_{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu-\eta_{\sigma\nu}\delta^\rho{}_\mu)\eta^{\lambda\tau}\eta_{\sigma\mu}\omega_{,\lambda}\omega_{,\tau}\,,\end{aligned}\qquad \text{(J-1-41)}$$

其中$\omega\equiv\Omega^{-1}$, $\omega_{,\nu}\equiv\partial\omega/\partial x^\nu$, $\omega_{,\nu\sigma}\equiv\partial^2\omega/\partial x^\nu\partial x^\sigma$. 取$\rho=\nu$并对$\nu$从 0 至$n-1$求和得

$$K\eta_{\sigma\mu}=(n-2)(n-1)^{-1}\omega\omega_{,\mu\sigma}+(n-1)^{-1}\eta_{\mu\sigma}\eta^{\lambda\tau}\omega\omega_{,\lambda\tau}-\eta_{\mu\sigma}\eta^{\lambda\tau}\omega_{,\lambda}\omega_{,\tau}\,.\qquad \text{(J-1-42)}$$

用$\eta^{\sigma\mu}$乘全式并对σ及μ求和得

$$\eta^{\lambda\tau}\omega_{,\lambda}\omega_{,\tau}=\frac{2}{n}\eta^{\lambda\tau}\omega\omega_{,\lambda\tau}-K\,,\qquad \text{(J-1-43)}$$

再代入式(J-1-42)便得

$$\omega_{,\mu\sigma}=\frac{1}{n}\eta_{\mu\sigma}\eta^{\lambda\tau}\omega_{,\lambda\tau}\,.\qquad \text{(J-1-44)}$$

上式表明当$\mu\neq\sigma$时有$\omega_{,\mu\sigma}=0$, 故$\omega(x^1,\cdots,x^n)$可表为n个待定一元函数之和:

$$\omega(x^1,\cdots,x^n)=X^1(x^1)+\cdots+X^n(x^n)\,.\qquad \text{(J-1-45)}$$

由上式及式(J-1-44)又可得出

$$\omega_{,\mu\sigma} = a\eta_{\mu\sigma}, \tag{J-1-46}$$

其中 a 为常数. 积分两次给出

$$\omega = \frac{1}{2}a\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + b_\mu x^\mu + c, \tag{J-1-47}$$

其中 b_μ 及 c 为积分常数. 把式(J-1-47)代入式(J-1-43)得

$$K = 2ac - \eta^{\mu\nu}b_\mu b_\nu. \tag{J-1-48}$$

这是 K 与常数 a, b_μ, c 之间的唯一关系式, 把式(J-1-47)代入(J-1-41)不会给出更多关系式. 从现在起取 $n=4$, 约定 g_{ab} 有洛伦兹号差, 并把 x^0, x^1, x^2, x^3 简记为 t, x, y, z. 根据已证命题 J-1-2(a), 只要 K 相同, 无论常数 a, b_μ, c 取何值, 给出的常曲率线元一定等价. 现在取 $b_\mu = 0$ 及 $c=1$, 则式(J-1-48)要求 $K=2a$, 代入式(J-1-47)便得

$$\omega(t,x,y,z) = 1 + \frac{K}{4}(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2), \tag{J-1-49}$$

于是 g_{ab} 的线元就取式(J-1-38)的形式. 命题证毕. □

注 5　上面把众多积分常数一扫而空, 使复杂的线元化成只含 K 值的标准形式, 这自然要归功于命题 J-1-2(a). 然而该命题的证明颇难颇长, 可否不用该命题而在命题 J-1-10 的证明中通过坐标变换直接得出标准形式? 既然命题 J-1-2(a)成立, 答案自然是肯定的, 即必有坐标变换 $\{x^\mu\} \mapsto \{\hat{x}^\mu\}$ 把式(J-1-40)的 $\mathrm{d}s^2$ 改写为如下标准形式:

$$\mathrm{d}s^2 = \left[1 + \frac{K}{4}(-\hat{t}^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)\right]^{-2}(-\mathrm{d}\hat{t}^2 + \mathrm{d}\hat{x}^2 + \mathrm{d}\hat{y}^2 + \mathrm{d}\hat{z}^2). \tag{J-1-50}$$

而一旦找出这一坐标变换, 命题 J-1-10 的地位便将大为提升, 因为从它所给出的标准形式一望而知 K 值相同的常曲率度规必然等价, 从而把命题 J-1-2(a)变成不证自明的推论. 通过努力, 笔者终于找到了这一非常复杂的坐标变换, 从而给出了命题 J-1-10 的独立证明(我们从未在任何文献中见过这一证明). 介绍如下.

命题 J-1-10 的不依赖于命题 J-1-2(a)的证明　由命题 J-1-10 证明的前半部分可知, 对任一常曲率度规 g_{ab} 总有局域坐标系 $\{x^\mu\}$ 把它表为式(J-1-40), 其中的 Ω 的倒数 ω 由式(J-1-47)及(J-1-48)给出. 现在要寻找一个坐标变换以得到式(J-1-50). 设 $(\mathbb{R}^6, G_{AB})$ 是 6 维平直流形, 度规场 G_{AB} 的号差为 +2, 即 $(-,+,+,+,+,-)$. 以 V_0 代

表$\mathbb{R}^6$的自然原点$0\in\mathbb{R}^6$的切空间，则它有度规$G_{AB}|_0$．当下式满足时V_0的6个元素$\{(e_\mu)^A(\mu=0,1,2,3),(e_4)^A,(e_5)^A\}$构成$V_0$的一个正交归一基底：

$$G_{AB}|_0\,(e_\mu)^A(e_\nu)^B=\eta_{\mu\nu},\quad G_{AB}|_0\,(e_4)^A(e_4)^B=1,\quad G_{AB}|_0\,(e_4)^A(e_4)^B=1,$$
$$G_{AB}|_0\,(e_\mu)^A(e_4)^B=G_{AB}|_0\,(e_\mu)^A(e_5)^B=G_{AB}|_0\,(e_4)^A(e_5)^B=0.$$

设$Z\equiv\{(e_\mu)^A,(e_4)^A,(e_5)^A\}$和$Z'\equiv\{(e'_\mu)^A,(e'_4)^A,(e'_5)^A\}$是$(V_0,G_{AB}|_0)$的两个正交归一基底．$Z'$的对偶基底$Z'^*\equiv\{(e'^\mu)_A,(e'^4)_A,(e'^5)_A\}$的每一元素可用$Z$的对偶基底$Z^*\equiv\{(e^\mu)_A,(e^4)_A,(e^5)_A\}$展开为矩阵等式：

$$(e'^0,e'^1,e'^2,e'^3,e'^4,e'^5)=(e^0,e^1,e^2,e^3,e^4,e^5)\Lambda, \tag{J-1-51}$$

式中的6×6变换矩阵$\Lambda\in SO(2,4)$满足矩阵等式$\eta^{2,4}=\Lambda^T\eta^{2,4}\Lambda$ [参见式(G-5-24)]，其中Λ^T代表Λ的转置，$\eta^{2,4}\equiv\mathrm{diag}(-1,1,1,1,1,-1)$．令

$$(\varepsilon_+)^A\equiv\frac{1}{\sqrt2}[(e_5)^A+(e_4)^A],\ (\varepsilon_-)^A\equiv\frac{1}{\sqrt2}[(e_5)^A-(e_4)^A],\ (\varepsilon_\mu)^A\equiv(e_\mu)^A,\ \mu=0,1,2,3, \tag{J-1-52}$$

则$Y\equiv\{(\varepsilon_\mu)^A,(\varepsilon_+)^A,(\varepsilon_-)^A\}$也是$V_0$的基底，称为**混合基底**，特点是：前4维相当于4维洛伦兹度规的正交归一基，后2维相当于2维洛伦兹度规的类光标架，即

$$G_{AB}|_0\,(\varepsilon_\mu)^A(\varepsilon_\nu)^B=\eta_{\mu\nu},\quad G_{AB}|_0\,(\varepsilon_+)^A(\varepsilon_-)^B=-1,$$

$$G_{AB}|_0\,(\varepsilon_\mu)^A(\varepsilon_+)^B=G_{AB}|_0\,(\varepsilon_\mu)^A(\varepsilon_-)^B=0,$$

$$G_{AB}|_0\,(\varepsilon_+)^A(\varepsilon_+)^B=G_{AB}|_0\,(\varepsilon_-)^A(\varepsilon_-)^B=0.$$

下面分别就$K=0$，$K>0$和$K<0$三种情况证明本命题．

(A) $K=0$的情况

任选混合基底Y及其对偶基底Y^*为

$$Y\equiv\{(\varepsilon_\mu)^A,(\varepsilon_+)^A,(\varepsilon_-)^A\},\quad Y^*\equiv\{(\varepsilon^\mu)_A,(\varepsilon^+)_A,(\varepsilon^-)_A\}.$$

设l是任一有长度量纲的非零常量，则不难验证用l及式(J-1-48)中的6个常数a，b_μ，c依下式构造的对偶矢量

$$k_A\equiv lb_\mu(\varepsilon^\mu)_A+l^2a(\varepsilon^+)_A+c(\varepsilon^-)_A\in V_0{}^* \tag{J-1-53}$$

是“类光”的($G^{AB}k_Ak_B=0$)，因而可发展出另一混合基底及其对偶基底

$$\hat Y\equiv\{(\hat\varepsilon_\mu)^A,(\hat\varepsilon_+)^A,(\hat\varepsilon_-)^A\},\quad \hat Y^*\equiv\{(\hat\varepsilon^\mu)_A,(\hat\varepsilon^+)_A,(\hat\varepsilon^-)_A\},$$

其中 $(\hat{\varepsilon}^-)_A = k_A$. 设$\varsigma^A \in V_0$, 则$\exp_0(\varsigma^A) \in \mathbb{R}^6$. ς^A在基底Y的6个分量$\varsigma^\mu, \varsigma^+, \varsigma^-$构成点$\exp_0(\varsigma^A)$的一组(黎曼)法坐标, ς^A跑遍V_0便给出$\mathbb{R}^6$上的一个法坐标系$\{\varsigma^\mu, \varsigma^+, \varsigma^-\}$. $\mathbb{R}^6$上的平直度规场G_{AB}在这一坐标系的线元为

$$d\chi^2 = \eta_{\mu\nu} d\varsigma^\mu d\varsigma^\nu - 2 d\varsigma^+ d\varsigma^- . \tag{J-1-54}$$

$(\mathbb{R}^6, G_{AB})$中的"类光"超曲面

$$\mathscr{N} \equiv \{\exp_0(\varsigma^A) \in \mathbb{R}^6 \mid G_{AB}|_0 \varsigma^A \varsigma^B = 0,\ \varsigma^A \neq 0\} \tag{J-1-55}$$

是以$0 \in \mathbb{R}^6$为顶点的"光锥"(但不含点0), 在$\mathscr{N}$上($\varsigma^- = 0$的点除外)定义4个函数

$$x^\mu \equiv l \frac{\varsigma^\mu}{\varsigma^-}, \tag{J-1-56}$$

则$\mathscr{N}$的方程$\eta_{\mu\nu}\varsigma^\mu\varsigma^\nu - 2\varsigma^+\varsigma^- = 0$可借$x^\mu$表为

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 2 l^2 \frac{\varsigma^+}{\varsigma^-}. \tag{J-1-57}$$

以H_{AB}代表G_{AB}在$\mathscr{N}$上的限制, 则由式(J-1-54)、(J-1-57)和(J-1-56)不难证明H_{AB}可用dx^μ写成如下线元式:

$$d\chi^2 = \left(\frac{\varsigma^-}{l}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{J-1-58}$$

上式的导出是借基底Y进行的, 若改用基底$\hat{Y}$, 自然得到

$$d\chi^2 = \left(\frac{\hat{\varsigma}^-}{l}\right)^2 \eta_{\mu\nu} d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu , \tag{J-1-58$'$}$$

其中$\hat{x}^\mu \equiv l\hat{\varsigma}^\mu / \hat{\varsigma}^-$. 对比式(J-1-58)和(J-1-58′)得

$$\eta_{\mu\nu} d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu = \left(\frac{\varsigma^-}{\hat{\varsigma}^-}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{J-1-59}$$

注意到$\hat{\varsigma}^- = \varsigma^A (\hat{\varepsilon}^-)_A$及$(\hat{\varepsilon}^-)_A = k_A$, 由式(J-1-53)得

$$\hat{\varsigma}^- = l b_\mu \varsigma^\mu + l^2 a \varsigma^+ + c\varsigma^- . \tag{J-1-60}$$

再用式(J-1-47)、(J-1-56)、(J-1-57)及(J-1-60)便可证明$\varsigma^- / \hat{\varsigma}^- = \omega^{-1} = \Omega$, 于是式(J-1-59)给出

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\hat{x}^{\mu}\mathrm{d}\hat{x}^{\nu}=\Omega^{2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu},\tag{J-1-61}$$

与式(J-1-40)比较便知存在坐标系 $\{\hat{x}^{\mu}\}$ 使 $K=0$ 的常曲率线元可表为

$$\mathrm{d}s^{2}=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\hat{x}^{\mu}\mathrm{d}\hat{x}^{\nu},$$

再用 $K=0$ 便得

$$\mathrm{d}s^{2}=\left(1+\frac{K}{4}\eta_{\alpha\beta}\hat{x}^{\alpha}\hat{x}^{\beta}\right)^{-2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\hat{x}^{\mu}\mathrm{d}\hat{x}^{\nu},$$

此即待证的式(J-1-50). 证明的关键是用迂回手法引入了坐标变换 $\{x^{\mu}\}\mapsto\{\hat{x}^{\mu}\}$, 下面找出这一变换的显表达式. $\hat{Y}^{*}$ 的每一基矢可用基底 Y^{*} 展开为矩阵等式:

$$(\hat{\varepsilon}^{0},\hat{\varepsilon}^{1},\hat{\varepsilon}^{2},\hat{\varepsilon}^{3},\hat{\varepsilon}^{+},\hat{\varepsilon}^{-})=(\varepsilon^{0},\varepsilon^{1},\varepsilon^{2},\varepsilon^{3},\varepsilon^{+},\varepsilon^{-})S,\tag{J-1-62}$$

其中的 6×6 变换矩阵 S 满足

$$S^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\eta&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}S=\begin{bmatrix}\eta&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix},\quad 其中\ \eta\equiv\mathrm{diag}(-1,1,1,1).\tag{J-1-63}$$

把矩阵等式(J-1-62)的第六列与式(J-1-53)比较可知 $S_{\mu}{}^{-}=lb_{\mu}, S_{+}{}^{-}=l^{2}a, S_{-}{}^{-}=c$. 利用 $\hat{x}^{\mu}\equiv l\hat{\varsigma}^{\mu}/\hat{\varsigma}^{-}$ 及式(J-1-62)、(J-1-60)、(J-1-56)、(J-1-57)、(J-1-47)不难写出坐标变换 $\{x^{\mu}\}\mapsto\{\hat{x}^{\mu}\}$ 的显表达式:

$$\hat{x}^{\mu}=\Omega[S_{\nu}{}^{\mu}x^{\nu}+\frac{1}{2l}S_{+}{}^{\mu}(\eta_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})+S_{-}{}^{\mu}l].\tag{J-1-64}$$

(B) $K>0$ 的情况

设 $Z\equiv\{(e_{\mu})^{A},(e_{4})^{A},(e_{5})^{A}\}$ 是 V_{0} 的正交归一基底, 令 $l\equiv K^{-1/2}$,

$$(e'^{5})_{A}\equiv lb_{\mu}(e^{\mu})_{A}+\frac{1}{\sqrt{2}}[(l^{2}a-c)(e^{4})_{A}+(l^{2}a+c)(e^{5})_{A}],\tag{J-1-65}$$

则式(J-1-48)保证 $G^{AB}(e'^{5})_{A}(e'^{5})_{B}=-1$, 因而可以发展出另外一个正交归一基底 $Z'\equiv\{(e'_{\mu})^{A},(e'_{4})^{A},(e'_{5})^{A}\}$ 及其对偶基底 $Z'^{*}\equiv\{(e'^{\mu})_{A},(e'^{4})_{A},(e'^{5})_{A}\}$. 式(J-1-51)反映 Z' 与 Z 的变换关系. $\varsigma^{A}\in V_{0}$ 在 Z' 的分量 $\varsigma'^{\mu},\varsigma'^{4}$ 和 ς'^{5} 也可看作 $\mathbb{R}^{6}$ 上的法坐标, $\mathscr{N}$ 在此坐标系的方程为

$$\eta_{\mu\nu}\varsigma'^{\mu}\varsigma'^{\nu}+(\varsigma'^{4})^{2}-(\varsigma'^{5})^{2}=0.\tag{J-1-66}$$

平直度规场 G_{AB} 在此坐标系的线元为

$$d\chi^2 = \eta_{\mu\nu} d\varsigma'^\mu d\varsigma'^\nu + (d\varsigma'^4)^2 - (d\varsigma'^5)^2 . \tag{J-1-67}$$

在 $\mathscr{N}$ 上($\varsigma'^4 = 0$ 的点除外)定义 4 个函数①

$$y'^\mu \equiv l \frac{\varsigma'^\mu}{\varsigma'^4} , \tag{J-1-68}$$

则由式(J-1-66) ~ (J-1-68)不难证明 H_{AB} 可用 dy'^μ 写成如下的线元式:

$$d\chi^2 = \left(\frac{\varsigma'^5}{l}\right)^2 d\hat{s}^2 , \tag{J-1-69}$$

$$d\hat{s}^2 \equiv \left\{\frac{1}{\sigma(y')}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{[\sigma(y')]^2} K \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} y'^\rho y'^\sigma \right\} dy'^\mu dy'^\nu , \tag{J-1-70}$$

其中 $\sigma(y') \equiv 1 + K\eta_{\mu\nu} y'^\mu y'^\nu$. 从正交归一基底 $Z \equiv \{(e_\mu)^A, (e_4)^A, (e_5)^A\}$ 出发用式(J-1-52)(所有 ε 改为 $\tilde{\varepsilon}$)构造混合基底 $\tilde{Y} \equiv \{(\tilde{\varepsilon}_\mu)^A, (\tilde{\varepsilon}_+)^A, (\tilde{\varepsilon}_-)^A\}$ 及其对偶基底 $\tilde{Y}^* \equiv \{(\tilde{\varepsilon}^\mu)_A, (\tilde{\varepsilon}^+)_A, (\tilde{\varepsilon}^-)_A\}$. 设 ς^A 在 Z 和 $\tilde{Y}$ 的分量分别为 $\varsigma^\mu, \varsigma^4, \varsigma^5$ 和 $\tilde{\varsigma}^\mu, \tilde{\varsigma}^+, \tilde{\varsigma}^-$, 则易证

$$\tilde{\varsigma}^\mu = \varsigma^\mu, \quad \tilde{\varsigma}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varsigma^5 + \varsigma^4), \quad \tilde{\varsigma}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varsigma^5 - \varsigma^4) . \tag{J-1-71}$$

定义

$$x^\mu \equiv l \frac{\tilde{\varsigma}^\mu}{\tilde{\varsigma}^-} , \tag{J-1-56'}$$

则 $\mathscr{N}$ 的方程可表为

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 2 l^2 \frac{\tilde{\varsigma}^+}{\tilde{\varsigma}^-} . \tag{J-1-57'}$$

式(J-1-58)则应改写为 $d\chi^2 = (\tilde{\varsigma}^- / l)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. 与式(J-1-69)对比得

$$d\hat{s}^2 = \left(\frac{\tilde{\varsigma}^-}{\varsigma'^5}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{J-1-72}$$

由式(J-1-47)、(J-1-71)、(J-1-56′)、(J-1-57′)及(J-1-65)不难证明

① 可以证明 y'^μ 在"光锥" $\mathscr{N}$ 的每一"类光"母线上为常数. 设 $\mathscr{P} \equiv \{\exp_0(\varsigma^A) \in \mathbb{R}^6 | \varsigma'^4 = l\}$, 则 $\{y'^\mu\}$ 可看作 4 维子流形 $\mathscr{P} \cap \mathscr{N}$ 上的坐标系, 称为 Beltrami 坐标系, 见 Guo et al. (2004a, b).

$$\frac{\tilde{\varsigma}^-}{\varsigma'^5} = \frac{1}{\omega} = \Omega \,, \tag{J-1-73}$$

故式(J-1-72)成为 $\mathrm{d}\hat{s}^2 = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$，与式(J-1-40)相比较可知 $\mathrm{d}\hat{s}^2$ 就是 $\mathrm{d}s^2$，再由式(J-1-70)便得

$$\mathrm{d}s^2 = \left\{ \frac{1}{\sigma(y')} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{[\sigma(y')]^2} K \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} y'^\rho y'^\sigma \right\} \mathrm{d}y'^\mu \mathrm{d}y'^\nu \,. \tag{J-1-74}$$

由式(J-1-68)、(J-1-51)、(J-1-56′)、(J-1-71)及(J-1-57′)不难验证导出上式的关键坐标变换 $\{x^\mu\} \mapsto \{y'^\mu\}$ 是

$$y'^\mu = \frac{\varLambda_\nu{}^\mu x^\nu + \frac{1}{2\sqrt{2}\,l}(\varLambda_5{}^\mu + \varLambda_4{}^\mu)\,\eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma + \frac{1}{\sqrt{2}} l\,(\varLambda_5{}^\mu - \varLambda_4{}^\mu)}{\frac{\varLambda_\alpha{}^4 x^\alpha}{l} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,l^2}(\varLambda_5{}^4 + \varLambda_4{}^4)\,\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varLambda_5{}^4 - \varLambda_4{}^4)} \,. \tag{J-1-75}$$

再引入最后一个坐标变换 $\{y'^\mu\} \mapsto \{\hat{x}^\mu\}$，定义为

$$y'^\mu = \frac{\hat{x}^\mu}{1 - \frac{K}{4}\eta_{\rho\sigma}\hat{x}^\rho \hat{x}^\sigma} \,,$$

便可把式(J-1-74)化为式(J-1-50)的标准形式. 请读者完成这一颇长的验算.

(C) $K<0$ 的情况

与 $K>0$ 的情况非常类似，只须把 l^2 改为 $-l^2$，并把“4”与“5”互换. □

读过第12章(中册)选读12-1-1的读者知道命题12-1-8给出了共形平直线元为平直线元的充要条件，现在在命题J-1-9的基础上补证这一命题.

命题12-1-8(重述) 洛伦兹号差的共形平直4维线元

$$\mathrm{d}s^2 = \Omega^2(x^\mu)(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \quad (\text{其中 } x^\mu \equiv t, x, y, z) \tag{J-1-76}$$

是平直线元的充要条件是 $\Omega(x^\mu)$ 可表为 $\Omega(x^\mu) = C/Q(x^\mu)$，其中 C 为常数，函数 $Q(x^\mu)$ 取以下三种形式中之任一：

(a) $$Q(x^\mu) = -(t+\rho^0)^2 + (x+\rho^1)^2 + (y+\rho^2)^2 + (z+\rho^3)^2 \,, \tag{J-1-77}$$

其中 $\rho^0, \rho^i (i=1,2,3)$ 为常数；

(b) $$Q(x^\mu) = t + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \lambda \,, \tag{J-1-78}$$

其中 $\gamma_i (i=1,2,3)$ 及 λ 为常数且

$$\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1 \,. \tag{J-1-79}$$

(c) $Q(x^\mu)=$ 常数.

命题 12-1-8 补证　平直度规可看作 $K=0$ 的常曲率度规, 因此命题 J-1-9 的证明适用. 分三种情况讨论如下.

(a)当 $a\neq 0$ 时, 用 a 除式(J-1-48)两边后与式(J-1-47)联立得

$$\omega(t,x,y,z)=\frac{a}{2}[-(t+\rho^0)^2+(x+\rho^1)^2+(y+\rho^2)^2+(z+\rho^3)^2]. \tag{J-1-80}$$

其中

$$\rho^\mu\equiv\frac{b^\mu}{a}\equiv\frac{\eta^{\mu\nu}b_\nu}{a}, \qquad \mu=0,1,2,3.$$

由 $\omega\equiv\Omega^{-1}$ 可知式(J-1-76)的 $\Omega(x^\mu)$ 可表为 $\Omega(x^\mu)=C/Q(x^\mu)$, 其中

$$C\equiv\frac{2}{a}=\text{常数},\ Q(x^\mu)\equiv-(t+\rho^0)^2+(x+\rho^1)^2+(y+\rho^2)^2+(z+\rho^3)^2. \tag{J-1-81}$$

当 $a=0$ 时式(J-1-47)简化为

$$\omega(t,x,y,z)=-b^0t+b^1x+b^2y+b^3z+c. \tag{J-1-82}$$

又分以下两种情况[记作(b)和(c)]:

(b)当 $a=0$ 而 $b^0\neq 0$ 时, 式(J-1-82)可改写为

$$\omega(t,x,y,z)=-b^0(t+\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z+\lambda), \tag{J-1-83}$$

其中

$$\lambda\equiv-\frac{c}{b^0},\ \gamma_1\equiv-\frac{b^1}{b^0},\ \gamma_2\equiv-\frac{b^2}{b^0},\ \gamma_3\equiv-\frac{b^3}{b^0}\text{为常数}.$$

$K=0$ 及 $a=0$ 使式(J-1-48)简化为

$${b_0}^2={b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2, \tag{J-1-84}$$

故 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 满足式(J-1-79). 所以 $\Omega(x^\mu)$ 可表为 $\Omega(x^\mu)=C/Q(x^\mu)$, 其中

$$C\equiv-\frac{1}{b^0}=\text{常数},\ Q(x^\mu)\equiv t+\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z+\lambda. \tag{J-1-85}$$

(c)当 $a=b^0=0$ 时, 由式(J-1-84)可知 $b^0=0$ 导致 $b^1=b^2=b^3=0$, 故式(J-1-82)进一步简化为 $\omega=c=$ 常数, 所以 $\Omega(x^\mu)=C/Q(x^\mu)$, 其中 $Q(x^\mu)=$ 常数. □

既然在 $Q(x^\mu)$ 满足式(J-1-77)及(J-1-78)时

$$\mathrm{d}s^2=\Omega^2(x^\mu)(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)$$

是平直线元, 必定存在坐标系 $\{\hat{x}^\mu\}$ 使它取如下的明显平直形式:

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2 .$$

下面给出这一坐标变换.

(a)当 $Q(x^\mu)$ 取式(J-1-77)的形式时, 令

$$\hat{t} = \frac{C(t+\rho^0)}{Q}, \quad \hat{x} = \frac{C(t+\rho^1)}{Q}, \quad \hat{y} = \frac{C(t+\rho^2)}{Q}, \quad \hat{z} = \frac{C(t+\rho^3)}{Q}, \qquad \text{(J-1-86)}$$

则不难验证

$$\begin{aligned} -d\hat{t}^2 + d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2 &= (C^2/Q^2)(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \Omega^2(x^\mu)(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = ds^2 . \end{aligned}$$

坐标变换式(J-1-86)其实是(J-1-64)在 $S_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu$, $S_+{}^\mu = 0$, $S_-{}^\mu l = \rho^\mu$ 情况下的特例.

(b) 当 $Q(x^\mu)$ 取式(J-1-78)的形式时, 用下式定义新坐标 $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$:

$$\tilde{t} = t, \quad \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \text{(J-1-87)}$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是式(J-1-83)中的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, 式(J-1-79)保证存在常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 使式(J-1-87)的 3×3 矩阵为正交矩阵, 于是

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \ Q = \tilde{t} + \tilde{z} + \tilde{\lambda},$$

$$ds^2 = C^2(\tilde{t} + \tilde{z} + \tilde{\lambda})^{-2}(-d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2).$$

再用下式定义坐标 $\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$:

$$\hat{t} - \hat{z} = C[(\tilde{t} - \tilde{z}) - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/Q], \quad \hat{t} + \hat{z} = -C/Q, \quad \hat{x} = C\tilde{x}/Q, \quad \hat{y} = C\tilde{y}/Q,$$

则不难验证

$$-d\hat{t}^2 + d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2 = (C^2/Q^2)(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = ds^2 .$$

[选读 J-1-1 完]

§J.2 德西特时空

德西特(de Sitter)度规可用下法方便地求得. 上册小节10.1.2曾证明, 以 $S_{\bar{\xi}}$ 代表由式(10-1-13)定义的类空超曲面, 则由4维闵氏度规在此面上诱导的3维度规 h_{ab}

是常曲率度规. 这 h_{ab} 与 de Sitter 度规的区别只在于:①前者是3维的而后者是4维的;②前者是正定的而后者是洛伦兹的. 为了得到 de Sitter 度规, 应该考虑5维闵氏时空 $(\mathbb{R}^5, \eta_{ab})$ 中的某个类时超曲面. 5维闵氏线元可用洛伦兹坐标 T, W, X, Y, Z 表为

$$ds^2 = -dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \tag{J-2-1}$$

设 $l > 0$ 为任一常实数, 则方程

$$-T^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = l^2 \tag{J-2-2}$$

定义了 $(\mathbb{R}^5, \eta_{ab})$ 中的一个类时超曲面 M^4. (4维旋转双曲面, 压缩两维后所得的 M^2 见图 J-1.) 以 g_{ab} 代表由 η_{ab} 在 M^4 上的诱导度规, 借助于下面将要引入的坐标系不难证明其黎曼张量满足式(J-1-1)(其中 $K = l^{-2}$), 因而 g_{ab} 是常曲率度规. $K = l^{-2}$ 与式(J-1-3)结合得 $\Lambda = 3l^{-2}$, 可见参数为 l 的 de Sitter 度规可看作 $\Lambda = 3l^{-2}$ 的真空爱因斯坦方程的解. 通常把 (M^4, g_{ab}) 称为 **de Sitter 时空**. 任意指定实数 T_1 作为式(J-2-2)中的 T, 则该式给出

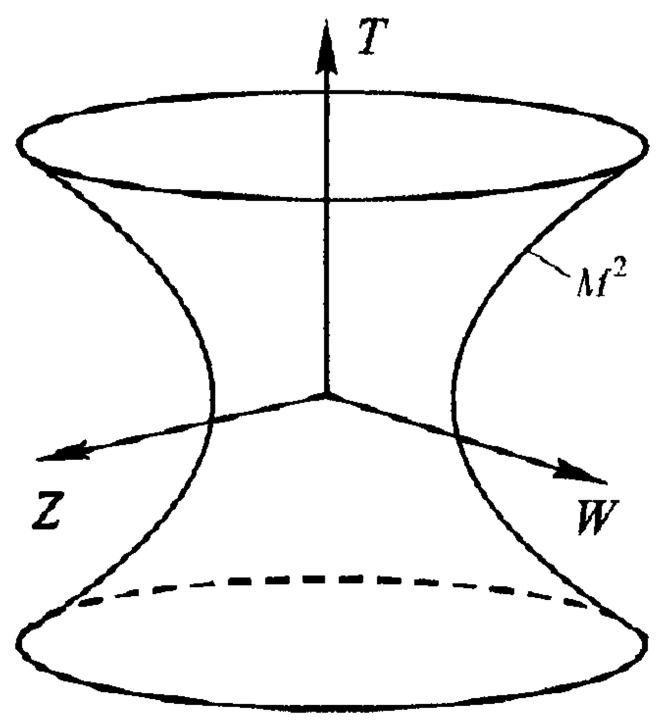


图 J-1 3维闵氏时空的类时超曲面 M^2 (M^4 压缩两维的产物)

$$W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = l^2 + T_1^2 > 0,$$

这是由 $T = T_1$ 定义的4维超平面中的3维球面(S^3)方程, 可见这个超平面与超曲面 M^4 之交是个3维球面. 注意到 T 可取任意实数, 便知 de Sitter 时空的整体拓扑是 $\mathbb{R} \times S^3$, ① 其等度规群则是 $O(1,4)$.

在 M^4 上定义坐标系就可具体表出 de Sitter 度规 g_{ab}. 下面介绍四种坐标系, 其中第1, 2, 4种比较常用.

1. 全局坐标系 $\{\tau, \psi, \theta, \varphi\}$, 其中 $-\infty < \tau < \infty$, $0 < \psi, \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, 定义为

$$T = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\tau), \quad X = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\tau)\sin\psi\sin\theta\cos\varphi, \quad Y = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\tau)\sin\psi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$Z = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\tau)\sin\psi\cos\theta, \quad W = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\tau)\cos\psi. \tag{J-2-3}$$

无论 $\tau, \psi, \theta, \varphi$ 各取何值, 超曲面方程(J-2-2)都被上式满足, 可见 $\{\tau, \psi, \theta, \varphi\}$ 的确是定义在超曲面 M^4 上的坐标系. 微分式(J-2-3)后代入式(J-2-1), 经过直接但冗长的计算, 便得 M^4 上的4维诱导线元

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2\mathrm{ch}^2(l^{-1}\tau)[d\psi^2 + \sin^2\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)], \tag{J-2-4}$$

---

① 有些作者对 de Sitter 时空的背景流形采用不同定义, 他们的 de Sitter 时空的整体拓扑是 $\mathbb{R} \times \mathbb{RP}^3$ [其中 $\mathbb{RP}^3$ 的含义见式(G-5-16)所在段末], 可参阅, 例如, McInnes(2003).

这就是 de Sitter 度规在坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 的线元式. 由上式读出 g_{ab} 的坐标分量 $g_{\mu\nu}$ 并按小节 3.4.2 求得 $R_{\mu\nu\sigma\rho}$，便可验证 g_{ab} 果真是常曲率度规. 与式(10-1-23a)对比发现式(J-2-4)可被看作 $k=+1$ 的 RW 度规的一种特例，其中 $a(\tau)=l\operatorname{ch}(l^{-1}\tau)$. 可见 de Sitter 时空是这样一种特殊的、$k=+1$ 的 RW 宇宙，其中既无物质又无辐射(但宇宙常数 $\Lambda>0$). 这当然不是我们真实的宇宙.

上述坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 之所以被称为全局坐标系，是因为它可以覆盖整个 de Sitter 时空. 这句话并不确切，因为就连 S^2 也不能被一个坐标系所覆盖，何况 $\mathbb{R}\times S^3$？所谓"$\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 覆盖全时空"，是指除了那些坐标奇点而言. 人们通过 2 维球面坐标的例子自信这些坐标奇点的一切尽在掌握之中，以至于坐标系虽不能覆盖全时空也无伤大雅. 下面谈到某坐标系能否覆盖全时空时都是这个含义.

既然 de Sitter 时空可看作 $k=+1$ 的某种 RW 宇宙，自然应关心它的均匀面(等 τ 面)以及各向同性观者的世界线. 为了便于想象和画图，先略去比较次要的 X,Y 维，或说先讨论 $\sin\theta=0$ 或 π 的"截面"，这时 $X=Y=0$，式(J-2-3)简化为

$$T=l\operatorname{sh}(l^{-1}\tau),\quad Z=\pm l\operatorname{ch}(l^{-1}\tau)\sin\psi,\quad W=l\operatorname{ch}(l^{-1}\tau)\cos\psi. \qquad \text{(J-2-3')}$$

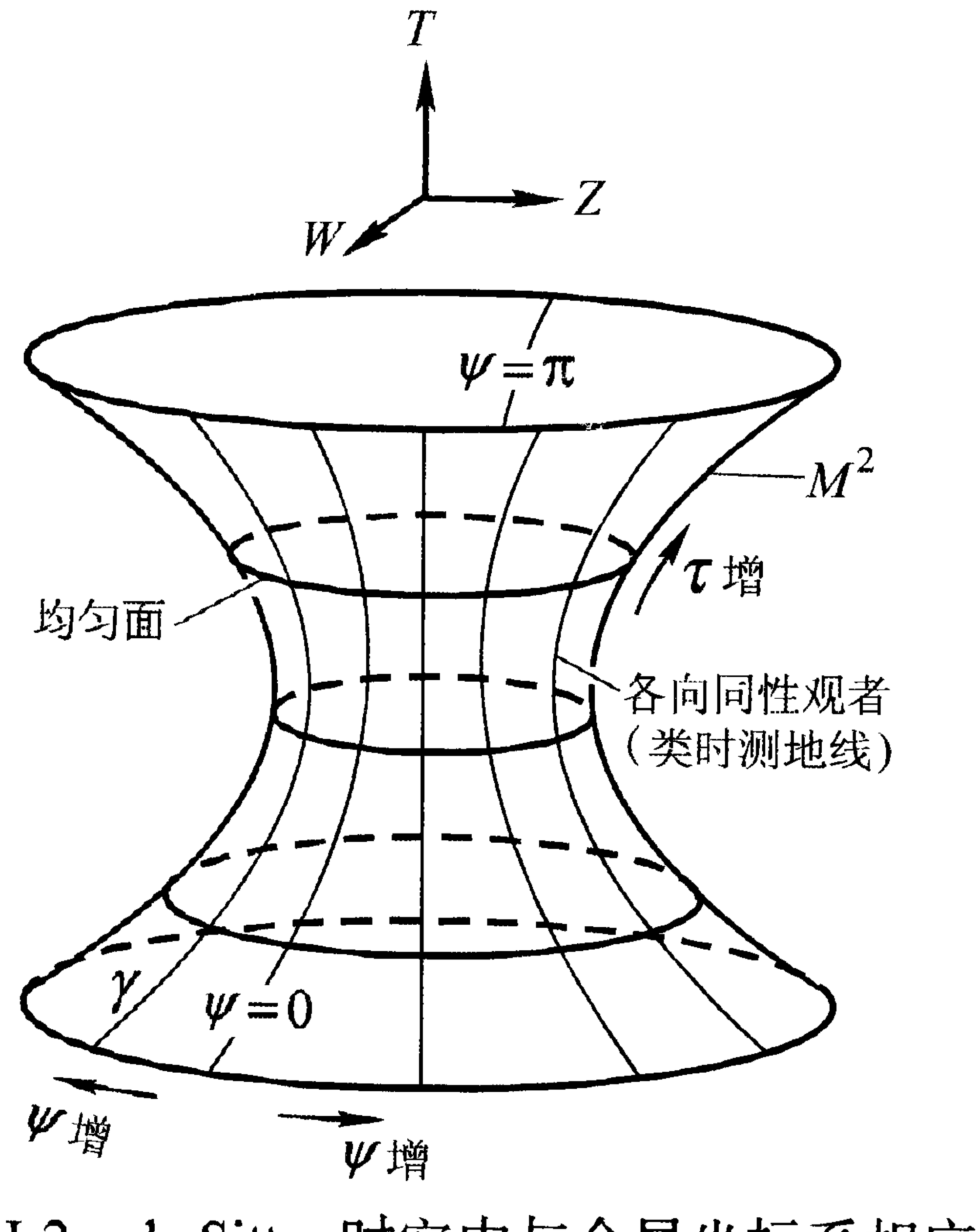


图 J-2　de Sitter 时空中与全局坐标系相应的均匀面(等 τ 面)和各向同性观者世界线(等 ψ 线). M^2 只是 M^4 的 2 维模拟物

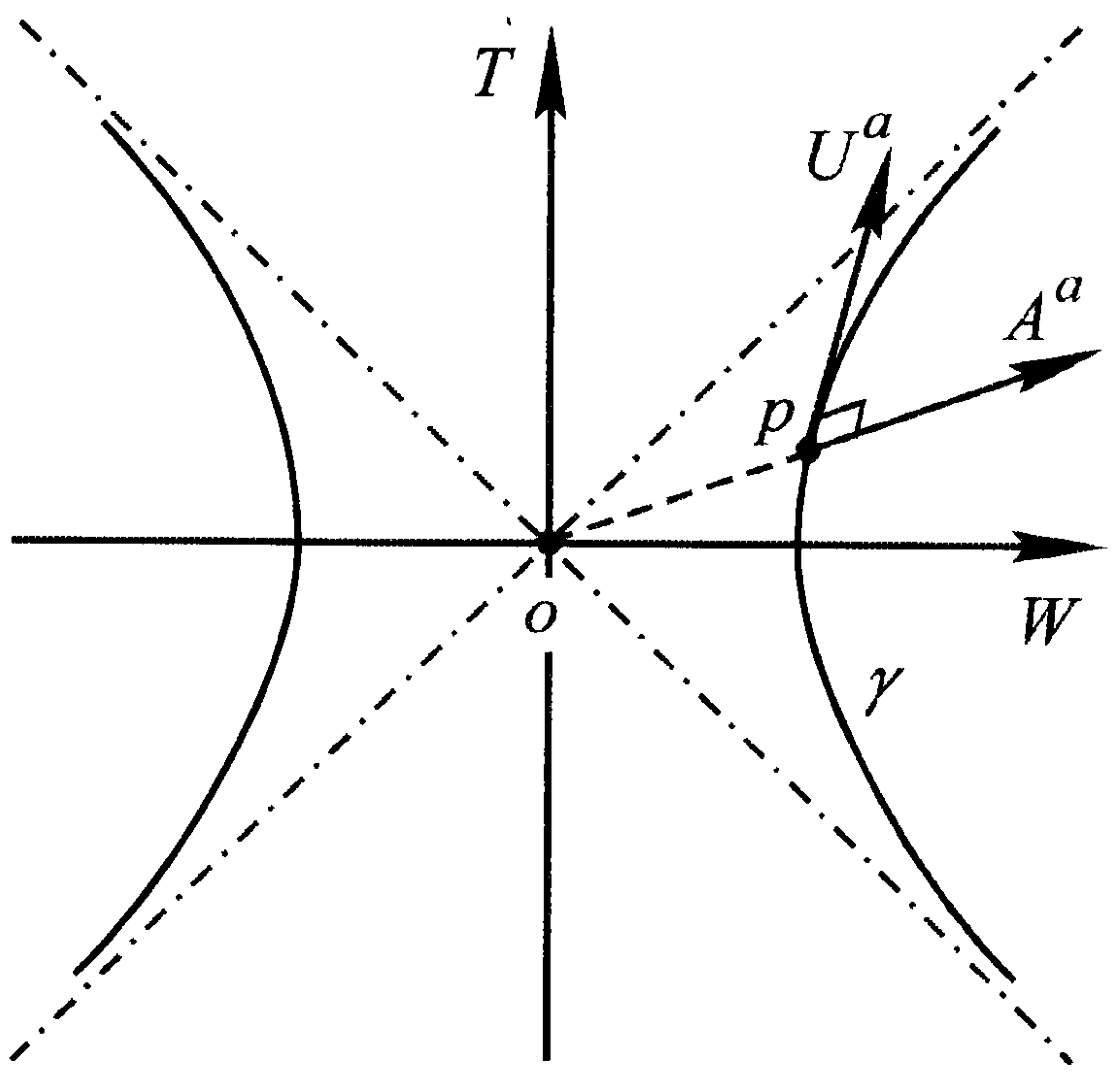


图 J-3　含 T 轴的任一平面(图中为 $T\sim W$ 面)与 M^2 的交线是 (M^2,g_{ab}) 的类时测地线

这其实是讨论 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维(旋转)双曲面，即 M^4 的 2 维模拟物 M^2，配以由 3 维闵氏度规 η_{ab} 诱导的度规 g_{ab}，就成为一个 2 维 de Sitter 时空 (M^2,g_{ab}). 作为 2 维 RW 宇宙，由式(J-2-3')易见它的等 τ 线族(均匀线族)就是所有由 $T=$ 常数 定义的平面与 M^2 的交线，即图 J-2 中的所有水平圆周. 各向同性观者的世界线则无非

是τ坐标线(等ψ线). 由式(J-2-3′)可知$Z/W=\tan\psi$, 所以等ψ线就是由$Z/W=$常数 定义的平面(即含T轴的平面)与M^2的交线, 是背景空间$\mathbb{R}^3$中的无数双曲线(图J-2). 作为各向同性观者的世界线, 它们自然是类时测地线. 以上对(M^2, g_{ab})所得结论在做如下修改后也适用于(M^4, g_{ab}): 图J-2的每一水平圆周代表一个3球面S^3, 每一双曲线代表一个3维面(由坐标τ, θ, φ刻画), 其中每一θ, φ为常数的线才是τ坐标线.

[选读 J-2-1]

以上关于等ψ线是测地线的结论还可推广为如下命题: 过原点o的任一平面与M^2的交线一定是(M^2, g_{ab})的测地线. 为证此命题, 先要对关于等ψ线的结论再从几何角度(脱离坐标系)给个证明. 设Σ是含T轴的任一平面, 则$\Sigma\cap M^2$是一对等ψ线(图J-2), 以γ代表其一, 则γ的单位切矢U^a满足

$$g_{ab}U^aU^b=\eta_{ab}U^aU^b<0, \qquad \text{(等号用到诱导度规的定义)}$$

即γ用g_{ab}衡量也是类时线. 分别以∂_a及∇_a代表与η_{ab}及g_{ab}适配的导数算符, 以A^a和$\hat{A}^a$代表γ作为$(\mathbb{R}^3, \eta_{ab})$和$(M^2, g_{ab})$的曲线的绝对加速度(依次为"3加速"和"2加速"), 则由中册式(14-4-18)得

$$\hat{A}^a\equiv U^b\nabla_bU^a=U^bg_b{}^dg^a{}_c\partial_dU^c=g^a{}_cU^d\partial_dU^c=g^a{}_cA^c,$$

可见$\hat{A}^a$是A^a在M^2上的投影. 欲证γ是(M^2, g_{ab})的测地线只须证明此投影为零, 即证明$\hat{A}^a$沿M^2的法向. 不失一般性, 可认为Σ就是$T\sim W$面, 故γ(见图J-3)的单位切矢为

$$U^a=l^{-1}[W(\partial/\partial T)^a+T(\partial/\partial W)^a],$$

因而

$$A^a\equiv U^b\partial_bU^a=l^{-2}[T(\partial/\partial T)^a+W(\partial/\partial W)^a]. \qquad \text{(J-2-5)}$$

另一方面, 由超曲面M^2的定义方程$-T^2+W^2+Z^2-l^2=0$可知

$$n_a\equiv\partial_a(-T^2+W^2+Z^2-l^2)=2[-T(\mathrm{d}T)_a+W(\mathrm{d}W)_a+Z(\mathrm{d}Z)_a] \qquad \text{(J-2-6)}$$

是M^2的法余矢. $\forall p\in\gamma\equiv\Sigma\cap M^2$有$Z|_p=0$, 故$n_a|_p=2[-T(\mathrm{d}T)_a+W(\mathrm{d}W)_a]_p$, 因而$M^2$在$\gamma$任一点的法矢可表为

$$n^a\equiv\eta^{ab}n_b=2[T(\partial/\partial T)^a+W(\partial/\partial W)^a]. \qquad \text{(J-2-7)}$$

对比式(J-2-5)、(J-2-7)便知A^a沿M^2的法向. 可见γ是(M^2, g_{ab})的测地线. 为证明本选读开头的推广命题, 可令Σ'代表含o点(但未必含T轴)的任一平面, 并证明

$\Sigma' \cap M^2$ 是(一条或两条)测地线. 不妨认为 Σ' 面含 W 轴(通过重选 W, Z 轴总可做到), 故 Σ' 的方程为 $Z = \alpha T$ (α 为常数), 与 M^2 的方程 $-T^2 + W^2 + Z^2 = l^2$ 联立便得 $\Sigma' \cap M^2$ 的方程:

$$Z = \alpha T, \qquad (\alpha^2 - 1) T^2 + W^2 = l^2 . \tag{J-2-8}$$

当 $\alpha = 1$ (或 $\alpha = -1$) 时上式成为 $Z = T, W = \pm l$ (或 $Z = -T, W = \pm l$), 所以 $\Sigma' \cap M^2$ 是两条 45° 斜直线, 分别躺在平面 $W = +l$ 和 $W = -l$ 内. 它们(作为直线)自然是 η_{ab} 的测地线, 即 $A^a = 0$, 故由 $\hat{A}^a = g^a{}_c A^c$ 得 $\hat{A}^a = 0$, 可见它们是 (M^2, g_{ab}) 的类光测地线. (事实上, 它们还是 M^2 的类光测地母线, 即 M^2 可由所有这种类光测地线铺成.) 当 $\alpha^2 \neq 1$ 时, 用下式定义新坐标 T', Z':

$$Z' \equiv \lambda^{-1}(-\alpha T + Z), \quad T' \equiv \lambda^{-1}(T - \alpha Z), \quad 其中\ \lambda \equiv |1 - \alpha^2|^{1/2}, \tag{J-2-9}$$

逆变换为

$$T = \lambda (1 - \alpha^2)^{-1}(T' + \alpha Z'), \quad Z = \lambda (1 - \alpha^2)^{-1}(\alpha T' + Z'), \tag{J-2-9'}$$

则 $\Sigma' \cap M^2$ 在新坐标下的方程为

$$Z' = 0, \qquad \begin{cases} -T'^2 + W^2 = l^2 \ (当\ \alpha^2 < 1), \\ +T'^2 + W^2 = l^2 \ (当\ \alpha^2 > 1), \end{cases} \tag{J-2-10}$$

可见 $\Sigma' \cap M^2$ 是 $Z' = 0$ 平面内的曲线, 而且当 $\alpha^2 < 1$ 时是(渐近线为 45° 直线的)双曲线, 当 $\alpha^2 > 1$ 时是圆. $\{T', Z', W\}$ 也是 $(\mathbb{R}^3, \eta_{ab})$ 的洛伦兹系, 因为由式(J-2-9)得

$$\eta^{ab}(\mathrm{d}T')_a(\mathrm{d}T')_a = \lambda^{-2}(-1 + \alpha^2) = \begin{cases} -1 \ (当\ \alpha^2 < 1), \\ +1 \ (当\ \alpha^2 > 1), \end{cases}$$

$$\eta^{ab}(\mathrm{d}Z')_a(\mathrm{d}Z')_a = \lambda^{-2}(1 - \alpha^2) = \begin{cases} +1 \ (当\ \alpha^2 < 1), \\ -1 \ (当\ \alpha^2 > 1), \end{cases}$$

$$\eta^{ab}(\mathrm{d}T')_a(\mathrm{d}Z')_a = 0 .$$

于是仿照本选读开头的证明可知 $\Sigma' \cap M^2$ 在 $\alpha^2 < 1$ 时是 (M^2, g_{ab}) 的两条类时测地线, 在 $\alpha^2 > 1$ 时是 (M^2, g_{ab}) 的类空测地线. **[选读 J-2-1 完]**

2. 暴涨坐标系 $\{\hat{\tau}, x, y, z\}$, 其中 $\hat{\tau}, x, y, z \in (-\infty, \infty)$, 定义为

$$X = \mathrm{e}^{l^{-1}\hat{\tau}} x, \qquad Y = \mathrm{e}^{l^{-1}\hat{\tau}} y, \qquad Z = \mathrm{e}^{l^{-1}\hat{\tau}} z,$$

$$T = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\hat{\tau}) + l^{-1}\mathrm{e}^{l^{-1}\hat{\tau}}\rho^2/2, \quad W = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\hat{\tau}) - l^{-1}\mathrm{e}^{l^{-1}\hat{\tau}}\rho^2/2, \quad \rho^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2, \tag{J-2-11}$$

容易验证上式满足超曲面方程(J-2-2). 微分式(J-2-11)后代入式(J-2-1)便得4维诱导

线元

$$ds^2 = -d\hat{\tau}^2 + e^{2l^{-1}\hat{\tau}}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad \text{(J-2-12)}$$

与上册式(10-1-23b)对比发现上式可被看作 $k = 0$ 的 RW 度规的一种特例，其中 $a(\hat{\tau}) = e^{l^{-1}\hat{\tau}}$. 请注意式(J-2-12)和(J-2-4)是同一个 de Sitter 度规 g_{ab} 在不同坐标系的线元. 初学者常问:"为什么同一个 de Sitter 时空既可看作 $k = +1$ 的 RW 宇宙又可看作 $k = 0$ 的 RW 宇宙?它的空间几何到底是弯曲的($k = +1$)还是平直的($k = 0$)?"回答时首先应该再次指出:时空是绝对的，而空间则是相对的，取决于你如何对时空作分层. 与式(J-2-4)相应的分层方式如图 J-2 的水平圆周(理解为 S^3)所示，每一层(每一时刻的"空间")的几何都是3球面，即 $k = +1$. 再看与式(J-2-12)相应的分层方式. 由式(J-2-11)得 $T + W = l e^{l^{-1}\hat{\tau}}$，故等 $\hat{\tau}$ 面是 $T + W =$ 常数 的4维"平面"与 M^4 的3维交面，由图 J-4 中粗的非闭合曲线代表，每层(每一等 τ 面)的几何都是平直的，即 $k = 0$. 重要的是两种情况下的"空间"本来就是指不同的分层面，因此"空间到底弯曲与否"的问题并无意义. 由 $T + W = l e^{l^{-1}\hat{\tau}}$ 可知，无论 $\hat{\tau}$ 取何值，T 和 W 都必然满足 $T + W > 0$，表明暴涨系只覆盖(几乎)半个 de Sitter 时空，因而不应说" de Sitter 时空可看作某种 $k = 0$ 的宇宙". 以 $\mathscr{B}$ 代表暴涨坐标域的边界. 因为当 $\hat{\tau} \to -\infty$ 时 $T + W = l e^{l^{-1}\hat{\tau}} \to 0$，所以 $\mathscr{B}$ 的方程由 $-T^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = l^2$ 和 $T + W = 0$ 联立给出，即

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - l^2 = 0, \qquad T + W = 0.$$

可见 $\mathscr{B}$ 同胚于 $\mathbb{R} \times S^2$. 在 $\mathscr{B}$ 上定义坐标系 $\{\tilde{\tau}, \theta, \varphi\}$ 使

$$T = \tilde{\tau},\ W = -\tilde{\tau},\ X = l\sin\theta\cos\varphi,\ Y = l\sin\theta\sin\varphi,\ Z = l\cos\theta, \qquad \text{(J-2-13)}$$

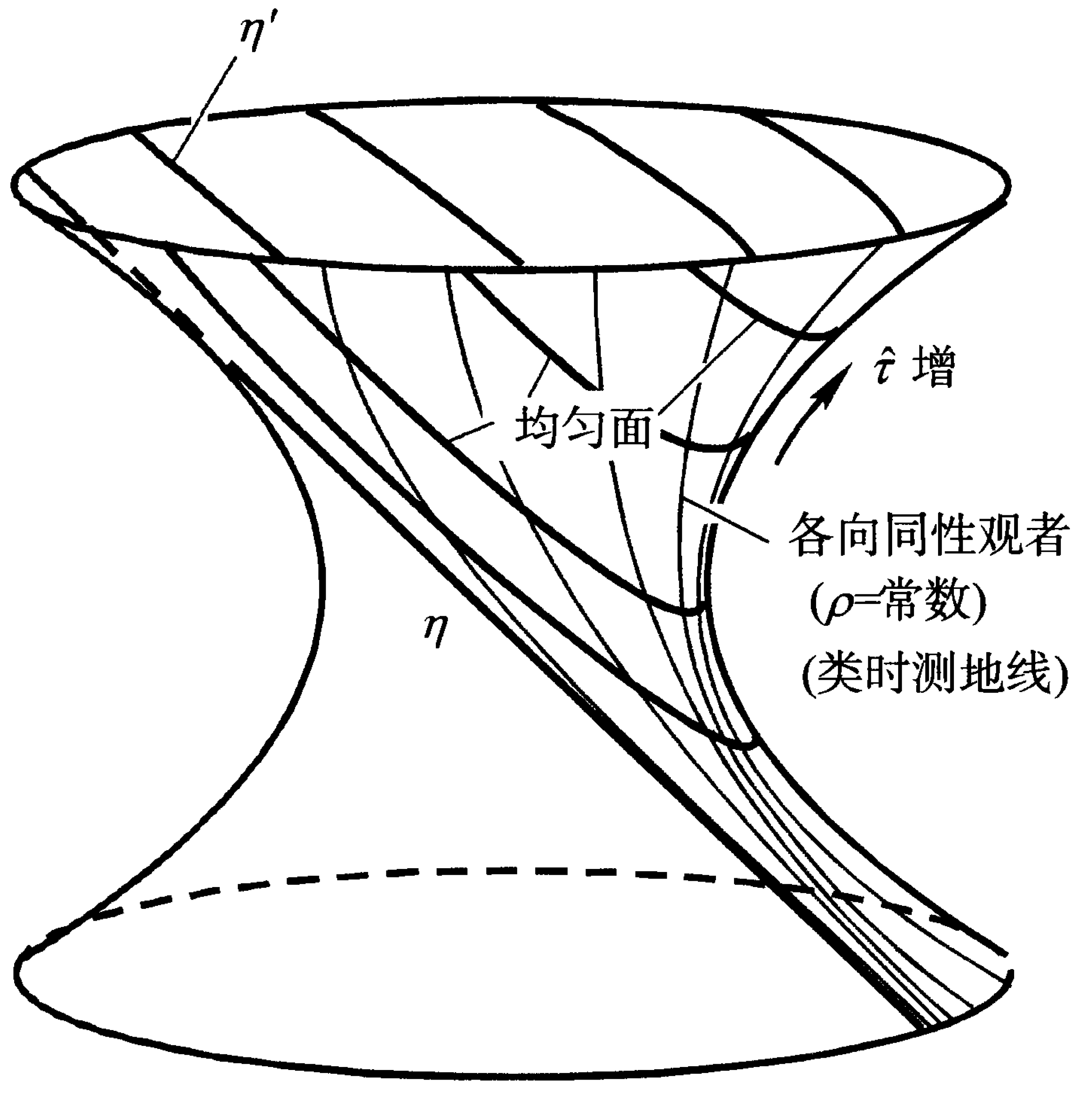


图 J-4　与暴涨坐标系相应的分层. 该系只覆盖"半个" de Sitter 时空. 每一均匀面(等 $\hat{\tau}$ 面, 粗线)代表一个3维平直空间. 图为 M^4 在压掉 X, Y 维后所得的 M^2

则由式(J-2-1)可知η_{ab}在$\mathscr{B}$上诱导出退化“线元”：$ds^2|_{\mathscr{B}}=l^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$，因此$\mathscr{B}$是de Sitter时空中的一个类光超曲面. 把$\mathscr{B}$的法矢场$n^a$用基矢展开：

$$n^a=n^T(\partial/\partial T)^a+n^W(\partial/\partial W)^a+n^X(\partial/\partial X)^a+n^Y(\partial/\partial Y)^a+n^Z(\partial/\partial Z)^a, \quad \text{(J-2-14)}$$

则$n^a\partial_a(T+W)|_{\mathscr{B}}=0$给出$n^T+n^W=0$. 而$n^a$的类光性又导致

$$0=-(n^T+n^W)(n^T-n^W)+(n^X)^2+(n^Y)^2+(n^Z)^2=(n^X)^2+(n^Y)^2+(n^Z)^2.$$

其中第二步用到$n^T+n^W=0$. 故$n^X=n^Y=n^Z=0$，从而

$$n^a=n^T(\tilde{\tau},\theta,\varphi)[(\partial/\partial T)^a-(\partial/\partial W)^a]. \quad \text{(J-2-15)}$$

若取$n^T(\tilde{\tau},\theta,\varphi)=1$，则$n^a$的积分曲线是$(\mathbb{R}^5,\eta_{ab})$中的类光测地线，它们刚好铺出$\mathscr{B}$. 为了画图，只好压缩$X,Y$两维，这时$\mathscr{B}$被压为同胚于$\mathbb{R}\times S^0$的流形，即两条测地线，这就是图J-4的$\eta$和$\eta'$. 压缩所得的$M^2$是由$-T^2+W^2+Z^2=l^2$定义的超曲面，它与超平面$Z=l$之交满足$-T^2+W^2=0$，是两条互相正交(用欧氏度规衡量!)的45°斜直线，其中$T+W=0$的那条就是η(可提前参看图J-6). 此外，M^2与超平面$Z=-l$之交是另外两条45°斜直线(与前面的两条斜直线关于$T\sim W$面为镜像对称)，其中$T+W=0$的那条就是η'.

前面讲过de Sitter时空并非真实的宇宙. 然而，极早期宇宙的暴涨阶段可看作de Sitter时空的一个子时空. 此外，如果真实宇宙的暗能量就是宇宙常数$\Lambda>0$(见上册§10.5)，则在足够长的时间后Ω_Λ将远大于Ω_{M}，宇宙将愈来愈接近于指数式膨胀[式(J-2-12)]，即愈来愈接近de Sitter宇宙，直至永远. 这是人们重视de Sitter时空的一个原因.

在宇宙学研究的较早阶段(1948年)曾出现过宇宙的**稳恒态模型**(steady state model)，其出发点是：宇宙不但在所有空间点和所有空间方向上，而且在所有时刻都相同. 由此可推得宇宙的线元取式(J-2-12)的形式，其中l^{-1}起哈勃常数H的作用. 这个H是真正意义下的常数，即$H\equiv\dot{a}(\hat{\tau})/a(\hat{\tau})=l^{-1}$与$\hat{\tau}$无关. 为了保证物质密度$\rho$在宇宙膨胀[$\dot{a}(\hat{\tau})>0$]的情况下永为常数(不随$\hat{\tau}$变)，就要假定宇宙中不断有物质产生. 该模型不但能解释直到当时为止的一切观测事实(包括哈勃定律)，而且有许多优点(例如能对若干问题给出简单而明确的预言)，但终因无法解释后来出现的观测数据(微波背景辐射、类星体红移分布等)而退出历史舞台. 详见温伯格(1972).

3. 双曲坐标系$\{\overline{\tau},\psi,\theta,\varphi\}$，$-\infty<\overline{\tau}<\infty,\ 0<\psi<\infty,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$，定义为

$$T = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\tau)\mathrm{ch}\,\psi, \qquad W = l\,\mathrm{ch}(l^{-1}\tau),$$
$$X = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\tau)\mathrm{sh}\,\psi\sin\theta\cos\varphi, \quad Y = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\tau)\mathrm{sh}\,\psi\sin\theta\sin\varphi, \quad Z = l\,\mathrm{sh}(l^{-1}\tau)\mathrm{sh}\,\psi\cos\theta. \tag{J-2-16}$$

微分上式后代入式(J-2-1)便得 4 维诱导线元

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}\tau^2 + l^2\mathrm{sh}^2(l^{-1}\tau)[\mathrm{d}\psi^2 + \mathrm{sh}^2\psi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)], \tag{J-2-17}$$

与式(10-1-23c)对比就会发现上式可以看作 $k=-1$ 的 RW 度规的一种特例, 其中 $a(\tau) = l\mathrm{sh}(l^{-1}\tau)$. 由式(J-2-16)可知双曲坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 也不能覆盖整个 de Sitter 时空. 此系不常用, 不再详述.

线元(J-2-4)、(J-2-12)和(J-2-17)的系数都含时间坐标, 初学者往往据此就认为 de Sitter 时空不是稳态时空. 其实问题并非如此简单. 稳态性取决于时空的内禀几何而与坐标系无关. 刚才那种简单判断正是“不识时空真面目, 只缘心在坐标中.” 在几何语言中, 时空 (M, g_{ab}) 是否稳态取决于它有无类时 Killing 矢量场(见§8.1 定义 1), 如果全时空存在类时 Killing 场, 它就是稳态时空; 如果每点 $p \in M$ 都有开邻域, 其上存在类时 Killing 场, 它就是局域稳态时空. 对 de Sitter 时空, 上述三种线元的“时间依赖性”只是表面现象, 是所选坐标系的第零坐标线与类时 Killing 场的积分曲线不重合的结果, 不说明类时 Killing 场不存在. 下面将介绍坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 并示明 de Sitter 度规 g_{ab} 在该系的分量不含时间坐标 t, 因而该坐标域就是一个稳态(子)时空. 又因为 de Sitter 时空点点平权, 它至少是局域稳态(而且静态)的. 自然要问: de Sitter 时空在整体上也稳态吗?笔者的研究证明: 该时空的任一 Killing 矢量场如果在某点类时, 则它必在另外某点类空或类光. 这说明不存在一个在全时空都类时的 Killing 矢量场. 结论: de Sitter 时空是局域地而非整体地稳态的.

4. 静态坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$, $-\infty<t<\infty, 0<r<l$(或 $l<r<\infty$), $0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi$, 定义为

$$X = r\sin\theta\cos\varphi, \quad Y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad Z = r\cos\theta, \quad r>0,$$
$$(1)(r<l)\begin{cases} T = (l^2 - r^2)^{1/2}\mathrm{sh}(l^{-1}t), \\ W = (l^2 - r^2)^{1/2}\mathrm{ch}(l^{-1}t), \end{cases} \qquad (2)(r>l)\begin{cases} T = (r^2 - l^2)^{1/2}\mathrm{ch}(l^{-1}t), \\ W = (r^2 - l^2)^{1/2}\mathrm{sh}(l^{-1}t), \end{cases} \tag{J-2-18a}$$

上式同时定义了两个坐标系(1)和(2), 坐标域分别由 $r<l$ 和 $r>l$ 界定. 微分上式后代入式(J-2-1)便得诱导线元

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - l^{-2}r^2)\mathrm{d}t^2 + (1 - l^{-2}r^2)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{J-2-19}$$

上式与施瓦西线元

$$ds^2 = -(1-2M/r)\,dt^2 + (1-2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \quad \text{(J-2-20)}$$

有若干类似之处. 例如, 不难看出它们都是球对称的; 此外, 正如线元(J-2-20)在 $r>2M$ 的区域是静态的那样, 线元(J-2-19)在 $r<l$ 的区域[坐标域(1)]也是静态的. 但两个线元也有若干不同, 一个重要的区别就是式(J-2-19)的 r 不出现在分母中, 因而在 $r=0$ 处并不奇异. 然而它在 $r=l$ 处却存在奇性. de Sitter 时空的最高对称性保证任一时空点都不比其他点更特殊, 所以 $r=l$ 只能是坐标奇点. 由式(J-2-18a)得

$$T+W=\begin{cases}(l^2-r^2)^{1/2}e^{l^{-1}t}>0\ (\text{对 } r<l),\\ (r^2-l^2)^{1/2}e^{l^{-1}t}>0\ (\text{对 } r>l),\end{cases} \quad \text{(J-2-21)}$$

所以无论 t 和 r 取何值都有 $T+W>0$, 可见由式(J-2-18a)定义的静态坐标系只能覆盖(几乎)半个 de Sitter 时空. 若要覆盖另一半(指 $T+W<0$ 的部分), 可改取如下定义:

$$X=r\sin\theta\cos\varphi,\quad Y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad Z=r\cos\theta,\quad r>0,$$

$$(3)\ (r<l)\begin{cases}T=-(l^2-r^2)^{1/2}\text{sh}(l^{-1}t),\\ W=-(l^2-r^2)^{1/2}\text{ch}(l^{-1}t),\end{cases}\qquad (4)\ (r>l)\begin{cases}T=-(r^2-l^2)^{1/2}\text{ch}(l^{-1}t),\\ W=-(r^2-l^2)^{1/2}\text{sh}(l^{-1}t),\end{cases} \quad \text{(J-2-18b)}$$

图 J-5 示出式(J-2-18)定义的 4 个坐标域在 $T\sim W$ 面上的投影(4 个阴影区). 各坐标域之间的交界面都同胚于 $\mathbb{R}\times S^2$, 其定义方程分别为

域(1), (2)之间: $T=W>0,\quad X^2+Y^2+Z^2=l^2,$

域(3), (4)之间: $T=W<0,\quad X^2+Y^2+Z^2=l^2,$

域(2), (3)之间: $T=-W>0,\quad X^2+Y^2+Z^2=l^2,$

域(1), (4)之间: $T=-W<0,\quad X^2+Y^2+Z^2=l^2.$

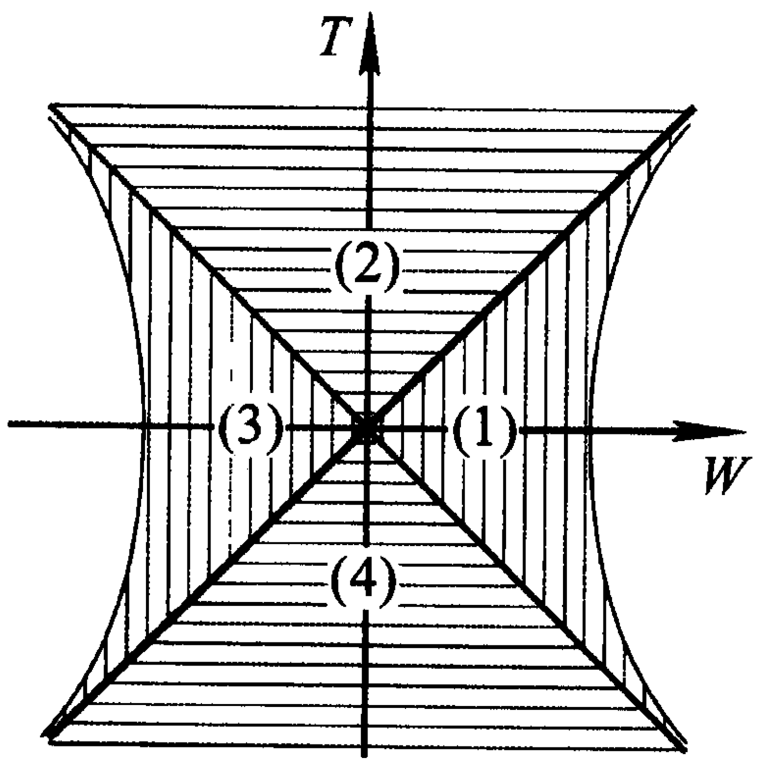


图 J-5　由式(J-2-18)定义的 4 个坐标域在 $T\sim W$ 面的投影

表面看来, 图 J-5 与施瓦西时空的图 9-13 很像, 但有许多重要区别. 其一是: 图 9-13 中的 A, A′, B, W 区由施瓦西几何内禀地决定, 而图 J-5 的(1), (2), (3), (4)区的划分却取决于人为选择. de Sitter 时空的最高对称性保证各时空点平权, 你完全可

以另选时空点作为静态坐标系的原点. 作为这一区别的后果, 施瓦西时空中内禀地存在着两个不是静态区的时空区, 即 B 和 W ; 而 de Sitter 时空则没有内禀的非静态区, 因为, 正如图 J-5 中(1)区的任一点 p_1 总有静态邻域[不妨就取(1)区]那样, (2)区的任一点 p_2 也总有静态邻域, 为此只须另选静态坐标系使其(1)区含 p_2 . 总之, de Sitter 时空是局域静态时空(前已指出), 而施瓦西时空则不是(只能说 A 和 A′ 区是静态区). 此外, 还应提及两图的一个次要区别: 图 9-13 是一个坐标系(Kruskal 系)的坐标域, A, A′, B, W 区都含于其中; 而图 J-5 则是把 4 个坐标系的坐标域画在一个图中. 只有坐标系(1)和(3)才配称为静态坐标系, 以下把相应的坐标域(1)和(3)称为静态区.

虽然在 l 值给定后 de Sitter 时空只有一个, 但使用不同坐标系可从不同角度更好地了解这一时空. 例如, 使用全局坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 时, 我们认识了 $k=+1$ 宇宙的空间均匀面(等 τ 面)及各向同性观者的世界线(见图 J-2). 现在, 在有了静态坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 后, 我们自然关心静态区(1)和(3)中静态参考系的同时面(等 t 面)和静态观者的世界线. 由式(J-2-18)的(1)和(3)得 $T/W=\text{th}(l^{-1}t)$, 故 $(\mathbb{R}^5,\eta_{ab})$ 中的 4 维 “平面” $T/W=\alpha$ (常数) 与 M^4 的交面(3 维)是有相同 t 值的两张等 t 面. 为便于想象和画图, 再次压缩两维, 即讨论 $(\mathbb{R}^3,\eta_{ab})$ 中由 $-T^2+W^2+Z^2=l^2$ 定义的 (M^2, g_{ab}). 也可这样理解: 取 $\sin\theta=0$ 或 π, 则式(J-2-18)的前三式简化为 $X=Y=0, Z=\pm r$. 以 S_t 代表 $(\mathbb{R}^3,\eta_{ab})$ 中 t 为常数的平面, 则 η_{ab} 在 S_t 诱导出 2 维欧氏度规 δ_{ab}. 我们所关心的同时面(等 t 线)就是 $S_t\cap M^2$, 由 $T=W\,\text{th}(l^{-1}t)$ 与 $-T^2+W^2+Z^2=l^2$ 联立可得其方程 $Z^2+W'^2=l^2$, 其中 $W'\equiv W\text{ch}^{-1}(l^{-1}t)$. 不难验证 Z, W' 是 δ_{ab} 的笛卡儿坐标, 故等 t 线是圆周(与圆心等距的点集), 虽然图 J-6 中 $t\neq 0$ 的等 t 线貌似椭圆. 另一方面, 平面 $Z=\pm r$ 与 M^2 的交线(记作 μ)满足 $-T^2+W^2=l^2-r^2$, 依 r 值的情况而分成三类: ①当 $r<l$ 时 μ 为 (M^2, g_{ab}) 的类时双曲线, 代表静态观者的世界线(例如图 J-6 中平面 $Z=0$ 与 M^2 的交线); ②当 $r>l$ 时 μ 为类空双曲线; ③当 $r=l$ 时平面 $Z=\pm r$ 就是 $Z=l$ 或 $Z=-l$, μ 在 $Z=l$ 时是 (M^2, g_{ab}) 的两条类光测地线, 方程分别为 $T=W$ 和 $T=-W$ (后者即图 J-4 的 η), 在 $Z=-l$ 时是另外两条类光测地线, 方程是 $T=W$ 和 $T=-W$, 与前两条类光测地线关于 $T\sim W$ 面为镜像对称, 图中未示出. 若回到 (M^4, g_{ab}), 则这两条 $T=-W$ “线” 其实是两张 3 维类光超曲面, 它们正是由式(J-2-18)定义的坐标域的边界.

线元(J-2-19)在 $r=l$ 处(平面 $Z=\pm l$ 与 M^2 之交)的奇性非常类似于施瓦西线元(J-2-20)在 $r=2M$ 处的奇性, 但也存在着重要的区别. 施瓦西线元中 r 的取值范围要么是 $2M<r<\infty$, 要么是 $0<r<2M$. 只有在找到更好的坐标系(例如 Kruskal 或 Eddington 系)之后才敢断言这两个区域其实只有 “一膜($r=2M$)之隔”, 从而确证 $r=2M$ 只是坐标奇性. 与此不同, de Sitter 时空从一开始就被定义为 (M^4, g_{ab}), 其中 M^4 是 5 维闵氏时空 $(\mathbb{R}^5,\eta_{ab})$ 中的类时超曲面, g_{ab} 则是定义在整个 M^4 上的

诱导度规，后来的讨论无非是寻找 M^4 上的适当坐标系以便具体写出 g_{ab} 的线元. 因此，不妨认为由 $-T^2+W^2+X^2+Y^2+Z^2=l^2$ 定义的 4 维类时超曲面 M^4 对应于施瓦西情况下经 Kruskal 延拓而得的最大时空流形(天生就有的延拓). 不论选用什么坐标系，其奇性只能是坐标奇性.

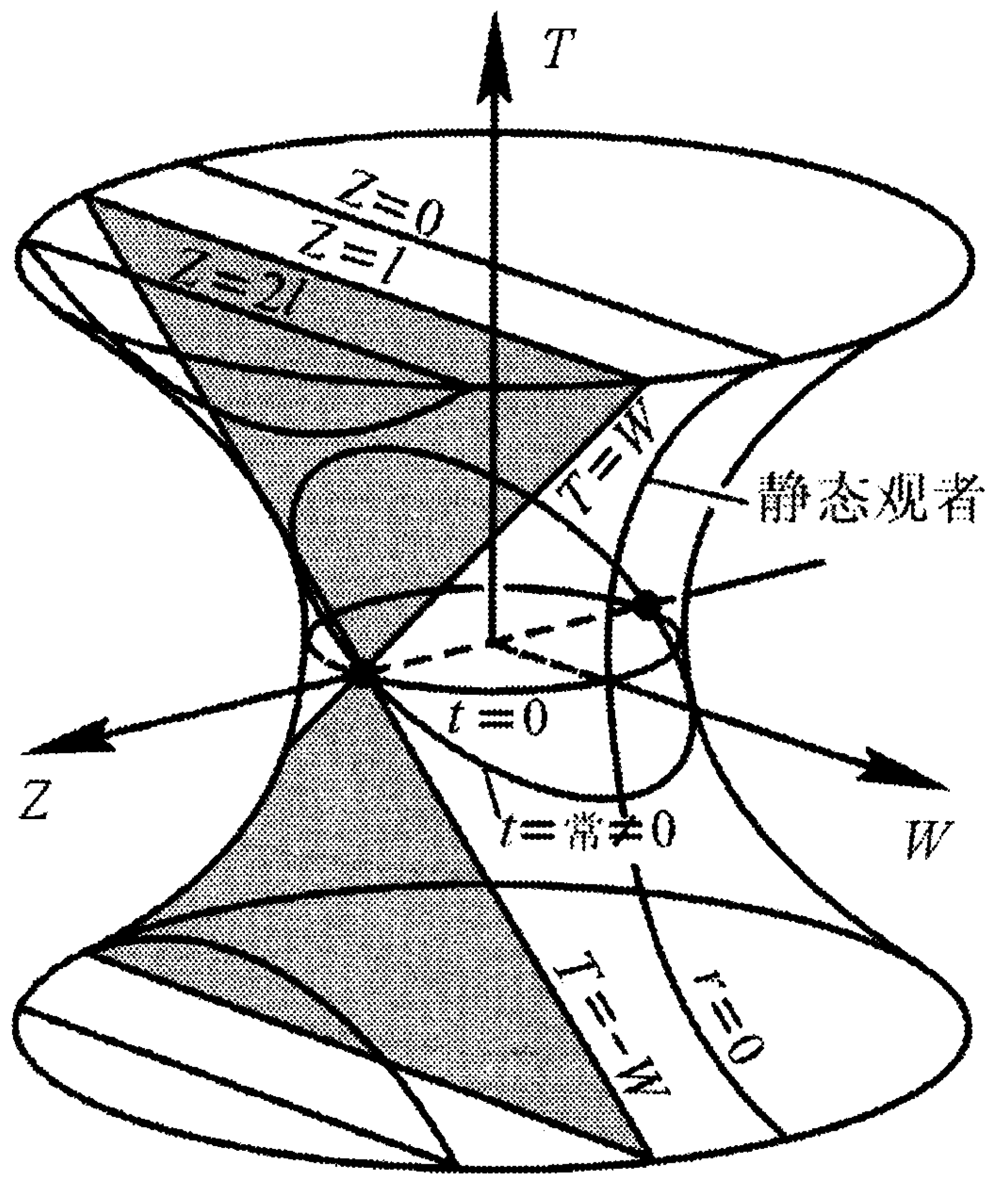


图 J-6 静态参考系的同时面(等 t 面)和静态观者世界线

§J.3 德西特时空的 Penrose 图

Penrose 图对研究时空的无限远行为有重要意义. de Sitter 时空的 Penrose 图可以通过改写线元(J-2-4)而方便地求得. 从全局坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 的类时坐标 τ 出发引入新的类时坐标 t'，定义为

$$t'\equiv 2\arctan(e^{l^{-1}\tau})-\pi/2,\ (因-\infty<\tau<\infty, 故取-\pi/2<t'<\pi/2) \qquad (J\text{-}3\text{-}1)$$

则 $l^2\text{ch}^2(l^{-1}\tau)\,dt'^2=d\tau^2$，故线元(J-2-4)可改写为

$$ds^2=l^2\text{ch}^2(l^{-1}\tau)[-dt'^2+d\psi^2+\sin^2\psi\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)]. \qquad (J\text{-}3\text{-}2)$$

与中册式(12-2-8)或上册式(10-2-43)对比可知上式右边方括号内正是爱因斯坦静态宇宙的线元，可见 de Sitter 度规共形于爱因斯坦静态宇宙度规. 爱因斯坦静态宇宙的拓扑是 $\mathbb{R}\times S^3$，整个时空在压缩两维后可用图 12-3(b) 的圆柱面表示. de Sitter 时空的拓扑也是 $\mathbb{R}\times S^3$，但因 t' 的取值范围只有 $-\pi/2<t'<\pi/2$，所以它只共形嵌入到圆柱面中有限长的一段，见图 J-7. 由此可得 de Sitter 时空的 Penrose 图(图 J-8a)，它的确具有 Penrose 图的两个基本特征(见 §12.2 末). 图中的共形无限远 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ 应加说明. 我们在 §12.2 首次引入 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ 的符号，它们代表闵氏时空的共形类光无限远，是类光超曲面. 稍后，§12.2 在介绍渐近平直时空时再次引入 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$，其定义为 $\mathscr{I}^\pm:=\dot{J}^\pm(i^0)-i^0$，也是类光超曲面. 然而现在的 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ (图 J-8a)却

是类空超曲面. 这不是什么矛盾, 因为 de Sitter 时空不是渐近平直时空. Penrose 在关于时空无限远的共形处理的文章[Penrose(1964)]中把 $\mathscr{I}$ 定义为时空流形的边界, 即 $\mathscr{I} \equiv \dot{M}$. 于是对闵氏时空有

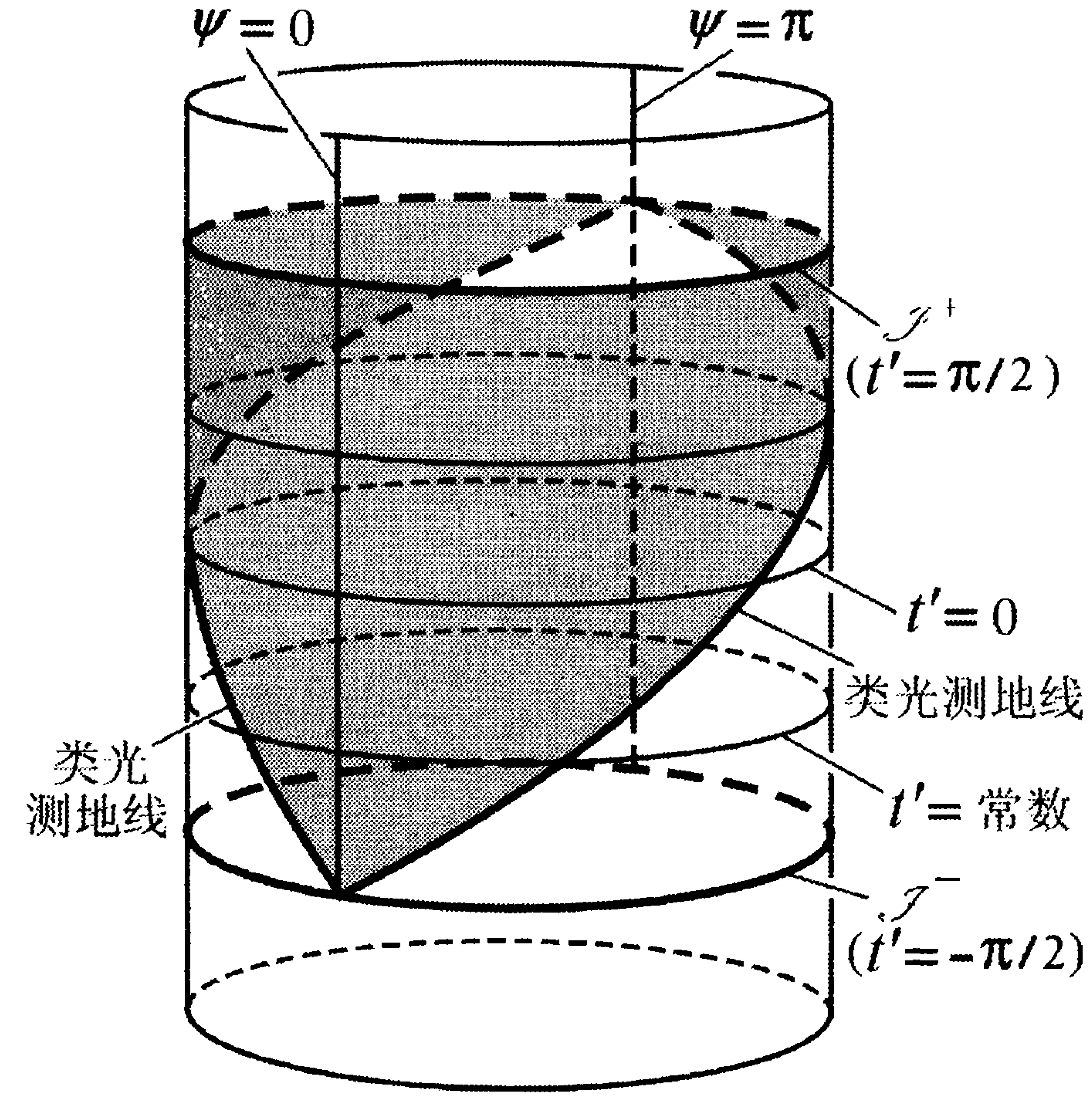


图 J-7　de Sitter 时空共形于爱因斯坦静态宇宙中由 $-\pi/2 < t' < \pi/2$ 界定的区域. 竖直线是 t' 坐标线, 水平圆周(代表 S^3)是等 t' 面. 阴影部分代表暴涨坐标系的覆盖域

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}^- \cup \mathscr{I}^+ \cup \{i^0\} \cup \{i^-\} \cup \{i^+\} \neq \mathscr{I}^- \cup \mathscr{I}^+ .$$

按照这一定义, de Sitter 时空的 $\mathscr{I}$ 自然是图 J-7 的上、下两个水平圆周(分别记作 $\mathscr{I}^+$ 和 $\mathscr{I}^-$)之并, 为区分起见分别记作 $\mathscr{I}^+$ 和 $\mathscr{I}^-$. 也可这样理解: $\mathscr{I}$ 中有类光测地线发出(或终止)的所有点构成的子集称为 $\mathscr{I}^-$ (或 $\mathscr{I}^+$). 在发出(或终止)类光测地线这个意义上甚至可把 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ 称为类光无限远, 虽然它们都是类空超曲面. $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$ 为类空的这一特征与事件视界和粒子视界的存在性有密切联系, 见下节.

图 J-8(a) 中每条竖直线都是全局坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 的一条 τ 坐标线, 代表 $k=+1$ 的 RW 宇宙的一个各向同性观者的世界线(都是类时测地线), 每一水平线代表该 RW 宇宙的一个均匀面($\tau=$ 常数). 为了表现与暴涨坐标系相应的分层和观者世界线(亦即稳恒态宇宙模型的均匀面和各向同性观者的世界线), 可利用式(J-2-11)和(J-2-3)找出等 $\hat{\tau}$ 线和等 ρ 线在 $\{\tau,\psi\}$ 系中的方程, 结果如图 J-8(b) 所示. 请注意这些线只在"半个"方块内(左上方)有意义(暴涨坐标系只覆盖"半个" de Sitter 时空). 由 $T+W=l\,e^{l^{-1}\hat{\tau}}$ 知 $\hat{\tau}=\infty$ 和 $\hat{\tau}=-\infty$ 分别对应于由顶端的水平直线和 45° 斜直线 $T+W=0$ 所代表的超曲面(依次记作 $\mathscr{I}^+$ 和 $\mathscr{I}^-$), 后者正是暴涨坐标域的边界. 图 J-8(b)也可看作稳恒态宇宙的 Penrose 图.

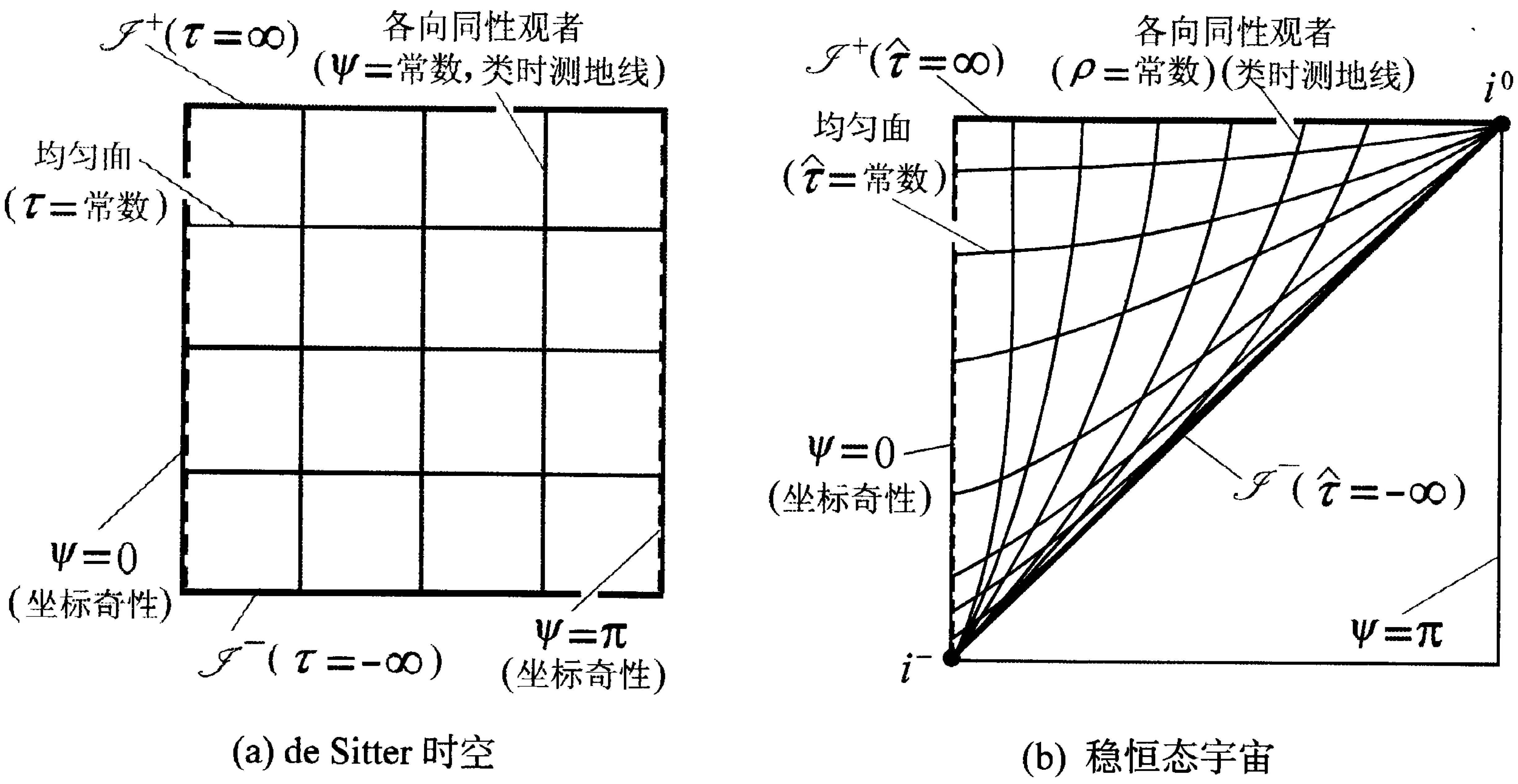


图 J-8 de Sitter 时空和稳恒态宇宙的 Penrose 图

图 J-8 的 Penrose 图便于表现全局坐标系 $\{\tau,\psi,\theta,\varphi\}$ 的等 τ 线和等 ψ 线以及暴涨坐标系 $\{\hat{\tau},x,y,z\}$ (稳恒态宇宙)的等 $\hat{\tau}$ 线和等 ρ 线. 这些等 ψ 线和等 ρ 线都是测地观者(而不是稳态观者)的世界线. 为了便于表现稳态观者的世界线和同时面, 可仿照施瓦西时空的 Kruskal 延拓法从 de Sitter 度规的静态坐标系线元[式(J-2-19)]出发作 Penrose 图. 由于该线元在 $r=l$ 处奇异, r 的取值范围被限制在 $0<r<l$ 或 $l<r<\infty$, 我们以 $0<r<l$ 为出发区进行延拓. 式(J-2-19)的前 2 维可表为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{s}^2 &= -(1-l^{-2}r^2)\,\mathrm{d}t^2+(1-l^{-2}r^2)^{-1}\,\mathrm{d}r^2\\ &=(1-l^{-2}r^2)[-\mathrm{d}t^2+(1-l^{-2}r^2)^{-2}\,\mathrm{d}r^2]=(1-l^{-2}r^2)[-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}r_*^{\,2}],\end{aligned} \tag{J-3-3}$$

其中

$$\mathrm{d}r_* \equiv (1-l^{-2}r^2)^{-1}\,\mathrm{d}r, \tag{J-3-4}$$

可取

$$r_* \equiv (l/2)\ln[(l+r)/(l-r)]. \tag{J-3-5}$$

令

$$v\equiv t+r_*,\quad u\equiv t-r_*,\quad -\infty<v,u<\infty, \tag{J-3-6}$$

则

$$\mathrm{d}\hat{s}^2=-(1-l^{-2}r^2)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u. \tag{J-3-7}$$

为消除 $r=l$ 处的奇性, 只须再引入

$$V\equiv -\mathrm{e}^{-l^{-1}v},\quad U\equiv \mathrm{e}^{l^{-1}u},\quad -\infty<V<0,\quad 0<U<\infty, \tag{J-3-8}$$

从而

$$\mathrm{d}\hat{s}^2=-(l+r)^2\,\mathrm{d}V\mathrm{d}U, \tag{J-3-9}$$

其中 r 应看作坐标 V 和 U 的函数, 由以上坐标变换得

$$r(V,U)=l(1+VU)/(1-VU)\,. \tag{J-3-10}$$

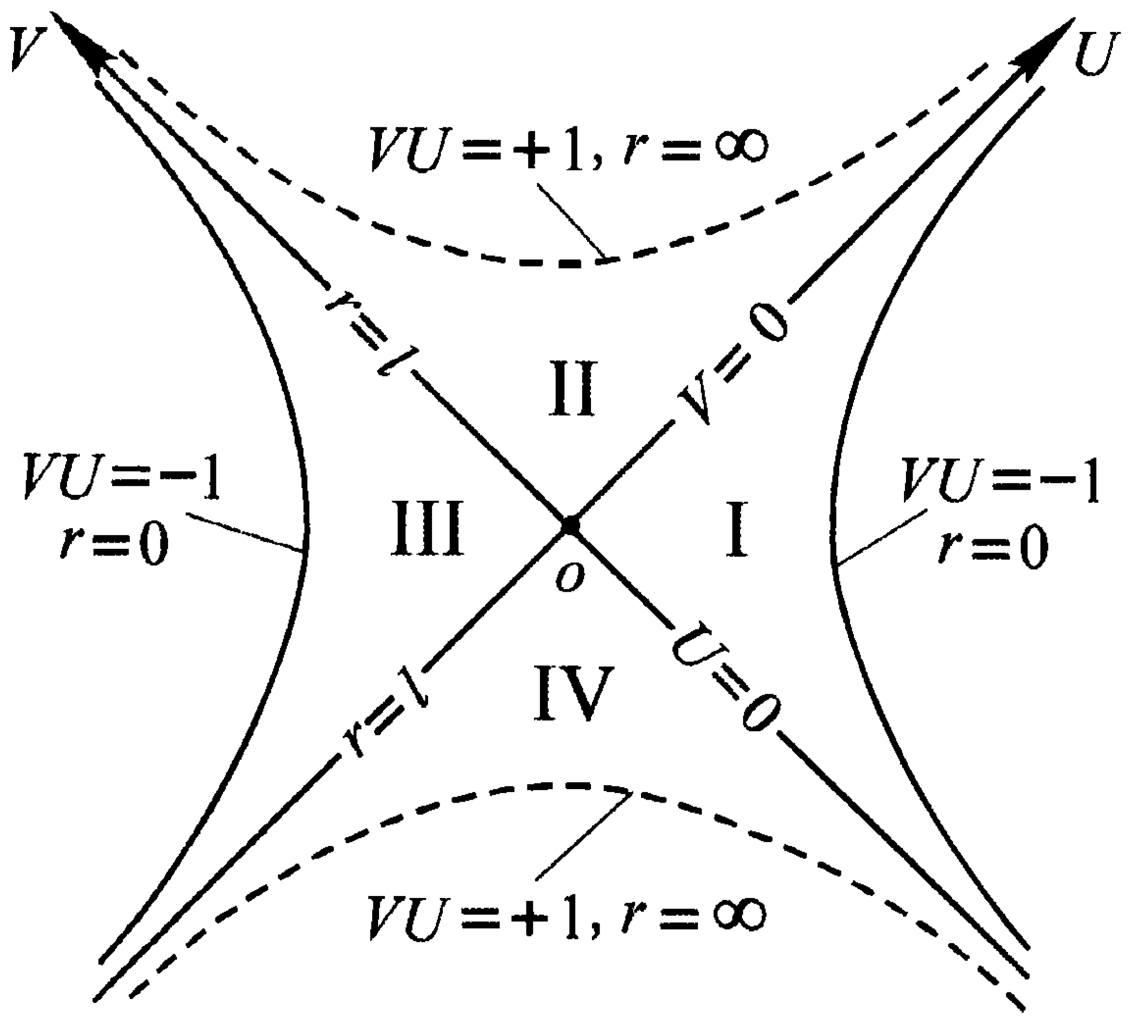


图 J-9　de Sitter 时空中 $t\sim x$ 面的类 Kruskal 图. 45° 斜直线代表类光方向

式(J-3-9)在 $r=l$ 处表现良好, 坐标奇性已被消除, 时空流形可以被延拓至满足 $-\infty<V,U<\infty$ 的任何点. 延拓后的流形包含如下四个区域(图 J-9):

I 区(出发区) $-\infty<V<0,\ 0<U<\infty$;　　II 区 $0<V<\infty,\ 0<U<\infty$;

III 区　$0<V<\infty,\ -\infty<U<0$;　　IV 区 $-\infty<V<0,\ -\infty<U<0$.

坐标 t,r 在 II, III, IV 区尚无定义. 注意到 I 区中坐标 V,U 与 t,r 的关系

$$V=-\mathrm{e}^{-l^{-1}(t+r_*)},\qquad U=\mathrm{e}^{l^{-1}(t-r_*)}, \tag{J-3-11a}$$

便可反过来用 V,U 依以下各式定义其他三区的 t,r 坐标:

II 区 $$V=\mathrm{e}^{-l^{-1}(t+r_*)},\qquad U=\mathrm{e}^{l^{-1}(t-r_*)}, \tag{J-3-11b}$$

III 区 $$V=\mathrm{e}^{-l^{-1}(t+r_*)},\qquad U=-\mathrm{e}^{l^{-1}(t-r_*)}, \tag{J-3-11c}$$

IV 区 $$V=-\mathrm{e}^{-l^{-1}(t+r_*)},\qquad U=-\mathrm{e}^{l^{-1}(t-r_*)}, \tag{J-3-11d}$$

其中 $$r_*\equiv\frac{l}{2}\ln\left|\frac{l+r}{l-r}\right|. \tag{J-3-12}$$

于是 r 在各区的取值范围是 $0<r<l$ (I, III 区), $l<r<\infty$ (II, IV 区), 且式(J-3-10)对各区都成立. 线元(J-3-9)适用于延拓所得的 2 维时空流形, 其相应的 4 维线元是

$$\mathrm{d}s^2=-(l+r)^2\mathrm{d}V\mathrm{d}U+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2),\quad 0<r<\infty\,, \tag{J-3-13}$$

借助于式(J-3-10)又可表为

$$\mathrm{d}s^2=l^2(1-VU)^{-2}[-4\mathrm{d}V\mathrm{d}U+(1+VU)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]\,. \tag{J-3-14}$$

上式也可用 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 系表出, 其结果仍然是式(J-2-19), 不过现在对各区都成立.

$\{t,r,\theta,\varphi\}$ 系的第零坐标基矢 $(\partial/\partial t)^a$ 是 Killing 矢量场, 可用 $\{V,U,\theta,\varphi\}$ 系的坐标基矢表为

$$(\partial/\partial t)^a = l^{-1}[U(\partial/\partial U)^a - V(\partial/\partial V)^a]. \tag{J-3-15}$$

虽然 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 系[因而 $(\partial/\partial t)^a$]在 $V=0$ 和 $U=0$ 这两个类光超曲面上无定义, 但因 $(\partial/\partial V)^a$ 和 $(\partial/\partial U)^a$ 在全时空有定义, 所以 Killing 场

$$\xi^a = l^{-1}[U(\partial/\partial U)^a - V(\partial/\partial V)^a] \tag{J-3-15$'$}$$

在全时空有定义, 而且在 I, II, III, IV 区中都等于 $(\partial/\partial t)^a$. 易见 ξ^a 在 I, III 区类时(在 I 区指向未来而在 III 区指向过去), 在 II, IV 区类空, 在类光超曲面 $V=0$ 及 $U=0$ 上类光. 这个"静态"Killing 矢量场与施瓦西时空的"静态"Killing 场有一重要区别: 施瓦西时空有唯一的"静态"Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$ (至多差一常数因子), 而 de Sitter 时空的等度规群是 10 维的(有最高对称性), "静态"Killing 场 $(\partial/\partial t)^a$ 并不唯一, 取决于球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 的选择. 任一类时测地线都可被选作空间坐标原点 ($r=0$)来定义一个球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$, 从而有该系的一个"静态"Killing 场 $(\partial/\partial t)^a$. 在 I, III 区内该系的空间有 S^3 的拓扑, 空间坐标原点的"对径点"也有 $r=0$.

为绘制 Penrose 图还要进一步引入新的 2 维坐标 ξ 和 χ:

$$V \equiv \tan\left(\frac{\xi-\chi}{2}\right), \qquad U \equiv \tan\left(\frac{\xi+\chi}{2}\right), \tag{J-3-16}$$

ξ, χ 在各区的取值范围由一个仔细的分析给出, 结果如图 J-10 所示, 例如, 对 I 区有 $\chi \in (0, \pi/2)$, $\xi \in (-\chi, \chi)$. 式(J-3-14)现在又可表为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{l^2}{(1-VU)^2\cos^2[(\xi-\chi)/2]\cos^2[(\xi+\chi)/2]}[-\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \cos^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)]. \tag{J-3-17}$$

由式(J-3-16)易得

$$1 - VU = \frac{\cos\xi}{\cos[(\xi-\chi)/2]\cos[(\xi+\chi)/2]}, \tag{J-3-18}$$

再令 $\psi \equiv \pi/2 - \chi$ (因而 $\psi \in [0,\pi]$), 便有

$$\mathrm{d}s^2 = l^2\cos^{-2}\xi[-\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)], \tag{J-3-19}$$

其中的 $l^2\cos^{-2}\xi$ 是光滑函数, 只在共形边界上为无穷, 因而可充当共形因子. 可以验证它等于式(J-3-2)的共形因子 $l^2\mathrm{ch}^2(l^{-1}\tau)$. 图 J-11 是按这种途径求得的 Penrose 图, 此图与图 J-8(a) 实质一样, 只是强调的重点不同. 图 J-11 强调两条对角线把时

空分成 4 区，并画出了 Killing 矢量场 ξ^a [式(J-3-15′)]在各区的不同表现. 在 I 区，$\xi^a=(\partial/\partial t)^a$ 是指向未来的类时 Killing 场，其积分曲线代表静态观者的世界线. 与此不同，图 J-8(a)强调的是类时测地线(各向同性观者的世界线). 图 J-11 中的两条对角线具有事件视界的物理意义，详见下小节.

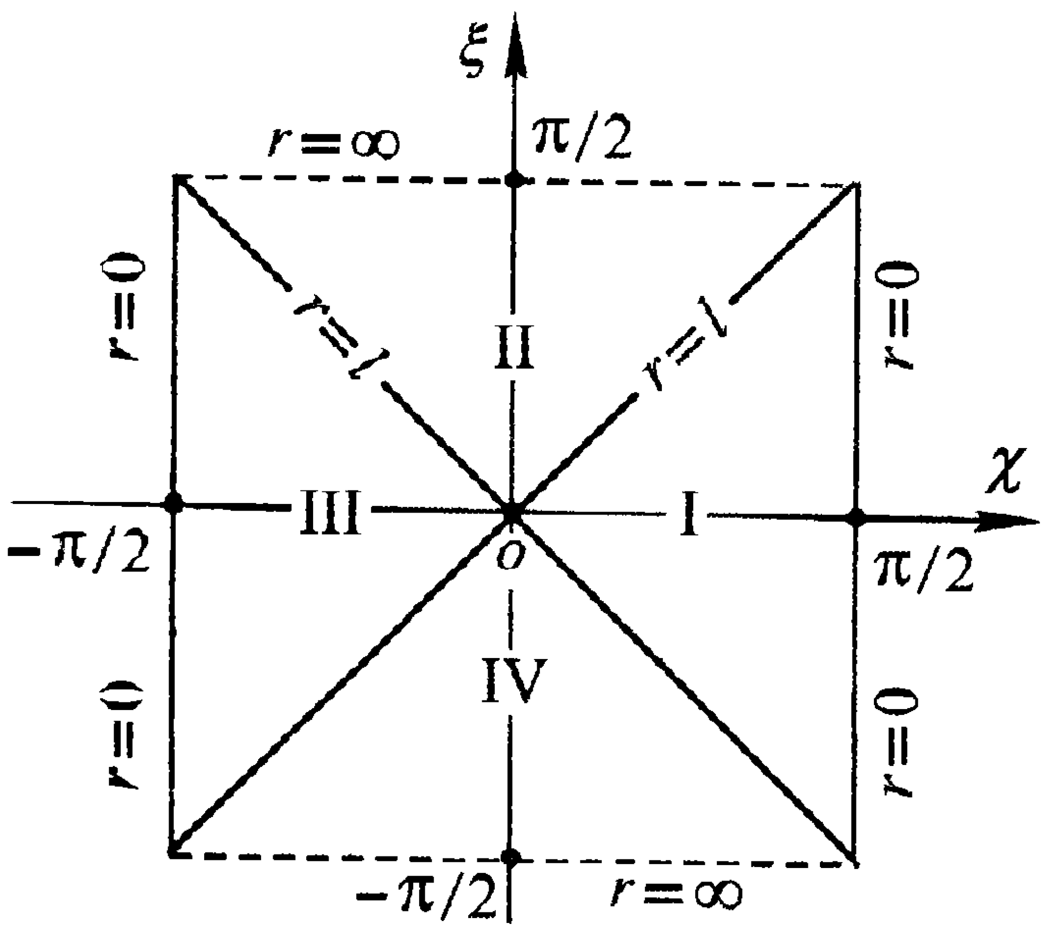


图 J-10 $\{\xi,\chi\}$ 系中的 de Sitter 时空图

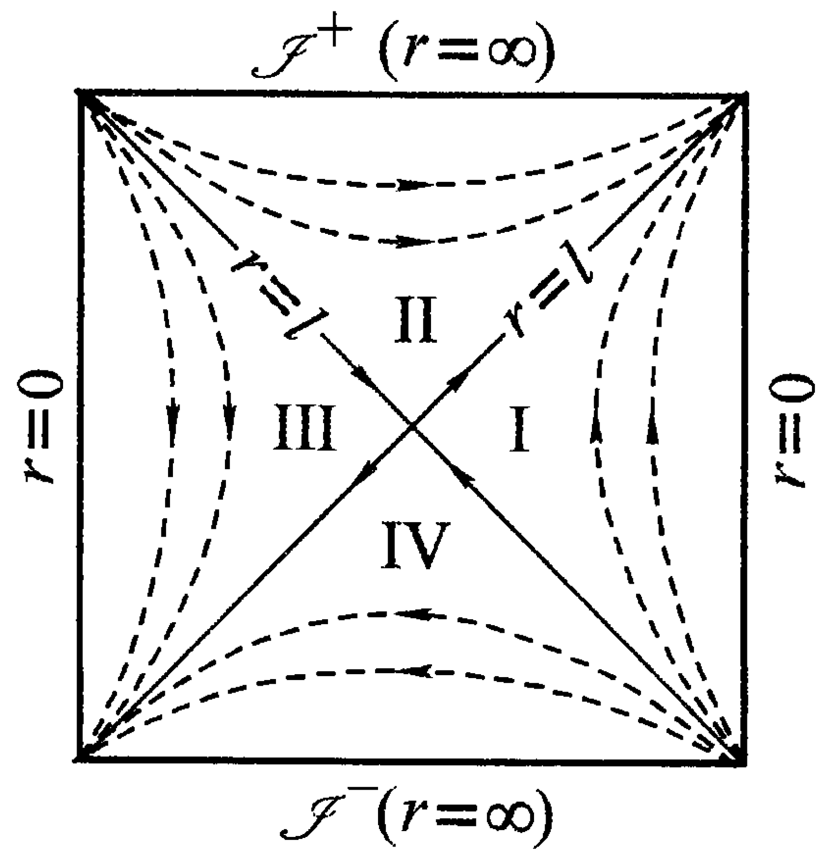


图 J-11 de Sitter 时空的 Penrose 图. 带箭头的曲线(含斜直线)是 Killing 场 ξ^a 的积分曲线. 类空超曲面 $\mathscr{I}^+$($\mathscr{I}^-$) 代表未来(过去)无限远. 两条 $r=0$ 线是所选球坐标系原点及其“对径点”的世界线

在§J.2 中，我们从 $\mathbb{R}^5$ 上的坐标系 $\{T,W,X,Y,Z\}$ 出发在超曲面 M^4 (de Sitter 时空流形)上定义了 4 种坐标系，刚才又从静态坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 出发仿 Kruskal 变换在 M^4 上定义了坐标系 $\{V,U,\theta,\varphi\}$. 其实此系也可从 $\mathbb{R}^5$ 上的 $\{T,W,X,Y,Z\}$ 系直接获得，定义式为

$$T=l(U+V)/(1-VU),\quad W=l(U-V)/(1-VU),$$
$$X=l\frac{1+VU}{1-VU}\sin\theta\cos\varphi,\ Y=l\frac{1+VU}{1-VU}\sin\theta\sin\varphi,\ Z=l\frac{1+VU}{1-VU}\cos\theta. \tag{J-3-20}$$

顺便一提，现在的 I, II, III, IV 区依次对应于图 J-5 的(1), (2), (3), (4)区.

§J.4 再谈事件视界和粒子视界

广义相对论中存在着各种不同的视界概念，本节以 de Sitter 时空为例再次讨论事件视界和粒子视界. 一般地说，事件视界是对观者而言的. 如果所有时空点(事件)能被分成可被观者 G 看见和不可被 G 看见的两个子集，它们的分界面就称为**观者 G 的(未来)事件视界**. 例如，设 G 是 2 维闵氏时空的匀加速观者(称为 **Rindler 观者**，其世界线是类时双曲线)，则图 J-12 中的类光超曲面 H 就是 G 的事件视界. 闵氏时空中以类时测地线为世界线的观者(惯性观者)没有事件视界，因为没有任何事件所发的光信号不能被该观者收到. 然而 de Sitter 时空的任何观者都存在事件视界，这可从它的 Penrose 图[图 J-8(a) 或图 J-11]看出. 该图表明 de Sitter 时空的

$\mathscr{I}^+$ 是类空的，于是任一观者 G 的世界线都与 $\mathscr{I}^+$ 有交. 设 $\tilde{p}$ 是 G 与 $\mathscr{I}^+$ 的交点，则以 $\tilde{p}$ 为未来端点的类光测地线把时空分为两个子集，(其中“外面的”一个由 G 所看不见的事件组成，见图 J-13 的阴影部分，也可参看图 J-7.) 两者的分界面 H 便是 G 的事件视界.① 可见，$\mathscr{I}^+$ 的类空性保证任一观者都有事件视界. 这一结论也适用于其他有类空 $\mathscr{I}^+$ 的时空.

de Sitter 度规在静态坐标系的线元(J-2-19)使人联想到施瓦西线元(J-2-20)，并猜想 $r=l$ 是事件视界. 事实上，正如 Penrose 图 J-11 所表明的，$r=l$ 的确是竖直线 $r=0$ 所代表的静态观者的事件视界，也可说是一族静态观者(含 $r=0$)的共同事件视界，这些观者的世界线是以竖直线 $r=0$ 为一条积分曲线的那个静态 Killing 矢量场 $(\partial/\partial t)^a$ 的积分曲线. 这与施瓦西时空的事件视界[图 9-13(a) 的 $N_{\rm I}^+$]类似，因为 $N_{\rm I}^+$ 是 A 区中所有静态观者(世界线为双曲线的观者)的共同事件视界. 然而两者也有重要区别. $N_{\rm I}^+$ 是施瓦西时空的黑洞区 B 的边界(的一部分)，是由时空的内禀几何完全决定的，(给定施瓦西时空后就有这一与众不同的边界，无须人为指定.) 而 de Sitter 时空的视界 $r=l$ 却取决于静态参考系(观者族)的选择. 关键在于 de Sitter 时空的最高对称性保证存在无限多个静态观者族——任选一条类时测地线作为原点建球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$，该系的第零坐标基矢场 $(\partial/\partial t)^a$ 的积分曲线(在 I 区内)就是一个静态观者族. 可见，与施瓦西时空存在绝对的事件视界不同，de Sitter 时空中静态观者族的事件视界是相对的. 也常把 de Sitter 时空中的这种事件视界称为**宇宙事件视界**(cosmological event horizon)，以区别于黑洞的事件视界.

鉴于事件视界会“隐藏信息”，而信息与熵有密切联系，不难想见事件视界对热力学研究的重要性. 人们早在 20 世纪 70 年代初就开始逐渐认识到黑洞的熵 S 可表为 $S=A/4$ (普朗克单位制)，其中 A 是黑洞视界(指 2 维面)的面积. 后来又证明了上式也适用于宇宙事件视界. 今天可以说 $S=A/4$ 是一个有高度普适性的公式，见选读 16-1-1 前.

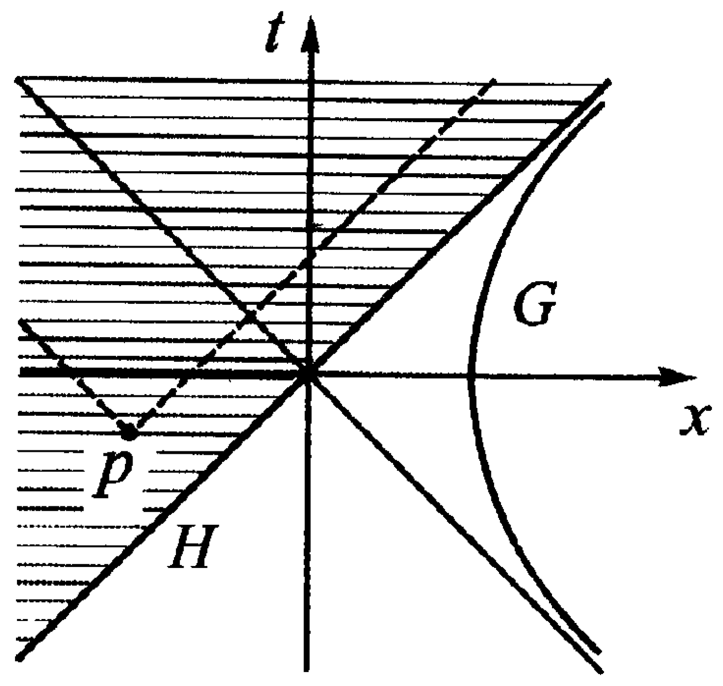


图 J-12　2 维闵氏时空. H 是 Rindler 观者 G 的事件视界，阴影区内任一事件都不能被 G 看见

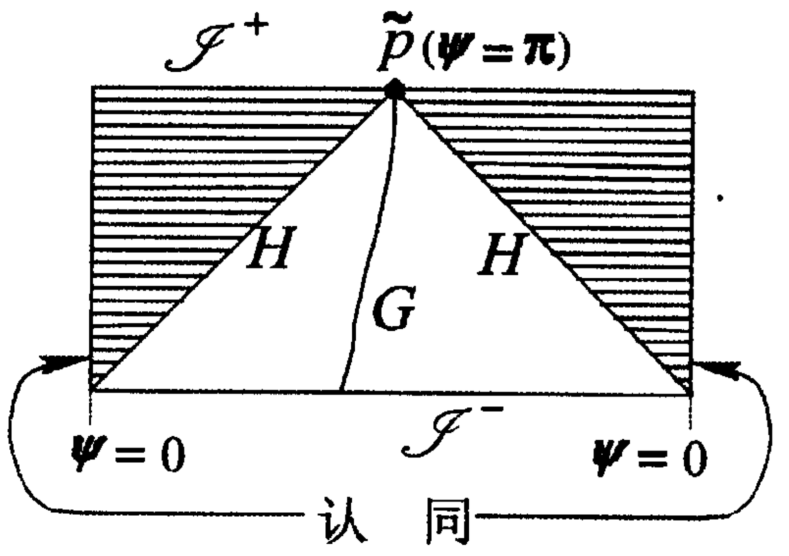
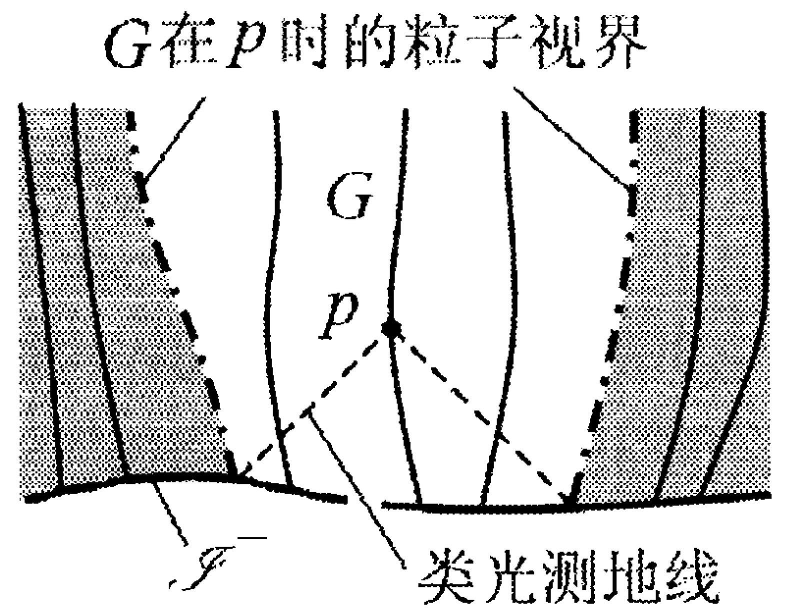


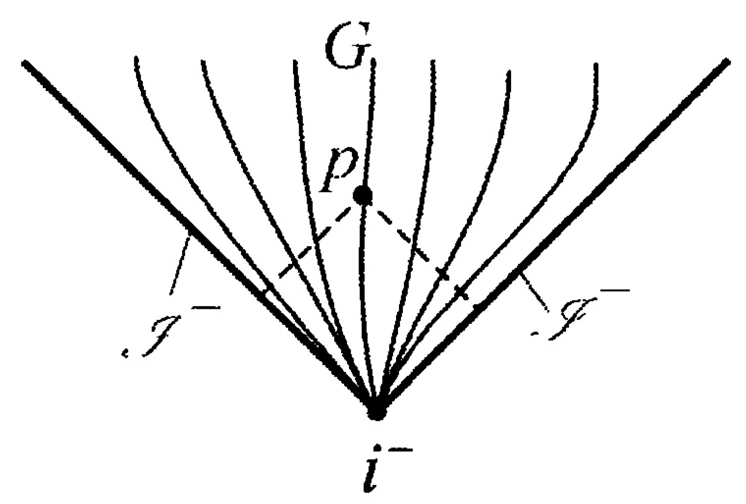
图 J-13　由于 $\mathscr{I}^+$ 类空，de Sitter 时空的任一观者 G 都有事件视界(阴影区内任一事件都不能被 G 看见). 仅为方便起见选 $\psi(\tilde{p})=\pi$

① 用第 11 章的语言来讲，$I^-(\tilde{p})=I^-(G)$ 的边界面 $\dot{I}^-(\tilde{p})$ 就是 G 的事件视界. $\mathscr{I}^+$ 的类空性保证 $M-I^-(\tilde{p})\neq\varnothing$，所以存在事件视界.

再来简述粒子视界. 小节10.4.1已就RW时空介绍了粒子视界的概念和公式. 在推广至一般时空时, 最好遵从如下三步: ①选定一个自由下落观者族(类时测地线汇), 亦称粒子族; (例如, 小节10.4.1默默地选定了RW时空的各向同性观者族.) ②指定族内的一个观者 G 及其世界线上的一点 p; ③关心如下问题: 族内哪些粒子能被 G 在时刻 p 看见而哪些不能? 只要存在不能被 G 在时刻 p 看见的粒子, 就说存在粒子视界. 在4维语言中, 能被和不能被看见的粒子组成的两大子集的交界面称为**观者 G 在时刻 p 的粒子视界**. (小节10.4.1中的粒子视界概念是用3维语言陈述的, 由于早已用均匀面对时空作了分层, 3维语言也是清晰的.) 由图J-14看出, 只要时空的 $\mathscr{I}^-$ 是类空超曲面(de Sitter时空就是一例), 就必定存在粒子视界. 如果 $\mathscr{I}^-$ 类光(图J-15), 粒子视界就不存在.



图J-14 $\mathscr{I}^-$ 为类空的时空. 细曲线代表类时测地线. 粗点划线代表的3维面就是观者 G 在时刻 p 的粒子视界



图J-15 $\mathscr{I}^-$ 为类光的时空. 类时测地线族内的任一观者 G 在任一时刻 p 都没有粒子视界

§J.5 施瓦西-德西特时空

de Sitter度规是 $\Lambda>0$ 的真空爱因斯坦方程的最高对称解. 把对称性减弱为只有静态球对称性并允许 Λ 取任意实数值(包括 $\Lambda>0, \Lambda=0, \Lambda<0$)将给出另一重要解. 对静态球对称度规总可选择适当坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 把线元表为式(8-3-2)那样的简单形式:

$$ds^2=-e^{2A(r)}dt^2+e^{2B(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{J-5-1}$$

仿照小节8.3.2对无 Λ 项的真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=0$ (等价于 $R_{ab}=0$)的求解过程(其解为施瓦西线元)求解 $\Lambda\neq 0$ 的真空爱因斯坦方程 $G_{ab}+\Lambda g_{ab}=0$ (等价于 $R_{ab}=\Lambda g_{ab}$), 易得

$$e^{2A(r)}=e^{-2B(r)}=1-(2M/r)-\Lambda r^2/3,$$

其中 M 为积分常数. 代入式(J-5-1)便得

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

$$0<r<\infty. \tag{J-5-2}$$

在$\Lambda>0$时令$l\equiv(3/\Lambda)^{1/2}$，则上式可改写为

$$ds^2=-(1-\frac{2M}{r}-\frac{r^2}{l^2})dt^2+(1-\frac{2M}{r}-\frac{r^2}{l^2})^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{J-5-3}$$
$$0<r<\infty.$$

虽然M(作为积分常数)也可为负，但我们(出于物理考虑)只讨论$M\geqslant 0$的情形. de Sitter线元(J-2-19)是上式在$M=0$时的特例. 上式在$r\to\infty$时趋于de Sitter线元，所以是渐近 de Sitter 解而非渐近平直解，称为**施瓦西-德西特度规**(Schwarzschild-de Sitter metric). 这一线元在

$$r=0 \quad 及 \quad 1-\frac{2M}{r}-\frac{r^2}{l^2}=0$$

处呈现奇性，前者是时空奇性(真奇性)，后者只是坐标奇性，而且事实上还是事件视界所在处(见稍后). 为了确定视界位置，注意到r的范围是$0<r<\infty$，应该寻求与方程$1-2Mr^{-1}-l^{-2}r^2=0$对应的3次代数方程

$$r^3-l^2r+2Ml^2=0 \tag{J-5-4}$$

的所有正(实)根. 令$f(r)\equiv r^3-l^2r+2Ml^2$，由$df/dr=3r^2-l^2$可知$f(r)$在$r>0$的区间内只有一个极值点，即$r_1\equiv l/\sqrt{3}>0$，而$d^2f/dr^2|_{r=r_1}=6r_1>0$则表明

$$f(r_1)=2l^2(M-l/3\sqrt{3})$$

是极小值. 函数$f(r)$的曲线随M的增加而向上平移，当$M=l/3\sqrt{3}$(临界情况)时$f(r_1)=0$，曲线与r轴正半轴相切，$f(r)$有一个正根；当$M>l/3\sqrt{3}$时曲线与r轴正半轴无交，$f(r)$无正根，当$0<M<l/3\sqrt{3}$时曲线与r轴正半轴交于两点，$f(r)$有两个正根，两者之差随M的增加而减小，当M增至$l/3\sqrt{3}$时合而为一. 由卡尔丹公式(见数学手册)并用适当技巧(见选读J-5-1)可求得这两个正根为

$$r_+=(2l/\sqrt{3})\cos(\alpha/3),\quad r_{++}=(2l/\sqrt{3})\cos[(\alpha+4\pi)/3],\quad 0<r_+<r_{++}, \tag{J-5-5}$$

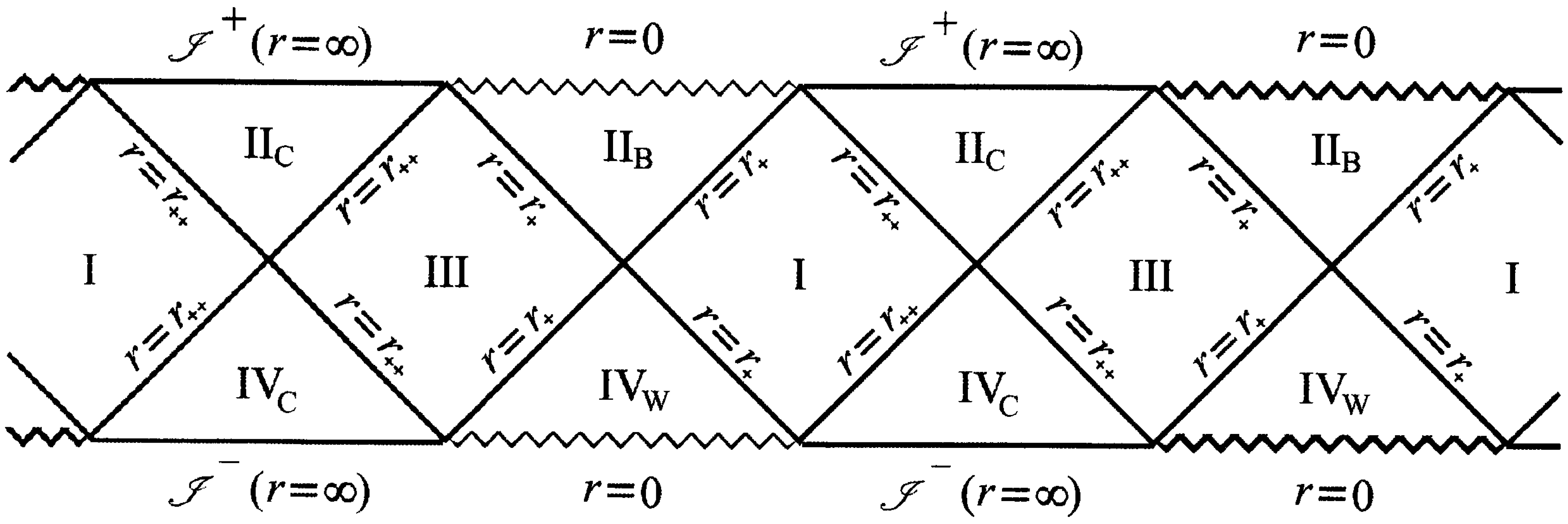
其中α由下式定义：

$$\cos\alpha=-3\sqrt{3}\,l^{-1}M,\qquad \alpha\in(\pi,3\pi/2).^{①} \tag{J-5-6}$$

为了证明线元(J-5-3)在r_{++}和r_+的奇性只是坐标奇性(而且是事件视界)，可以

① $\alpha\in(\pi/2,3\pi/2)$能保证$r_+>0$及$r_{++}>0$，但把范围缩窄为$\alpha\in(\pi,3\pi/2)$可保证α值由M唯一决定，且$r_{++}>r_+$.

引入类Kruskal坐标并对时空进行延拓, 最大延拓的Schwarzschild-de Sitter时空的Penrose图由一个冗长的计算(略)给出(图J-16). 图中包括由 $r=0$ 代表的时空奇性和由 $r=\infty$ 代表的(类空的)无限远($\mathscr{I}^{\pm}$)所构成的无限序列. 相应地就有由I, II, III, IV标明的四个区的无限序列. Killing矢量场 $(\partial/\partial t)^a$ 在I, III区中类时(在I区指向未来而在III区指向过去), 在II, IV区中类空. 无限多个II区又分为 $\mathrm{II_B}$ 和 $\mathrm{II_C}$ 两类, 每个 $\mathrm{II_B}$ 区可解释为一个黑洞区, 其类光边界(两条标明 $r=r_+$ 的45°斜直线代表的类光超曲面)可解释为相应的I(或III)区中所有静态观者的共同未来事件视界, 称为**黑洞事件视界**; 每个 $\mathrm{II_C}$ 区是这样一个时空区, 其类光边界($r=r_{++}$)也可解释为相应的I(或IV)区中所有静态观者的共同未来事件视界, 称为**宇宙事件视界**. 通常说施瓦西解代表渐近平直时空中的一个黑洞, 类似地也可说施瓦西-德西特解代表渐近德西特时空中的一个黑洞. 这一时空中两类事件视界的共同存在给黑洞热力学和弯曲时空量子场论带来若干有挑战性的问题.



图J-16　Schwarzschild-de Sitter最大延拓时空的Penrose图

[选读J-5-1]

现在介绍代数方程(J-5-4)的正根的求法. 仅仅出于简化公式的考虑, 我们只讨论 $l=1$ 的情况(实质上是对该方程作量纲归一化), 这时方程简化为

$$r^3-r+2M=0. \tag{J-5-7}$$

与标准形式 $r^3+pr+q=0$ 对比得 $p=-1,\ q=2M$, 由卡尔丹公式知其三根为

$$r_1=a+b,\quad r_2=[-(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(a-b)]/2,\quad r_3=[-(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(a-b)]/2, \tag{J-5-8}$$

其中

$$\begin{gathered}a\equiv[-(q/2)+\sqrt{\lambda}]^{1/3}=(-M+\sqrt{\lambda})^{1/3},\qquad b\equiv[-(q/2)-\sqrt{\lambda}]^{1/3}=(-M-\sqrt{\lambda})^{1/3},\\ \lambda\equiv(q/2)^2+(p/3)^3=M^2-1/27.\end{gathered} \tag{J-5-9}$$

若 $\lambda>0$, 则 $a=\left(-M+\sqrt{M^2-1/27}\right)^{1/3}$ 及 $b=\left(-M-\sqrt{M^2-1/27}\right)^{1/3}$ 都为负数, 导致①r_2, r_3 为共轭复数, 应舍去; ②$r_1=a+b<0$, 亦应舍去. 可见, 当 $\lambda>0$ 时方程

(J-5-7)无正根. 再看 $\lambda \leqslant 0$ 的情况. 在三角公式

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) \tag{J-5-10}$$

中令

$$\cos\alpha = -3\sqrt{3}\, M, \quad r' \equiv \cos(\alpha/3), \tag{J-5-11}$$

则

$$r'^3 - (3/4)\, r' + (3\sqrt{3}/4)\, M = 0, \tag{J-5-12}$$

与式(J-5-7)对比易见其三根为 $r_i' = (\sqrt{3}/2)\, r_i$, $i = 1,2,3$, 故欲求 r_i 只须求 r_i', 即只须求取方程(J-5-12)的正根. $r' \equiv \cos(\alpha/3)$ 表明 $\cos(\alpha/3)$ 是一个根, 记作 r_3', 即

$$r_3' = \cos(\alpha/3). \tag{J-5-13}$$

注意到方程(J-5-12)来自式(J-5-10), 而后者左边的 $\cos\alpha$ 又可改写为

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 4\pi) = 4\cos^3[(\alpha + 4\pi)/3] - 3\cos[(\alpha + 4\pi)/3], \tag{J-5-14}$$

便可看出

$$r_2' = \cos[(\alpha + 4\pi)/3] \tag{J-5-15}$$

也是方程(J-5-12)的根. 为保证 $r_2' > r_3' > 0$, α 值应限于 $(\pi, 3\pi/2)$. 另一方面, 式(J-5-8)导致 $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, 即 $r_1' + r_2' + r_3' = 0$, 故 $r_1' = -(r_2' + r_3')$ 在 $r_2' > 0$ 及 $r_3' > 0$ 时为负, 应舍去. 由此便得正文中关于方程(J-5-4)的正实根的结论. **[选读 J-5-1 完]**

§J.6 反德西特时空

$R < 0$ 的4维洛伦兹常曲率度规称为**反德西特**(anti-de Sitter)**度规**, 可用下法方便地求得. 以 $(\mathbb{R}^5, \tilde{\eta}_{ab})$ 代表这样一个5维空间, 其中 $\tilde{\eta}_{ab}$ 是平直度规, 但号差为 +1 [即 $(-,-,+,+,+)$, 既非欧氏又非闵氏], 在适当坐标系 $\{T, W, X, Y, Z\}$ 下的线元为

$$ds^2 = -dT^2 - dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \tag{J-6-1}$$

设 $l > 0$ 为任一实常数, 则方程

$$-T^2 - W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -l^2 \tag{J-6-2}$$

定义了 $(\mathbb{R}^5, \tilde{\eta}_{ab})$ 中的一个(4维)超曲面 M^{4*}. 以 g^*_{ab} 代表由 $\tilde{\eta}_{ab}$ 在 M^{4*} 上的诱导度规, 借助于下面将要引入的坐标系不难证明其黎曼张量满足式(J-1-1)(其中 $K = -l^{-2}$), 因而 g^*_{ab} 是常曲率度规, 而且是 $\Lambda = -3l^{-2}$ 的真空爱因斯坦方程的解. (M^{4*}, g^*_{ab}) 称为**反德西特时空**, 简称 AdS 时空. 任意指定实数 X_1, Y_1, Z_1 作为式(J-6-2)的 X, Y, Z, 则该式给出

$$T^2+W^2=l^2+X_1{}^2+Y_1{}^2+Z_1{}^2>0,$$

这是由 $X=X_1, Y=Y_1, Z=Z_1$ 定义的2维平面上的圆方程, 可见这平面与 M^{4*} 之交是一个 S^1. 注意到 X, Y, Z 可取任意实数, 便知AdS时空的拓扑是 $\mathbb{R}^3\times S^1$.

为了具体表出AdS度规, 可在 M^{4*} 上引入坐标系. 下面介绍三种.

1. 静态球对称坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$, $0<t<2\pi l,\ 0<r<\infty,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$, 定义为

$$\begin{gathered}T=(l^2+r^2)^{1/2}\sin(l^{-1}t),\qquad W=(l^2+r^2)^{1/2}\cos(l^{-1}t),\\ X=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ Y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ Z=r\cos\theta.\end{gathered}\tag{J-6-3}$$

容易验证上式满足超曲面方程(J-6-2), 微分后代入式(J-6-1)便得4维诱导线元

$$(\mathrm{d}s^*)^2=-(1+l^{-2}r^2)\mathrm{d}t^2+(1+l^{-2}r^2)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2),\tag{J-6-4}$$

此即AdS度规在静态系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$ 的线元式. 除坐标奇点外, 此坐标系覆盖整个AdS时空 (M^{4*}, g^*_{ab}). 对比式(J-6-4)与(J-2-19)可知, 只要用 $-l^{-2}$ 代替式(J-2-19)的 l^{-2} 便可得出线元(J-6-4), 可见AdS度规的 $K=-l^{-2}$.

2. 坐标系 $\{\hat{t},\chi,\theta,\varphi\}$, $0<\hat{t}<2\pi l,\ 0<\chi<\infty,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$, 定义为

$$\begin{gathered}T=l\sin(l^{-1}\hat{t}),\quad X=l\cos(l^{-1}\hat{t})\,\mathrm{sh}\chi\sin\theta\cos\varphi,\quad Y=l\cos(l^{-1}\hat{t})\,\mathrm{sh}\chi\sin\theta\sin\varphi,\\ Z=l\cos(l^{-1}\hat{t})\,\mathrm{sh}\chi\cos\theta,\quad W=l\cos(l^{-1}\hat{t})\,\mathrm{ch}\chi.\end{gathered}\tag{J-6-5}$$

微分后代入式(J-6-1)给出4维诱导线元

$$(\mathrm{d}s^*)^2=-\mathrm{d}\hat{t}^2+l^2\cos^2(l^{-1}\hat{t})[\mathrm{d}\chi^2+\mathrm{sh}^2\chi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)],\tag{J-6-6}$$

在 $l^{-1}\hat{t}=\pm\pi/2$ 处存在坐标奇性. 后面还将证明这一坐标系只覆盖AdS时空的一部分. 式(J-6-6)表明这一时空区域可看作 $k=-1$ 的RW宇宙. 作为该宇宙的各向同性观者的世界线, $\hat{t}$ 坐标线自然是类时测地线[见式(10-2-5)后的结论].

3. 坐标系 $\{\tilde{t},\psi,\theta,\varphi\}$, $0<\tilde{t}<2\pi l,\ 0<\psi<\infty,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$, 定义为

$$\begin{gathered}T=l\sin(l^{-1}\tilde{t})\,\mathrm{ch}\psi,\qquad W=l\cos(l^{-1}\tilde{t})\,\mathrm{ch}\psi,\\ X=l\,\mathrm{sh}\psi\sin\theta\cos\varphi,\ Y=l\,\mathrm{sh}\psi\sin\theta\sin\varphi,\ Z=l\,\mathrm{sh}\psi\cos\theta,\ 0<\psi<\infty.\end{gathered}\tag{J-6-7}$$

微分后代入式(J-6-1)给出4维诱导线元

$$(\mathrm{d}s^*)^2=-\mathrm{ch}^2\psi\,\mathrm{d}\tilde{t}^2+l^2[\mathrm{d}\psi^2+\mathrm{sh}^2\psi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)].\tag{J-6-8}$$

这一坐标系可覆盖整个AdS时空.

为形象起见仍压缩 X, Y 维, 所得的2维AdS时空记作 (M^{2*}, g^*_{ab}). 这时式(J-6-3)简化为

$$T=(l^2+r^2)^{1/2}\sin(l^{-1}t),\quad W=(l^2+r^2)^{1/2}\cos(l^{-1}t),\quad Z=\pm r\,. \qquad \text{(J-6-3}')$$

与 2 维 de Sitter 时空 (M^2, g_{ab}) 对比，发现 (M^{2*}, g^*_{ab}) 有一个奇怪性质. 流形 M^2 和 M^{2*} 可看作 $\mathbb{R}^3$ 中分别由

$$\text{(a) } T^2+W^2-Z^2=l^2 \quad \text{和} \quad \text{(b) } -T^2+W^2+Z^2=l^2 \qquad \text{(J-6-9)}$$

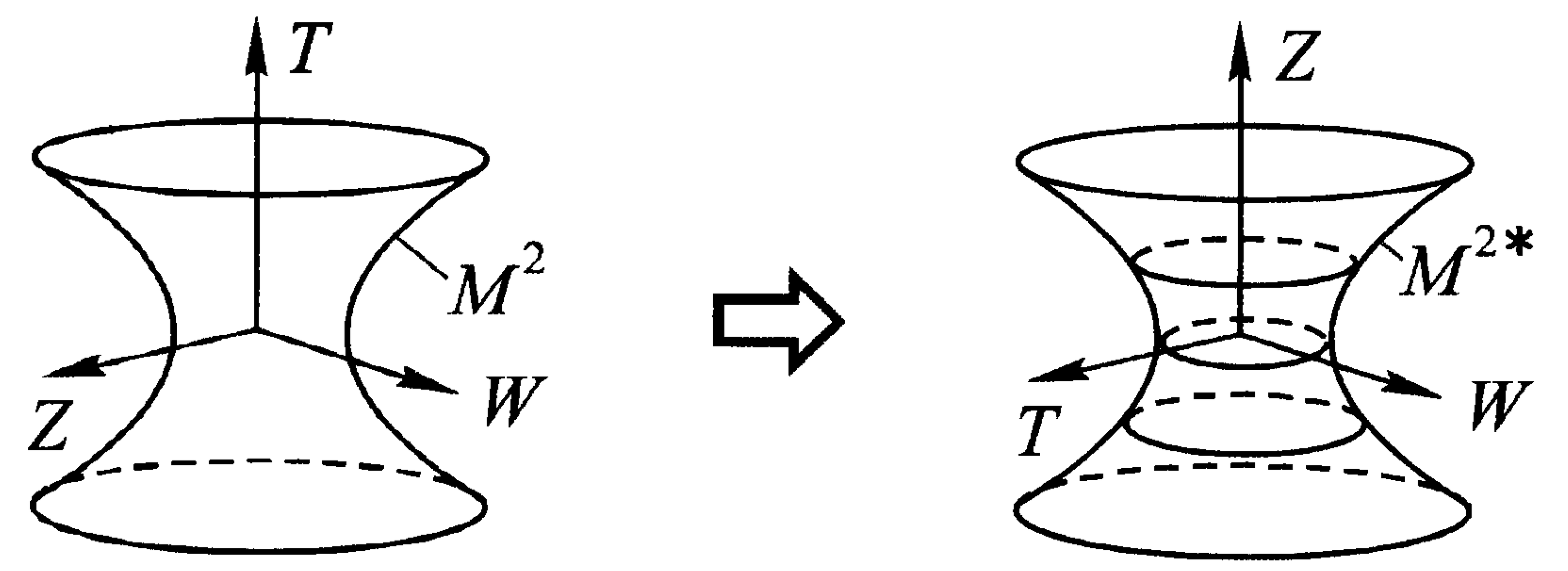


图 J-17　左图的 T，Z 互换得右图. 水平圆周是 (M^{4*}, g^*_{ab}) 的闭合类时线

定义的超曲面. 把上式(a)中的 T, Z 互换便得(b)，所以把图 J-6 的 T, Z 轴互换便得图 J-17 的右图，其中的旋转双曲面可代表 M^{2*}，配以 g^*_{ab} 就成为 2 维 AdS 时空. 由式(J-6-9b)可知任一 $Z=\pm r=$ 常数 的平面与 M^{2*} 之交都是由 $T^2+W^2=l^2+r^2$ 定义的水平圆周(图 J-17 右)，而且式(J-6-3′)的前二式表明这些圆周可用 t 为参数，圆周上的动点每当 t 值增加 $2\pi l$ 后回到原位. 但式(J-6-4)表明 t 是类时坐标，可见这些圆周(t 坐标线)都是闭合类时线.

为了研究无限远行为(以获得 Penrose 图)，定义新坐标 t', ψ' 如下：

$$t'\equiv l^{-1}\tilde{t},\quad \psi'\equiv\arctan(\text{sh}\,\psi),\quad (0<\psi'<\pi/2) \qquad \text{(J-6-10)}$$

其中的 $t'\equiv l^{-1}\tilde{t}$ 无非是对 $\tilde{t}$ 无量纲化. 由式(J-6-10)易得

$$\text{d}\psi'=\text{d}\psi/\text{ch}\,\psi,\quad \text{ch}\,\psi\cos\psi'=1,\quad \text{sh}\,\psi=\text{ch}\,\psi\sin\psi'\,, \qquad \text{(J-6-11)}$$

故式(J-6-8)成为

$$(\text{d}s^*)^2=l^2\text{ch}^2\psi\,[-\text{d}t'^2+\text{d}\psi'^2+\sin^2\psi'(\text{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\text{d}\varphi^2)]\,. \qquad \text{(J-6-12)}$$

可见 AdS 度规共形于爱因斯坦静态度规. 度规虽然互相共形，但两时空却有不同拓扑：爱因斯坦宇宙的拓扑为 $\mathbb{R}$(时间)$\times S^3$(空间)，而 AdS 时空的拓扑为 S^1(时间)$\times\mathbb{R}^3$(空间). 在压缩两维空间后分别成为 $\mathbb{R}$(时间)$\times S^1$(空间)和 S^1(时间)$\times\mathbb{R}$(空间). 因为 AdS 时空的空间坐标 ψ' 满足 $0<\psi'<\pi/2$，所以代表爱因斯坦宇宙的圆柱面上的每个横截圆周(以 ψ' 为坐标)只有一半(半圆)代表 AdS 时空在某时刻 t' 的空间. 另一方面，因为 t' 在每增加 2π 后 T, W, Z 值都复原，所以同一 t' 坐标线上 t' 值相差为 2π 的两点代表同一时空点，由此可得 AdS 时空的 Penrose 图(图 J-18 左)，其中带双箭头的上下两条水平直线要认同，这正是 AdS 时空存在闭合类时线的根源. 鉴于

闭合类时线会带来因果疑难(见§11.3), 通常取消这一认同, 即把代表时间的那个 S^1 剪开(使成 $\mathbb{R}$), 更准确地说就是用 S^1 的泛覆盖流形(定义见选读 J-6-2) $\mathbb{R}$代替 S^1,

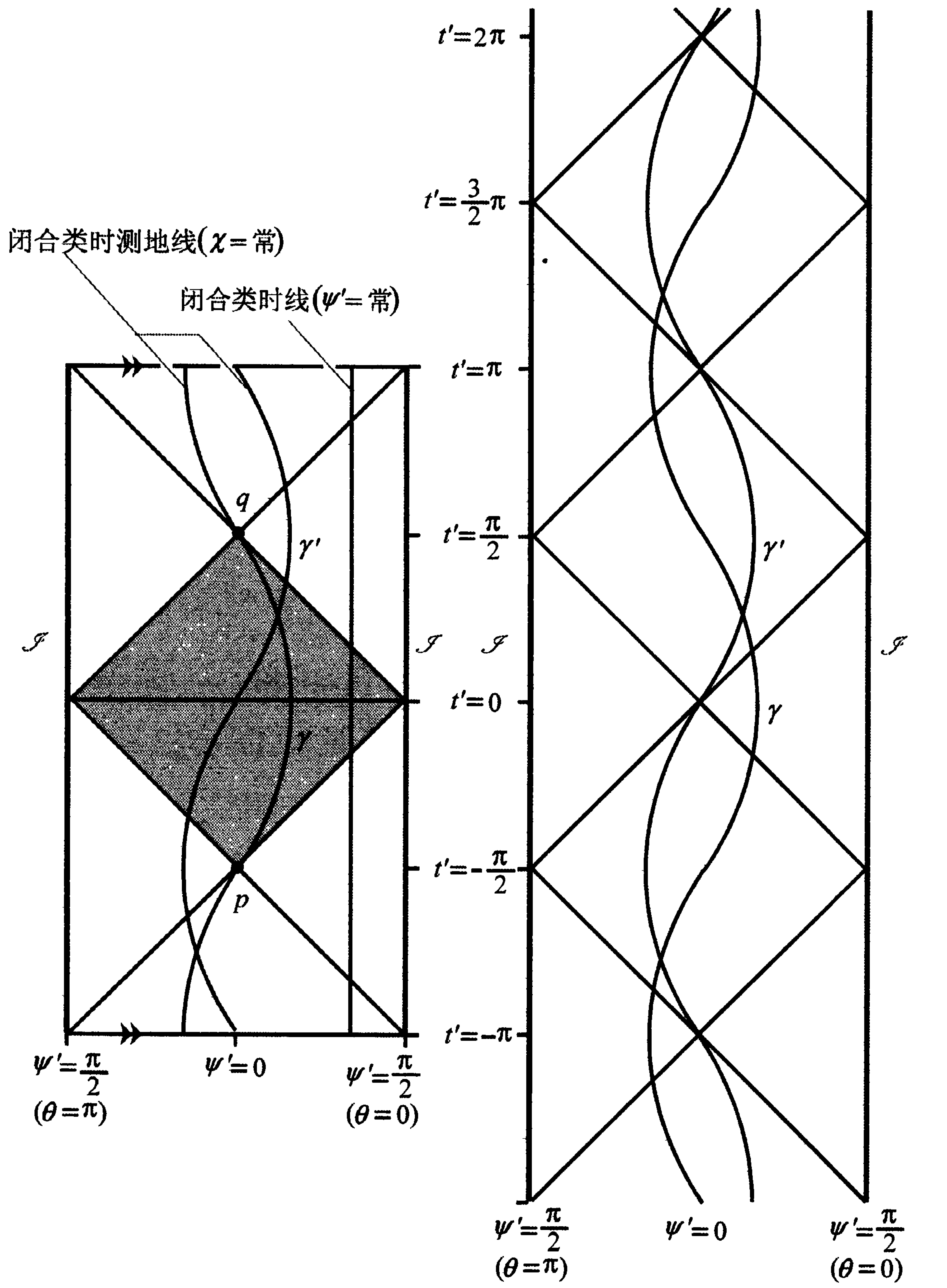


图 J-18　AdS 时空(左)和 CAdS 时空(右)的 Penrose 图. 左图标有双箭头的两条水平直线要认同. γ 和 γ' 是两条类时测地线(γ' 是 γ 的时间平移)

于是4维 AdS 时空 (M^{4*}, g^*_{ab}) 的流形从 $M^{4*}=\mathbb{R}^3\times S^1$ 变为 $\mathbb{R}^4$, 所得时空 $(\mathbb{R}^4, g^*_{ab})$ 通常记作 CAdS (其中 C 代表 Covering, 即覆盖). 图 J-18 右图就是 CAdS 时空的 Penrose 图, 图 J-19 则是图 J-18 的"立体化". 取消认同的后果是剪断了所有闭合类时线, 包括 $t, \hat{t}, t'$ (即 $\tilde{t}$) 坐标线. (图 J-18 的竖直线代表 t' 坐标线, γ 和 γ' 代表两条 $\hat{t}$ 坐标线.)

下面再讨论坐标系 $\{\hat{t},\chi,\theta,\varphi\}$ 的覆盖范围. 在 $l=1$ 及 $X=Y=0$ 情况下式(J-6-5)及(J-6-7)分别简化为[后者要用到式(J-6-11)]

$$T=\sin\hat{t},\quad W=\cos\hat{t}\ \mathrm{ch}\chi,\quad Z=\pm\cos\hat{t}\ \mathrm{sh}\chi\,, \tag{J-6-5'}$$

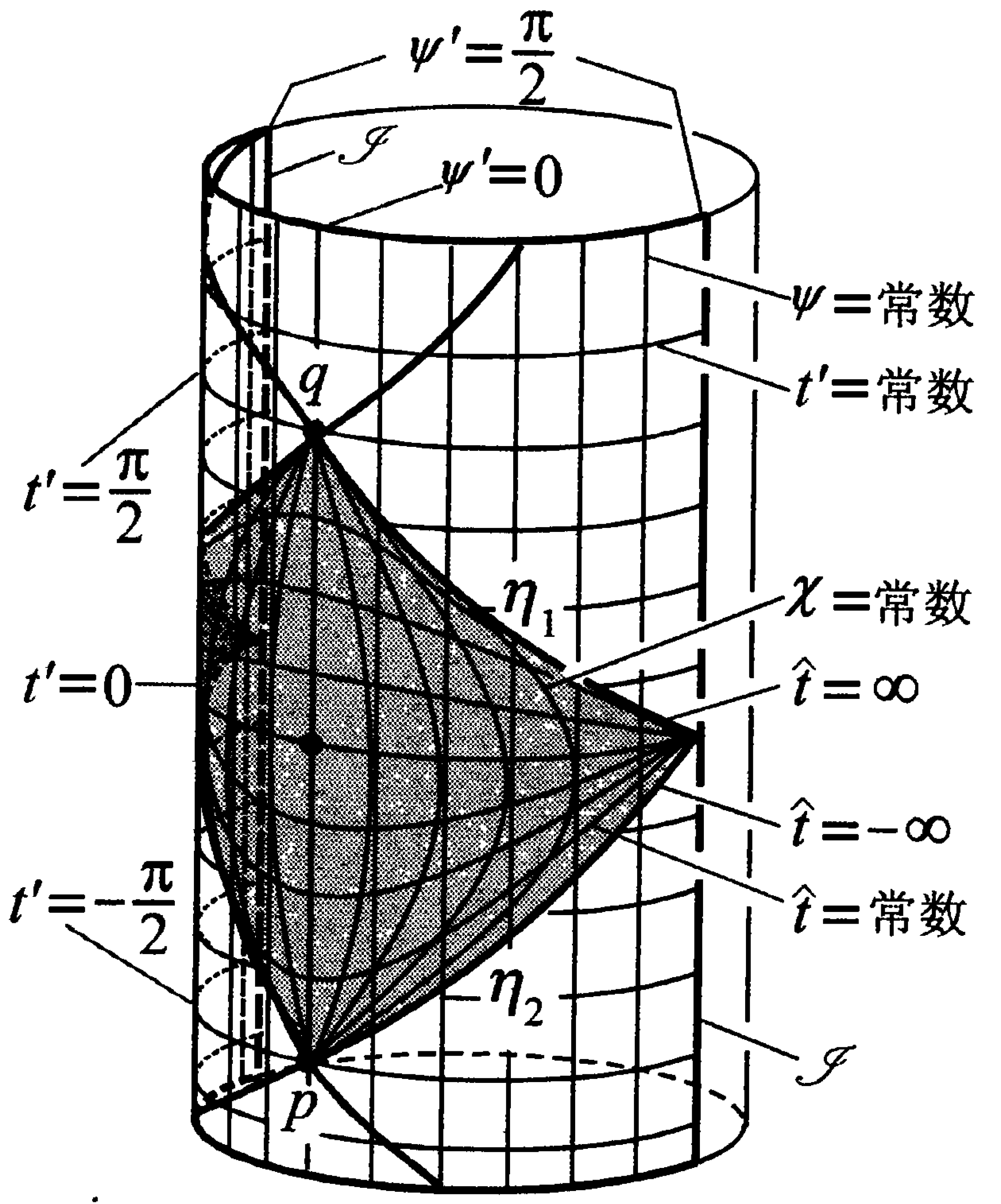


图 J-19 CAdS时空共形于半个爱因斯坦静态宇宙，其边界是标有 $\mathscr{I}$ 的两条竖直粗线(其实是连通流形 $\mathbb{R}\times S^2$). 坐标系 $\{t',\psi,\theta,\varphi\}$ 覆盖整个时空，而 $\{\hat{t},\chi,\theta,\varphi\}$ 只覆盖部分时空，其坐标域是某个钻石形(阴影区). 类时测地线(χ 为常数)与等 $\hat{t}$ 面正交，它们汇聚于 p,q 点后再散开进入相邻钻石形

及

$$T=\sin t'\sec\psi',\quad W=\cos t'\sec\psi',\quad Z=\pm\tan\psi', \tag{J-6-7'}$$

故有 $\cos\hat{t}\,\mathrm{ch}\chi=\cos t'\sec\psi'$, $\cos\hat{t}\,\mathrm{sh}\chi=\tan\psi'$, 两式相除得

$$\sin\psi'=\mathrm{th}\chi\cos t'. \tag{J-6-13}$$

上式在 χ 为常数时代表一条等 χ 线(类时测地线, 例如图 J-18 中的 γ 或 γ'), 当该线的参数 t' 增至 $\pi/2$ 时

$$\sin\psi'=\mathrm{th}\chi\cos\frac{\pi}{2}=0, \tag{J-6-14}$$

故 $\psi'=0$. 可见所有指向未来的等 χ 线都汇聚于图 J-18 和图 J-19 中的 q 点, 同理可证它们都发自 p 点. 当 $\chi=0$ 时式(J-6-13)给出 $\psi'=0$, 这就是图中从 p 到 q 的竖直线. 随着 χ 的增大, 类时测地线虽然两端仍在 p,q , 但中部向两侧外移, 直至如下极限情况: 当 $\chi=\infty$ 时 $\mathrm{th}\chi=1$, 式(J-6-13)成为 $\sin\psi'=\cos t'$, 所以线上的坐标 t',ψ' 有 $t'=\psi'\pm\pi/2$ 的关系. 注意到在 $\{t',\psi'\}$ 系中 45° 斜直线代表类光方向, 便可知道 $t'=\psi'\pm\pi/2$ 代表类光测地线, 即图中的 η_1 和 η_2 . 这 η_1,η_2 以及相应的类光测地线 η_3,η_4 (图中未标出)围成一个 2 维时空区域 Ω (有阴影的钻石形). 不难证明, $\forall a\in\Omega$ 总有一条从 p 到 q 的类时测地线经过 a 点; 而只要从 Ω 的边界(例如 η_1)上的任一点向 Ω 外移出一点点, 则其 $\mathrm{th}\chi$ 必大于1, 因此不存在相应的 χ 值. 可见 Ω 就是 $\{\hat{t},\chi\}$ 系的一个最大坐标域.

[选读 J-6-1]

虽然近年来的天文观测表明我们的宇宙有一个小的、正的宇宙常数Λ, 但超引力理论和弦理论的数学进展倾向于相信在超引力中的自然"基态"是AdS时空(其$\Lambda<0$), 因而关于渐近AdS时空的研究一直是热门课题. 这里首先出现的问题是如何定义渐近AdS时空. 早期的文献通过对度规的坐标分量提出条件来定义, 这些条件虽然直观看来是自然的, 但却不够准确. 选择坐标系时总要涉及(虽然有时只是暗中)一个充当背景的AdS度规, 并认为物理度规应趋于这一度规. 不幸, 给定一个将要被称为渐近AdS时空的时空(M,g_{ab})后, 在选择一个可供g_{ab}趋于的AdS度规时却存在若干含糊性. 作为结果, 渐近AdS时空的守恒量的定义自然也有含糊之处. 为了克服用坐标语言下定义的困难, Ashtekar等又在渐近平直时空的几何定义(见§12.4)的基础上提出了渐近AdS时空的如下几何定义:

定义1 4维时空(M,g_{ab})称为**渐近AdS时空**, 如果存在"非物理时空"$(\tilde{M},\tilde{g}_{ab})$使$M\subset\tilde{M}$, 而且

(a) $\tilde{M}$上有C^∞函数Ω, 在M上满足$\tilde{g}_{ab}=\Omega^2 g_{ab}$.

(b) $\tilde{M}$是带边流形, 满足: (b1) $\tilde{M}$的边界$\mathscr{I}$与$S^2\times\mathbb{R}$同胚; (b2) Ω的梯度$\tilde{\nabla}_a\Omega$在$\mathscr{I}$上处处非零.

(c) 时空(M,g_{ab})的能动张量T_{ab}满足: (c1) $R_{ab}-Rg_{ab}/2+\Lambda g_{ab}=8\pi T_{ab}$, 其中$\Lambda<0$是常数; (c2) $\Omega^{-2}T_{ab}$在趋于$\mathscr{I}$时有C^∞极限(记$\bar{T}_{ab}\equiv\lim_{\to\mathscr{I}}\Omega^{-2}T_{ab}$).

不难看出上述定义与渐近平直时空的定义有不少相似之处, 但还应注意两者的若干重要不同. 例如, 渐近平直时空的$\mathscr{I}$是两个类光超曲面$\mathscr{I}^+$和$\mathscr{I}^-$的并集, 而渐近AdS时空的$\mathscr{I}$却是类时的, 在某些意义上它更类似于渐近平直时空的i^0的切空间V_{i^0}的3维子集K(见选读12-5-2). 事实上, 渐近AdS时空的"守恒"量的定义方式非常类似于借助i^0及K给渐近平直时空定义守恒量的方式.

闵氏时空与AdS时空都有最高对称性, 因此其对称性群(等度规群)都是10维李群, 前者就是Poincaré群, 后者称为**AdS群**. 正如渐近平直时空的渐近对称群SPI是无限维李群那样, 从定义1出发的研究表明渐近AdS时空的渐近对称群也是无限维李群. 为了给渐近平直时空定义全部(10个)守恒量, 应先对物理时空提附加要求来把渐近对称群从无限维的SPI群约化为10维的Poincaré群(见选读12-5-2); 类似地, 为了给渐近AdS时空定义10个"守恒"量, 也应先对物理时空提附加要求以使其无限多维渐近对称群约化为10维AdS群. 以C代表$\mathscr{I}$的任一截面(是个拓扑2球面, 代表一个"时刻"), ξ^a代表约化后的渐近对称群的任一生成元(独立的ξ^a共10个), E_{ab}代表渐近外尔张量的"电"部分, 则与ξ^a相应的那个"守恒"量在"时刻"C的数值$Q_\xi[C]$由下式定义:

$$Q_\xi[C] := -\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{-3}{\Lambda}}\int_C E_{ab}\xi^a \mathrm{d}S^b. \quad (\mathrm{d}S^b \text{ 代表面元}) \tag{J-6-15}$$

由爱因斯坦方程可以证明Q_ξ满足一个平衡方程：给定$\mathscr{I}$的两个截面C_1和C_2，把$\mathscr{I}$介于它们之间的3维域记作$\Delta\mathscr{I}$，有

$$Q_\xi[C_2]-Q_\xi[C_1]=\int_{\Delta\mathscr{I}}\bar{T}_{ab}\xi^a \mathrm{d}V^b. \quad (\mathrm{d}V^b \text{ 代表体元}) \tag{J-6-16}$$

上式表明，当右边非零时量Q_ξ并不守恒(所以守恒一词加引号)。然而，上式积分号内的$\bar{T}_{ab}\xi^a$加负号后类似于式(12-6-26)的L_b，可解释为在“时刻”C_1与C_2之间的“时间”内 “流走”的该量，可见在这个意义上该量是守恒的。详见Ashtekar and Das(2000). **[选读J-6-1完]**

[选读J-6-2]

设M是连通流形，N是流形，$\pi: M\to N$称为M对N的一个**覆盖**(covering)**映射**，M称为N的**覆盖流形**，若(a)π是到上的，(b)任一$q\in N$有邻域U，满足：$\pi^{-1}[U]$是可数个开子集U_i的无交并集且$\pi: U_i\to U$(对任一i)是同胚。若M是单连通流形，则覆盖映射$\pi: M\to N$称为**泛**(universal)**覆盖映射**，M称为N的**泛覆盖流形**.

例1 令$M=\mathbb{R}$, $N=S^1$，以x和φ分别代表$\mathbb{R}$和S^1的自然坐标和角坐标，则由下式定义的映射$\pi:\mathbb{R}\to S^1$是$\mathbb{R}$对S^1的泛覆盖映射：$\varphi(\pi(p)) := x(p) \quad \forall p\in\mathbb{R}$.

下面介绍一个定理而略去证明：

定理J-6-1 任一连通流形都有唯一的泛覆盖流形. **[选读J-6-2完]**

参 考 文 献

陈省身, 陈维桓. 1983. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社.

戴元本. 2005. 相互作用的规范理论. 第二版. 北京: 科学出版社, 1.4 节: 16.

侯伯元, 侯伯宇. 1995. 物理学家用微分几何. 北京: 科学出版社.

李子平. 1993. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社.

李子平. 1999. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社.

泡利. 1979. 相对论. 凌德洪, 周万生译. 上海: 上海科学技术出版社.

伍鸿熙, 吕以辇, 陈志华. 1981. 紧黎曼曲面引论. 北京: 科学出版社.

Ashtekar A and Bojowald M. 2005. Black Hole Evaporation: A Paradigm. Class.Quant.Grav. **22**: 3349-3362.

Ashtekar A and Bojowald M. 2006. Quantum Geometry and the Schwarzschild Singularity. Class. Quant. Grav., **23**: 391-411.

Ashtekar A and Das S. 2000. Asymptotically Anti-de Sitter Space-times: Conserved Quantities. Class. Quantum Grav., **17**: L17-L30.

Ashtekar A and Krishnan B. 2003. Dynamical Horizons and Their Properties. arXiv: gr-qc/0308033.

Ashtekar A and Krishnan B. 2004. Isolated and Dynamical Horizons and Their Applications. Living Reviews in Relativity, http://www.livingreviews.org/lrr-2004-10.

Ashtekar A and Lewandowski J. 2004. Background Independent Quantum Gravity: A Status Report. Class. Quantum Grav., **21**: R53-R152.

Ashtekar A, Beetle C, and Lewandowski J. 2002. Geometry of Generic Isolated Horizons. Class. Quantum Grav. **19**: 1195-1225. arXiv:gr-qc/0111067.

Ashtekar A, Fairhurst S, and Krishnan B. 2000. Isolated Horizons: Hamiltonian Evolution and the First Law. arXiv:gr-qc/0005083.

Ashtekar A, Pawlowski T and Singh P. 2006a. Quantum Nature of the Big Bang. Phys. Rev. Lett., **96**: 141301.

Ashtekar A, Pawlowski T and Singh P. 2006b. Quantum Nature of the Big Bang: Improved Dynamics. Phys. Rev., D., **96**: 084003.

Ashtekar A. 1986. New Variables for Classical and Quantum Gravity. Phys. Rev. Lett., **57**: 2244-2247.

Ashtekar A. 1987a. New Hamiltonian Formulation of General Relativity. Phys. Rev., D**36**: 1587-1602.

Ashtekar A. 1987b. New Perspectives in Canonical Gravity (Bibliopolis).

Ashtekar A. 1991. Lectures On Non-perturbative Canonical Gravity. Singapore: World Scientific.

Ashtekar A. 1999. Quantum Mechanics of Geometry: arXiv: gr-qc/9901023.

Ashtekar A. Beetle C, and Lewandowski J. 2001. Mechanics of Rotating Isolated Horizons. Phys. Rev., D**64**: 044016-1-17. arXiv:gr-qc/0103026.

Avis S J, Isham D and Storey D. 1978. Quantum Field Theory in Anti-de Sitter Space-time. Phys. Rev. D, **18**: 3565-3576.

Barbero J F. 1994. Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times. arXiv: gr-qc/9410014.

Bardeen J, Carter B and Hawking S. 1973. The Four Laws of Black Hole Mechanics. Commun. Math. Phys., **31**: 161-170.

Bekenstein J D. 1973. Black Holes and Entropy. Phys. Rev., D7: 2333-2346.

Bekenstein J D. 1974. Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-Hole Phys. Rev., D**9**: 3292-3300.

Bekenstein J D. 1981. Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems. Phys. Rev., D**23**:

287-298.

Bleecker D. 1981. Gauge Theory and Variational Principles. London: Addison-Wesley Publishing Company, INC.

Bojowald M. 2001. Absence of Singularity in Loop Quantum Cosmology. Phys. Rev. Lett., **86**: 5227-5230.

Bojowald M. 2005. Loop Quantum Cosmology. Living Rev. Rel., **8**: 11.

Chen C M and Nester J M. 2000. A Symplectic Hamiltonian Derivation of Quasilocal Energy-Momentum for GR. arXiv: gr-qc/0001088.

Dirac P. 1964. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Academic Press. 中译本: 狄拉克量子力学演讲集. 袁卡佳, 刘耀阳译, 刘耀阳校. 1986. 北京: 科学出版社.

Eisenhart L P. 1949. Riemannian Geometry. Princeton: Princeton University Press.

Fock V A. 1926. Über die invariante Form der Wellen-und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Z. Phys., **39**: 226-232.

Forster O. 1981. Lectures on Riemann Surfaces. New York: Springer-Verlag.

Gotay M, Isenberg J, Marsden J E, Montgomery R. 1998. Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part I: Covariant Field Theory. arXiv:physics/9801019.

Gotay M, Nester J and Hinds G. 1978. Presymplectic Manifolds and the Dirac-Bergmann Theory of Constraints. J. Math. Phys., **19**: 2388-2399.

Gross D J. 1992. Gauge Theory Past, Present, and Future. Chinese Journal of Physics, 30: 955-972.

Guo H Y, Huang C G, Xu Z and Zhou B. 2004. On Beltrami Model of de Sitter Spacetime. Modern Phys. Lett., A19: 1701-1709.

Guo H Y, Huang C G, Xu Z and Zhou B. 2004. On Special Relativity with Cosmological Constant. Phys. Lett., A331: 1-7.

Han Muxin, Ma Yongge and Huang Weiming. 2005. Fundamental Structure of Loop Quantum Gravity. arXiv: gr-qc/0509064; Int. J. Mod. Phys. D., **16** (2007), Issue: 9, 1397-1474.

Hawking S W, and Ellis G F R. 1973. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press.

Hawking S W. 1968. Gravitational Radiation in an Expanding Universe. J. Math. Phys., **9**: 598.

Hayward S A. 1994. General Laws of Black-hole Dynamics. Phys. Rev., D**49**: 6467-6474.

Jackson J D, and Okun L B. 2001. Historical Roots of Gauge Invariance. Rev. Mod. Phys., **73**: 663-680.

Jacobson T A and Kang G. 1993. Conformal Invariance of Black Hole Temperature. Class. Quantum Grav., **10**, L1. arXiv:gr-qc/9307002.

Kramer D, Stephani H, Lerlt E and MacCallum M. 1980. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee J and Wald R. 1990. Local Symmetries and Constraints. J. Math. Phys., **31**: 725-743.

Lewandowski J. 2000. Spacetimes Admitting Isolated Horizons. Class. Quantum Grav. **17**: L53-L59.

Liu C C M and Yau S T. Positivity of Quasilocal Mass II. arxiv: math. DG/0412292.

Liu C C M, and Yau S T. 2003. Positivity of Quasilocal Mass. Phys. Rev. Lett., 11**90**: 231102.

London F. 1927a. Die Theorie von Weyl und die Quantenmechanik. Naturwissenschaften, **15**: 187

London F. 1927b. Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl. Z. Phys. **42**: 375-389

Marsden J E and Ratiu T S. 1994. Introduction to Mechanics and Symmetry. 北京: 世界图书出版公司.

Mclnnes B. 2003. de Sitter and Schwarzschild-de Sitter According to Schwarzschild and de Sitter arXiv: hep-th/0308022.

Nakahara M. 1990. Geometry, Topology and Physics. Bristol and New York: Adam Hilger.

Okubo T. 1987. Differential Geometry. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.

Regge T and Teitelboim C. 1974. Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity. Ann.

Phys., 88: 276-318.

Spivak M. 1970, 1979. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. vol. **1,2.**

Unruh W G, and Wald R M. 1982. Acceleration Radiation and the Generalized Second Law of Thermodynamics. Phys. Rev., D**25**: 942-958.

Wald R M, and Iyer. 1991. Trapped Surfaces in the Schwarzschild Geometry and Cosmic Censorship. Phys. Rev., D**44**, R3719-R3722.

Wald R M. 1974. Gedanken Experiments to Destroy a Black Hole. Ann.Phys., **82**: 548-556.

Wald R M. 1984. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press.

Wald R M. 1994. Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics. Chicago: The University of Chicago Press.

Wald R M. 2000. The Thermodynamics of Black Holes. arXiv:gr-qc/9912119.

Warner F W. 1983. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. New York: Springer-Verlag.

Weinberg S. 1995. The Quantum Theory of Fields. Vol.1. New York: Cambridge University Press.

Weyl H. 1928. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig: S. Hirzel, Verlag, 87-88; Robertson H P. 1931. The Theory of Groups and Quantum Mechanics. New York: Dover Publications, Inc.

Weyl H. 1929. Elektron und Gravitation. Z. Phys., **56**: 330-352.

Woodhouse N. 1980. Geometric Quantization. Oxford: Clarendon Press.

Yang C N and Mills R L. 1954. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. Phys. Rev., **96**: 191-195.

Zhang Hong bao. 2005. Note on Energy-Momentum Tensor for General Mixed Tensor-Spinor Fields. Commun. Theor. Phys., **44**: 1007-1010.

下 册 索 引

B

伴丛　I.3.

伴矢丛　I.3 末, I.9.

包含映射　16.3.1.

变分(原理)　15.1.

标架丛　I.1 例 4, I.2 定理 I-2-8 起, I.3 例 4-6, I.9 例 1-3.

标量约束　命题 15-7-7 后, 式(15-7-49)后.

表观视界　16.4 定义 3.

表面引力　式(16-1-1). 选读 16-1-1, 式(16-3-24)及后几行, §16.5 注 8, 9.

　有效～　式(16-7-85), 式(16-7-98), 式(16-7-130a).

部分柯西面　16.4.2 脚注.

C

参数化粒子动力学　式(15-7-76)所在段.

超空间　式(15-7-75)后.

常曲率空间(度规)　J.1.

初级约束　15.2.3.

次级约束　15.2.3.

丛流形　I.1 定义 3.

D

单参路径族　15.1.1.

德西特时空(度规)　J.1, J.2.

底流形　I.1 定义 3.

第一定律的积分形式　式(16-7-132).

第一(二)类函数　选读 15-2-1 前, 15.7 定义 6.

第一(二)类约束　选读 15-2-1 前.

第一类约束系统　15.7.2.

典型纤维　式(I-3-4)前.

动力学视界　16.7.1 定义 1.

　～的截面　16.7.1 定义 1.

　～的面积平衡定律　式(16-7-81).

　～第一定律　式(16-7-128).

　～第一定律积分形式　式(16-7-132).

　Vaidya 时空的～　16.7.1.

动量密度　式(15-4-4).

动量变量　15.2.1 初.

F

反德西特时空(度规)　J.1, J.6.

泛覆盖映射(流形)　选读 J-6-2.

泛函　式(15-1-1)后.

泛函导数　式(15-4-9)前.

非涨视界　16.5 定义 1.

　～的截面　16.5 注 1 前及注 1.

　～的面积半径　式(16-5-1).

分支球面　选读 16-1-3 初.

分支 Killing 视界　选读 16-1-3 初.

复标量场　I.4.1 初.

辐射浮力　式(16-1-29)后.

覆盖映射(流形)　选读 J-6-2.

G

共轭变量　15.2.1 初.

广义动量　15.2.1 初.

广义角动量　式(16-7-109).

广义逆　16.6.2.

广义热力学第二定律 16.1.2.

广义速度 15.1.1 初.

规范变换 I.4 注 1③.

整体~ I.4 注 1③.

局域~ 式(I-5-1).

规范势 I.5.2 初, I.7.

规范场(强) I.5.2 初, I.8.

规范自由性 式(15-2-31)后, 15.7.4.

轨道 I.1 定义 2.

孤立视界 16.5.2 定义 2.

~的对称性 16.5.4 定义 4.

H

哈氏(变分)原理 **15.1.1 初**, 15.1.2.

哈氏量 式(15-2-3).

真空引力场的~ 15.5, 选读 15.5.1.

哈氏矢量场 15.7.1 定义 4, 命题 16-5-6 前.

哈氏正则方程 15.2.

正规系统的~ 式(15-2-6).

约束(奇异)系统的~ 式(15-2-19).

黑洞边界 16.1.

黑洞(热)力学 16.1.

黑洞热力学四定律 16.1.1, 16.7.7.

第零定律 16.1 注 1 后.

第一定律 式(16-1-6).

~的物理过程版本 16.1 注 1.

~的平衡态版本 16.1 注 1.

第二定律 16.1.1 首段.

第三定律 16.1 注 1 后.

黑洞事件视界 J.5.

环面 选读 16-7-1.

J

基本矢量场 式(I-1-13)后.

嘉当度规 选读 I-5-3.

广义~ 选读 I-5-3.

嘉当第一(二)结构方程 I.8.

加^操作 16.2 注 1 等.

角动量流 式(16-7-108′)所在段.

角动量平衡方程 式(16-7-108), 式(16-7-108′), 式(16-7-110).

角速度 16.1.1,

事件视界(Killing 视界)的~ 式(16-1-4)及其后.

动力学视界截面的~ 式(16-7-130b).

结构群 I.1 定义 3.

截面

局域~ I.1 定义 5, I.3, I.9.

动力学视界的~ 16.7.1 定义 1.

非涨视界的~ 16.5.1 注 1 前.

整体~ I.1 定义 6, I.3 末.

局域函数 **15.1.2, 选读** 15-4-1 初, H.1.

局域平凡 I.1 注 6, I.3.

K

可加^张量 16.2 定义 1.

空间场位形变量 15.4.2 初.

亏格 选读 16-7-1.

L

拉氏待定乘子 **15.2.2 末**, 15.3.2.

拉氏方程 式(15-1-5).

标量场的~ 式(15-1-19).

拉氏函数(拉氏量) 15.1.1.

超正规~ 15.3.1,

奇异(非正规)~ 15.2.2.

正规~ 15.2.1,

拉氏密度 15.1.2.

闵氏时空标量场的~ 式(15-1-20),

闵氏时空无源电磁场的～ 式(15-1-22).
Yang-Mills 场的～ 式(I-5-23).
真空引力场的～ 命题 15-1-2, 式(15-5-37).
类光测地延拓 16.3.3 定义 1.
类光(测地)母线 式(J-2-9)前.
(张量密度场的)李导数 15.6 定义 3.
粒子视界 J.4.
量子反弹 15.8 末.
量子几何 15.8 末.
临界陷俘面 16.4 定义 1(b).
零截面 I.3 末.
联络(主丛上) **I.2**, I.7, I.9.
联络(伴矢丛上) I.9.
联络动力学 15.8.

M

面积(不减)定理 16.1.1 初.
面积平衡定律 式(16-7-81).
莫比乌斯带 I.3 例 3.

N

挠率形式 选读 I-8-1 定义 5.
内边界 图 16-8 及附近文字.
内部对称性 I.4.
内部变换 I.4.
内部标架 I.6.

O

耦合常数 I.5.2.
欧拉-拉格朗日方程 式(15-1-5).
欧拉示性数 选读 16-7-1.

P

泡泡时间演化 15.7.4(图 15-7).
旁路 15.1.1 初.
平凡主丛 I.1 注 6.
泊松括号 式(15-2-21), 15.7.1 定义 5.

Q

强非退化 15.7.2 末.
切丛 15.3, **I.3 例 4**, I.9.
曲率(主丛上的) I.8.
圈表象(圈变量) 15.8.
权 15.6 定义 1.

R

弱非退化 15.7.2 末.
弱孤立视界 16.5.2 定义 2.
极端～ 16.5.3 注 7.
～第零定律 16.5.3.
～第一定律 16.5.5.
～的表面引力 16.5.3.
～的对称性 16.5.4 定义 3.
～的对称性李代数 式(16-6-48)前.
～的无限小对称性 16.6.3 定义 2.
～的无限小轴对称性 16.6.3 定义 3.
～的保母线对称性 16.5.4 注 10 后.
～的保母线无限小对称性 式(16-6-49)后.
～的三个类型 16.5.4 注 10 后, **16.6.3 注 4** 前后.

S

熵(黑洞熵) 16.1.
黑洞的～ 16.1.1, 16.1.2.
孤立视界的～ 式(16-1-7).
上标体元 15.6 初.
施瓦西-德西特度规 式(J-5-3).
矢丛 I.3 末, I.9.
矢量约束 15.7.4.
事件视界 16.1, **J.4**.

视界角速度 16.1.1.
事件视界的～ 式(16-1-3)后.
视界面积 16.1.1 初.
视界质量 式(16-5-68).
试验(矢量,标量)场 式(15-4-31)前.
竖直矢量(场) **I.1.2**, I.9.
竖直子空间 **I.1.1**, I.9.
水平提升矢量场 定理 I-2-4 前.
水平提升曲线 定理 I-2-6 前.
水平子空间 I.2, I.9.

T

投影映射 I.1 定义 3.
退化度规 15.8 末.
退化矢量 式(15-7-30)前.
退密度化 式(15-6-16)后.

W

完整约束 式(15-2-11)后.
伪正交归一标架场 16.2 初.
未来陷俘视界(FOTH) 16.4.2.
位形变量 15.1.1 初.
位形空间 15.1.1 初.
(宇宙的)稳恒态模型 式(J-2-16)前段.
稳态黑洞 16.1.
稳态 Killing 矢量场 16.1.
稳态时空 16.1.
无限小对称性 15.7.1, 16.6.3.
辛流形上的～ 15.7.1 定义 3.
弱孤立视界的～ 16.6.3 定义 2.
无限远边界 图 16-8 及附近文字.
无转动视界 16.5 注 3.

X

纤维(丛) 15.3.1, 附录 I.
线性联络 选读 I-8-1 初.
陷俘区 16.4 定义 3.
陷俘面 16.4 定义 1(a).
临界～ 16.4 定义 1(b).
外～ 16.4 定义 2.
相空间 式(15-2-7)后, 图 15-2.
消灭向量 式(15-2-36)后.
协变导数 15.6, I.5, **I.9**.
(张量密度场的)～ 15.6 定义 2.
(矢丛截面的)～ 式(I-5-7), **I.9** 例 **4, 5**.
协变外微分 I.8 定义 2.
协变相空间 16.5.5 初.
辛形式(流形,几何) 15.7.1 定义 1.

Y

雅可比恒等式 式(15-2-22).
演化表观视界 16.4.2.
演化矢量场 式(15-3-27).
演化线 图 15-2, **15.3**.
有效表面引力 式(16-7-85), 式(16-7-98), 式(16-7-130a).
右作用 I.1 定义 1′.
自由～ I.1 定义 2.
余切丛 15.3.1, I.3 例 5, I.9 例 2.
宇宙事件视界 J.5.
约化位形空间 15.7.5.
约化相空间 15.7.2 偏后.
约束 15.2.2, 15.7.5, 15.8.
初(次)级～ 15.2.3,
第一(二)类～ 选读 15-2-1 前.
完整约束 式(15-2-11)后.
切丛 $T\mathscr{C}$ 上的～ 15.3.2.
A(B)型 式(15-3-28)后.
约束方程 15.2.2, 15.7.5.
约束函数 15.2.2, 15.7.2.
约束面 15.2.2, 15.7 定义 6.
约束矢量场 命题 15-7-9 证后第二段.

约束系统 15.7 定义 6.
第一类～ 15.7 定义 6.
允许的时间演化矢量场 式(16-5-63)后.
预辛形式 16.5.5 初.

Z

张量丛 I.3 例 6, I.9 例 3.
张量密度(场) 式(15-1-25), **15.6**.
～的表示 式(15-6-4).
正交归一标架丛 I.1 例 5.
正路 15.1.1 初, 15.1.2.
正则变换 15.7.1 定义 2.
正则变量 15.2.1 初.
正则能动张量 式(H-1-18)后, **H.2**.
正则视界能量 式(16-5-68).
正则相空间 16.5.5 初.
正则形式 选读 I-8-1 定义 4.
正则坐标 式(15-7-6)后.
直和 I.2.1 初.
主纤维丛 I.1.
转换函数 I.1 定义 4.
自洽性条件 式(15-2-26).
最小替换法则(最小耦合原理) I.5.
左作用 I.1 定义 1.
作用量 15.1.1 初.
真空引力场的～ 选读 15-1-1 末.
准局域能(动)量 选读 15-5-2,
式(16-5-49)后.
准局域角动量 式(16-5-49)后.

其他

Ashtekar 新变量 15.8.
anti-de Sitter 时空(度规) J.1, J.6.
Beltrami 坐标系 式(J-1-68)脚注.
Bianchi 恒等式 定理 I-8-7.
de Sitter 时空(度规) J.1, J.2.
Darboux 定理 式(15-7-6)前.
FOTH (未来陷俘视界) 16.4.2.
Hawking 辐射 16.1.1 注 1 后第二段.
Hawking 质量 式(16-5-50).
Hilbert 作用量 15.1.3 注 1.
Killing 参数 选读 16-1-1 初.
Killing 视界 16.1.1.
分支～ 选读 16-1-3 初.
Komar 积分 式(16-5-57).
Klein-Gordon(KG)方程 式(15-1-7).
Legendre 变换 15.3.1.
Noether 定理 **附录 H**, I.4.
Penrose 图
anti-de Sitter 时空的～ J.6.
de Sitter 时空的～ J.3.
Schwarzschild-de Sitter 时空的～ J.5.
Vaidya 时空的～ 图 16.9.
R 重退化 式(15-7-30)所在段.
Raychaudhuri 方程 式(16-2-29).
Schwarzschild-de Sitter 时空 J.5.
Vaidya 时空 16.7.1.
Yang-Mills (YM)场 I.5.
Z_2 群 I.1 例 2 前, 例 2, 例 3.
3 维黑洞 16.1.
4 维场位形 15.1.2.

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树, 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (第二版.上)	梁灿彬, 周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮, 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘　辽, 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元, 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡, 李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论 (第二版.中)	梁灿彬, 周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(第二版.下)	**梁灿彬, 周彬 著**	**2009.08**